

A , il viriale del sistema (eserc. 21, Cap. prec.) è espresso da $\mathbf{f} \times (B - A)$; quindi esso è massimo se \mathbf{f} ha la direzione ed il senso di $B - A$; minimo se ha il senso contrario; cioè in ogni caso quindi il sistema è in equilibrio. Ma nel primo caso, fermo restando il corpo, se spostiamo infinitamente poco la direzione di $B - A$ si origina una nuova coppia il cui senso è opposto a quello della rotazione; nel secondo caso la coppia ha invece senso concorde; e però l'equilibrio è stabile o instabile secondo che il viriale è massimo o minimo. Essendo

$$V = \Sigma(Xx + Yy + Zz)$$

per l'equilibrio si ha effettivamente

$$\delta V = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Riflettendo poi che, per le note espressioni di δx , δy , δz ,

$$\delta V = \tau \{ u_0 \Sigma X + \dots + p \Sigma (Zy - Yz) + \dots \}$$

si deduce

$$\delta^2 V = \tau \{ p \Sigma (Z\delta y - Y\delta z) + \dots \}$$

ossia, tenendo presenti le condizioni di equilibrio, e le posizioni fatte all'eserc. 7 del Cap. precedente,

$$\delta^2 V = \tau^2 S$$

dove

$$S = -(A_{22} + A_{33})p^2 - \dots + 2A_{12}pq + \dots$$

È però, secondo che S , forma quadratica omogenea di p , q , r , è definita negativa o positiva, l'equilibrio è stabile o instabile.

[MÖBIUS, l. c., I, Cap. 9; SCHELL, l. c., 2, Cap. 12].

CAPITOLO III.

EQUILIBRIO DELLE CURVE FUNICOLARI.

§ 1. **Equazioni di equilibrio.** — Consideriamo un filo flessibile ed inestensibile; un elemento ds di questo sia soggetto ad una forza applicata in un punto P dell'elemento e dello stesso ordine di ds . Rappresenteremo il vettore di questa forza con $\mathbf{f} ds$, essendo \mathbf{f} un vettore di modulo finito. Supponiamo che lo stesso accade per tutti gli infiniti elementi in cui può immaginarsi decomposto il filo. Gli estremi P_0 , P_1 potranno esser liberi, oppure fissi, o obbligati a restare sopra curve o superficie date, ecc.; ma, in ogni caso, possiamo supporli liberi e soggetti a due forze di vettori \mathbf{f}_0 , \mathbf{f}_1 .

La configurazione di equilibrio del filo sarà, generalmente, curva; di qui il nome di curva funicolare. Ora, applicando il principio generale dei lavori virtuali, vogliamo trovare le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio.

Il filo riceva un qualunque spostamento virtuale; la somma dei lavori virtuali delle forze

distribuite lungo il filo è

$$\int \mathbf{f} \times \delta P \cdot ds,$$

l'integrale essendo esteso tra 0 ed l (lunghezza del filo) e supponendo contati gli archi positivamente da P_0 a P_1 . Considerando ancora il lavoro virtuale delle forze applicate agli estremi, avremo

$$(1) \mathbf{f}_0 \times \delta P_0 + \mathbf{f}_1 \times \delta P_1 + \int \mathbf{f} \times \delta P \cdot ds \equiv 0.$$

Consideriamo ora le condizioni cui debbono soddisfare gli spostamenti invertibili o no dei vari elementi.

L'elemento ds è eguale al modulo di dP ; avvenuto lo spostamento virtuale, l'elemento avrà variato di posizione e di grandezza; sia $dP + d\delta P$ il nuovo elemento. Per gli spostamenti invertibili la lunghezza di ogni elemento è restata inalterata; e per quelli non invertibili, il filo essendo inestensibile e quindi inestensibile ogni elemento, la lunghezza sarà diminuita; cioè

$$dP^2 \equiv (dP + d\delta P)^2;$$

quindi

$$2 dP \times d\delta P + (d\delta P)^2 \equiv 0.$$

Dividendo per ds^2 , trascurando gl'infinitesimi di ordine superiore, e ricordando che

$$\mathbf{t} = \frac{dP}{ds}$$

essendo \mathbf{t} un vettore unitario parallelo alla tangente in P nel senso degli archi crescenti, si ha:

$$(2) \quad \mathbf{t} \times \frac{d\delta P}{ds} \equiv 0.$$

Consideriamo anzitutto gli spostamenti invertibili e teniamo quindi in (1) e (2) il segno superiore. Moltiplichiamo la (2) per una funzione incognita λ dell'arco s e integriamo tra 0 ed l ; avremo

$$\int \lambda \mathbf{t} \times \frac{d\delta P}{ds} ds = (\lambda \mathbf{t} \times \delta P)_0^l \\ - \int \frac{d(\lambda \mathbf{t})}{ds} \times \delta P \cdot ds = 0;$$

basta osservare che

$$\frac{d}{ds} (\lambda \mathbf{t} \times \delta P) = \frac{d(\lambda \mathbf{t})}{ds} \times \delta P + \lambda \mathbf{t} \times \frac{d\delta P}{ds}.$$

Sommando con la (1) e accennando con gli indici 0 ed 1 le quantità che si riferiscono agli estremi P_0, P_1 , si ha

$$(\mathbf{f}_0 - \lambda_0 \mathbf{t}_0) \times \delta P_0 + (\mathbf{f}_1 + \lambda_1 \mathbf{t}_1) \times \delta P_1 \\ + \int \left[\mathbf{f} - \frac{d(\lambda \mathbf{t})}{ds} \right] \times \delta P \cdot ds = 0,$$

la quale contiene linearmente ed omogeneamente tutti gli spostamenti invertibili.

Conforme al metodo generale, porremo eguali a zero i coefficienti dei singoli spostamenti ed otterremo le condizioni necessarie per l'equilibrio

$$(3) \quad \mathbf{f}_0 - \lambda_0 \mathbf{t}_0 = 0, \quad \mathbf{f}_1 + \lambda_1 \mathbf{t}_1 = 0,$$

$$(4) \quad \mathbf{f} - \frac{d(\lambda \mathbf{t})}{ds} = 0.$$

Le (3) valgono per i due estremi del filo e però diconsi *equazioni ai limiti*; la (4) vale per ogni punto intermedio, cioè per ogni valore di s compreso tra 0 ed l , e dicesi *equazione indefinita*.

Inoltre la funzione λ , finita, determinata e diversa da zero tra 0 ed l , deve avere lo stesso segno del primo membro della (2) nel caso degli spostamenti non invertibili; deve cioè essere costantemente negativa. Quindi dalla prima delle (3) risulta che \mathbf{f}_0 ha la stessa direzione ma il senso contrario della tangente \mathbf{t}_0 in P_0 ; mentre in P_1 la \mathbf{f}_1 ha la stessa direzione e senso di \mathbf{t}_1 .

Per determinare il significato di λ , si tagli il filo in P e dicasi τ la intensità della forza che occorre applicare in P per ristabilire l'equilibrio. Tale forza ha la stessa direzione e lo stesso senso di \mathbf{t} , ed è in generale variabile da punto a punto del filo. Essa dicesi *tensione* del filo in P . Il punto P essendo ora l'estremo superiore del filo e soggetto ad una forza di vettore

$\tau \mathbf{t}$, varrà in esso la seconda delle (4) cioè

$$\tau \mathbf{t} + \lambda \mathbf{t} = 0,$$

onde $\lambda = -\tau$.

Sostituendo quindi nelle (3) e (4) $-\tau$ in luogo di λ , avremo le equazioni definitive:

$$(5) \quad \mathbf{f}_0 + \tau_0 \mathbf{t}_0 = 0, \quad \mathbf{f}_1 - \tau_1 \mathbf{t}_1 = 0,$$

$$(6) \quad \mathbf{f} + \frac{d}{ds}(\tau \mathbf{t}) = 0.$$

Si può agevolmente verificare, conforme al postulato di solidificazione, che da queste equazioni si deducono quelle che competono al sistema supposto rigido.

Infatti integrando la (6) si ha

$$\int \mathbf{f} ds + \tau_1 \mathbf{t}_1 - \tau_0 \mathbf{t}_0 = 0$$

e quindi per le (5) risulta

$$\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 + \int \mathbf{f} ds = 0;$$

è nulla cioè la risultante delle forze del sistema.

Inoltre

$$\frac{d}{ds} \left\{ \tau (P - O) \wedge \mathbf{t} \right\} = (P - O) \wedge \frac{d(\tau \mathbf{t})}{ds};$$

e però dalla (6)

$$\int \tau (P - O) \wedge \mathbf{t} ds + \tau_1 (P_1 - O) \wedge \mathbf{t}_1 - \tau_0 (P_0 - O) \wedge \mathbf{t}_0 = 0$$

cioè è nullo il momento rispetto ad un punto qualunque O .

Se il filo è adagiato su di una superficie levigata, per trovare le equazioni di equilibrio, o possiamo seguire lo stesso metodo, oppure, più semplicemente, possiamo supporre il filo libero, applicando nei vari elementi delle forze normali che rappresentano la reazione della superficie. Se quindi \mathbf{n}_1 è un vettore unità parallelo alla normale alla superficie, ed R è il modulo della reazione, l'equazione indefinita dell'equilibrio diventa

$$(7) \quad \mathbf{f} + R \mathbf{n}_1 + \frac{d}{ds} (\tau \mathbf{t}) = 0.$$

§ 2. **Equazioni in coordinate rettangolari; equazioni intrinseche.** — Se rispetto al sistema fondamentale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ diciamo X, Y, Z le componenti del vettore \mathbf{f} , dalle (5) e (6) troveremo agevolmente

$$(8) \quad X_0 + \left(\tau \frac{dx}{ds} \right)_0 = 0, \quad X_1 - \left(\tau \frac{dx}{ds} \right)_1 = 0$$

ecc.; mentre le equazioni indefinite di equilibrio sotto forma cartesiana sono:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} X + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad Y + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dy}{ds} \right) = 0, \\ Z + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dz}{ds} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Nel caso di un filo adagiato sulla superficie di equazione

$$f(x, y, z) = 0,$$

essendo le componenti di \mathbf{n}_1 proporzionali alle derivate parziali di f , dalla (7) ricaviamo:

$$(10) \quad X + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dx}{ds} \right) = 0$$

e due analoghe.

Sviluppamo la (6) e ricordiamo la (23) della pag. 17; si ha

$$(11) \quad \mathbf{f} + \frac{d\tau}{ds} \mathbf{t} + \frac{\tau}{\rho} \mathbf{n} = 0$$

essendo \mathbf{n} un vettore unità parallelo alla normale principale alla curva in P e diretto verso il centro di curvatura, ρ il raggio di curvatura.

Chiamando adunque Θ, N, B le componenti di \mathbf{f} secondo la terna $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, si ha moltiplicando scalarmente per $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$,

$$(12) \quad \Theta + \frac{d\tau}{ds} = 0, \quad N + \frac{\tau}{\rho} = 0, \quad B = 0$$

che sono le equazioni intrinseche dell'equilibrio del filo.

La prima di queste sussiste anche se il filo è adagiato su di una superficie; infatti in tal caso la componente tangenziale di $R \mathbf{n}_1$ è zero.

Dalla (11) si deduce che la forza che sollecita l'elemento ds è contenuta nel piano osculatore

della curva e la sua componente normale è diretta in senso contrario a quello della normale principale.

Se il filo (libero o situato su di una superficie) non è soggetto a forze, oppure soggetto a forze normali alla superficie, $\Theta = 0$ e quindi dalla prima delle (12) $\tau = \text{cost}$.

Nel caso del filo situato su di una superficie e ferma l'ipotesi precedente sulle forze, la normale principale alla curva risulta anche normale alla superficie e la curva di equilibrio del filo, uniformemente teso, è una geodetica della superficie.

Possiamo ora proporci questi due problemi

1. Data la configurazione del filo e la distribuzione delle forze, verificare se ha luogo l'equilibrio.

2. Date le forze, determinare la configurazione di equilibrio.

§ 3. **Risoluzione dei due problemi fondamentali.** — Bisogna verificare se sono soddisfatte le (5), (6) o le (12) equivalenti. Θ e N sono funzioni note di s . Eliminando τ , otterremo

$$\Theta = \frac{d(N\rho)}{ds}.$$

Supposta verificata questa equazione, la seconda delle (12) ci farà conoscere τ ; cognita la

tensione sarà facile vedere se sono soddisfatte le condizioni agli estremi.

Passiamo ora al secondo dei due problemi. Il dato sistema di forze deve intanto soddisfare alle condizioni di equilibrio di un sistema rigido. Le forze, nel caso più generale, dipenderanno dalla posizione del punto d'applicazione, dalla direzione dell'elemento e finalmente dall'arco. Riferendoci dunque alle (9), supporremo che X, Y, Z siano funzioni di x, y, z, x', y', z', s , in cui accenniamo con accenti le derivate rispetto all'arco. Il problema proposto sarà risolto se sapremo determinare x, y, z, τ in funzione di s ; e queste quattro funzioni debbono soddisfare al seguente sistema di equazioni simultanee del 2° ordine

$$\begin{aligned} X + \tau' x' + \tau x'' &= 0; \text{ ecc.} \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 &= 1; \end{aligned}$$

le prime tre si deducono infatti dalle (9) sviluppando le derivazioni.

Ora dimostriamo che la integrazione di questo sistema dipende da quella di una sola equazione differenziale del sesto ordine.

Deriviamo infatti quattro volte di seguito le prime tre equazioni e cinque volte la quarta rispetto all'arco s . Otterremo con ciò ventun equazioni contenenti:

$$x, x', \dots, x^{(v)}; y, y', \dots, y^{(v)}; z, z', \dots, z^{(v)}; \tau, \tau', \dots, \tau^{(v)}.$$

Supponiamo che tra queste equazioni si possano eliminare:

1^o le venti funzioni

$$y, y', \dots, y^{VI}; z, z', \dots, z^{VI}; \tau, \tau', \dots, \tau^V;$$

2^o le funzioni

$$x^{VI}, y', \dots, y^{VI}; z, z', \dots, z^{VI}; \tau, \tau', \dots, \tau^V; \text{ ecc.}$$

Otterremo

$$\varphi(x, x', \dots, x^{VI}, s) = 0$$

$$\varphi_1(x, x', \dots, x^V, y, s) = 0; \text{ ecc.}$$

La prima è un'equazione differenziale del sesto ordine, la quale definisce x in funzione di s con sei costanti arbitrarie:

$$x = x(s, c_1, c_2, \dots, c_6).$$

La seconda, dopo che con successive derivazioni avremo trovato x', \dots, x^V espresse per s , si trasformerà in una equazione tra y ed s ; e però, senza nuove integrazioni, conosceremo y in funzione di s e delle stesse costanti arbitrarie c_1, \dots, c_6 . Lo stesso dicasi per z e per τ ed il teorema è provato.

Con un ragionamento analogo possiamo provare che:

La determinazione della figura di equilibrio di un filo posto su di una superficie levigata, dipende dalla integrazione di una equazione differenziale del quarto ordine.

In tal caso infatti insieme colle (10), in cui figura la funzione incognita μ , si devono pure considerare le

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, f(x, y, z) = 0$$

l'ultima delle quali è già una delle equazioni finite della curva di equilibrio.

Si vede dunque che la sola conoscenza delle forze non è sufficiente a determinare la configurazione di equilibrio; bisogna cioè determinare le costanti introdotte colla integrazione, fissando le condizioni agli estremi. Se, per es., nel caso più comune supponiamo fissi gli estremi e diamo le loro coordinate, avremo per $s=0$ e per $s=l$,

$$x_0 = x(0, c_1, c_2, \dots, c_6); x_1 = x(l, c_1, c_2, \dots, c_6);$$

ecc.; avremo cioè stabilite sei equazioni, atte a determinare le costanti; corrispondentemente avremo tante posizioni di equilibrio, per quante sono le soluzioni reali del sistema precedente.

Se il filo sta su di una superficie, possiamo dare due sole delle coordinate di P_0 e di P_1 e quindi stabilire quattro equazioni tra le quattro costanti.

§ 4. Di alcuni integrali primi delle equazioni di equilibrio delle curve funicolari.

— Nulla in generale possiamo dire sulla integrazione delle equazioni di equilibrio. Solo in

alcuni casi, abbastanza generali, è possibile assegnare alcuni integrali primi delle stesse equazioni e di cui possiamo valerci per abbassare l'ordine delle equazioni.

a) Se le forze sono funzioni del solo arco, il problema può ricondursi alle quadrature.

In tal caso infatti dalla (6) risulta

$$\int \mathbf{f} ds + \tau \mathbf{t} = \text{cost.},$$

la quale ci farà conoscere la tensione; quindi dalle (9) ricaviamo tre equazioni della forma

$$x' = \varphi_1(s), \quad y' = \varphi_2(s), \quad z' = \varphi_3(s);$$

con altre tre integrazioni otterremo x, y, z .

b) Le forze ammettono un potenziale U . In tal caso

$$\mathbf{f} = \text{grad } U$$

e quindi la componente tangenziale Θ del vettore \mathbf{f} è

$$\Theta = \mathbf{f} \times \mathbf{t} = \mathbf{f} \times \frac{dP}{ds} = \frac{\text{grad } U \times dP}{ds} = \frac{dU}{ds};$$

e la prima delle (12) ci dà

$$\frac{dU}{ds} + \frac{d\tau}{ds} = 0$$

ossia

$$(13) \quad \tau = h - U,$$

h essendo una costante arbitraria; tale integrale ci fa conoscere la tensione a meno di una costante.

La (13) sussiste pure nel caso di un filo posto su di una superficie; perchè è $\mathbf{t} \times \mathbf{n}_1 = 0$.

c) Le forze incontrano una retta fissa. Sia $O\mathbf{k}$ tale retta; dalla (6) si deduce

$$\mathbf{f} \wedge (P - O) \times \mathbf{k} + (P - O) \times \mathbf{k} \wedge \frac{d}{ds} (\tau \mathbf{t}) = 0;$$

il primo termine è nullo; il secondo può scriversi

$$\frac{d}{ds} \left\{ (\tau \mathbf{t} \times (P - O) \wedge \mathbf{k}) \right\} = 0;$$

e quindi abbiamo l'integrale

$$\tau \mathbf{t} \times (P - O) \wedge \mathbf{k} = \text{cost.}$$

Così per es., se la retta fissa è l'asse x , svolgendo colla solita regola il prodotto misto risulta

$$(14) \quad \tau (y'z - yz') = a.$$

Perchè lo stesso integrale abbia luogo per l'equilibrio di un filo posto su di una superficie, è necessario e basta che la normale alla superficie incontri la retta fissa; cioè che la superficie sia di rotazione intorno alla retta.

d) Le forze sono centrali; cioè concorrono in un punto O .

Il piano osculatore in un qualunque punto P della curva dovendo passare per O , la curva di equilibrio è contenuta in un piano passante per O .

In questo caso sussistono tre integrali analoghi a (14).

e) *Le forze sono parallele e non dipendono dall'arco.* La curva di equilibrio è contenuta in un piano parallelo alla direzione delle forze. In questo caso si può facilmente formare l'equazione differenziale della curva di equilibrio.

Il piano della curva sia il piano xz , e l'asse z parallelo alla direzione delle forze. Le (9) si riducono alle

$$\frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad Z + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dz}{ds} \right) = 0;$$

e dalla prima si deduce

$$\tau \frac{dx}{ds} = c;$$

cioè è costante la tensione parallelamente all'asse x . Pei punti della curva z è funzione di x ; posto $p = \frac{dz}{dx}$, risulta

$$\frac{dx}{ds} = 1 : \sqrt{1 + p^2}; \quad \frac{dz}{ds} = p : \sqrt{1 + p^2}.$$

Quindi successivamente

$$\tau = c \sqrt{1 + p^2}$$

avendo supposto $c > 0$, com'è certamente possibile; e eliminando τ ,

$$(15) \quad Z + \frac{c}{1 + p^2} \frac{dp}{dx} = 0,$$

che è l'equazione differenziale richiesta.

Z , per ipotesi, dipende soltanto da $x, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dz}{ds}$; cioè da x, z, p ; e perciò la (15) è una equazione di secondo ordine.

Il suo integrale

$$z = \varphi(x, c, c_1, c_2)$$

dà l'equazione della curva di equilibrio. La tensione è subito conosciuta; poscia integrando la

$$ds = \sqrt{1 + p^2} dx$$

esprimeremo s mediante x ed una quarta costante.

La integrazione della (15) si può effettuare con quadrature se Z dipende dalla sola z o dalla sola x o dalla sola p .

§ 5. **Catenaria omogenea.** — Supponiamo di voler determinare la figura di equilibrio di una catena omogenea pesante sospesa per due suoi estremi; sia m il peso dell'unità di lunghezza, e quindi $m ds$ la forza che sollecita l'elemento ds , parallela all'asse z verticale e posi-

tivo in alto; ossia $Z = -m$ e la (15) diventa

$$\frac{1}{1+p^2} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{a}$$

in cui $a = \frac{c}{m}$, esprime il rapporto tra la componente orizzontale della tensione e il peso dell'unità di lunghezza.

Per integrare questa equazione poniamo

$$p = \text{Sh } u$$

essendo u una funzione incognita di x . L'equazione diventa

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{a}$$

onde:

$$u = \frac{x - x_0}{a};$$

poscia da

$$p = \frac{dz}{dx} = \text{Sh } \frac{x - x_0}{a}$$

ricaviamo:

$$(16) \quad z - z_0 = a \text{Ch } \frac{x - x_0}{a}$$

e se trasportiamo gli assi parallelamente a loro stessi nel punto (x_0, z_0) otterremo

$$z_1 = a \text{Ch } \frac{x_1}{a}$$

che è l'equazione della *catenaria omogenea* di parametro a . (*)

Risulta poi agevolmente

$$(17) \quad s = \text{cost} + a \text{Sh } \frac{x - x_0}{a};$$

inoltre, dal valore di τ del paragrafo precedente risulta

$$\tau = c \text{Ch } \frac{x_1}{a} = \frac{c}{a} z_1 = m z_1$$

cioè la tensione in un punto, la cui distanza dall'asse orizzontale è z_1 , eguaglia il peso di un tratto di filo lungo z_1 .

Nella (16), come sapevamo, figurano le tre costanti arbitrarie x_0, z_0, c ; per determinarle diamo le coordinate dei punti a cui il filo è sospeso e la lunghezza l del filo. L'origine O sia il punto più basso; $A(\alpha, \beta)$ l'altro; quindi da (16) e (17) avremo:

$$-z_0 = a \text{Ch } \frac{x_0}{a}$$

$$\beta - z_0 = a \text{Ch } \frac{\alpha - x_0}{a}$$

$$l = a \text{Sh } \frac{\alpha - x_0}{a} - a \text{Sh } \frac{-x_0}{a};$$

(*) Per la storia e le proprietà di questa curva considerata da GALILEO, *Opere*, Ediz. Naz., 8, p. 310, che ne aveva notata la somiglianza, non la identità, con la parabola, vedi l'opera del LORIA, p. 575.

cioè

$$l = a \left(\text{Sh} \frac{\alpha - x_0}{a} + \text{Sh} \frac{x_0}{a} \right)$$

$$\beta = a \left(\text{Ch} \frac{\alpha - x_0}{a} - \text{Ch} \frac{x_0}{a} \right)$$

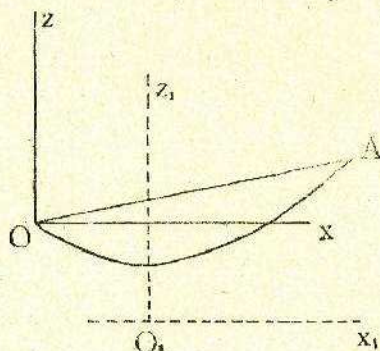


Fig. 32.

e finalmente:

$$l^2 - \beta^2 = 4 a^2 \text{Sh}^2 \frac{\alpha}{2 a};$$

estraendo la radice quadrata, e ritenendo il segno +, perchè si può supporre α e β positivi, e ponendo $\xi = \alpha : 2 a$ si ha

$$(18) \quad \frac{\text{Sh} \xi}{\xi} = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha};$$

equazione trascendente in ξ . Il primo membro da $\xi = 0$ a $\xi = \infty$ cresce costantemente da 1

ad ∞ ; dunque tale equazione avrà una sola radice reale positiva, purchè il secondo membro sia maggiore di 1; e ciò è; infatti $l > OA$;

$$l^2 > \alpha^2 + \beta^2.$$

La risoluzione della (18) può effettuarsi col metodo delle approssimazioni successive; oppure graficamente costruendo la intersezione della curva

$$y = \text{Sh} \xi$$

e della retta

$$y = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} \xi.$$

Si hanno infine delle tavole che danno, per valori di ξ , il valore del primo membro della (18) e che agevolano la risoluzione di detta equazione.

Tale equazione infine è soddisfatta da una radice negativa eguale, in valore assoluto, alla positiva. A tale radice negativa corrisponde una catenaria colla concavità volta in basso e che non è certamente posizione di equilibrio. La configurazione corrispondente alla radice positiva è stabile.

Determinato ξ , sarà determinato il parametro a ; quindi da

$$l + \beta = a e^{-\frac{x_0}{a}} \left(e^{\frac{\alpha}{a}} - 1 \right)$$

si troverà x_0 e infine z_0 .

Esercizi.

1. Un filo fissato in due punti ha i suoi elementi respinti da una retta AB (asse x) normalmente e proporzionalmente alla distanza. Dimostrare che un'elica cilindrica può essere figura di equilibrio e poscia investigare, in generale, la figura di equilibrio.

Le equazioni di equilibrio sono

$$\frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad \omega^2 y + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dy}{ds} \right) = 0,$$

$$\omega^2 z + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dz}{ds} \right) = 0.$$

Se la figura di equilibrio è un'elica di asse AB e raggio R , si ha

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{z \sin \alpha}{R}, \quad \frac{dz}{ds} = \frac{y \sin \alpha}{R}; \quad \alpha = \text{cost.};$$

essendo

$$\tau \cos \alpha = c$$

dalle due ultime equazioni di equilibrio si deduce

$$c = \frac{R^2 \omega^2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

che determina c e quindi τ

Le forze ammettono il potenziale

$$U = \frac{\omega^2}{2} (y^2 + z^2)$$

quindi (13)

$$\frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \tau = b > 0, \quad r^2 = y^2 + z^2.$$

Poscia (14)

$$\tau (y'z - yz') = a, \quad \tau x' = c.$$

Ma

$$(y'z - yz')^2 = (y^2 + z^2)(y'^2 + z'^2) - (yy' + zz')^2$$

$$= r^2 \left(1 - \frac{c^2}{\tau^2} \right) - r^2 r'^2 = \frac{a^2}{\tau^2},$$

donde

$$r \frac{dr}{ds} = \frac{\sqrt{f(r^2)}}{b - \frac{1}{2} \omega^2 r^2}$$

dove

$$f(r^2) = r^2 \left\{ \left(b - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \right)^2 - c^2 \right\} - a^2;$$

poscia assumendo un sistema di coordinate polari nel piano $y z$ si ha

$$a = \tau r^2 \frac{d\theta}{ds}$$

$$r d\theta = a dr : \sqrt{f(r^2)}$$

equazione differenziale della proiezione della curva di equilibrio sul piano $y z$. Infine

$$dx = \frac{c ds}{\tau} = \frac{c r dr}{\sqrt{f(r^2)}}.$$

Le integrazioni introducono, oltre b, c, a , altre tre costanti arbitrarie.

La discussione della curva di equilibrio può farsi col sussidio delle funzioni ellittiche.

[MARCOLONGO, Rend. R. Accademia di Napoli, (2) 5 p. 71 (1892); GREENHILL, *The Applications of Elliptic Functions*, p. 210 (1892)].

Se il filo è fissato in due punti dell'asse AB , si realizza la configurazione studiata nel moto uniforme della

corda intorno l'asse: perciò la curva è detta « courbe à sauter » [LORIA, l. c., p. 558; GREENHILL, l. c., p. 67].

2. Detto m il peso dell'unità di lunghezza di una catena omogenea sospesa a due punti P e Q egualmente elevati sul piano orizzontale e distanti tra di loro di $2h$; dimostrare che se il parametro della catenaria è molto grande, la catenaria può riguardarsi come una parabola ed esprimere il parametro e la tensione per mezzo di h , m e dalla freccia f della parabola.

L'equazione della catenaria è

$$z = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right);$$

sviluppando in serie e trascurando i termini di terzo... grado, risulta

$$z = a + \frac{x^2}{2a}.$$

Dette x_1, z_1 le coordinate di P si ha

$$z_1 = a + f = a + \frac{x_1^2}{2a}, \quad x_1 = h$$

quindi

$$f = \frac{h^2}{2a}.$$

La tensione τ_0 nel punto più basso della catenaria è espressa da

$$\tau_0 = am$$

Cognito a dalla prima equazione, la seconda ci farà conoscere τ_0 . La tensione massima si ha nel punto P ed

è data da

$$\tau_1 = m z_1 = m(a + f) = am + af,$$

e siccome f è molto piccolo, si può ritenere $\tau_1 = \tau_0$ e $f = \frac{m h^2}{\tau_0}$.

Diciamo l la lunghezza dell'arco PQ della catena; l'arco s contato dal punto più basso è

$$s = a \operatorname{Sh} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(2 \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^2} \right) = x + \frac{x^3}{6a^2}$$

quindi essendo, per $x = x_1$, $s = \frac{l}{2}$ risulta

$$l = 2h + \frac{x_1^3}{3a^2} = 2h + \frac{4}{3} \frac{f^2}{h}.$$

Per es., se $h = m. 40 = \text{cm. } 4000$, se il filo presenta una freccia di $\text{cm. } 45$ e il peso di un cm. di filo è di un gr. , si ha

$$a = \frac{h^2}{2f} = 1780 \text{ m. (circa); } \tau = 178 \text{ kg.; } l = m. 80,67.$$

3. Un filo è soggetto a forze parallele proporzionali alla tensione. Figura di equilibrio.

La curva sia nel piano xy e l'asse y parallelo e contrario alla direzione delle forze; quindi $Y = -\frac{\tau}{a}$ e le equazioni di equilibrio danno subito, eliminando τ

$$a y'' = (1 + y'^2), \quad y' = \frac{dy}{dx};$$

il raggio di curvatura ha proiezione costante su asse y .

Integrando e spostando le x in modo da annullare la costante si deduce

$$y' = \operatorname{tang} \frac{x}{a}$$

e quindi

$$e^{\frac{y}{a}} \cos \frac{x}{a} = 1.$$

Notiamo poi che

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \frac{1}{a} \cos \frac{x}{a}; \quad \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \frac{x}{a}},$$

Integrando si trova

$$e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} = \frac{2}{\cos \frac{x}{a}} = \frac{2\rho}{a}$$

quindi

$$\rho = a \operatorname{Ch} \frac{s}{a}$$

equazione intrinseca della curva, detta *catenaria di egual resistenza*, ed è di forma analoga alla (16).

[BOBILLIER et FINK, Ann. de Gergonne, **27**, p. 61 (1826), D. GILBERT, Philos. Trans. (1826), Part. 3^a, pp. 202-218; CORIOLIS, Journ. de Mathém. **1** (1836); ecc. La equazione intrinseca è stata data da MINCHIN, *A Treatise on Statics* (1^a ediz.).]

4. Stesso problema supponendo che la forza che sollecita un elemento di filo sia proporzionale alla proiezione dell'elemento sull'asse x .

Si ha $Y ds = -k^2 dx$; quindi

$$\tau \frac{dx}{ds} = c, \quad \tau \frac{dy}{ds} = k^2 x + ac$$

eliminando τ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k^2}{c} x + a$$

ed integrando

$$y = \frac{k^2}{2c} x^2 + ax + \text{cost.}$$

Si ha una parabola e quindi il nome di « *catenaria parabolica* » o *curva dei ponti sospesi*.

5. Se le forze che sollecitano il filo sono centrali, la curva è piana, e si ha

$$\tau r^2 \frac{d\theta}{ds} = c$$

$$F = c \frac{r r'' - 2 r'^2 - r^2}{r^3 \sqrt{r^2 + r'^2}} \quad \left(r' = \frac{dr}{d\theta}, \dots \right)$$

in cui F è l'intensità della forza riferita all'unità di lunghezza del filo.

Se nel piano γz della curva assumiamo un sistema di coordinate polari e trasformiamo la (14) otteniamo precisamente la prima delle proposte equazioni.

Inoltre essendo O il centro, e supponendo la forza attrattiva

$$\mathbf{f} = -F \cdot \frac{P-O}{r}$$

e quindi

$$\Theta = \mathbf{f} \times \mathbf{t} = -F \cdot \frac{P-O}{r} \times \frac{dP}{ds} = -F \cdot \frac{dr}{ds}$$

e la prima delle (12) diventa

$$F dr - d\tau = 0$$

ossia

$$F = \frac{d\tau}{dr} = c \frac{d}{dr} \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{r^2}$$

e quindi risulta la seconda formula.

6. Nella ipotesi del problema precedente, calcolare F supponendo che la curva di equilibrio sia una spirale logaritmica oppure una spirale sinusoidale. Le forze sono dirette al polo.

Se

$$r = e^{m\theta}$$

si trova subito

$$F = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{r^2};$$

se (vedi pag. 73)

$$r^k \cos k\theta = c$$

si trova

$$F = -\frac{(k-1)r^{k-2}}{c}.$$

[Catenaria di egual resistenza per forze centrali. BONNET, Journal de Mathém. 9, p. 97 (1844).

7. Curva di equilibrio di un filo soggetto a forze centrali funzioni della sola distanza.

Poichè $F = f(r)$ si deduce

$$\tau = b - \varphi(r) ; \quad \varphi(r) = \int f(r) dr ;$$

quindi

$$d\theta = \pm c dr : r \sqrt{r^2 [b - \varphi(r)]^2 - c^2}.$$

Il problema è ridotto alle quadrature.

Se la forza è costante $= k$ si ha $\varphi(r) = kr$

$$\tau = b - kr ; \quad r > \frac{b}{k}$$

le integrazioni si effettuano con funzioni elementari; in particolare se $b=0$, ponendo $kr^2 = \frac{c}{u}$ si ottiene

$$r^2 \cos 2(\theta - \theta_0) = \frac{c}{k^2}$$

equazione di una iperbole equilatera.

Si può collo stesso procedimento trattare il caso di due o più centri di attrazione.

8. Catenaria omogenea su di un piano inclinato.

Sul piano sia l'asse x orizzontale, z normale al piano e formi l'angolo α colla verticale. Detta R la grandezza della reazione (normale al piano), le equazioni di equilibrio sono

$$\frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad -m \cos \alpha + \frac{d}{ds} \left(\tau \frac{dz}{ds} \right) = 0, \\ -m \sin \alpha + R = 0$$

perchè $\frac{d\tau}{ds} = 0$. Le prime due, analoghe a quelle della catenaria, dicono che la curva è pure una catenaria, ecc.

9. Nuova forma delle equazioni di equilibrio di un filo su di una superficie.

Dalla (7) abbiamo

$$\mathbf{f} + \mathbf{t} \frac{d\tau}{ds} + \mathbf{n} \frac{\tau}{\rho} + R \mathbf{n}_1 = 0.$$

Ora sia \mathbf{t}_1 un vettore unità normale a \mathbf{t} e \mathbf{n}_1 , e diciamo α l'angolo che la proiezione della forza sul piano tangente (parallelo a \mathbf{t} e \mathbf{t}_1) forma con \mathbf{t} ; γ quello che la forza forma con \mathbf{n}_1 ; e θ l'angolo tra piano tangente e

piano osculatore, complementare di $(\mathbf{n}, \mathbf{n}_1)$. Posto $F = \text{mod } \mathbf{f}$, si ha

$$\mathbf{f} = F(\text{sen } \gamma \cos \alpha \cdot \mathbf{t} + \text{sen } \gamma \text{sen } \alpha \cdot \mathbf{t}_1 + \cos \gamma \cdot \mathbf{n}_1) \\ \mathbf{n} = \cos \theta \cdot \mathbf{t}_1 + \text{sen } \theta \cdot \mathbf{n}_1;$$

e quindi

$$\frac{d\tau}{ds} + F \text{sen } \gamma \cos \alpha = 0, \quad \frac{\tau}{\rho} \cos \theta + F \text{sen } \gamma \text{sen } \alpha = 0 \\ R + \frac{\tau}{\rho} \text{sen } \theta + F \cos \gamma = 0.$$

Se ρ_1 è il raggio di curvatura geodetica, r il raggio di curvatura della sezione normale avente la stessa tangente, si ha

$$\rho_1 = \rho \cos \theta, \quad r = \rho \text{sen } \theta$$

(teorema di MEUSNIER) e le equazioni precedenti diventano

$$\frac{d\tau}{ds} + F \text{sen } \gamma \cos \alpha = 0, \quad \frac{\tau}{\rho_1} + F \text{sen } \gamma \text{sen } \alpha = 0 \\ \frac{\tau}{r} + F \cos \gamma + R = 0,$$

e di qui, dicendo α_1 l'angolo di curvatura geodetica, abbiamo

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{ds}{\rho_1 \text{tang } \alpha} = \frac{d\alpha_1}{\text{tang } \alpha}.$$

Si può trarre una conseguenza notevole. La figura di equilibrio di un filo posto su di una sviluppabile, soggetto a forze le cui proiezioni ortogonali cadono su generatrici, è la stessa di quella del piano su cui si svolge, purchè non varino le forze; e reciprocamente.

Così la figura di equilibrio d'una catena situata su di una superficie cilindrica, sviluppata su di un piano è una catenaria omogenea; la catenaria di un cono retto ad

asse verticale, sviluppata, è la figura di equilibrio d'un filo soggetto a forze centrali; ecc.

10. Tra le curve passanti per due punti dati e aventi la stessa lunghezza, la catenaria ha il centro di gravità più basso. Stabilità della catenaria.

Si deve cercare la curva per cui è minimo

$$\int z ds; \int ds$$

essendo

$$\int ds = \text{cost};$$

cioè il minimo di

$$u = \int (z + a) ds.$$

Più generalmente, valendoci del calcolo delle variazioni, annulliamo la variazione prima di

$$\int \varphi ds.$$

Osservando che

$$\delta \varphi = \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x, \quad \delta ds = \sum \frac{dx}{ds} \delta dx$$

e ancora che

$$\int \varphi \frac{dx}{ds} \delta dx \cdot ds = \left(\varphi \frac{dx}{ds} \delta x \right)_0^l - \int \frac{d}{ds} \left(\varphi \frac{dx}{ds} \right) \delta x \cdot ds,$$

giungiamo alle seguenti equazioni

$$\frac{d}{ds} \left(\varphi \frac{dx}{ds} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \text{ ecc.,}$$

che sono precisamente le equazioni di equilibrio di un filo la cui tensione è φ e soggetto a forze derivanti dal potenziale $-\varphi$. Se $\varphi = m\tau + b$ abbiamo precisamente la catenaria omogenea.

Si vede agevolmente che risulta minimo ancora

$$\int \tau ds.$$

Lo stesso risultato vale per un filo situato su di una superficie levigata.

Resterebbe a dimostrare che u è effettivamente un minimo, esaminando la variazione seconda. Si veda per questa discussione: MAYER, *Mathem. Ann.*, **13**, pag. 6 (1878); KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, p. 142. Braunschweig (1900).

II. Figura di equilibrio di un filo omogeneo pesante posto su di una sfera o superficie di rotazione ad asse verticale.

Se l'asse ζ è verticale, positivo in alto, m è il peso dell'unità di lunghezza del filo, si ha

$$U = -m\zeta$$

e quindi dalle (13) e (14) risulta

$$\tau = b + m\zeta, \quad \tau(x'y' - x'y) = c,$$

alle quali sono da aggiungere le

$$x^2 + y^2 + \zeta^2 = a^2, \quad xx' + yy' + \zeta\zeta' = 0, \quad x'^2 + y'^2 + \zeta'^2 = 1;$$

se il filo è situato su di una superficie di rotazione intorno a ζ , le due prime equazioni saranno sostituite da

$$x^2 + y^2 = 2\varphi(\zeta), \quad xx' + yy' = \varphi'(\zeta) \cdot \zeta'.$$

Considerando l'identità

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) - (xx' + yy')^2 = (xy' - x'y)^2$$

esprimendo tutto per ζ e ζ' , si deduce agevolmente

$$a\zeta' = \pm \sqrt{f(\zeta)} : (m\zeta + b)$$

dove

$$f(\zeta) = (a^2 - \zeta^2)(m\zeta + b)^2 - c^2.$$

Poiché dalla

$$xy' - x'y = \frac{c}{m\zeta + b}$$

si ricava

$$\frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{c}{(a^2 - \zeta^2)(m\zeta + b)}$$

Il problema è ridotto alle quadrature ellittiche.

$f(\zeta)$ è negativa per $\zeta = \pm a$, ed essendo ζ compreso tra $+a$ e $-a$, in un intervallo compreso tra questo, $f(\zeta)$ deve risultare positiva; cioè $f(\zeta)$ ha almeno due radici reali in valor assoluto minori di a ; ossia

La catenaria sferica è compresa tra due paralleli ai quali risulta tangente (per essere ivi $\zeta' = 0$).

Adoperando un sistema di coordinate sferiche, l'ultima relazione ci dà l'equazione della catenaria sferica cioè

$$d\varphi = c d\theta : \operatorname{sen} \theta \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta (am \cos \theta + b)^2 - c^2}.$$

Se una estremità è libera, $\tau_0 = 0$; oppure se giace nel punto più alto della sfera, $x'_0 = y'_0 = 0$; in questi casi $c = 0$ e però essendo $xy' - x'y = 0$ la curva è piana e contenuta in un piano meridiano verticale. Si può anche avere una configurazione di equilibrio in un piano orizzontale.

La reazione, verso l'esterno è data da

$$\frac{1}{a} (2m\zeta + b).$$

[Vedi MARCOLONGO, *Rend. Acc. Napoli*, (2) **4** (1892); GREENHILL, *The spherical Catenary*, *Proceedings London Mathem. Society*, **27** (1896) in cui è discussa e disegnata una catenaria sferica algebrica; TEIXEIRA, *Traité des courbes spéciales etc.* Obras, **5**, Coimbra 1909, pp. 359-367].