dove $r_{ik} = \mathrm{mod}\,(P_i - P_k)$,

$$V = \sum_{ik} \{ \mathbf{f}_{ik} \times (P_i - O) + \mathbf{f}_{ki} \times (P_k - O) \}$$

$$= \sum_{ik} \frac{f_{ik}}{r_{ik}} \{ (P_i - O) \times (P_k - P_i) + (P_i - P_k) \times (P_k - O) \}$$

e finalmente

$$V = \sum r_{ik} f_{ik} (r_{ik}).$$

[La considerazione del viriale è dovuta a MÖBIUS, *Lehrbuch der Statik* (1837); Werke, **3**; e poi a SCHWEINS, Journal für r. und ang. Mathem., **38**, p. 77 (1848); **47**, p. 238 (1853). Il nome è dovuto a CLAUSIUS, Annalen der Physik, **141**, p. 124 (1870)].

CAPITOLO II.

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI.

Il problema generale della Statica è la ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un sistema di corpi soggetti a determinate forze. Il principio che ora esporremo, il più fondamentale della Statica, permette di risolvere un tal problema, perchè:

1⁰ raggruppa in un solo enunciato le svariate condizioni di equilibrio dei sistemi materiali;

2⁰ permette di dedurre le equazioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio con un procedimento semplice e uniforme.

§ 1. **Spostamento virtuale.** — Se un punto P di un sistema materiale può assumere lo spostamento infinitesimo $P_1 - P$, pensato anche come semplicemente possibile, si dice che può ricevere uno spostamento *virtuale* o *facoltativo*. Se poi tale spostamento può aver luogo anche in senso opposto, esso dicesi *invertibile*; altrimenti *non invertibile*.

Un punto libero può assumere qualunque spostamento invertibile; un punto posto sulla superficie limite di un corpo solido, impenetrabile, assume spostamenti invertibili sul piano tangente e poichè questi sono infinitamente piccoli, esso non cessa di restare sulla superficie; se invece si sposta verso lo spazio esterno al corpo, assume spostamenti non invertibili; per questi il punto si allontana dalla superficie.

L'estremo P di un filo teso, flessibile ma inestensibile, fissato nell'altro estremo O, può assumere spostamenti invertibili sul piano tangente alla sfera di centro O; sono anche possibili spostamenti che avvicinano P ad O; ma questi, per la inestendibilità del filo, non sono invertibili.

Se un punto è obbligato a restare nell'interno di un triedro di spigoli a, b, c uscenti da O e scavato in un certo corpo, può assumere qualunque spostamento invertibile; se è invece situato sul piano $b\,c$, saranno invertibili solamente quelli contenuti nel piano; gli altri, che portano il punto verso l'interno del triedro, non sono invertibili. Se cade sullo spigolo a saranno invertibili solo quelli effettuati lungo a; e finalmente se cade in O, *nessuno* dei possibili spostamenti è invertibile.

Se un corpo rigido è libero o ha un punto o un asse fisso, i suoi punti possono assumere qualunque spostamento invertibile.

Se è a contatto, per es., in un sol punto, con una parete fissa, le rotazioni del corpo intorno alla normale comune nel punto di contatto e le traslazioni parallelamente al piano tangente danno luogo a spostamenti invertibili; mentre ogni movimento che allontani il corpo dalla parete dà luogo a spostamenti non invertibili.

In tutti questi, e in casi analoghi, diremo che il punto, il corpo sono liberi o vincolati.

Un sistema vincolato può dunque assumere spostamenti invertibili o no; i primi non alterano i legami o i vincoli del sistema; non così i secondi. Si dice brevemente:

Gli spostamenti virtuali sono conciliabili coi vincoli del sistema; quelli non invertibili non lo sono.

§ 2. Sistemi olonomi ed anolonomi. — Accenneremo con δP lo spostamento virtuale di un punto, con δx, δy, δz le sue componenti ortogonali. I vincoli del sistema limitando la mobilità di questo, in generale avverrà che gli spostamenti invertibili dei vari punti sono determinati quando siano fissati quelli di alcuni altri, oppure gl'incrementi (che seguiteremo ancora a chiamare spostamenti) di certi parametri atti a fissare la posizione del sistema; avverrà cioè che alcuni degli spostamenti invertibili sono funzioni di altri spostamenti. Trattandosi poi di quantità infinitamente piccole, annullantesi contemporaneamente, queste funzioni sono lineari ed omogenee;

oppure conterranno, linearmente ed omogeneamente, altre indeterminate arbitrarie; eliminando le quali, in tutti i modi possibili, otterremo ancora delle relazioni lineari ed omogenee tra gli spostamenti dei punti del sistema. Dunque, in generale:

Gli spostamenti virtuali invertibili dei punti di un sistema vincolato, soddisfano ad un sistema di relazioni lineari ed omogenee della forma

$$(1) \qquad \Sigma(A\,\delta x + B\,\delta y + C\,\delta z) = 0,$$

in cui $\delta x, \ldots$ potranno anche, eventualmente, rappresentare spostamenti di altri parametri diversi dalle solite coordinate cartesiane.

Le (1) sono anche soddisfatte se si cambia il segno a δx, δy, δz; dunque:

Se un sistema di spostamenti virtuali soddisfanno le (1) *esso è invertibile.*

Gli spostamenti virtuali non invertibili renderanno quindi i primi membri delle (1) *non tutti nulli;* chè altrimenti essi sarebbero invertibili.

Le (1) poi riguardate come un sistema di equazioni ai differenziali totali possono essere integrabili (illimitatamente) oppur no; nel primo caso i vincoli sono espressi da equazioni finite tra le coordinate (equazioni dei vincoli) e perciò appunto il sistema fu chiamato *olonomo* (*); nell'altro caso si dice *anolonomo.*

(*) H. Hertz, *Prinzipien der Mechanik*, 1894.

Un punto obbligato a restare su di una superficie di equazione $f = 0$; o su di una curva di equazioni $f = 0$, $\varphi = 0$; due punti collegati da un'asta rigida e tali quindi che

$$(x_1 - x_2)^2 + \ldots\ldots - l^2 = 0;$$

sono esempi semplicissimi di sistemi olonomi, nei quali sono subito trovate le equazioni finite dei corrispondenti vincoli.

Una stessa equazione può corrispondere a condizioni fisiche diverse: per es., l'equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

può esprimere che il punto x, y, z deve trovarsi su di una sfera limite di un corpo solido, o di una cavità sferica, o che esso è l'estremo libero di un filo teso e fissato nell'origine.

In un sistema olonomo è facile trovare il sistema (1) cui soddisfanno gli spostamenti invertibili ed il sistema di disuguaglianze degli spostamenti non invertibili. Sia infatti $f = 0$ l'equazione di uno dei vincoli, contenente le coordinate x_r, y_r, z_r di un certo numero di punti del sistema; poichè gli spostamenti invertibili non alterano i vincoli del sistema, le coordinate $x_r + \delta x_r, \ldots$ dovranno ancora soddisfare la $f = 0$; di guisa che avremo

$$f(\ldots\ldots x_r + \delta x_r, \ldots\ldots) = 0;$$

e sviluppando in serie

$$f(\ldots x_r,\, y_r,\, z_r \ldots) + \frac{\partial f}{\partial x_r}\,\delta x_r + \ldots \quad = 0,$$

e trascurando i quadrati, i prodotti delle $\delta x_r, \ldots$, si ha, conforme alle (1),

$$\Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x_r}\,\delta x_r + \frac{\partial f}{\partial y_r}\,\delta y_r + \frac{\partial f}{\partial z_r}\,\delta z_r \right) = 0$$

la sommatoria essendo estesa a tutti i punti le cui coordinate figurano nella $f = 0$.

Questa relazione poi può dedursi direttamente dalla equazione del vincolo, poichè equivale semplicemente alla

$$\delta f = 0.$$

Con un ragionamento analogo si proverebbe che per gli spostamenti non invertibili deve essere

$$\delta f \gtreqless 0.$$

Così per es., se un punto sta sulla superficie di una sfera solida impenetrabile, considerando che il prodotto scalare di $P - O$ (direzione della normale esterna) per lo spostamento δP è nullo o positivo secondo che lo spostamento è invertibile o no, avremo, nell'uno o nell'altro caso,

$$x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z \geqq 0.$$

Invece se il punto è l'estremo libero di un filo fisso in O, oppure giace sulla superficie in-

terna di una cavità sferica, avremo

$$x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z \leqq 0.$$

Diamo ora un esempio semplice di sistema anolonomo; e consideriamo una sfera di raggio a, obbligata a restare a contatto con un piano fisso, per es., $\xi\,\eta$; la ζ sia positiva dalla parte della sfera. Sia A il punto di contatto; la sua velocità secondo la normale in A alla sfera è nulla. Se poi supponiamo sia nulla la velocità di A lungo il piano, si dice che la sfera può rotolare, senza strisciare, sul piano. Il moto istantaneo della sfera si riduce ad una rotazione istantanea intorno ad un asse passante per A. Pel centro $O(\xi,\, \eta,\, a)$ della sfera consideriamo una terna $x_1,\, y_1,\, z_1$ parallela a quella fissa ed una terna $x,\, y,\, z$ rigidamente connessa con la sfera e fissata, rispetto alla prima, dai parametri $\alpha, \ldots, \delta$; oppure dagli angoli φ, θ, ψ (Part. I, Cap. 3°, § 6).

Rispetto agli assi fissi, dette $p_1,\, q_1,\, r_1$ le componenti della velocità istantanea, dalla formula fondamentale di cinematica avremo

$$\frac{d\xi}{dt} + q_1 z_1 - r_1 y_1 = 0\,; \quad \frac{d\eta}{dt} + r_1 x_1 - p_1 z_1 = 0\,;$$

$$p_1 y_1 - q_1 x_1 = 0\,;$$

quindi pel punto $A(0,\, 0,\, -a)$ risulta

$$\frac{d\xi}{dt} - a\,q_1 = 0\,, \quad \frac{d\eta}{dt} + a\,p_1 = 0.$$

Valendoci finalmente delle (16) (Part. I, Cap. 5°), si deduce che per uno spostamento virtuale compatibile coll'imposto vincolo, si ha

$$\delta\xi - a \operatorname{sen}\psi\,\delta\theta + a \operatorname{sen}\theta \cos\psi\,\delta\varphi = 0$$
$$\delta\eta + a\cos\psi\,\delta\theta + a \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\psi\,\delta\varphi = 0,$$

mentre ζ è costante. Tra gli spostamenti dei cinque parametri che individuano la posizione della sfera sussistono dunque effettivamente due relazioni lineari ed omogenee; ma esse non sono integrabili; il sistema è anolonomo.

Lo stesso ha luogo per due superficie qualunque che rotolano l'una sull'altra senza strisciare. (*)

§ 3. **Lavoro virtuale di una forza e di un sistema di forze.** — Sia **f** il vettore di una forza applicata in un punto P, il quale riceva uno spostamento virtuale δP.

Dicesi lavoro virtuale della forza il prodotto scalare del vettore della forza per lo spostamento virtuale del suo punto d'applicazione.

Tale lavoro è quindi un numero positivo, nullo o negativo secondo che forza e spostamento formano un angolo acuto, retto od ottuso; ed è a sua volta espresso dal prodotto del modulo della forza per la proiezione dello spostamento sulla direzione della forza; od anche dal prodotto del modulo dello spostamento per la proiezione della forza sulla direzione dello spostamento.

(*) APPELL, *Les mouvements de roulement en Dynamique.* Coll. Scientia. **4**, pag. 38; GEBBIA, Rend. Circolo mat. Palermo, **20**, pp. 265-303 (1905).

La proprietà distributiva del prodotto scalare ci dà subito il seguente teorema:

La somma dei lavori di più forze concorrenti, rispetto ad uno stesso spostamento del comune punto di applicazione, è eguale al lavoro della risultante.

Se X, Y, Z sono le componenti ortogonali della forza applicata nel punto $P(x, y, z)$, si ha:

$$(2) \qquad \mathbf{f} \times \delta P = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z,$$

come è poi chiaro dal fatto che **f** è la risultante di X, Y, Z i cui lavori sono $X\delta x$,.....

Consideriamo un corpo (o un sistema di corpi) vincolato e soggetto a un sistema di forze S; per un qualunque spostamento virtuale del corpo (e quindi dei suoi punti) facciamo la somma dei lavori virtuali delle forze ad essi applicate; otterremo ciò che chiamasi *lavoro virtuale del sistema S di forze;* cioè

$$(3) \quad \text{lav.}\, S = \Sigma\, \mathbf{f} \times \delta P = \Sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Esso è quindi espresso da un numero che può essere positivo, nullo o negativo.

§ 4. **Principio dei lavori virtuali.** — *La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio* *di un sistema materiale è che il lavoro virtuale del sistema delle forze sia nullo per gli spostamenti invertibili e negativo per quelli non invertibili.*

a) Cominciamo a considerare il caso di un punto solo e libero. Se è in equilibrio, la risultante di tutte le forze che lo sollecitano deve essere nulla ed è quindi nullo il suo lavoro virtuale per qualunque spostamento. Reciprocamente, se tale lavoro è nullo per qualsivoglia spostamento, è nulla la risultante delle forze ed il punto è in equilibrio.

Il punto sia vincolato: per es., si tratti di una piccola sferetta adagiata sulla superficie di un corpo solido e sia $\mathbf{f}$ il vettore della risultante delle forze. La superficie esercita sulla sferetta una certa azione: ammetteremo che tale azione sia rappresentata da una forza di vettore $\mathbf{r}$, applicata al punto e diretta verso l'esterno del corpo *(principio delle pressioni vincolari)*; se inoltre $\mathbf{r}$ è normale alla superficie diremo che non vi ha attrito. Questa reazione vincolare può completamente sostituire il vincolo e, per la sua aggiunta, potremo riguardare il punto libero; e poichè è in equilibrio, dovremo avere

$$\text{lav. } \mathbf{f} + \text{lav. } \mathbf{r} = 0,$$

per qualsivoglia spostamento. Ma si ha lav. $\mathbf{r} \geqq 0$ rispettivamente per gli spostamenti invertibili e

non invertibili; e quindi per gli stessi risulta

$$\text{lav. } \mathbf{f} \leqq 0.$$

Reciprocamente, se queste condizioni sono soddisfatte la $\mathbf{f}$ non solo è normale alla superficie, ma è diretta verso l'interno del corpo, ed il punto materiale è in equilibrio.

b) Consideriamo ora un corpo rigido; e supponiamolo costituito da due piccole sferette (punti materiali) A e B che, unite da una sottile asta rigida, si conservino a distanza invariabile.

Per seguire un procedimento uniforme, immagineremo sostituita l'asta con due forze di vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}'$; la prima, applicata in A, rappre-

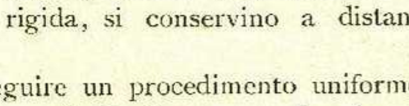

Fig. 24.

senta l'azione della sferetta B su A; la seconda, applicata in B, rappresenta quella di A su B; per l'eguaglianza dell'azione e della reazione sarà $\mathbf{r} = -\mathbf{r}'$.

In uno spostamento virtuale, l'asta dalla posizione AB passi alla $A'B'$ infinitamente prossima, essendo rimasta inalterata la grandezza del segmento; si proiettino A' e B' in A_1 e B_1 sulla

AB; avremo

$$AB = A'B' = A_1B_1$$

onde

$$AA_1 = BB_1.$$

Inoltre in A sia applicata una forza di vettore $\mathbf{f}$ e in B una di vettore $\mathbf{f}'$. Per l'azione di $\mathbf{f}$ e di $\mathbf{r}$ il punto A è da ritenersi libero ed in equilibrio, e così pel punto B; quindi

$$\mathbf{f} \times \delta A + \mathbf{r} \times \delta A = 0$$
$$\mathbf{f}' \times \delta B + \mathbf{r}' \times \delta B = 0.$$

Ma

$\mathbf{r} \times \delta A = \operatorname{mod} \mathbf{r} \,.\, AA_1$; $\mathbf{r}' \times \delta B = -\operatorname{mod} \mathbf{r} \,.\, BB_1$;

quindi sommando

$$\mathbf{f} \times \delta A + \mathbf{f}' \times \delta B = 0.$$

Reciprocamente, se tale condizione è soddisfatta qualunque siano gli spostamenti, fissando il punto B sarà $\mathbf{f} \times \delta A = 0$; quindi $\mathbf{f}$ è normale ad AA' cioè ha la direzione di AB; e così dicasi di $\mathbf{f}'$; inoltre $\mathbf{f} = -\mathbf{f}'$ e le due forze si fanno equilibrio.

Supponendo il sistema costituito da tre, quattro, ecc., punti rigidamente connessi due a due, si può, volta a volta, applicare lo stesso ragionamento; quindi si conclude che se un sistema rigido libero è in equilibrio, il lavoro virtuale delle forze che lo sollecitano è nullo per qualsivoglia spostamento e reciprocamente.

La stessa conclusione ha luogo se il sistema ha uno o due punti fissi. Sia O uno di questi; applichiamo in O (sostegno) una forza (reazione) che rappresenti l'azione del sostegno sul corpo. Il sistema rigido potrà, dopo ciò, riguardarsi come libero; e poichè sussiste ancora l'equilibrio sarà nullo il lavoro di tutte le forze che lo sollecitano per qualsivoglia spostamento; ma il lavoro della reazione, essendo O fisso, è nullo; quindi sarà nullo il lavoro delle forze direttamente applicate.

Supponiamo ancora il corpo rigido C a contatto con una parete fissa; se il corpo è obbligato a scivolare (senza attrito) sulla parete, noi possiamo immaginarla soppressa, purchè in uno dei punti di contatto, per es. A, sia applicata una forza di vettore $\mathbf{r}$, diretta all'esterno della parete (e quindi nell' interno del corpo) e normale a questa. Possiamo quindi supporre libero il corpo che sarà ancora in equilibrio. Se S è il sistema di forze applicate a C, avremo, *per qualsivoglia spostamento virtuale* di esso:

$$\text{lav.}\, S + \mathbf{r} \times \delta A = 0.$$

Ma per tutti gli spostamenti invertibili (rotazioni intorno ad assi uscenti da A e traslazioni lungo il piano tangente) $\mathbf{r} \times \delta A = 0$, e per quelli non invertibili (traslazioni dalla parte esterna alla parete) $\mathbf{r} \times \delta A > 0$; dunque nel caso dell'equilibrio sarà

$$\text{lav.}\ S \leqq 0.$$

Notiamo ancora che se il corpo C fosse obbligato a rotolare sulla parete fissa, la reazione **r** potrebbe non risultare necessariamente normale al corpo, pur essendo sempre applicata in A. Ma essendo in tal caso nulla la velocità di A, il lavoro della reazione è nullo per ogni spostamento invertibile e quindi sarà sempre

$$\text{lav.}\ S = 0.$$

Dunque se un corpo rigido libero o vincolato (nei modi descritti) è in equilibrio, il lavoro virtuale delle forze che lo sollecitano è nullo per gli spostamenti invertibili, negativo per quelli non invertibili.

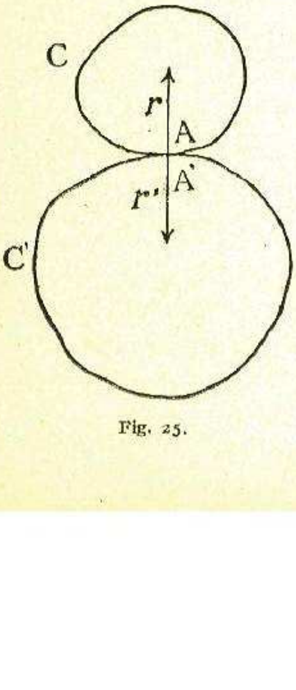

Fig. 25.

c) Passiamo ora a considerare il sistema di due corpi rigidi C e C' a contatto tra loro; ed anzitutto supponiamo che siano sempre a contatto in A. Potremo, come al solito, supporre liberi C e C' considerando le due reazioni $\mathbf{r} = -\mathbf{r}'$; allora essendo C e C' liberi ed in equilibrio, per qualunque spostamento virtuale

avremo:

$$\text{lav.}\ S + \mathbf{r} \times \delta A = 0$$
$$\text{lav.}\ S' + \mathbf{r}' \times \delta A = 0,$$

perchè, per ipotesi, A è sempre sovrapposto a se stesso in ogni spostamento invertibile; quindi sommando risulta

$$\text{lav.}\ S + \text{lav.}\ S' = 0.$$

In ogni altro spostamento non invertibile, i due corpi si distaccheranno; i lavori delle reazioni essendo entrambi positivi risulta

$$\text{lav.}\ S + \text{lav.}\ S' < 0.$$

Supponiamo invece che i due corpi possano scivolare l'uno sull'altro; sia **v** la velocità di A, **v'** quella di A', punto di C' attualmente a contatto con A, che è poi la velocità relativa di A rispetto al corpo C'. La velocità di strascinamento è parallela al piano tangente e poichè **v** è la somma di **v'** e della velocità di strascinamento, le componenti di **v** e **v'** sulla normale sono eguali. Lo stesso varrà per gli spostamenti virtuali di A e A', che sono eguali alle dette velocità moltiplicate per l'elemento dt del tempo; quindi

$$\mathbf{r} \times \delta A + \mathbf{r}' \times \delta A' = 0$$

e però

$$\text{lav.}\ S + \text{lav.}\ S' = 0.$$

Tale somma risulta invece negativa se i due corpi sono allontanati.

d) Continuando in questa guisa si riesce a dimostrare che in ogni sistema in equilibrio costituito da corpi rigidi con o senza punti o assi fissi, appoggiati tra di loro o a pareti fisse sulle quali possono scivolare o rotolare, ecc., il lavoro virtuale delle forze del sistema è nullo per gli spostamenti invertibili, negativo per quelli non invertibili.

Dimostriamo ora la reciproca; e sia, in uno o più corpi vincolati e soggetti ad un sistema S di forze,

$$\text{lav.}\, S \leqq 0,$$

senza che sussista l'equilibrio; il sistema dei corpi, assumerà un certo movimento compatibile coi vincoli a cui è soggetto.

Immaginiamo impresso ai vari punti del sistema uno spostamento virtuale nel senso in cui avviene il movimento; il quale, per ogni punto, sarà prodotto dalle forze direttamente applicate e dalle pressioni vincolari; sia S_1 il sistema di queste pressioni; avremo quindi

$$\text{lav.}\, S + \text{lav.}\, S_1 > 0\,.$$

Ma se lo spostamento impresso è invertibile, per ciò che si è detto, risulta, lav. $S_1 = 0$, onde, contrariamente alla ipotesi, si ha lav. $S < 0$.

Se invece lo spostamento non è invertibile, deve risultare certamente lav. $S_1 > 0$, cioè le varie pressioni vincolari debbono risultar tutte positive.

La dimostrazione data non considerando che speciali sistemi materiali, non può certamente ritenersi per assolutamente generale. Tuttavia siccome il principio esposto, come ora vedremo, si presta assai bene alla ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio dei sistemi materiali; così esso si suole applicare, ammesso come *principio generale*, anche a quei casi in cui, a rigore, non è applicabile la dimostrazione precedente; salvo poi, con altro procedimento, a verificare se le condizioni trovate con tal mezzo assicurano l'equilibrio.

Tale principio poi conduce alla seguente conseguenza, che in alcui casi speciali abbiamo giustificato:

Il lavoro virtuale delle reazioni o pressioni vincolari è nullo o positivo secondo che gli spostamenti sono invertibili o no. (*)

(*) Il principio dei lavori o delle velocità virtuali, le cui prime traccie si riscontrano negli scritti di Aristotele e di Erone [vedi: Vailati, *Il principio dei l. v. da Aris. ad Er.* in Atti R. Acc. Torino, **32**, p. 940 (1896-97)]; in quelli di Galileo che lo riconobbe in quasi tutte le macchine semplici [Opere, Ediz. Naz. **2**, *le Mecaniche*];

§ 5. Equazioni generali dell' equilibrio di un sistema materiale ricavate dal principio dei lavori virtuali.

a) Se gli spostamenti dei vari punti del sistema si esprimono mediante gli spostamenti di altri n parametri $q_1, \ldots q_n$ arbitrari; cioè se

$$\delta x = a_1 \delta q_1 + a_2 \delta q_2 + \ldots ; \text{ ecc.},$$

di DESCARTES, ecc., fu enunciato senza dimostrazione da GIOV. BERNOULLI (1717) in una lettera a VARIGNON, il quale, nell'opera citata al § 4 del Cap. precedente, **2**, pag. 171-223, lo dimostrò e verificò nei casi più semplici. Vedasi pure l'opera del DUHEM, *Les origines de la Statique*, già citata.

Posto a fondamento della Meccanica analitica da LAGRANGE ed ammesso come postulato (1788), fu dimostrato da FOURIER, *Mém. sur la statique contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles* [J. de l'Éc. Polytech., **5** (1798); Oeuvres, 2, p. 477]; e la sua dimostrazione, con qualche lieve variante, abbiamo seguito nel testo. Anche a FOURIER è dovuta la considerazione degli spostamenti non invertibili e quindi (salvo un cambiamento di segno) l'enunciato generale come al § 4.

LAGRANGE, che nella successiva edizione della *Méc. Analyt* (1811) e poi nel *Traité des fonc. analyt.* (1813) ha date due dimostrazioni del principio, non ha tenuto conto degli spostamenti non invertibili.

Le idee di FOURIER furono riprese da A. COURNOT, *Extension du principe des vitesses virtuelles au cas où les conditions des liaisons du système sont exprimées par des inégalités* [Bull. de Férussac, **8** (1827)]; alle stesse giunse

allora, poichè per gli spostamenti invertibili deve essere

$$(4) \qquad \Sigma (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0,$$

fatte le sostituzioni, la (4) si trasformerà nella

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots = 0 ;$$

quindi per l'arbitrarietà delle δq_1, $\delta q_2, \ldots$ risulteranno le equazioni generali di equilibrio

$$(5) \qquad Q_1 = Q_2 = \ldots = 0.$$

GAUSS, *Gesamm. Werke*, **5**, p. 35, nel 1829 e in una lettera a MÖBIUS nel 1837: è GAUSS che ha proposto il nome di *spostamenti facoltativi*. Vedi anche in proposito una memoria di OSTROGRADSKY: *Considérations générales sur les moments des forces* (1834). [Mém. de l'Ac. de St. Pétersbourg (6) **1**, pp. 229-150 (1838)].

Tra le varie dimostrazioni dirette ed indirette, ma non preferibili a quella di FOURIER, notiamo quella di POINSOT, *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement* [J. de l'Éc. Polytech., **13**, p. 206-241 (1806)]; di AMPÈRE, *Dém. générale du principe des vit. virt. dégagée de la considération des infiniment petits* [Ibid., p. 247-269]; di NEUMANN [Berich. der Säch. Gesell. der Wiss. zu Leipzig, **31** (1879), p. 53 e **38** (1886), p. 70; Mathem. Ann., **27** (1886), p. 502].

Oltre l'opera del DUHEM si veda pure: LINDT, *Das Prinzip der virt. Geschwindigkeiten* [Abhand. zur Geschichte der math. Wiss. **18** (1904), p. 147], nonchè BOLTZMANN, *Vorl. ü. die Princ. der Mechanik*, **1**, § 33. Leipzig, 1897.

b) Ma, nel caso più generale, supponiamo che gli spostamenti invertibili soddisfino ad un certo numero di equazioni lineari ed omogenee

$$(6) \qquad \Sigma\,(A_i\,\delta x + B_i\,\delta y + C_i\,\delta z) = 0.$$

Però le δx, δy, δz dei vari punti non sono tutte arbitrarie; e si potranno dividere tutti gli spostamenti in un gruppo di arbitrari; e in un altro gruppo di spostamenti che, conforme alle (6), saranno funzioni lineari ed omogenee dei primi e che diremo *dipendenti*. Ora il nostro scopo è di eliminare dalla (4) gli spostamenti dipendenti e possiamo procedere in due modi: o risolvendo il sistema (6) rispetto agli spostamenti dipendenti, oppure operando col metodo dei *moltiplicatori*.

Moltiplichiamo cioè le (6) rispettivamente per delle funzioni (incognite) λ_1, λ_2,.... e sommiamo colla (4); otterremo una nuova equazione lineare ed omogenea nelle δx, δy, δz, cioè

$$\Sigma\,[(X + \lambda_1 A_1 + ...)\,\delta x + (Y + \lambda_1 B_1 + ...)\,\delta y + (Z + \lambda_1 C_1 + ...)\,\delta z] = 0.$$

Ma le λ sono in numero eguale agli spostamenti dipendenti; e però possiamo disporne per annullare, nella precedente, i coefficienti di questi spostamenti. Dopo ciò la stessa equazione conterrà, linearmente ed omogeneamente, i soli spostamenti arbitrari; e allora anche i coefficienti di questi debbono essere nulli, perchè posso sceglierli in modo che siano tutti nulli meno uno; cioè, in breve, tutti i coefficienti della equazione ottenuta si pongono eguali a zero. Avremo quindi gruppi di equazioni come il seguente

$$(7) \qquad \begin{cases} X + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + ... = 0 \\ Y + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + ... = 0 \\ Z + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + ... = 0. \end{cases}$$

Eliminando tra queste equazioni le funzioni incognite λ in tutti i modi possibili avremo le equazioni *necessarie* per l'equilibrio. Supposto che queste siano verificate, le (7) ci permetteranno di determinare le λ; noi supporremo che le λ risultino finite e diverse da zero.

Passiamo alla considerazione degli spostamenti non invertibili. Moltiplichiamo le (7), che si suppongono verificate, rispettivamente per δx, δy, δz, componenti di uno spostamento qualunque δP; sommiamo e facciamo lo stesso per tutte le equazioni analoghe; le λ essendo comuni a tutte le equazioni, avremo

$$(8) \qquad \Sigma\,(X\,\delta x + ...) + \lambda_1\,\Sigma\,(A_1\,\delta x + ...) + \lambda_2\,\Sigma\,(A_2\,\delta x + ...) + ... = 0,$$

la quale è valida per *qualunque spostamento*. Per gli spostamenti invertibili essa si riduce identicamente a zero; per gli spostamenti non invertibili, essendo il primo termine negativo, sarà

$$(9)\quad \lambda_1 \Sigma(A_1 \delta x + ...) + \lambda_2 \Sigma(A_2 \delta x + ...) + ... > 0.$$

Consideriamo uno speciale sistema di spostamenti non invertibili; precisamente uno spostamento per cui

$$(10)\qquad \Sigma(A_k \delta x + ...) \gtrless 0,$$

mentre tutte le altre somme analoghe sono nulle. Risulta

$$\lambda_k \Sigma(A_k \delta x + ...) > 0,$$

cioè λ_k deve avere lo stesso segno del primo membro della (10); e ciò vale per $k = 1, 2, ...$ Ora poi è facile concludere che se sono soddisfatte le equazioni che si deducono dalle (7) colla eliminazione delle λ, e se per le λ si ricavano valori finiti e diversi da zero e dello stesso segno dei primi membri di (10), pel caso degli spostamenti non invertibili; allora la (9) ha luogo per ogni sistema di spostamenti non invertibili e quindi da (8) si deduce che, per esso, il lavoro virtuale di tutte le forze è negativo.

Le condizioni enunciate sono dunque necessarie e sufficienti. (*)

(*) Le considerazioni sul metodo dei moltiplicatori sono di LAGRANGE, *Méc. analytique*. Oeuvres, II, p. 77; quelle relative ai segni di λ sono di OSTROGRADSKY nella mem. citata al § precedente.

Le (7) ricevono una semplice interpretazione; supponiamo che esse si riferiscano ad un punto P del sistema, in cui è applicata la forza di vettore $\mathbf{f}$. Tal punto, per l'azione di questa forza e per quella dei vincoli è in equilibrio. Tolti i vincoli, supposto cioè isolato il punto, l'equilibrio non avrà più luogo; ma se però, nel tempo stesso, supponiamo il punto soggetto oltre che alla forza data, ad altre forze applicate in P e i cui vettori $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$,.... hanno per componenti ortogonali rispettivamente $\lambda_1 A_1, \lambda_1 B_1, \lambda_1 C_1$; ecc., le (7) esprimono che la risultante di $\mathbf{f}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ .... è nulla; ed il punto quindi è in equilibrio come se agissero ancora i vincoli. Si può dunque dire che le forze di vettori $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$,.... rappresentano le reazioni vincolari in P.

Nel caso speciale dei sistemi olonomi, se $f_i = 0$ è l'equazione di uno dei vincoli, si ha

$$A_i = \frac{\partial f_i}{\partial x}, \quad B_i = \frac{\partial f_i}{\partial y}, \quad C_i = \frac{\partial f_i}{\partial z};$$

quindi la $\mathbf{r}_i$ è normale alla superficie $f_i = 0$, quando in essa si consideri variabile il solo $P(x, y, z)$.

§ 6. **Stabilità dell'equilibrio.** — Si dice che una forza di vettore $\mathbf{f}$ deriva da un potenziale U, quando

$$(11)\qquad \mathbf{f} = \mathrm{grad}_P\, U,$$

essendo U una funzione del punto d'applicazione P (Par. I, Cap. 1°, § 5). Il lavoro virtuale di tale forza è quindi espresso da

$$\mathbf{f} \times \delta P = \delta_P U;$$

e quello di tutto il sistema di forze, derivanti tutte dallo stesso potenziale, da

$$\Sigma \mathbf{f} \times \delta P = \Sigma \delta_P U = \delta U$$

avendo accennato con δU la somma dei vari differenziali della funzione U.

Si può dunque dire:

Quando le forze che sollecitano un sistema vincolato derivano da un potenziale, le posizioni di equilibrio sono tali che in esse

$$\delta U = 0. \tag{12}$$

In tal caso la U può assumere un valore massimo; se ciò effettivamente ha luogo, allora dimostreremo (Parte III, Cap. 4°) che spostando infinitamente poco il corpo dalla sua posizione di equilibrio, imprimendo ai vari suoi punti una piccola velocità, le oscillazioni compiute dal corpo saranno comprese tra limiti assai ristretti; si dice che l'equilibrio è *stabile*. (*)

Nel caso di un sistema pesante le forze sono tutte parallele all'asse z, verticale verso l'alto, e

(*) LAGRANGE, *Méc. Analytique*; Oeuvres, **II**, pag. 69. Nel 2° volume daremo maggiori notizie bibliografiche.

proporzionali ai vari elementi di volume in cui può decomporsi il corpo; cioè

$$\mathbf{f} = -\rho\, \mathbf{k}\, d\tau.$$

Quindi

$$\mathbf{f} \times \delta P = -\rho\, d\tau . \mathbf{k} \times \delta P = -\rho\, d\tau . \delta z$$
$$= \delta(-\rho\, z\, d\tau);$$

cioè le forze derivano effettivamente dal potenziale

$$U = -\Sigma \rho\, z\, d\tau = -\rho \int z\, d\tau = -\rho V \zeta$$

se indichiamo con V il volume e con ζ la z del centro di massa. Dunque:

Nel caso dei sistemi pesanti le condizioni di equilibrio si riducono alla

$$\delta \zeta = 0,$$

e vi ha stabilità se il centro di massa è alla minima distanza da un piano orizzontale. (*)

§ 7. Alcune applicazioni del principio dei lavori virtuali.

a) *Una piccola sferetta è posta sulla superficie di un corpo solido ed è soggetta ad una forza di vettore* **f**; *condizioni di equilibrio.*

Se P è il punto d'applicazione si ha

$$\mathbf{f} \times \delta P \leqq 0;$$

(*) TORRICELLI, *Opera geometrica. De Motu*, lib. I, p. 79. Florentiae 1644. Cfr. DUHEM, *Les origines de la Statique*, 2, Paris 1906.

inoltre se $\mathbf{n}$ è un vettore unità parallelo alla normale in P e diretto verso l'interno del corpo, si ha

$$\mathbf{n} \times \delta P \geqq 0$$

secondo si tratta di spostamenti invertibili o no. Col metodo del § precedente risulta quindi

$$\mathbf{f} + \lambda \mathbf{n} = 0$$

e inoltre $\lambda < 0$; si conclude che la forza è normale alla superficie e rivolta verso l'interno del corpo.

Si trovano subito le condizioni in coordinate ortogonali; se $f = 0$ è l'equazione della superficie, e notiamo che $\delta f = 0$ per gli spostamenti invertibili, mentre è, per es., $\delta f > 0$ per quelli non invertibili, risulta conformemente alle (7),

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Eliminando λ si ottengono due equazioni, atte a determinare, colla equazione della superficie, le coordinate dei punti in cui potrà aver luogo l'equilibrio. In questi punti poi l'equilibrio avrà luogo effettivamente se il valore di λ risulta positivo.

b) *Trovare le condizioni di equilibrio di un sistema di forze che sollecita un corpo rigido.*

In questo caso, detto τ un tempuscolo infinitamente piccolo, e ricordando la solita formula

fondamentale di cinematica, si ha

$$\delta P = \tau \{ O' + \Omega \wedge (P - O) \}.$$

Se quindi $\mathbf{f}$ è il vettore della forza applicata in P, si ha

$$\begin{aligned} \text{lav.}\, S &= \Sigma\, \mathbf{f} \times \delta P \\ &= \tau \{ O' \times \Sigma\, \mathbf{f} + \Omega \times \Sigma (P - O) \wedge \mathbf{f} \}, \end{aligned}$$

ossia dicendo $\mathbf{R}$ il vettore, $\mathbf{M}$ il momento risultante del sistema, rispetto al punto O,

$$\text{lav.}\, S = \tau \{ O' \times \mathbf{R} + \Omega \times \mathbf{M} \}.$$

Rispetto ad una terna x, y, z connessa col corpo, colle solite notazioni si ottiene

$$\text{lav.}\, S = \tau (u_0 R_x + v_0 R_y + w_0 R_z + p M_x + q M_y + r M_z)$$

(Parte I, Cap. 4°, § 1 e Parte II, Cap. 1°, § 5).

Se il corpo è libero, dovendo essere lav. $S = 0$ per qualunque spostamento, e quindi qualunque siano O' ed Ω, risulta

$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M} = 0$$

come abbiamo già trovato al Cap. precedente. Esse equivalgono a *sei* condizioni.

Se il corpo ha un punto fisso O, avremo solamente

$$\mathbf{M} = 0;$$

le condizioni di equilibrio si riducono a *tre*.

Se poi il corpo ha due punti fissi, sarà nullo il prodotto

$$\Omega \times \mathbf{M} = 0,$$

cioè è nullo il momento del sistema rispetto l'asse fisso; le condizioni si riducono a *una*.

Se infine il sistema rigido riposa con uno o più punti su di un piano fisso, per es. $x\,y$, e la z è positiva dalla parte del corpo, abbiamo

$$u_0 R_x + \dots + p\, M_x + \dots = 0$$

e inoltre

$$w_0 + p\, y - q\, x \geqq 0$$

secondo che gli spostamenti sono invertibili o no.

Procedendo secondo il metodo generale si hanno le equazioni

$$R_x = R_y = M_z = 0, \quad R_z + \lambda = 0,$$
$$M_x + \lambda y = 0, \quad M_y - \lambda x = 0, \quad \lambda > 0.$$

L' invariante del sistema è nullo e inoltre $R_z < 0$; dunque il sistema di forze è riducibile ad una forza unica normale al piano e diretta secondo le z negative. Se diciamo R la grandezza di questa risultante, ξ, η le coordinate del punto in cui essa incontra il piano, dalle precedenti ricaviamo

$$M_x = \eta\, R \quad , \quad M_y = -\xi\, R.$$

Per questo punto, come per ogni altro dei punti x, y di contatto si ha

$$w_0 + p\,\eta - q\,\xi > 0 \quad , \quad w_0 + p\, y - q\, x > 0;$$

cioè i punti di contatto e il punto d'applicazione della risultante giacciono tutti da una stessa parte di una retta del piano, quindi se si traccia il poligono convesso avente i vertici in certi punti di contatto, in modo che i restanti giacciano nel suo interno, anche il punto d' applicazione della risultante deve cadere nell'interno.

Esercizi.

1. Un punto pesante è posto su di una ellissi il cui asse minore è verticale, ed è respinto dallo stesso proporzionalmente alla distanza. Posizione di equilibrio.

Si ha

$$X = k^2 x \quad , \quad Y = -p$$

$$k^2 x\, \delta x - p\, \delta y = 0 \quad , \quad \frac{x}{a^2}\, \delta x + \frac{y}{b^2}\, \delta y = 0,$$

e quindi

$$x\left(k^2 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\lambda\, y}{b^2} = p\,.$$

Per $x = 0$, il punto sta negli estremi dell'asse minore, la pressione è eguale al peso.

Poi $y = -p\, b^2 : k^2 a^2$, purchè risulti minore di b. Il punto giace dalla parte delle y negative; la pressione è diretta secondo la normale esterna; il punto è quindi appoggiato contro la parte concava.

2. Lo stesso per un punto pesante su di una parabola ad asse verticale e colla concavità in alto, ed attratto da un punto A della tangente al vertice proporzionalmente alla distanza.

Si ha

$$x^2 = 2\,m\,y \quad , \quad X = k^2\,(a - x) \quad , \quad Y = -p - k^2\,y,$$

e come prima

$$k^2\,(a - x) + \lambda\,x = 0 \quad , \quad p + k^2\,y + \lambda\,m = 0;$$

λ è negativo, x è positivo e $< a$; inoltre

$$f(x) = x^3 + 2\,m\left(\frac{p}{k^2} + m\right)x - 2\,m^2\,a = 0.$$

Questa equazione ha una sola radice reale positiva, compresa tra 0 ed a perchè

$$f(0) < 0 \quad , \quad f(a) > 0;$$

si ha dunque una sola posizione di equilibrio.

3. Due pesi uguali sono posti su di una parabola ad asse verticale e si respingono con una forza inversamente proporzionale alla distanza. Posizione di equilibrio.

I punti (x, y), (x', y') siano alla distanza r; procedendo come prima si ha

$$\frac{k^2}{r^2}\,(x - x')\,m + \frac{k^2}{r^2}\,(y - y')\,x - p\,x = 0$$

$$\frac{k^2}{r^2}\,(x - x')\,m + \frac{k^2}{r^2}\,(y - y')\,x' + p\,x' = 0.$$

Eliminando p, si ha

$$\frac{k^2}{r^2}\,m\,(x - x')\,(x + x') + \frac{2\,k^2}{r^2}\,(y - y')\,x\,x' = 0;$$

e tenendo conto dell'equazione della curva, si ottiene

$$x\,x' = -m^2.$$

Poscia sottraendo le equazioni, con qualche riduzione, si ha

$$(x + x')\left\{(x + x')^2 + 4\,m^2 - \frac{2\,m\,k^2}{p}\right\} = 0,$$

Se $x + x' = 0$, risulta evidentemente

$$x = -x' = \pm\,m;$$

ponendo invece eguale a zero l'altro fattore, potremo ricavare $x + x'$ purchè $k^2 > 2\,m\,p$; ecc.

4. Lo stesso per un punto pesante su di un'elica ad asse verticale, respinto con intensità inversamente proporzionale al quadrato della distanza da un punto dell'asse.

Le componenti della forza sono

$$k^2\,x : r^3 \quad , \quad k^2\,y : r^3 \quad , \quad k^2\,z : r^3 - p;$$

inoltre

$$x\,\delta x + y\,\delta y = 0$$

quindi

$$k^2\,z : r^3 - p = 0.$$

Posto

$$r^2 = a^2 + z^2 = u, \quad \frac{k^2}{p} = m,$$

risulta

$$u^3 - m^2\,u + m^2\,a^2 = 0.$$

Ha una radice reale negativa, da escludere; le altre due debbono essere positive e maggiori di a^2.

5. Un'asta rettilinea pesante poggia su di un pernio orizzontale C e con una estremità A contro un muro verticale. Posizione di equilibrio e reazioni.

Sia G il centro di massa, p il peso dell'asta, $A\,G = a$ e c la distanza di C dal muro verticale; R la grandezza della reazione in C e normale all'asta, N la grandezza di quella in A. Proiettando su di una orizzontale e su di

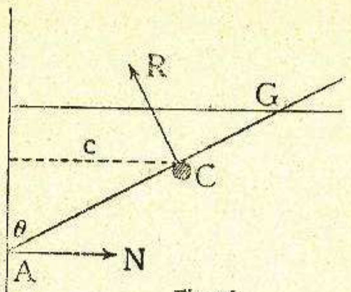

Fig. 26.

una verticale:

$$-R\cos\theta + N = 0$$
$$R\operatorname{sen}\theta - p = 0;$$

esprimendo quindi che il momento di tutte le forze rispetto al punto A è nullo, si ha

$$p\,a\operatorname{sen}\theta - R\,.\,AC = 0.$$

Da queste agevolmente si ricava il valore dell'angolo acuto θ tale che

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt[3]{c:a};$$

saranno quindi determinate le reazioni.

Si può procedere in altro modo, col principio di Torricelli. Se ζ è l'ordinata di G, rispetto l'orizzontale di C, abbiamo

$$\zeta = a\cos\theta - c\operatorname{cotg}\theta.$$

Cerchiamone i valori massimi o minimi. Si ha

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = -a\operatorname{sen}\theta + \frac{c}{\operatorname{sen}^2\theta} = 0;$$

donde

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt[3]{c:a}.$$

Inoltre:

$$\frac{d^2\zeta}{d\theta^2} = -\left(a\cos\theta + \frac{2c}{\operatorname{sen}^3\theta}\cos\theta\right) < 0;$$

si ha dunque un massimo; quindi l'equilibrio è *instabile*.

Ad ogni valore di θ e di a corrisponde un valore per c e quindi un punto C il cui luogo è una curva, sulla quale appoggiando l'asta, essa è in ogni posizione in

equilibrio. Essendo $d\zeta = 0$, il luogo di G è una orizzontale; AG essendo costante, il luogo di C è un'astroide.

6. Un'asta rettilinea pesante AB può ruotare intorno ad un asse orizzontale in A; una fune accavalciata ad una carrucola C, situata sulla verticale in A, sostiene B e all'altra estremità M porta un peso Q mobile su di una curva. Come deve essere tale curva perchè in qualunque posizione del punto M su di essa si abbia equilibrio?

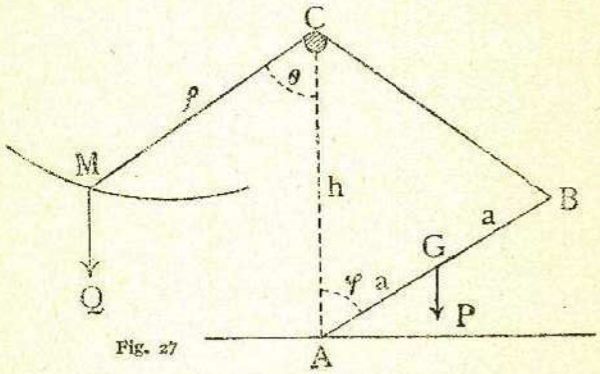

Fig. 27

Sia $\rho = f(\theta)$ l'equazione della curva in cui giace M e pongasi

$$AB = 2a \quad , \quad BC + CM = l$$
$$(l-\rho)^2 = 4a^2 + b^2 - 4ab\cos\varphi.$$

Il sistema non può ricevere che una rotazione intorno ad A e nel piano della figura; quindi per l'equilibrio

$$p\,a\operatorname{sen}\varphi\,\delta\varphi - Q\,\delta(\rho\cos\theta) = 0.$$

Col solito metodo dei moltiplicatori si deduce

$$p + 2\lambda_1 b = 0 \quad , \quad -Q\cos\theta + \lambda_2 + \lambda_1 (l - \rho) = 0$$
$$Q\rho \operatorname{sen}\theta - \lambda_2 f'(\theta) = 0.$$

Eliminando λ_1 e λ_2 otteniamo

$$(l - \rho)\, d\rho + \frac{2bQ}{p}\, d(\rho\cos\theta) = 0\,;$$

integrando e sviluppando

$$\rho^2 = 2(l + b\cos\theta)\rho + \text{cost.} \quad , \quad b = \frac{2bQ}{p}\,,$$

che rappresenta una ovale di CARTESIO. Se poi la curva passa per C, si ha

$$\rho = 2(l + b\cos\theta)$$

lumaca di PASCAL (vedi LORIA, l. c., pag. 140).

7. È dato un poligono piano snodato nei vertici; ogni asta è soggetta ad una forza normale, proporzionale alla lunghezza del lato e applicata nel punto di mezzo. Configurazione dl equilibrio.

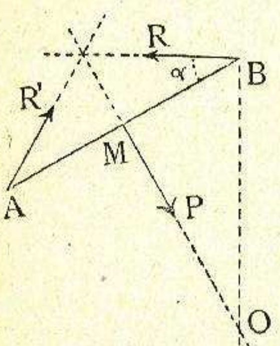

Fig. 28.

Siano R e R' le grandezze delle reazioni dei lati contigui ad AB; per l'azione di queste pressioni e della forza P il lato AB è in equilibrio: onde $R = R'$ e le loro linee d'azione concorrono in un punto di P. Inoltre

$$R = P : 2\operatorname{sen}\alpha; \quad P = k \cdot AB$$
$$R = k\,AB : 2\operatorname{sen}\alpha = k \cdot BO.$$

Considerando il lato successivo BC, la normale nel suo punto medio incontrerà BO in un punto O', tale che (la reazione essendo la stessa) $R = k \cdot BO'$; cioè O' coincide con O e il poligono risulta inscritto in un cerchio.

8. Determinare le condizioni di equilibrio di un filo flessibile e inestensibile, i cui punti $A_0, A_1, A_2, \ldots A_n$ (a distanza fissa tra di loro) sono sollecitati da forze di vettori $\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \ldots \mathbf{f}_n$. (Poligono funicolare).

Procedendo al modo solito si ottengono le equazioni

$$\mathbf{f}_0 - \lambda_1 (A_1 - A_0) = 0$$
$$\mathbf{f}_r + \lambda_r (A_r - A_{r-1}) - \lambda_{r+1} (A_{r+1} - A_r) = 0 \quad (r = 1, \ldots, n-1)$$
$$\mathbf{f}_n + \lambda_n (A_n - A_{n-1}) = 0.$$

Basta infatti riflettere che una qualunque delle equazioni dei vincoli è

$$f_r = (A_r - A_{r-1})^2 = l_r^2 = \text{cost.}$$

quindi:

$$(A_r - A_{r-1}) \times (\delta A_r - \delta A_{r-1}) \leqq 0$$

secondo che gli spostamenti sono invertibili o no. Quindi le λ_r sono negative. Posto

$$\lambda_r = -\tau_r : l_r \quad , \quad \tau_r > 0$$

sarà τ_r la tensione del lato r^{mo}. Le equazioni di equilibrio diventano

$$\mathbf{f}_r - \tau_r \frac{A_r - A_{r-1}}{l_r} + \tau_{r+1} \frac{A_{r+1} - A_r}{l_{r+1}} = 0$$

valida per $r = 0, 1, \ldots n$, purchè si ammetta $\tau_0 = 0$, $\tau_{n+1} = 0$.

Le forze agli estremi hanno le direzioni dei lati; la forza nel vertice A_r è complanare coi due lati ivi concorrenti. Se le forze sono concorrenti, il poligono è piano.

Le equazioni scritte sono $3n+3$: eliminando le τ, avremo $2n+3$ condizioni di equilibrio.

9. Determinare le condizioni di equilibrio di un poligono piano articolato i cui lati sono soggetti a forze applicate in un loro punto.

Siano $A_0, A_1, \ldots A_n = A_0$ i vertici; $A'_0, A'_1, \ldots$ le posizioni che rispettivamente assumono in uno spostamento virtuale del poligono nel proprio piano. Dalla prima si passa alla seconda con una traslazione δA_0, una rotazione $\delta\omega_0$ intorno A_0, $\delta\omega_1$ intorno A_1, ecc.; quindi

$$\delta A_r = \delta A_0 + i(A_r - A_0)\,\delta\omega_0 + i(A_r - A_1)\,\delta\omega_1 \ldots + i(A_r - A_{r-1})\,\delta\omega_{r-1}$$

in cui l'operatore i ha un significato noto. Essendo poi $\delta A_n = \delta A_0$ si ha

$$(a)\quad (A_n - A_1)\,\delta\omega_1 + \ldots + (A_n - A_{n-1})\,\delta\omega_{n-1} = 0.$$

In un punto B_r del lato $A_{r-1}A_r$ sia applicata una forza di vettore $\mathbf{f}_r$; poichè

$$B_r = A_{r-1} + \alpha_r (A_r - A_{r-1}),$$

si deduce agevolmente

$$\delta B_r = \delta A_0 + i(B_r - A_0)\,\delta\omega_0 + i(B_r - A_1)\,\delta\omega_1 \ldots + i(B_r - A_{r-1})\,\delta\omega_{r-1}.$$

Sostituendo nella equazione dei lavori virtuali

$$\mathbf{f}_1 \times \delta B_1 + \ldots + \mathbf{f}_n \times \delta B_n = 0$$

e ponendo a zero i coefficienti di δA_0, $\delta\omega_0$, che non figurano in (a), otteniamo anzitutto

$$\Sigma\,\mathbf{f}_r = 0 \quad , \quad \Sigma\, i(B_r - A_0) \times \mathbf{f}_r = 0\,;$$

le quali esprimono, come doveva essere, che è nulla la risultante ed il momento risultante delle forze. L'equazione

risultante, posto

$$K_s = \sum_{r=s}^{n} i(B_r - A_{s-1}) \times \mathbf{f}_r$$

diventa

$$K_2\,\delta\omega_1 + \ldots + K_n\,\delta\omega_{n-1} = 0.$$

Da questa e dalla (a) al modo solito si ottengono le equazioni di equilibrio, che in coordinate ortogonali si scrivono così

$$K_s + \lambda(x_n - x_{s-1}) + \mu(y_n - y_{s-1}) = 0.$$

Eliminando λ ed μ da queste $n-2$ equazioni, troveremo le $n-4$ condizioni di equilibrio: per es.:

$$\begin{vmatrix} K_s & x_n - x_{s-1} & y_n - y_{s-1} \\ K_{n-1} & x_n - x_{n-2} & y_n - y_{n-2} \\ K_n & x_n - x_{n-1} & y_n - y_{n-1} \end{vmatrix} = 0 \quad (s = 2, \ldots n-2).$$

Fissati, ad esempio, A_n, A_{n-1}, A_{n-2} e riguardando K_s come funzione di x_{s-1} e y_{s-1}, l'equazione precedente rappresenta una curva su cui trovasi A_{s-1}.

Se i tre punti sono in linea retta, sparisce il termine in K_s e l'equazione rappresenta una retta. Nel caso dell'esercizio 7, si ha

$$X_r = -2k^2(y_r - y_{r-1}) \quad ; \quad Y_r = 2k^2(x_r - x_{r-1})$$

$$K_s = 2k^2 \sum_{r=s}^{n} \left[\left(\frac{x_r + x_{r-1}}{2} - x_{s-1}\right)\left(x_r - x_{r-1}\right) + \ldots\right]$$
$$= k^2\left[(x_n - x_{s-1})^2 + (y_n - y_{s-1})^2\right].$$

I vertici sono su di un cerchio.

10. Un punto M pesante è attratto da due punti fissi A e B proporzionalmente alla distanza ed è collegato col punto medio O di AB me-

diante un'asta sottilissima girevole in O. Posizione di equilibrio.

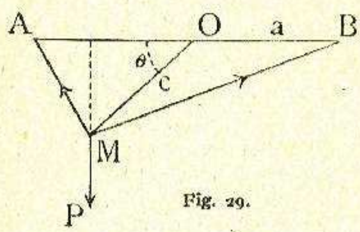

Fig. 29.

Il lavoro virtuale del peso p è

$$p\,\delta\,(c \text{ sen } \theta)\,;$$

quello delle altre due forze è

$$-\alpha \cdot AM \cdot \delta AM$$
$$-\beta \cdot BM \cdot \delta BM$$
$$= -\frac{1}{2}\,\delta.(\alpha\, \overline{AM}^2 + \beta\, \overline{BM}^2)$$
$$= a\,c\,(\beta - \alpha) \text{ sen } \theta\, \delta\, \theta$$

(α e β costanti).

Il lavoro totale è espresso da

$$\delta\, U = [a\,(\beta - \alpha) \text{ sen } \theta + p \cos \theta]\, c\, \delta\, \theta.$$

Quindi nella posizione di equilibrio

$$\text{tang } \theta = p : a\,(\alpha - \beta).$$

Inoltre

$$\delta^2\, U = [a\,(\beta - \alpha) \text{ cotg } \theta - p]\, c \text{ sen } \theta\, \delta\, \theta^2$$

e poichè, col valore trovato per θ,

$$a\,(\beta - \alpha) \text{ cotg } \theta - p = -\frac{a^2\,(\alpha - \beta)^2}{p} - p < 0,$$

risulta $\delta^2 U < 0$. La U è massima e l'equilibrio è stabile.

11. Un'asta AB girevole in A è attaccata mediante un filo nel centro di gravità B; il filo passa su di una piccola carrucola C situata sulla

verticale di A e sostiene in D un peso Q. Inoltre $AB = AC$; posizione di equilibrio.

Risulta, detta l la lunghezza del filo,

$$DC = l - 2\,a \cos \theta\,;$$

procedendo come nell'esercizio precedente, le posizioni di equilibrio sono determinate da

$$\delta\, U = 2\,a\,[-p \text{ sen } 2\,\theta + Q \text{ sen } \theta]\, \delta\, \theta = 0$$

donde

$$\theta = 0, \qquad \text{o} \qquad \cos \theta = \frac{Q}{2\,p}\,.$$

Pel primo valore risulta

$$\delta^2\, U = (-2\,p + Q)\, \delta\, \theta^2$$

l'equilibrio è stabile se

$$Q < 2\,p\,;$$

per l'altro valore (essendo sempre $Q < 2\,p$) risulta

$$\delta^2\, U > 0,$$

l'equilibrio non è stabile.

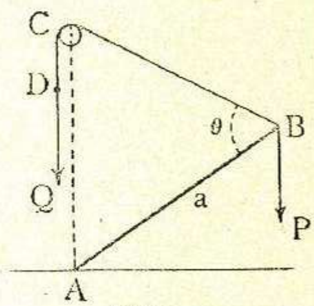

Fig. 30.

12. Un'asta rigida è appoggiata in A nella parete interna di un vaso a forma semisferica e in B sull'orlo orizzontale del vaso. Posizione di equilibrio.

La figura è contenuta in un piano verticale. La ζ del centro di gravità G è

$$\zeta = (2\,r \cos \theta - l) \text{ sen } \theta.$$

Esprimendo che $\delta\, \zeta = 0$ e ponendo

$$x = \cos \theta \quad , \quad a = l : r$$

risulta

$$f(x) = 4x^2 - ax - 2 = 0.$$

Ma $AB < 2l$; onde $x < a$; perchè l'equazione abbia la radice positiva minore di a, occorre che

$$\sqrt{\frac{2}{3}} < a < 2.$$

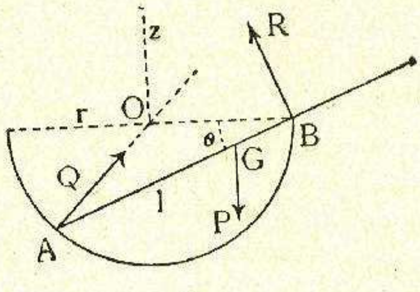

Fig. 31.

Quanto alle reazioni in A e B, si ha

$$Q \cos 2\theta - R \operatorname{sen} \theta = 0 \quad , \quad Q \operatorname{sen} 2\theta + R \cos \theta = p,$$

da cui

$$Q = p \operatorname{tang} \theta \quad ; \quad R = \frac{pl}{2r} .$$

13. Stabilità dell'equilibrio di un corpo pesante a contatto con una superficie fissa.

Supponiamo, per semplicità, che il corpo pesante abbia un piano di simmetria, contenente il centro di massa G, e che taglia il corpo e la superficie fissa secondo due curve Γ e Γ_1.

Se C è il punto di contatto e le due superficie sono levigate, per l'equilibrio è necessario e basta che la retta

CG sia verticale e normale a Γ_1 e inoltre la direzione del peso sia volta verso l'interno di Γ_1. Immaginando spostato il corpo, oppure Γ su Γ_1, secondo che la traiettoria di G presenta rispetto a C la convessità o la concavità, l'equilibrio sarà stabile o instabile. Ma riguardando Γ e Γ_1 come le due curve di C (centro istantaneo di rotazione) e costruendo il cerchio dei flessi (vedi p. 148) possiamo dire che l'equilibrio è stabile se G cade entro questo cerchio; instabile se cade fuori. Però il cerchio dei flessi dicesi anche *cerchio di stabilità*.

Così se una semisfera pesante di raggio R' poggia in C sulla sommità di una sfera di raggio R, è certamente soddisfatta la prima condizione: il cerchio di stabilità ha per raggio $RR' : (R + R')$; il centro di gravità G dista da C di $\frac{5}{8} R'$ (vedi eserc. 16, Cap. prec.); dunque si ha la stabilità se

$$\frac{5}{8} R' < \frac{RR'}{R + R'}$$

cioè se

$$R' < \frac{3}{5} R ;$$

mentre se la sfera è poggiata nel punto infimo si ha sempre stabilità.

[THOMSON a. TAIT, *Nat. Philos.*, 2, pag. 111 (1895), ROUTH, *Analyt. Statics*, I, p. 172 (1896)].

14. Stabilità dell'equilibrio di un sistema astatico.

Supponiamo che un sistema astatico di forze, applicato ad un corpo rigido, si riduca ad una coppia di braccio AB e di forze di vettori $\mathbf{f}$ e $-\mathbf{f}$. Scegliendo l'origine in

A, il viriale del sistema (eserc. 21, Cap. prec.) è espresso da $\mathbf{f} \times (B - A)$; quindi esso è massimo se $\mathbf{f}$ ha la direzione ed il senso di $B - A$; minimo se ha il senso contrario; cioè in ogni caso quindi il sistema è in equilibrio. Ma nel primo caso, fermo restando il corpo, se spostiamo infinitamente poco la direzione di $B - A$ si origina una nuova coppia il cui senso è opposto a quello della rotazione; nel secondo caso la coppia ha invece senso concorde; e però l'*equilibrio è stabile o instabile secondo che il viriale è massimo o minimo*. Essendo

$$V = \Sigma(Xx + Yy + Zz)$$

per l'equilibrio si ha effettivamente

$$\delta V = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Riflettendo poi che, per le note espressioni di δx, δy, δz,

$$\delta V = \tau \{ u_0 \Sigma X + ... + p\Sigma(Zy - Yz) + ... \}$$

si deduce

$$\delta^2 V = \tau \{ p\Sigma(Z\delta y - Y\delta z) + ... \}$$

ossia, tenendo presenti le condizioni di equilibrio, e le posizioni fatte all'eserc. 7 del Cap. precedente,

$$\delta^2 V = \tau^2 S$$

dove

$$S = -(A_{22} + A_{33})p^2 - .... + 2A_{12}pq + ...$$

È però, secondo che S, forma quadratica omogenea di p, q, r, è definita negativa o positiva, l'equilibrio è stabile o instabile.

[MÖBIUS, l. c., **I**, Cap. 9; SCHELL, l. c., 2, Cap. 12].

CAPITOLO III.

EQUILIBRIO DELLE CURVE FUNICOLARI.

§ 1. **Equazioni di equilibrio.** — Consideriamo un filo flessibile ed inestensibile; un elemento ds di questo sia soggetto ad una forza applicata in un punto P dell'elemento e dello stesso ordine di ds. Rappresenteremo il vettore di questa forza con $\mathbf{f}\,ds$, essendo $\mathbf{f}$ un vettore di modulo finito. Supponiamo che lo stesso accada per tutti gli infiniti elementi in cui può immaginarsi decomposto il filo. Gli estremi P_0, P_1 potranno esser liberi, oppure fissi, o obbligati a restare sopra curve o superficie date, ecc.; ma, in ogni caso, possiamo supporli liberi e soggetti a due forze di vettori $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_1$.

La configurazione di equilibrio del filo sarà, generalmente, curva; di qui il nome di curva funicolare. Ora, applicando il principio generale dei lavori virtuali, vogliamo trovare le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio.

Il filo riceva un qualunque spostamento virtuale; la somma dei lavori virtuali delle forze