Parte Seconda

# STATICA

# CAPITOLO I.

## COMPOSIZIONE DELLE FORZE.

§ 1. **Oggetto della Statica.** — Noi dobbiamo esercitare uno sforzo, una pressione, per mettere in moto un corpo, che è in riposo, o per variare od impedire un movimento; ed abbiamo infatti la sensazione del peso di un corpo cui impediamo di cadere; della spinta da imprimergli per farlo discendere su di un piano inclinato; della tensione esercitata per mezzo di una sottile fune tesa; ecc. Noi possiamo soltanto valutare gli effetti di questi sforzi, di queste pressioni, che chiamiamo, genericamente, *forze*. Generalizzando questo concetto, assai relativo e in origine limitato soltanto alla nozione di peso o di sforzo muscolare, si chiamano forze tutte le cause che producono, modificano, distruggono il movimento di un corpo.

L'oggetto della Meccanica è quello di stabilire tra le cause e i movimenti, sperimentalmente e col calcolo, delle leggi che permettono la esatta descrizione del moto, cognite le cause; oppure di risalire, se è possibile, a queste, cognito il moto.

La Statica si occupa di un problema molto più particolare del precedente; investiga cioè le leggi a cui obbedisce un sistema di uno o più corpi, soggetti a forze, perchè il sistema resti in riposo o non risulti disturbato il suo movimento; cioè perchè resti in *equilibrio*.

Questa parte della Meccanica, la prima che in ordine cronologico sia stata considerata, è perciò detta *scienza dell'equilibrio*. (*)

Per l'importanza dei problemi che tratta, per la varietà delle applicazioni pratiche, ed infine perchè, per varie ragioni, non pare conveniente dedurre da considerazioni di movimento (dinamiche) ciò che è relativo all'equilibrio, noi cominceremo dalla trattazione di questa parte della Meccanica. (**)

(*) Oltre al trattato dell'APPELL, I, confrontare:

E. J. ROUTH, *A Treatise on Analytical Statics with numerous examples*, v. I, Cambridge, 1896; G. M. MINCHIN, *A Treatise on Statics with Applications to Physics*, v. I (5ª ed.), Oxford, 1896; v. 2 (4ª ed.) 1889; THOMSON A. TAIT, *Treatise on Natural Philos.*, Part. II, Cambridge, 1895, Ch. VII.

(**) PONCELET nel 1822 [*Introd. à la Méc. industrielle physique ou expérimentale*; 1ª ed. 1829; 2ª ed. 1839; 3ª ed. 1870]; poi CORIOLIS [*Traité de la Méc. des corps solides*, 1ª ed. 1829; 2ª ed. 1844] e BELANGER [*Cours de Méc.*, 1847] e moltissimi dei moderni seguono invece il metodo inverso, di premettere cioè la Dinamica alla Statica, per *non considerare le forze in modo troppo astratto e indipendentemente dalla loro esistenza e dai loro effetti.*



§ 2. **Forza e sua rappresentazione.** — Una pressione, uno sforzo, una tensione possono esercitarsi in varie direzioni ed essere impressi in un determinato punto di un corpo: diciamo quindi che una forza agisce secondo una direzione (*direzione della forza*) e in un punto (*punto di applicazione*).

Due forze aventi lo stesso punto d'applicazione diconsi eguali allorchè applicate in senso contrario l'una all'altra si fanno equilibrio (*postulato dell'eguaglianza*).

La definizione di forza somma di più altre si basa su di un altro postulato. Due forze aventi lo stesso punto d'applicazione e la stessa direzione possono essere equilibrate da una forza unica avente lo stesso punto d'applicazione e direzione opposta. La forza eguale e contraria a questa dicesi *somma* delle due prime.

Dai concetti di eguaglianza e di somma si deduce quello di rapporto. Scelta dunque una certa unità di misura per le forze e che per ora lasceremo completamente arbitraria, il numero che misura una forza è positivo, razionale o irrazionale. Se **f** è un vettore avente direzione e senso di una forza applicata in un punto $P$, ed il cui modulo sia eguale al numero che misura la forza, diremo che in $P$ agisce una forza il cui vettore è **f**.

§ 3. **Postulati della Statica.** — Oltre quelli già detti ci fonderemo sui seguenti postulati, desunti, per via di generalizzazione, da ovvii fatti sperimentali.

1.° *L'equilibrio di un qualunque insieme di corpi, rigidi o no, non è alterato rendendo fissi alcuni punti; introducendo altri legami (vincoli) in modo da limitare la mobilità del sistema; o anche, infine, supponendo irrigidito tutto il sistema (principio di solidificazione).* (*).

Di qui si deduce che le condizioni *necessarie e sufficienti* per l'equilibrio di un sistema rigido, sono solamente *necessarie* per l'equilibrio di un sistema qualunque non rigido.

2.° *L'equilibrio di un sistema di forze non è alterato aggiungendo un altro sistema di forze purchè questo, agendo da solo sul sistema di corpi, sia in equilibrio (principio di sovrapposizione).*

Invece non è sempre permessa la soppressione

(*) Poinsot, *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement* [Jour. de l'École Polytechnique, **13**, pp. 206-241 (1806)].



di un tale sistema; e possiamo convincercene col seguente esempio. Agli estremi di un filo flessibile ma inestendibile siano applicate due forze $A$ ed $A'$ eguali e contrarie e che tendano il filo; agli stessi punti siano applicate altre due forze $B$ e $B'$ eguali ed agenti in senso rispettivamente contrario ad $A$ e $A'$.

Se $B$ è minore di $A$, e quindi $B'$ di $A'$, il sistema delle quattro forze tiene in equilibrio il filo; ma il sistema $A$, $A'$, che pur agendo da solo ha lo stesso ufficio, non può esser tolto senza turbar l'equilibrio.

3.° *Ad un sistema di forze, in equilibrio o no, si possono sempre aggiungere o togliere forze opposte, cioè eguali, contrarie e aventi lo stesso punto di applicazione, senza che venga turbato l'effetto del sistema.*

Si deducono di qui alcune notevoli conseguenze.

Due sistemi le cui forze sono opposte diconsi *opposti;* si indicheranno con $S$ e $-S$. Se $S$ è in equilibrio (compatibilmente colla mobilità del sistema cui è applicato) non lo è, in generale, $-S$. Così, nell'esempio precedente, il sistema opposto ad $A$ e $A'$ non tiene in equilibrio il filo. Se però $S$ è applicato ad un sistema rigido ed è in equilibrio, anche $-S$ è in equilibrio. E ciò si scorge pure nel detto esempio se si sostituisce il filo con un'asta rigida.

TEOREMA I°. — *Da un sistema di forze in equilibrio si può sopprimere un altro sistema di forze, purchè il sistema opposto, agendo da solo, sia in equilibrio.* (*)

Un sistema $S$ in equilibrio contenga un altro sistema $S_1$; ed il sistema $-S_1$, agendo da solo, sia in equilibrio. Ad $S$ aggiungo $-S_1$ (post. 2°); ma le forze di $-S_1$ eliminano quelle di $S_1$ (post. 3°), onde $S_1$ è eliminato.

Nel solito esempio il sistema $A$, $A'$ non può esser tolto, pur essendo da solo in equilibrio, perchè non lo è il sistema opposto; mentre il sistema $B$, $B'$, che pur agendo da solo non è in equilibrio, può esser tolto perchè il suo opposto è in equilibrio.

4.° *Se un sistema di forze applicato ad un corpo rigido è in equilibrio, è pure in equilibrio il sistema opposto.*

Quindi

TEOREMA II°. — *Da un sistema di forze, che tiene in equilibrio un corpo rigido, si può sopprimere una parte, purchè questa agendo da sola sia in equilibrio.*

Infatti in tal caso è in equilibrio (post. 4°) il sistema opposto.

TEOREMA III°. — *Il punto di applicazione di una forza può trasportarsi in un altro punto della sua linea d'azione, purchè rigidamente connesso al primo.*

(*) MÖBIUS, *Lehrbuch d. Statik;* 1837. Ges. Werke, 3 pag. 5.



In $A$ sia applicata la forza $F$ e sia $B$ un punto rigidamente connesso con $A$ sulla direzione di $F$; in $B$ (post. 3°) aggiungo due forze $F'$ ed $F''$ opposte; inoltre $F'$ sia eguale ad $F''$. Ma il sistema $F$ ed $F''$ è in equilibrio e (teor. prec.) può essere tolto; resterà la $F'$ applicata in $B$.

Prendiamo ora più specialmente a considerare i sistemi di forze che sollecitano corpi rigidi; e stabiliamo, rispetto a questi, l'importante concetto di *sistemi equivalenti di forze.*

Due sistemi $S_1$ ed $S_2$ di forze sono *equivalenti* se esiste un terzo sistema $S$ che sia separatamente in equilibrio con $S_1$ ed $S_2$. Allora ogni altro sistema $S'$ in equilibrio con $S_1$ è pure in equilibrio con $S_2$.

Infatti il sistema formato da $S_1$, $S'$, $S_2$, $S$ è in equilibrio (post. 2°); ma anche $S_1$, $S$ è in equilibrio e può quindi sopprimersi (teor. 2°); dunque il sistema $S_2$, $S'$ è in equilibrio.

Se poi riflettiamo che $S_1$ è in equilibrio con $-S_1$, concludiamo che:

*Due sistemi di forze sono equivalenti se uno dei due è in equilibrio coll'opposto dell'altro.*

5.° *Le forze le cui linee d'azione incontrano punti ed assi fissi possono sopprimersi, senza turbare l'effetto del sistema cui appartengono.*

6.° *Se in un punto di un corpo rigido avente un punto (asse) fisso, è applicata una forza la cui linea d'azione non incontra il punto (asse) fisso, il sistema non è in equilibrio.*

§ 4. **Il postulato della risultante.** — Supponiamo che più forze siano applicate ad uno stesso punto $O$. Se sono in equilibrio, anche il sistema opposto è in equilibrio; in caso contrario si ammette il seguente postulato:

*Più forze concorrenti e non in equilibrio possono essere equilibrate da una sola forza.*

Questa forza $R'$ è pure concorrente in $O$; infatti, se così non fosse, rendendo fisso il punto $O$ (post. 1°) l'equilibrio non sarebbe turbato; ma ciò non è perchè (post. 6°) la $R'$ non passa per $O$.

Il sistema $S$ delle forze concorrenti in $O$ è quindi equivalente alla forza $R$ opposta alla $R'$; tale forza dicesi *risultante* del sistema $S$.

Si può anche dire che *quando più forze concorrenti si fanno equilibrio, una qualunque di esse è opposta alla risultante delle altre.*

*La risultante $R$ di due forze $P$ e $Q$ concorrenti è contenuta nel loro piano;* basta infatti tracciare una retta che si appoggi a $P$ e $Q$, supposta fissa, ed imitare la dimostrazione precedente.

Quindi:

*Tre forze concorrenti in equilibrio giacciono in uno stesso piano.*



Sarebbe importante, dal punto di vista logico, determinare con considerazioni puramente statiche e in base ai soli postulati ammessi, tale risultante. Ma ciò non pare possibile. Quindi tale determinazione o deve essere direttamente richiesta all'esperienza, oppure occorre aumentare il numero dei postulati, ai quali non sembra dover sfuggire nessuna determinazione congenere.

Bisogna infatti ammettere anzitutto:

*La risultante di più forze concorrenti non varia sostituendo a due o a più forze la loro risultante e qualunque sia l'ordine delle composizioni parziali; deve cioè godere del principio associativo e commutativo.*

Con ciò si riconduce la determinazione di tale risultante a quella di due sole forze.

Sieno $P$, $Q$ due forze applicate in $O$; e sia $R_1$ un'altra forza pure applicata in $O$ ed esterna al piano delle due prime. Diciamo $R$ la risultante di $P$, $Q$; $P_1$ quella di $Q$, $R_1$, e $Q_1$ quella di $P$ ed $R_1$. La risultante $S$ di $P$, $Q$, $R_1$ si otterrà (principio precedente) componendo $R$ con $R_1$; oppure $P$ con $P_1$, od infine $Q$ con $Q_1$; e poichè essa giace nei piani $R$, $R_1$, ecc., si conclude che i tre piani $R$ e $R_1$; $P$ e $P_1$; $Q$ e $Q_1$ passano per una stessa retta.

Centro in $O$ e con raggio arbitrario tracciamo una sfera ed accenniamo ancora con $P$, $P_1$, ... $S$, ecc., i punti di incontro colle rispettive forze

$P$, $P_1$, .... Abbiamo dunque un triangolo sferico $P\,Q\,R_1$ colle trasversali $P\,P_1$, .... concorrenti in un punto $S$. Il teorema di Ceva (*) ci dà

$$\frac{\text{sen}\ Q\,R}{\text{sen}\ P\,R}\cdot\frac{\text{sen}\ P\,Q_1}{\text{sen}\ R_1\,Q_1}\cdot\frac{\text{sen}\ R_1\,P_1}{\text{sen}\ Q\,P_1}=1.$$

Supponiamo $R_1$ normale al piano $P\,Q$ e scelta come unità di misura delle forze; il rapporto sen $P\,Q_1$ : sen $R_1\,Q_1$ non dipende che dalla intensità della forza $P$, se ammettiamo ancora un altro postulato; cioè che:

*La risultante di due forze concorrenti non varia comunque esse vengano spostate nello spazio.*

Se rappresentiamo questo rapporto con $\frac{1}{\varphi(P)}$, il rapporto analogo sen $Q\,P_1$ : sen $R_1\,P_1$ sarà espresso da $\frac{1}{\varphi(Q)}$; quindi

$$\text{sen}\ Q\,R : \text{sen}\ R\,P = \varphi(P) : \varphi(Q).$$

Questa s'interpreta subito: la direzione della risultante $R$ è quella della diagonale $O\,C$ del parallelogrammo costruito su $O\,A$ e $O\,B$ rispettivamente eguali a $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$ e situati sulle

(*) Vedi: Baltzer, *Elementi di matematica* (traduz. di L. Cremona) (1868). Parte 6ª, Trigonometria, § 7; pag. 131.



forze $P$ e $Q$ o in direzione contraria, secondo che $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$ sono positivi o negativi. Quanto poi alla grandezza della risultante, osserviamo che la $R'$, eguale e contraria ad $R$, è in equi-

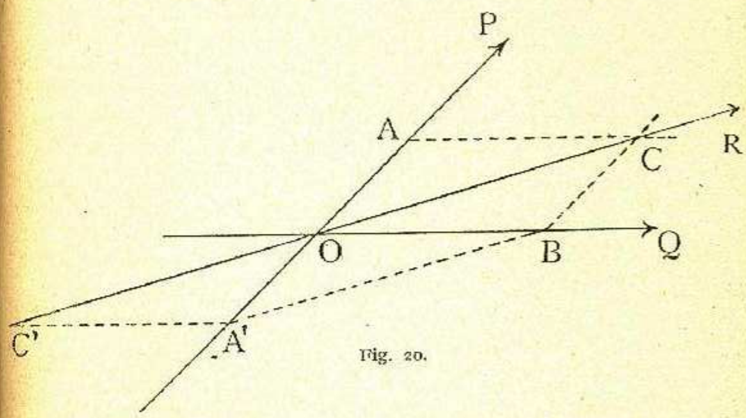


Fig. 20.

librio con $P$ e $Q$; e quindi $P$ è pure opposta alla risultante di $Q$ ed $R'$; il parallelogrammo costruito su $O\,B$ ed $O\,C' = \varphi(R')$ ha dunque per diagonale $O\,A'$; e però $O\,C' = O\,C$; onde $O\,C = \varphi(R)$.

Di qui possiamo subito passare alla composizione di più forze concorrenti in $O$ e di vettori **p**, **q**, ecc. Se accenniamo con $P$, $Q$, .... le grandezze di queste forze, basterà comporre i vettori aventi la stessa direzione e senso dei vettori delle forze e rispettivamente per moduli $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$, ....; il vettore risultante avrà senso e direzione della risultante $R$; ed il suo modulo sarà $\varphi(R)$.

Tutto adunque si riduce alla ricerca della funzione $\varphi$; per ciò supponiamo che due o più forze abbiano lo stesso senso e direzione; nella composizione esse possono essere sostituite da $P+Q+\ldots$; e quindi, nella composizione dei corrispondenti vettori, dobbiamo avere lo stesso risultato operando con $\varphi(P)+\varphi(Q)+\ldots$; oppure con $\varphi(P+Q+\ldots)$.

Si ha dunque l'equazione funzionale

$$(1)\quad \varphi(P+Q+\ldots)=\varphi(P)+\varphi(Q)+\ldots;$$

la quale non ci abilita a conoscere la funzione $\varphi$ senza fare un'altra ipotesi.

Infatti si deduce subito, $m$ ed $n$ essendo interi e positivi

$$\varphi(mP)=m\,\varphi(P);\quad \varphi(nP)=n\,\varphi(P);$$

se quindi facciamo $P=\frac{1}{n}$ si deduce subito

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{m}{n}\,\varphi(1);$$

cioè per ogni valore razionale e positivo di $x$, abbiamo

$$(2)\qquad \varphi(x)=a\,x$$



$a$ essendo una costante. E questa relazione, *nella ipotesi che $\varphi$ sia continua,* varrà ancora per qualunque valore di $x$. (*)

Abbiamo adunque aggiunta la *nuova ipotesi* della continuità della risultante.

Possiamo invece supporre $\varphi$ sempre positivo; ossia aggiungere il nuovo postulato che *la risultante sia compresa nell'angolo delle due forze.* Si vede subito che $\varphi$ è sempre crescente; se quindi $x$ è un numero irrazionale positivo per modo che ($m$, $n$ essendo positivi)

$$\frac{m}{n}<x<\frac{m+1}{n}$$

sarà pure

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right)<\varphi(x)<\varphi\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

cioè

$$a\,\frac{m}{n}<\varphi(x)<a\,\frac{m+1}{n};$$

dunque la (2) vale anche per $x$ irrazionale.

Ma essendo ancora arbitraria l'unità di misura, noi possiamo scegliere $a$ in modo che risulti $a=1$. Dunque:

*Il vettore della risultante di più forze con-*

(*) CAUCHY, *Cours d'Analyse de l'École R. Polytechnique (Analyse algébrique)* (1821). Oeuvres complètes. (2), **3**, p. 99.

*correnti è la somma dei vettori delle singole forze componenti.* (*)

(*) La legge del parallelogrammo delle forze, forse sconosciuta agli antichi, sembra, dalle ricerche di CAVERNI, *Storia del metodo sperimentale in Italia*, **4**, Cap. I, §§ 3, 4 (1895), e di DUHEM, *Les origines de la Statique*, Paris, (1905), essersi elaborata nel Medio evo; conosciuta da LEONARDO DA VINCI, fu enunciata chiaramente da STEVIN, *De Beghinselen der Weegkonst*, 1586; Oeuvres mathém., **4**, *De la Statique*, Leyden, 1636; e dedotta da NEWTON come conseguenza delle leggi del moto: *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687): Lib. I; cor. 1; e, infine, colla inesatta considerazione dei moti simultanei, da VARIGNON, *Projet d' une nouvelle mécanique*, 1687; *Nouvelle Mécanique ou Statique*, I, 1725; che ne fece il principio fondamentale della Statica e numerose applicazioni al poligono delle forze, ecc., ecc. **2**, p. 299. D. BERNOULLI, *Examen principiorum mechanicae* [Comm Accad. Imp. Petropolitanae, **1**, pp. 126-142 (1726)] è il primo che abbia tentato di dare una dimostrazione statica, e fatto vedere che tutto si riduce alla composizione di due forze uguali. Da allora in poi sono state date innumerevoli altre dimostrazioni, per le quali valgono sempre le osservazioni fatte.

La prima dimostrazione in cui venga odoperata una equazione funzionale è quella di D. DE FONCENEX [Mélanges de philosophie et de mathém., **2**, Turin, 1760-71, p. 299]; seguirono quelle di D'ALEMBERT, *Mémoire sur les principes de la Mécanique* [Mém. de l'Acad. de Paris, 1769, p. 278] in cui si vale dell'equazione funzionale:

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)=\varphi(x)\cdot\varphi(y);$$



Se quindi diciamo $\mathbf{R}$, $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, .... i vettori della risultante e delle componenti di più forze

di LAMBERT, ecc. Una raccolta completa di queste dimostrazioni può vedersi in A. H. WESTPHAL, *Ueber die Beweise für das Parallelogramms der Kräfte*. Inaug. Diss., Göttingen, 1867; E. GEORGES, *Die Zusammensetzung der Kräfte*. Inaug. Diss., Halle, 1909.

La dimostrazione da noi esposta è di DARBOUX, *Sur la composition des forces en Statique* [Bull. des sciences mathém., **9**, pp. 281-288 (1875)]; una analoga è stata esposta da CEBICEFF, *Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point*. [Société mathém. de Mouscou, 1875 pp. 188-193]. Vedi pure dello stesso una memoria nel Bull. de la Société mathém. de France, **6**, p. 188 (1877-78), che riguarda la non necessaria condizione di continuità di $\varphi$.

Condizioni molto generali per la risoluzione della (2) sono state date da DARBOUX, Mathem. Annal., **17**, p. 55 (1880); VOLPI, Giornale di mat., **35**, p. 104 (1897) e HAMEL, Mathem. Annal., **60**, p. 549 (1905).

L'argomento della composizione delle forze è stato di nuovo recentemente considerato acutamente da SIACCI, *Sulla composizione delle forze nella Statica e sui suoi postulati* [Rendiconto Acc. Scienze fis. e mat. di Napoli (3), **5**, pp. 34, 69, 147 (1899)] e da DE STEFANO, *Sopra un principio fondamentale di Meccanica* [Riv. d'artig. e genio, **3**, (1908)].

Un approfondito esame critico delle dimostrazioni di DARBOUX e SIACCI è stato fatto da SCHIMMACK, *Axiomatische Untersuchungen über die Vektoraddition*. Inaug. Diss., Göttingen, 1908; Nova Acta, 1, n. 1.

concorrenti, si ha

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots$$

Quindi

$$\mathbf{R}^2 = \mathbf{F}_1^2 + \mathbf{F}_2^2 + \dots + 2\,\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2 + \dots$$

§ 5. **Momento di una forza rispetto a un punto o ad un asse. Coordinate di un sistema di forze.** — Sia $\mathbf{F}$ il vettore di una forza applicata in $P$; dicesi *momento della forza rispetto ad un punto* $O$, il vettore $\mathbf{m}$ definito da

$$\text{(4)} \qquad \mathbf{m} = (P - O) \wedge \mathbf{F}.$$

Questo momento è nullo se il punto $O$ è scelto sulla linea d'azione della forza; non varia se il punto $P$ si sposta pure sulla stessa linea d'azione; perchè essendo $P' = P + \mathbf{F}$, risulta subito

$$(P - O) \wedge \mathbf{F} = (P' - O) \wedge \mathbf{F}.$$

Consideriamo un asse parallelo ad un vettore unitario $\mathbf{u}$; su tale asse scegliamo ad arbitro un punto $O$; dico che la proiezione sull'asse del momento della forza rispetto ad $O$ è indipendente dal punto $O$. Infatti per un altro punto $O'$ dell'asse si ha $O' = O + m\,\mathbf{u}$; quindi

$$\text{(5)} \quad \mathbf{m} \times \mathbf{u} = (P - O) \wedge \mathbf{F} \times \mathbf{u} = (P - O') \wedge \mathbf{F} \times \mathbf{u};$$



il numero espresso da questo prodotto scalare dicesi *momento della forza rispetto all'asse*. Dico che:

*Il momento di una forza rispetto ad un asse è eguale al numero (con segno) che misura il sestuplo volume di un tetraedro avente per spigoli opposti la forza ed un segmento unitario sull'asse.*

Dalla (5) risulta infatti che tale momento è eguale al volume del parallelepipedo i cui tre spigoli sono $P - O$, $P\mathbf{F}$, $O\,\mathbf{u}$; il quale è a sua volta il sestuplo del volume del tetraedro detto. Quanto al segno sarà positivo o negativo secondo che la terna dei vettori citata è destrogira o no (Parte I, Cap. I, § 1). Possiamo quindi enunciare la regola seguente:

*Il momento di una forza rispetto ad un asse è positivo o negativo secondo che il moto di un piano passante per l'asse e pel punto d'applicazione della forza e che si sposta su di essa, apparisce di senso orario o antiorario rispetto al solito osservatore situato sull'asse.*

Risulta pure che *il momento è nullo se l'asse e la forza giacciono in uno stesso piano.*

Se $O$ è origine della solita terna ortogonale, e diciamo $x$, $y$, $z$ le coordinate del punto $P$ di applicazione; $X$, $Y$, $Z$ le componenti della forza, pel solito sviluppo del prodotto misto, si deduce che i momenti della forza secondo gli assi sono:

$$\text{(6)} \quad yZ - zY; \quad zX - xZ; \quad xY - yX.$$

Consideriamo un sistema di forze coi punti di applicazione $P_1$, $P_2$,.... e di vettori $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$,.....

Dicesi *forza e momento risultante* del sistema rispetto ad un punto $O$, la somma dei vettori delle singole forze, supposta diversa da zero, e la somma dei momenti delle forze rispetto $O$; cioè:

$$(7)\quad \begin{cases} \mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots \\ \mathbf{M} = (P_1 - O) \wedge \mathbf{F}_1 + (P_2 - O) \wedge \mathbf{F}_2 + \cdots \end{cases}$$

esse diconsi brevemente le *coordinate* del sistema di forze rispetto al punto $O$ *(centro di riduzione)*. La risultante $\mathbf{R}$ è indipendente dal punto $O$; quanto al momento, se diciamo $\mathbf{M}_1$ il momento rispetto ad un altro punto $O_1$, si ha:

$$(8)\qquad \mathbf{M}_1 = \mathbf{M} + \mathbf{R} \wedge (O_1 - O)$$

che si deduce subito dalle (7) e di cui si noterà la perfetta analogia colla formula fondamentale di cinematica. Si ricava quindi, come in cinematica, che

*Il momento del sistema non varia se il punto $O$ si sposta parallelamente alla forza risultante;*

*esiste una retta unica parallela alla forza risultante pei punti della quale (scelti come centri di riduzione) il momento risultante ha la stessa direzione della forza risultante (asse centrale);*

*il prodotto*

$$(9)\qquad V = \mathbf{M} \times \mathbf{R}$$



*non dipende dal punto $O$* e dicesi *invariante del sistema;*

*tale invariante è eguale alla somma dei sestupli volumi dei tetraedri (con segno) aventi per spigoli opposte le forze due a due* (Part. I, Cap. 4, Eserc. 1).

Sono pure evidenti le proprietà seguenti:

*Le coordinate di un sistema, che sia composto di più altri, sono le somme delle coordinate dei sistemi singoli, rispetto a qualunque centro;*

*le coordinate di due sistemi opposti sono eguali e di segno contrario;*

*le coordinate di un sistema di due forze aventi la stessa linea d'azione, eguali e contrarie sono nulle e reciprocamente.*

Infatti è nulla la loro risultante; è poi nullo il momento rispetto ad un punto qualunque della loro linea d'azione e quindi, per la (8), è nullo il momento rispetto ad un altro punto qualsiasi. Reciprocamente, se è nulla la risultante e il momento risultante, sarà anzitutto $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$; e poscia

$$(P_1 - O) \wedge \mathbf{F}_1 - (P_2 - O) \wedge \mathbf{F}_1$$
$$= (P_1 - P_2) \wedge \mathbf{F}_1 = 0$$

cioè $\mathbf{F}_1$ è parallelo a $P_1 - P_2$.

Le componenti di $\mathbf{R}$ e di $\mathbf{M}$ secondo la solita terna coll'origine in $O$, e che accenneremo costantemente con $R_x$, $R_y$, $R_z$; $M_x$, $M_y$, $M_z$, si dicono *le coordinate del sistema di forze* rispetto alla terna $O\,(\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k})$.

Se accenniamo con $X$, $Y$, $Z$ le componenti di una delle forze del sistema, con $P\,(x,\ y,\ z)$ il suo punto d'applicazione, si ha:

$$(10)\quad \begin{cases} R_x = \Sigma\, X\ ,\ M_x = \Sigma\,(y\,Z - z\,Y)\,, \\ R_y = \Sigma\, Y\ ,\ M_y = \Sigma\,(z\,X - x\,Z)\,, \\ R_z = \Sigma\, Z\ ,\ M_z = \Sigma\,(x\,Y - y\,X)\,, \end{cases}$$

e quindi l'invariante $V$ è espresso, (9), da

$$(11)\qquad V = R_x\,M_x + R_y\,M_y + R_z\,M_z.$$

X § 6. **Condizioni per l'equivalenza di due sistemi di forze; per l'equilibrio di un sistema.** — Vogliamo ora porre in relazione il concetto di equivalenza di sistemi di forze, § 3, con quello di coordinate; e cominciamo col dimostrare che:

*Si possono in infiniti modi aggruppare e comporre le forze di un sistema in modo da ridurle ad un sistema (equivalente) di due oppure di una sola forza; le coordinate del sistema primitivo e di quello ridotto sono le stesse.*

Siano $O_1$, $O_2$, $O_3$ tre punti qualunque di un piano che non contenga nessuno dei punti di applicazione delle forze; ognuna delle quali potrà decomporsi, sempre, in altre tre applicate in $O_1$, $O_2$, $O_3$. Diciamo $R_1$, $R_2$, $R_3$ rispettivamente



le risultanti di quelle concorrenti in ciascuno di questi tre punti. Per $O_1$ tracciamo una retta che si appoggi ad $R_2$ ed $R_3$ e su questa assumiamo un altro punto $O$ ad arbitrio. Decomponiamo $R_2$ in altre due secondo $O_2\,O_1$ e $O_2\,O$; e la $R_3$ in

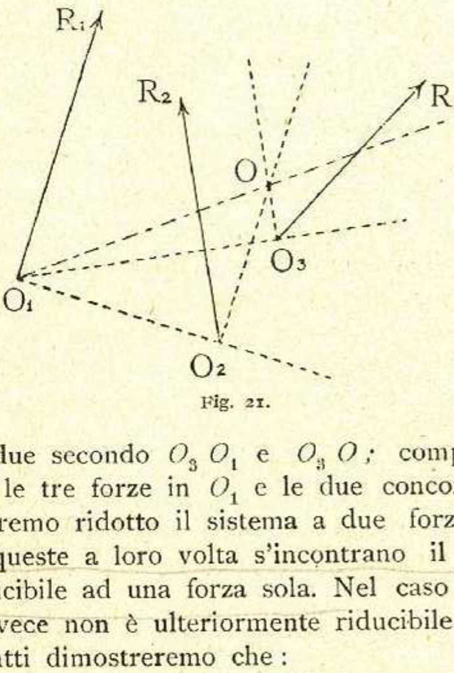


Fig. 21.

altre due secondo $O_3\,O_1$ e $O_3\,O$; componendo infine le tre forze in $O_1$ e le due concorrenti in $O$, avremo ridotto il sistema a due forze sole; e se queste a loro volta s'incontrano il sistema è riducibile ad una forza sola. Nel caso contrario invece non è ulteriormente riducibile.

Infatti dimostreremo che:

*Due forze le cui linee d'azione non s'incontrano non ammettono risultante; cioè non possono essere equilibrate da un'altra forza, nè possono farsi equilibrio.*

Se infatti potessero farsi equilibrio, fissando un punto delle due forze (post. 1°), l'altra non può equilibrare il corpo rigido (post. 6°); se poi potessero essere equilibrate da una forza unica, basterebbe fissare un asse che ne incontri due e ragionare come al solito.

Discende subito ancora:

*Affinchè due forze si facciano equilibrio è necessario, e basta, che abbiano la stessa linea di azione e siano uguali e contrarie.*

Infine notiamo che in tutte le trasformazioni impiegate per ridurre un sistema a due forze sole, le coordinate del sistema non variano; e così il teorema proposto è completamente dimostrato.

Ciò premesso possiamo dimostrare:

*La condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di forze, applicato ad un corpo rigido libero, sia in equilibrio è che siano nulle le coordinate del sistema, rispetto ad un qualunque centro di riduzione.*

Infatti riduciamo il sistema ad uno equivalente di due sole forze; se il primitivo è in equilibrio, lo è anche il secondo e quindi le due forze debbono avere la stessa linea d'azione ed essere eguali e contrarie; e però, § 5, saranno nulle le loro coordinate. Reciprocamente, se sono nulle le coordinate le due forze debbono avere la stessa linea d'azione ed essere eguali e contrarie, cioè debbono equilibrarsi.



Dunque le condizioni di equilibrio di un sistema di forze applicato ad un corpo rigido libero sono:

$$(12) \qquad \mathbf{R} = 0 \quad , \quad \mathbf{M} = 0$$

rispetto ad un qualunque centro di riduzione $O$; oppure rispetto alla solita terna di origine $O$, sono le *sei* seguenti:

$$(13) \; R_x = R_y = R_z = M_x = M_y = M_z = 0. \; (*)$$

*Due sistemi di forze sono equivalenti se hanno le stesse coordinate e reciprocamente.*

Siano $S$ ed $S_1$ i due sistemi aventi le stesse coordinate; il sistema $(S, - S_1)$ avrà le coordinate nulle, $S$ è quindi in equilibrio con $- S_1$, cioè equivalente ad $S_1$; e reciprocamente.

Finalmente:

*La condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema di forze, la cui risultante è diversa da zero, sia riducibile ad una forza sola è che sia nullo l'invariante.*

Infatti se l'invariante è nullo, le due forze a cui riduciamo il sistema debbono incontrarsi; e reciprocamente.

(*) Le sei equazioni di equilibrio di un sistema di forze si trovano, in forma complicata, in D'ALEMBERT, *Recherches sur la précés.*, ecc. Ch. 2, art. 124 (1749). La loro interpretazione mercè l'idea di coppia è dovuta a POINSOT, *Éléments de Statique* (1804).

§ 7. **Coppia. Riduzioni varie di un sistema di forze.** — Un sistema di forze la cui risultante è nulla e che non sia in equilibrio dicesi *coppia*.

Essendo $\mathbf{R} = 0$, la (8) ci dà $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$; cioè:

*Il momento di una coppia non dipende dal centro di riduzione.*

Data una coppia $S$ essa potrà sempre ridursi in infiniti modi a due forze eguali e contrarie, tali che se $\mathbf{F}$ è il vettore di una delle due forze, $A$ il suo punto d'applicazione, $B$ il punto di applicazione dell'altra, sarà:

$$\mathbf{M} = (A - B) \wedge \mathbf{F};$$

poichè basta scegliere per centro di riduzione il punto $B$.

Il piano parallelo alle due forze, cioè normale ad $\mathbf{M}$, dicesi piano della coppia.

La risultante di due o più coppie è una nuova coppia il cui momento è la somma dei momenti delle singole coppie; ecc.

Due coppie sono equivalenti se hanno lo stesso momento.

Con questo concetto siamo al caso di dare una nuova interpretazione dei risultati del § precedente.

*Ad un sistema di forze si può, in infiniti modi, sostituire il sistema costituito da una forza di vettore* $\mathbf{R}$ *applicata in un punto* $O$, *ed una coppia il cui momento è il momento* $\mathbf{M}$ *del sistema rispetto ad* $O$.



Infatti è subito visto che il sistema della forza e della coppia ha le stesse coordinate $\mathbf{R}, \mathbf{M}$ del sistema dato.

Rispetto poi agli assi $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ si può dire:

*Ad un sistema di forze si possono sostituire tre forze* $R_x$, $R_y$, $R_z$, *applicate in* $O$ *e dirette secondo gli assi; tre coppie di momento* $M_x$, $M_y$, $M_z$ *contenute nei piani coordinati.*

È poi interessante notare che le $M_x$, $M_y$, $M_z$ rappresentano:

*Le somme algebriche dei momenti delle singole forze del sistema secondo gli assi; le componenti del momento* $\mathbf{M}$ *rispetto all'origine; i momenti delle coppie contenute nei piani coordinati.*

*Perchè un sistema sia in equilibrio è necessario e basta che siano nulle la forza e la coppia risultante*; ecc.

L'asse centrale può essere caratterizzato così:

*È l'asse per ogni punto del quale la forza e la coppia risultante sono perpendicolari.*

Il sistema di una forza e di una coppia siffatta chiamasi *diname*; quindi *qualunque sistema di forze è sempre equivalente ad una diname.*

§ 8. **Composizione di un sistema di forze parallele.** — Le forze, applicate nei punti $A_1$, $A_2, \ldots$, siano parallele ad un vettore unitario $\mathbf{k}$; e siano $f_1\mathbf{k}$, $f_2\mathbf{k}, \ldots$ i vettori delle forze, essendo $f_1, f_2 \ldots$ numeri positivi o negativi. L'invariante di un tal sistema è nullo; e se supponiamo la somma $f$ dei numeri $f_1, f_2 \ldots$ diversa da zero, sarà diversa da zero la risultante $\mathbf{R}$; quindi *il sistema ammette una risultante unica*, di vettore

$$\mathbf{R} = f\mathbf{k}.$$

Sia $G$ un punto di questa risultante; ed esprimiamo che essa è equivalente al sistema dato; cioè, essendo $O$ un punto arbitrario:

$$(G - O) \wedge \mathbf{R} = f_1 (A_1 - O) \wedge \mathbf{k} + f_2 (A_2 - O) \wedge \mathbf{k} + \ldots;$$

e questa sarà identicamente soddisfatta scegliendo il punto $G$ in modo che

$$(14) \quad f(G - O) = f_1 (A_1 - O) + f_2 (A_2 - O) + \ldots$$

del tutto analoga alla (20) del Cap. 4 della Part. I. Dunque:

*La risultante di più forze parallele è una forza eguale alla loro somma e applicata nel punto $G$ definito dalla* (14).

Tale punto $G$ è indipendente dalla scelta del punto $O$, dalla direzione del vettore $\mathbf{k}$; e dipende solamente dai rapporti delle grandezze delle forze; esso dicesi *centro delle forze parallele.*

Da (14) si deduce ancora:

$$(15) \qquad \Sigma f_r (A_r - G) = 0.$$



Se $f = 0$, il sistema è riducibile ad una coppia; ciò che risulta anche semplicemente così. Nel sistema avremo un gruppo di forze di un senso (positive), e un gruppo di senso opposto (negative); sì delle une che delle altre esisterà il centro delle forze parallele, in cui avremo applicate due forze costituenti una coppia. Potremo però sempre far ruotare le forze in modo da far loro assumere la direzione della congiungente i due centri suddetti, cioè in modo che il sistema sia in equilibrio in due diverse posizioni.

Se poi in particolare i due centri coincidessero, il sistema è in equilibrio per qualunque posizione.

Una delle più notevoli applicazioni della (14) è la seguente.

Supponiamo che le forze siano applicate in modo continuo a tutti i punti di un corpo, per es., a tre dimensioni e le loro grandezze siano proporzionali ai vari elementi di volume in cui si può decomporre il corpo. Il centro di queste forze parallele dicesi, per ragioni che vedremo in dinamica, *centro di gravità* o *centro di massa del corpo omogeneo*. Avremo quindi

$$(16) \qquad G - O = \int (A - O)\, d\tau : \int d\tau$$

avendo, come al solito, accennato con $d\tau$ l'elemento di volume.

Potremmo allo stesso modo definire il centro di massa di un'area piana o curva, di una linea.

Se ci riferiamo alla solita terna e diciamo $\xi$, $\eta$, $\zeta$ le coordinate di $G$, le (14) e (16) ci danno:

$$\xi = \Sigma f_r x_r : f ; \text{ ecc.} \tag{17}$$

$$\xi = \int x \, d\tau : \int d\tau ; \text{ ecc.} \tag{18}$$

§ 9. **Il principio della leva.** — Nel caso di due sole forze parallele applicate agli estremi di una verga rigida, i risultati del § precedente ci dicono subito che la risultante si può pensare applicata in un punto che divide la verga in due parti inversamente proporzionali alle forze; internamente od esternamente secondo che sono dello stesso senso o di senso opposto.

Dette $P$ e $Q$ le intensità delle forze applicate in $A$ e $B$ (estremi della verga) ed $R$ quella della risultante applicata in $C$, si ha

$$P : Q : R = CB : AC : AB.$$

Se quindi la verga è fissa in $C$ *(fulcro)* abbiamo una *leva retta* in equilibrio e la $R$ dicesi *pressione* esercitata sul fulcro. Questo è il famoso principio della leva, base di tutta la Statica degli antichi greci.

Ammesso, come postulato o risultato sperimentale, che una leva a braccia eguali è in equilibrio quando le forze applicate agli estremi sono eguali e che in tal caso il fulcro risente una



pressione parallela ed eguale al doppio delle forze; o in altre parole che due forze eguali e parallele fanno equilibrio ad una doppia, di senso contrario e agente a metà distanza; si può dedurre *direttamente* il principio della leva e far poscia dipendere da questo la legge della composizione delle forze. Così se il rapporto tra $P$ e $Q$ è commensurabile, per es., $P : Q = 2 : 3$, dico che l'equilibrio ha luogo se il fulcro $C$ è tale che $AC : CB = 3 : 2$ e che la pressione è eguale a $P + Q$.

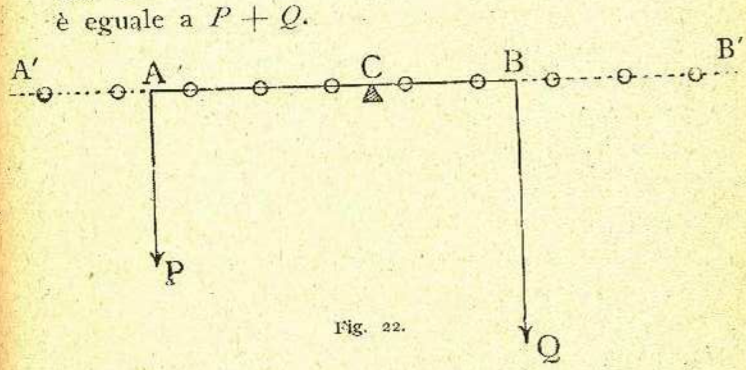


Fig. 22.

Dividasi $AB$ in 5 parti eguali; $AC$ e $CB$ ne conterranno rispettivamente 3 e 2; prolunghiamo $AB$ in $A'$ e $B'$, essendo $AA' = CB$ e $BB' = AC$; $C$ sarà quindi il punto medio di $A'B'$; consideriamo i punti di mezzo delle parti eguali di $AC$, ecc. Alla forza $P$ potremo sostituire quattro forze $\frac{1}{4} P$ parallele, e alla $Q$

sei forze $\frac{1}{6}Q$ e quindi eguali alle precedenti e applicate nei punti di mezzo suddetti, situati simmetricamente rispetto $A$ e $B$. Componendo poscia due a due le forze così ottenute simmetriche rispetto $C$, otterremo la risultante applicata in $C$ ed eguale alla somma di $P$ e $Q$.

Col metodo di riduzione all'assurdo si passa agevolmente al caso del rapporto irrazionale.

Dal principio della leva è poi facile dedurre quello della composizione delle forze; sebbene non sembra sia stato conosciuto dagli antichi. Tale principio fu invece applicato alla ricerca delle condizioni di equilibrio di molte delle macchine semplici.

Le condizioni relative al piano inclinato furono dimostrate, in modo assai originale, da STÉVIN.

Si consideri un triangolo con un lato $AB$ orizzontale e posto in un piano verticale e intorno ai suoi lati avvolta una catena omogenea pesante: essa si mantiene in equilibrio, perchè se cominciasse a muoversi « *questo movimento non avrebbe fine, ciò che è assurdo.* » Ma la parte di catena che sta sotto $AB$ è di per sè in equilibrio e può esser tolta; sono dunque in equilibrio le parti $AC$ e $CB$; immaginandole riunite in due pesi si deduce che, per l'equilibrio, questi due pesi stanno fra loro come le lunghezze $AC$ e $CB$.



Se poi il lato $CB$ è verticale si deduce che su di un piano inclinato, la potenza (parallela al medesimo) sta al peso che essa sostiene in equilibrio, come l'altezza sta alla lunghezza del piano stesso.

Questa regola, com'è facile a vedersi, racchiude in sè già un caso particolare della legge del parallelogrammo. (*)

---

(*) Il principio della leva, conosciuto ma non esattamente dimostrato da ARISTOTELE [Opera Omnia, Paris, 1977, **4**, Mechanica, Cap. 2°], è stato dimostrato da ARCHIMEDE: *De Aequiponderantibus,* Lib. I, Prop. VI e VII [Oeuvres d'Archimède, traduites littéralement par F. Peyrard, Paris, 1807, pp. 280-283; oppure edizione di HEIBERG, 2, p. 152].

Si è tentato rimuovere il postulato su cui si fonda la dimostrazione da HUYGENS, FOURIER [Oeuvres, **2**, p. 510], LAGRANGE [*Mécan. analytique*, Oeuvres, **11**, p. 5]. Su tutto l'argomento poi vedi i classici: *Éléments de Statique* di POINSOT, Paris, 1804, Cap. II; e per una esposizione critica: MACH, *I principi della meccanica esposti criticamente e storicamente nel loro sviluppo* (trad. di D. Gambioli), Roma, 1909 e finalmente: G. VAILATI, *La dimostrazione del principio della leva data da Archimede* [Boll. di bibliogr. e di storia delle scienze matem.; Anno 7 (1904)].

La teoria dell'equilibrio su di un piano inclinato, contenuta in una compilazione latina di un libro di origine greca: *De Ponderibus* di NEMORARIUS [Vedi DUHEM, *Les origines de la Statique*, **1**, Cap. 6], pubblicata da APIANO (1533) e poi tradotta e pubblicata dopo la morte di TAR-

## Esercizi.

1. Un punto $P$ è soggetto a forze dirette a punti fissi, proporzionali alle distanze; trovare la risultante e la posizione di equilibrio.

Il vettore della forza diretta al punto generico $P_r$ è

$$f_r(P_r - P);$$

quindi

$$\mathbf{R} = \Sigma f_r (P_r - P).$$

Se diciamo $G$ il centro di un sistema di forze parallele applicate in $P_1, \ldots$ e di rispettive intensità $f_1, f_2, \ldots$, si ha, rispetto al punto $P$

$$f(G - P) = \Sigma f_r (P_r - P); \qquad f = \Sigma f_r;$$

quindi

$$\mathbf{R} = f(G - P);$$

cioè la risultante passa per $G$ ed ha per grandezza

$$f \operatorname{mod}(G - P).$$

Se $P$ coincide con $G$, il sistema è un equilibrio.

---

TAGLIA (1565), servì a STEVIN (vedi nota al § 4) per dedurre la condizione di equilibrio di tre forze concorrenti di cui due sono ortogonali. GALILEO pure assai semplicemente ha ridotto l'equilibrio su di un piano inclinato a quello della leva: *Le Mecaniche* (1593): Ediz. naz., **2**, p. 181. Si veda ancora: G. VAILATI, *Il principio dei lavori virtuali, ecc.* [Atti Acc. Torino, **32** (1896-97)].

Anche del principio della leva sono state date dimostrazioni fondate sull'uso di equazioni funzionali: vedi la memoria di D. DE FONCENEX citata a pag. 206 e quella di FOURIER, Oeuvres, **2**, p. 511.



2. Un punto è soggetto a forze dirette a punti fissi e inversamente proporzionali alle distanze. Trovare la risultante.

Si ha:

$$\mathbf{R} = \Sigma f_r (P - P_r) : \rho_r^2$$

dove $\rho_r = \operatorname{mod}(P - P_r)$. Posto

$$\Phi = \log(\rho_1^{f_1} \rho_2^{f_2} \ldots)$$

risulta subito

$$\mathbf{R} = \operatorname{grad} \Phi.$$

3. Se più forze in un piano ammettono una risultante e si fanno ruotare tutte di uno stesso angolo intorno ai loro punti di applicazione, la risultante passerà sempre per un punto fisso.

Basterà dimostrare il teorema per due sole forze che ruotano intorno ai loro punti d'applicazione $A$ e $B$; il punto d'incontro $C$ delle due forze si sposterà su di un cerchio e la risultante dovendo formare lo stesso angolo con $AC$ passerà per un punto fisso del cerchio.

4. Ai quattro vertici $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ di un tetraedro applicare quattro forze normali alle facce opposte in modo che si facciano equilibrio.

Rappresentiamo le quattro forze con

$$k_1 (A_4 - A_3) \wedge (A_2 - A_3), \quad k_2 (A_3 - A_4) \wedge (A_1 - A_4),$$
$$k_3 (A_2 - A_1) \wedge (A_4 - A_1), \quad k_4 (A_1 - A_2) \wedge (A_3 - A_2)$$

ed esprimiamo che è nulla la loro risultante. Moltiplicando scalarmente per $A_1 - A_2$, e poi per $A_2 - A_3$, ecc., si trova che

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k.$$

Si conclude che le grandezze delle forze sono proporzionali alle aree delle facce opposte e sono tutte e quattro dirette nell'interno o nell'esterno del tetraedro. È facile poi verificare che la somma delle forze è effettivamente nulla. Per vedere che è anche nullo il momento, basta verificare che è nullo rispetto ad un solo punto; per es. $A_1$. Moltiplicando infatti la 2ª, 3ª, 4ª forza vettorialmente per $A_2 - A_1$, $A_3 - A_1$, $A_4 - A_1$; applicando il teorema sul duplice prodotto vettoriale e poi sommando si trova, a meno del fattore $(A_4 - A_1) \times (A_1 - A_2)$, che è:

$$\}(A_2 - A_3) + (A_3 - A_4) + (A_4 - A_1) + (A_1 - A_2)\{ = 0.$$

### 5. Si può trovare un sistema di sei forze, equivalenti ad un sistema dato, agenti secondo sei rette scelte ad arbitrio, purchè non appartenenti ad un complesso lineare.

Siano $P_1 \ldots P_6$ sei punti scelti ad arbitrio sulle rette parallele ai vettori unitari $\mathbf{u}_1 \ldots$; $\mathbf{R}$ ed $\mathbf{M}$ le coordinate del sistema dato di forze rispetto ad un punto $O$; $f_1, \ldots$ le intensità delle forze e che appunto si tratta di trovare. Si ha

$$(a) \quad \begin{cases} f_1 \mathbf{u}_1 + f_2 \mathbf{u}_2 + \ldots + f_6 \mathbf{u}_6 = \mathbf{R} \\ f_1 (P_1 - O) \wedge \mathbf{u}_1 + \ldots = \mathbf{M}. \end{cases}$$

Riferendoci ad un sistema fondamentale e moltiplicando queste equazioni scalarmente per $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, si otterranno sei equazioni lineari, che, supposto diverso da zero il determinante dei coefficienti, determineranno $f_1, \ldots$

Possiamo anche ricavare:

$$f_1 + f_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 + \ldots + f_6 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_6 = \mathbf{R} \times \mathbf{u}_1,$$



e così altre cinque analoghe; ma tal sistema non determina le $f_r$ (vedi esercizio seguente).

Moltipl. la prima delle $(a)$ scalarmente per $\mathbf{u}_1 \wedge (P_1 - O)$, la seconda per $\mathbf{u}_1$ e sottraendo si ha

$$f_2 [1, 2] + \ldots + f_6 [1, 6] = \mathbf{u}_1 \times \{ \mathbf{R} \wedge (O - P_1) + \mathbf{M} \{$$

e così di seguito; avendo posto

$$(P_2 - P_1) \times \mathbf{u}_2 \wedge \mathbf{u}_1 = [1, 2]; \text{ ecc.},$$

che rappresenta il sestuplo volume del tetraedro avente per spigoli opposti due segmenti unitari posti sulle due rette. La quantità in parentesi, nel secondo membro, esprime la somma del momento $\mathbf{M}$ del sistema e di quello di una forza di vettore $\mathbf{R}$ applicata in $P_1$, rispetto al punto $O$, cioè per la (8), il momento, rispetto $P_1$, del sistema: quindi l'equazione ottenuta dice che la somma dei momenti delle sei forze è eguale al momento del sistema rispetto lo stesso asse $P_1 \mathbf{u}_1$.

Se, in particolare, le sei rette date sono gli spigoli di un tetraedro, e accenniamo con 1, 2, 3 gli spigoli uscenti da uno stesso vertice, con 4, 5, 6 gli spigoli rispettivamente opposti, l'ultima equazione ci determinerà subito $f_4$, perchè il primo membro si riduce a $f_4 [1, 4]$.

### 6. Trovare le condizioni perchè $n$ forze agenti su $n$ rette date si facciano equilibrio.

Colle notazioni precedenti dovremo avere anzitutto

$$f_1 + f_2 \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 + \ldots + f_n \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_n = 0$$

ed altre $n - 1$ equazioni analoghe. Il determinante di questo sistema è nullo per $n > 3$.

Infatti tale determinante è il quadrato della matrice rettangolare che ha per linee $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{i}$, $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{j}$, $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{k}$; ecc.; quindi è nullo per $n > 3$; e sarà possibile soddisfare al sistema con valori non tutti nulli per le $f_r$. Abbiamo ancora

$$\begin{aligned} * + f_2[1,2] + f_3[1,3] + \dots + f_n[1,n] &= 0 \\ f_1[1,2] + \quad * \quad + f_3[2,3] + \dots + f_n[2,n] &= 0 \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Il determinante $D$ di questo sistema è il prodotto di due matrici rettangolari ad $n$ colonne; le colonne della prima sono

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{i}, \quad \mathbf{u}_1 \times \mathbf{j}, \quad \mathbf{u}_1 \times \mathbf{k}, \quad (P_1 - O) \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{i}, \dots$$

ecc.; le colonne della seconda sono

$$(P_1 - O) \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{i}, \quad (P_1 - O) \wedge \mathbf{u}_1 \times \mathbf{j}, \quad \dots \mathbf{u}_1 \times \mathbf{i}, \dots$$

Dunque $D = 0$ per $n > 6$; perchè dunque per $n \leqq 6$ si abbia l'equilibrio senza che tutte le $f_r$ siano nulle, deve essere $D = 0$, cioè le rette debbono soddisfare ad una condizione.

Considerando poi il determinante $D$ (simmetrico) e i suoi minori $D_{rs}$ avremo

$$\begin{aligned} f_1 : f_2 : \dots : f_n &= D_{r1} : D_{r2} : \dots : D_{rs} : \dots : D_{rr} : \dots \\ &= D_{s1} : D_{s2} : \dots : D_{ss} : \dots : D_{sr} : \dots \end{aligned}$$

onde

$$D_{sr}^2 = D_{rr} D_{ss}$$

cioè:

$$f_1 : f_2 : \dots : f_n = \sqrt{D_{11}} : \sqrt{D_{22}} : \dots$$

la quale determina i rapporti tra le forze.

Prescindendo dal caso $n = 2$, la condizione $D = 0$ per $n = 3$ si riduce a

$$2[1,2][1,3][2,3] = 0;$$



le tre forze debbono concorrere in uno stesso punto, essere complanari, ecc.

Per $n = 4$ le quattro rette debbono appartenere allo stesso sistema di generatrici di un iperboloide, perchè il momento del sistema delle forze rispetto ad una retta qualunque essendo nulla, una retta che incontri le prime tre deve incontrare anche la quarta. La condizione analitica che esprime ciò (cioè $D = 0$) è

$$\sqrt{[2,2][1,4]} + \sqrt{[3,1][2,4]} + \sqrt{[1,2][3,4]} = 0.$$

Inoltre

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = \sqrt{[2,3][2,4][3,4]} : \dots$$

Per $n = 5$ le rette debbono avere le stesse trasversali, e per $n = 6$ appartenere allo stesso complesso lineare. Queste condizioni poi sono anche sufficienti.

[MÖBIUS, *Lehrbuch der Statik*, (1837). Gesamm. Werke, **3**, § 102. SOMOFF, *Einleit. in die Statik u. Dynamik*, Leipzig, 1879. Kap. IV, p. 294. SCHELL, *Theorie d. Beweg. u. d. Kräfte*, **2**, p. 32, Leipzig, 1880].

7. Dimostrare che il centro delle forze parallele ottenute prendendo le componenti delle forze di un sistema secondo una certa direzione, descrive un piano col variare della direzione (piano centrale).

Rispetto ad un sistema d'assi ortogonali porremo

$$\begin{aligned} A_1 &= \Sigma X \quad , \quad A_2 = \Sigma Y \quad , \quad A_3 = \Sigma Z \\ A_{11} &= \Sigma x X \quad , \quad A_{12} = \Sigma x Y \quad , \quad A_{13} = \Sigma x Z; \text{ ecc.,} \end{aligned}$$

esse diconsi le *coordinate astatiche* del sistema. Dette $\xi, \eta, \zeta$ le coordinate del centro delle forze parallele alla direzione $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, dalle (17), colle posizioni precedenti, si trova

$$\alpha (A_1 \xi - A_{11}) + \beta (A_2 \xi - A_{12}) + \gamma (A_3 \xi - A_{13}) = 0,$$

e due analoghe. Ponendo a zero il determinante dei coefficienti si ha appunto l'equazione di un piano *(piano centrale).*

Le coordinate astatiche si possono dedurre tutte dalla omografia

$$\sigma = \Sigma \mathrm{H} (P - O, \mathbf{f})$$

essendo $\mathbf{f}$ il vettore della forza applicata in $P$ ed $O$ l'origine; tale omografia è funzione del punto $O$ (oltre che delle forze, ecc.). Si noterà infatti che

$$A_{11} = \mathbf{i} \times \sigma \mathbf{i}, \quad A_{12} = \mathbf{j} \times \sigma \mathbf{i}, \quad A_{13} = \mathbf{k} \times \sigma \mathbf{i}; \text{ ecc.}$$

Inoltre osserviamo che [pag. 25 e 29, form. (41) e (47)]

$$\mathrm{I}_1 \sigma = \Sigma (P - O) \times \mathbf{f}; \quad \mathrm{V} \sigma = \frac{1}{2} \Sigma (P - O) \wedge \mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{M}$$

essendo $\mathbf{M}$ il momento del sistema rispetto al punto $O$.

Il centro $G$ delle forze parallele che sono le componenti delle forze date secondo la risultante $\mathbf{R}$ del sistema dicesi *punto centrale.* Le sue coordinate sono

$$\xi = \frac{A_1 A_{11} + A_2 A_{12} + A_3 A_{13}}{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}, \text{ ecc.,}$$

o anche, sotto forma assoluta,

$$G - O = \frac{1}{\mathbf{R}^2} \mathrm{K} \sigma \mathbf{R}.$$

8. Un sistema di forze è in equilibrio; trovare le condizioni affinchè l'equilibrio non venga alterato quando, spostando il corpo, si lasciano inalterati i punti di applicazione, e i vettori delle forze.



Basterà considerare le rotazioni del corpo intorno ad un punto fisso $O$. In tal caso la condizione di equilibrio si riduce alla sola $\mathbf{M} = 0$; quindi $\mathrm{V} \sigma = 0$ e l'omografia $\sigma$ è una dilatazione. Diciamo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ la terna ortogonale delle sue direzioni principali; dico che se eseguiamo una rotazione del corpo intorno all'asse $O\mathbf{i}$ di ampiezza $\pi$ (simmetria) otterremo una nuova posizione di equilibrio del corpo. Sia infatti $P_1$ il simmetrico di $P$ rispetto all'asse $O\mathbf{i}$; poniamo

$$\beta = \mathrm{H}(\mathbf{i}, \mathbf{i}) - \mathrm{H}(\mathbf{j}, \mathbf{j}) - \mathrm{H}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$$

e sarà facile vedere che

$$P_1 - O = \beta (P - O).$$

L'omografia $\beta$ è una dilatazione che ha le stesse direzioni principali di $\sigma$ (è anche una isomeria vettoriale). Poscia osserviamo che alla nuova posizione del corpo corrisponde l'omografia

$$\sigma' = \Sigma \mathrm{H} \{ \beta (P - O), \mathbf{f} \} = \sigma \beta.$$

Basta osservare che

$$\mathrm{H}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) . \beta = \mathrm{H}(\mathrm{K} \beta \mathbf{a}, \mathbf{b}); \qquad \mathrm{K} \beta = \beta.$$

Ma essendo $\sigma$ e $\beta$ due dilatazioni aventi le stesse direzioni principali, il loro prodotto è pure una dilatazione; quindi $\mathrm{V} \sigma' = 0$ e il corpo è in equilibrio nella nuova posizione.

Lo stesso può dirsi per le altre due simmetrie intorno $O\mathbf{j}$, $O\mathbf{k}$; dunque si hanno tre rette ortogonali uscenti da $O$, intorno a cui il corpo ruotando di $\pi$ passa da una posizione di equilibrio in altre tre.

[BARDELLI, *Sugli assi di equilibrio*. In memor. D. CHELINI, Collec. mathematica, Milano, 1881]. Questi assi diconsi di equilibrio. Se tutte le $A_{ik}$ sono nulle, ogni asse è di equilibrio e il corpo dicesi in *equilibrio astatico*.

Si può stabilire un risultato più generale, osservando che al sistema delle forze che sollecita il corpo si può sostituire una forza di vettore $\mathbf{R}$ applicata in $O$, e tre coppie i cui bracci sono situati sugli assi $O\mathbf{i}$, $O\mathbf{j}$, $O\mathbf{k}$ ed hanno lunghezza unitaria e i vettori delle forze che agiscono agli estremi di questi (l'origine $O$ essendo in comune) sono $\sigma\,\mathbf{i}$, $\sigma\,\mathbf{j}$, $\sigma\,\mathbf{k}$; basta infatti osservare che le componenti del momento risultante di queste coppie sono le stesse di quelle del momento $\mathbf{M}$. Ciò posto ricordiamo che l'omografia $K\,\sigma\,.\,\sigma$ è una dilatazione le cui direzioni principali $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ sono tali che, posto $\sigma\,\mathbf{i} = \mathbf{i}_1$, $\sigma\,\mathbf{j} = \mathbf{j}_1$, $\sigma\,\mathbf{k} = \mathbf{k}_1$, la terna $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ è pure ortogonale. Se quindi con una opportuna rotazione dalla $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ si passa alla $O(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$, nella nuova posizione i vettori delle coppie dette avranno la stessa direzione dei bracci; cioè nella nuova posizione il sistema delle forze sollecitanti il corpo si riduce ad una forza sola passante per $O$. Lo stesso dicasi se prima si fa ruotare il sistema intorno $O\,\mathbf{i}$ di $\pi$ e poi dalla terna $\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$ si passa alla $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$; quindi *esistono quattro posizioni del corpo in cui le forze ammettono una risultante unica passante per un punto fisso, ferme naturalmente le ipotesi enunciate*.

[DARBOUX, *Mém. sur l'équilibre astatique*, etc. Mém. de la Société des Sciences phys. et natur. de Bordeaux, 2 (1877). D. DA SILVA, *Memoria sobre a rotação das forças em torno dos pontos d' applicação*. Mem. Acad. de Lisboa, 3 (2), (1851). ROUTH, *Analytical Statics*, 2 (1892); *Astatics*, pag. 165; per una trattazione sistematica di tutta questa teoria col sussidio delle omografie vettoriali, si veda: BOTTASSO, *Analyse vectorielle générale*, 4; *Astatique*. Pavia, Mattei, 1915].



9. Si può sempre spostare il sistema rigido in modo che risulti $A_1 = A_2 = 0$ e tutte le $A_{ik}$ pure nulle, eccetto $A_{11}$ e $A_{22}$.

Scegliamo per piano $xy$ il piano centrale (esercizio 7) e spostiamo il corpo in modo che la risultante (asse $\zeta$) sia normale al piano detto e scegliamo finalmente per origine il punto centrale $G$. Risulterà subito $A_1 = A_2 = 0$ e poscia, tenendo presenti le coordinate del punto centrale, $A_{13} = A_{23} = A_{33} = 0$; e inoltre ancora $A_{31} = A_{32} = 0$; con ciò effettivamente l'equazione del piano centrale si riduce a $\zeta = 0$. In altre parole il sistema di forze si è ridotto ad una forza $A_3$ normale al piano centrale e ad un sistema di forze parallele allo stesso piano riducibili ad una coppia di momento $A_{12} - A_{21}$; possiamo spostare le forze in modo che anche questo momento sia nullo e quindi $A_{12} = A_{21}$. Finalmente giriamo gli assi $xy$ di un angolo $\alpha$ nel loro piano per modo che il nuovo $A_{12}$ sia nullo; basterà determinare $\alpha$ in modo che

$$\Sigma (x \cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha)(-X \operatorname{sen}\alpha + Y \cos\alpha) = 0$$

ossia

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2 A_{12}}{A_{11} - A_{22}}.$$

In sostanza si può determinare una terna tale che

$$\sigma\,\mathbf{i} = A_{11}\,\mathbf{i}, \quad \sigma\,\mathbf{j} = A_{22}\,\mathbf{j}, \quad \sigma\,\mathbf{k} = 0; \quad \mathbf{R} = A_3\,\mathbf{k}$$

dove $\sigma$ è l'omografia nota ma riferita al punto $G$. Vale a dire che è

$$\sigma = A_{11}\,\mathrm{H}(\mathbf{i},\ \mathbf{i}) + A_{22}\,\mathrm{H}(\mathbf{j},\ \mathbf{j}).$$

Noi supporremo $A_{11} \neq A_{22}$ e $A_3 \neq 0$.

10. Trovare l'espressione del momento scalare di un sistema di forze rispetto a un dato piano.

Sia $P$ il punto di applicazione della forza di vettore $\mathbf{f}$; per un punto arbitrario $A$ conduciamo un piano normale al vettore unitario $\mathbf{u}$. Il vettore

$$\mathfrak{M} = \Sigma\, p\, \mathbf{f}$$

dove $p$ è la lunghezza (con segno) della normale condotta da $P$ sul piano, dicesi *momento del sistema rispetto al piano*. Risulta subito

$$p = (P - A) \times \mathbf{u}$$

e quindi

$$\mathfrak{M} = \sigma\, \mathbf{u}$$

essendo $\sigma$ l'omografia definita nell'eserc. 7 e relativa al punto $A$.

Il modulo di questo vettore dicesi il *momento scalare* del sistema rispetto al piano.

Se ci riferiamo al punto centrale $G$ si ha

$$\mathfrak{M} = \sigma\, \mathbf{u} + (G - A) \times \mathbf{u}\,.\,\mathbf{R}.$$

Se l'equazione del piano è data sotto forma omogenea

$$u\,\xi + v\,\eta + w\,\zeta - t = 0,$$

si deduce che le componenti del vettore $\mathbf{u}$ sono

$$\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\,,\ \text{ecc.,}$$



mentre

$$(G - A) \times \mathbf{u} = -\frac{t}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}\,;$$

e quindi (eserc. precedente)

$$\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}\,.\,\mathfrak{M} = u\,A_{11}\,\mathbf{i} + v\,A_{22}\,\mathbf{j} - t\,A_3\,\mathbf{k}\,;$$

e da questa, elevando a quadrato,

$$(u^2 + v^2 + w^2)\,\mathfrak{M}^2 = u^2 A_{11}^2 + v^2 A_{22}^2 + t^2 A_3^2.$$

I piani pei quali il momento scalare ha un valore costante $\rho$ inviluppano la quadrica

$$u^2(\rho^2 - A_{11}^2) + v^2(\rho^2 - A_{22}^2) + w^2 \rho^2 = t^2 A_3^2$$

($u$, $v$, $w$, $t$ sono appunto le coordinate omogenee del piano), e in coordinate di punti

$$\frac{x^2}{\rho^2 - A_{11}^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - A_{22}^2} + \frac{z^2}{\rho^2} = \frac{1}{A_3^2}\,.$$

Col variare di $\rho$, otteniamo un sistema di quadriche omofocali.

11. Si può spostare il corpo in modo che nella nuova posizione il sistema di forze ammetta una risultante unica?

Sia $R$ il modulo della risultante, $a, b, c$ i coseni di direzione; $x$, $y$, $z$ le coordinate di un punto della sua linea d'azione. Fermi restando i punti di applicazione, anzichè far ruotare il corpo, facciamo ruotare le forze, sicchè rispetto ad una nuova terna d'assi ortogonali, sarà

$$X_1 = a_1 X + b_1 Y + c_1 Z\,;\ \text{ecc.}$$

essendo $a_1$, $b_1$, $c_1$,.... i coseni direttori della nuova terna. Supposto che la terna primitiva sia la $G$ ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) precedentemente considerata, le coordinate del nuovo sistema di forze sono

$$\Sigma X_1 = c_1 A_3 \text{; ecc.... ;} \quad \Sigma (y Z_1 - z Y_1) = b_3 A_{22} \text{; ecc.,}$$

e queste debbono essere eguali alle coordinate della risultante; quindi

$$\begin{array}{lll} R a = c_1 A_3 \ , & R b = c_2 A_3 \ , & R c = c_3 A_3 \\ R l = b_3 A_{22} \ , & R m = - a_3 A_{11} \ , & R n = a_2 A_{11} - b_1 A_{22} \end{array}$$

avendo posto:

$$l = c y - b z \ , \ m = a z - c x \ , \ n = b x - a y.$$

Esprimendo che l'invar. è nullo, ossia $a l + b m + c n = 0$, si trova

$$a_2 A_{22} - b_1 A_{11} = 0.$$

Da questa e dalla sesta delle precedenti si trae

$$a_2 = R A_{11} n : (A_{11}^2 - A_{22}^2) \ , \ b_1 = R A_{22} n : (A_{11}^2 - A_{22}^2)$$

e di seguito

$$a_3 = - R m : A_{11} \ , \ b_3 = R l : A_{22} ;$$

mentre le prime tre ci daranno $c_1$, $c_2$, $c_3$.

Ad ogni forza corrisponde una determinata posizione del corpo. Vediamo come può scegliersi la $R$. Riflettendo che

$$a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + c_1^2 \ , \ a_2^2 + c_2^2 = b_1^2 + b_3^2$$

abbiamo

$$\frac{m^2}{A_{11}^2} + \frac{n^2}{A_{11}^2 - A_{22}^2} - \frac{a^2}{A_3^2} = 0$$

$$\frac{l^2}{A_{22}^2} - \frac{n^2}{A_{11}^2 - A_{22}^2} - \frac{b^2}{A_3^2} = 0 ;$$



ognuna di queste equazioni rappresenta un complesso quadratico; quindi la linea di azione della risultante deve appartenere alla congruenza individuata da questi due complessi. Il punto $(y, z)$ in cui una retta di tale congruenza taglia il piano $y z$, essendo

$$m = a z \ , \ n = - a y,$$

giace sulla conica

$$\frac{y^2}{A_{11}^2 - A_{22}^2} + \frac{z^2}{A_{11}^2} - \frac{1}{A_3^2} = 0$$

che è la conica focale, nel piano $y z$, del sistema di quadriche omofocali dell'esercizio 10.

Parimenti il punto in cui la stessa retta taglia il piano $x z$ giace sull'altra conica focale dello stesso sistema; quindi l'asse della forza risultante deve appoggiarsi a queste due coniche focali (teorema di MINDING). Si deduce di qui in particolare il risultato dell'esercizio 8; basta pel punto fisso condurre le rette che si appoggiano alle due coniche focali.

[MINDING, Journal für r. und ang. Mathem., **15**, pp. 27-38 (1836); Bull. des sciences mathém., **12** (1868); si veda per tutta la bibliografia e la completa discussione, il libro già citato di BOTTASSO, Cap. II].

## 12. Trovare i momenti del sistema di forze, quando il corpo ha subìto una rotazione.

Le componenti dei primitivi momenti sono

$$L = \mathcal{A}_{23} - \mathcal{A}_{32}, \text{ ecc.}$$

e quelli nella nuova posizione del corpo:

$$L_1 = b_1 \mathcal{A}_{13} + b_2 \mathcal{A}_{23} + b_3 \mathcal{A}_{33} - (c_1 \mathcal{A}_{12} + c_2 \mathcal{A}_{22} + c_3 \mathcal{A}_{32}).$$

Valiamoci ora dei parametri razionali di RODRIGUES [Part. I, Cap. 3°, form. (16)]; posto

$$\alpha = A_{11}\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu, \text{ ecc.,}$$
$$\delta = L\lambda + M\mu + N\nu + A\,, \quad A = A_{11} + A_{22} + A_{33},$$

risulta

$$\frac{1}{2\rho^2}(L_1 - L) = \alpha + \mu\gamma - \nu\beta - \lambda\delta, \text{ ecc.}$$

Queste formule permettono di assegnare i parametri della rotazione per cui il sistema dato, col momento di componenti $L$, $M$, $N$, acquista un momento dato di componenti $L_1$, $M_1$, $N_1$.

Eliminiamo infatti dalle equazioni precedenti $\beta$ e $\gamma$, moltiplicandole rispettivamente per $1 + \lambda^2$, $\lambda\mu + \nu$, $\lambda\nu - \mu$ e sommando; avremo

$$2(\alpha - \lambda\delta) = (1 + \lambda^2)(L_1 - L) + (\lambda\mu + \nu)(M_1 - M)$$
$$+ (\lambda\nu - \mu)(N_1 - N)$$

e due analoghe. Sostituendo ad $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ i loro valori e posto

$$\varepsilon = \delta + \frac{1}{2}[(L_1 - L)\lambda + (M_1 - M)\mu + (N_1 - N)\nu]$$

otterremo, tenendo conto del valore di $\delta$,

$$\left[L + \frac{1}{2}(L_1 - L)\right]\lambda + \ldots + A - \varepsilon = 0$$

$$(A_{11} - \varepsilon)\lambda + \left[A_{12} + \frac{1}{2}(N_1 - N)\right]\mu$$
$$+ \left[A_{13} - \frac{1}{2}(M_1 - M)\right]\nu - \frac{1}{2}(L_1 - L) = 0$$

e due altre analoghe. La condizione di coesistenza di queste quattro equazioni lineari in $\lambda$, $\mu$, $\nu$ conduce ad una equazione di 4° grado in $\varepsilon$; risoluta la quale tre delle equazioni date determineranno le $\lambda$, $\mu$, $\nu$.



Consideriamo alcuni casi particolari. Se il sistema deve restare equivalente a se stesso, $L_1 = L$, ecc., quindi

$$L\lambda + M\mu + N\nu + A - \varepsilon = 0$$
$$(A_{11} - \varepsilon)\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu = 0; \text{ ecc.}$$

Dalle tre ultime risulta che la $\varepsilon$ è radice di una equazione cubica, la quale, essendo in generale $A_{ik} \neq A_{ki}$, non ha necessariamente reali tutte le radici. Avremo dunque al più tre assi di equivalenza.

Supponendo nulla la risultante, si può determinare una posizione in cui il sistema sia in equilibrio? Sappiamo già che esistono quattro di queste posizioni di equilibrio (eserc. 8). Essendo $L_1 = M_1 = N_1 = 0$, l'equazione di 4° grado in $\varepsilon$ ha effettivamente tutte e quattro le radici reali, perchè, come si vede subito, essa coincide colla nota equazione secolare. Determinato $\varepsilon$, troveremo i parametri reali delle quattro rotazioni colle quali il corpo si porta nelle quattro posizioni di equilibrio.

[SOMOFF, Mém. de l'Académie de St.-Pétersbourg, **22** (7), (1876); Theor. Mechanik, **2**, p. 390; SIACCI, Mem. Soc. italiana dei *XL*, **4** (3) (1882)].

## 13. Comporre due dinami.

Siano $R_1$, $R_2$ le grandezze delle due forze; $k_1$, $k_2$ i parametri delle dinami, cioè i rapporti delle grandezze dei momenti delle coppie (giacenti in piani normali alle forze) alle grandezze delle forze; l'asse $z$ sia la minima distanza tra le due forze: l'asse della dinamc risultante incontra $z$ ad angolo retto. Siano $\theta_1$ e $\theta_2$ gli angoli che le due forze formano con l'asse $x$; $z_1$, $z_2$ le ordinate dei punti d'incontro delle forze con l'asse $z$; sicchè posto

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2\,, \quad \delta = z_1 - z_2$$

saranno $\varphi$ e $\delta$ l'angolo e la minima distanza delle due dinami. Le loro sei coordinate saranno adunque

$$R_1 \cos\theta_1\,,\ R_1 \operatorname{sen}\theta_1\,,\ 0,\ R_1\cos\theta_1\,(k_1 - z_1 \operatorname{tg}\theta_1)\,,$$
$$R_1 \operatorname{sen}\theta_1\,(k_1 + z_1 \operatorname{cotg}\theta_1),\ 0$$

e sei espressioni analoghe per la seconda. Scegliamo quindi l'origine e l'asse $x$ in modo che

$$k_1 - z_1 \operatorname{tang}\theta_1 = k_2 - z_2 \operatorname{tang}\theta_2 = \alpha$$
$$k_1 + z_1 \operatorname{cotg}\theta_1 = k_2 + z_2 \operatorname{cotg}\theta_2 = \beta.$$

Da queste equazioni sarà facile dedurre $z_1, z_2, \theta_1, \theta_2$. Infatti si ha agevolmente

$$\operatorname{tang}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{k_1 - k_2}{\delta}\,;$$

poscia

$$z_1 = (\beta - \alpha) \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1\,, \quad z_2 = (\beta - \alpha)\operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2$$

e quindi eliminando $\beta - \alpha$,

$$z_1 + z_2 = \frac{k_1 - k_2}{\operatorname{tang}\varphi}\,.$$

Ciò posto, le coordinate della dinamo risultante saranno del pari espresse da

$$R\cos\theta, \quad R\operatorname{sen}\theta, \quad 0, \quad \alpha R\cos\theta, \quad \beta R \operatorname{sen}\theta, \quad 0$$

se poniamo:

$$R\cos\theta = R_1\cos\theta_1 + R_2\cos\theta_2\,; \quad R\operatorname{sen}\theta = R_1\operatorname{sen}\theta_1 + R_2\operatorname{sen}\theta_2\,;$$

e queste esprimono che $R$ è la grandezza della risultante di due forze uscenti dall'origine, sul piano $xy$, formanti con l'asse $x$ gli angoli $\theta_1$, $\theta_2$ e le cui grandezze sono $R_1$



e $R_2$. Se poi $z$ è l'ordinata del punto d'incontro dell'asse della dinamo coll'asse $z$, $k$ il suo parametro, abbiamo, analogamente ai valori trovati per $z_1$ e $z_2$,

$$z = (\beta - \alpha)\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,;$$

dicendo finalmente $x$, $y$ le coordinate di un punto qualunque della stessa si ha

$$\cos\theta = x : \sqrt{x^2 + y^2}\,; \quad \operatorname{sen}\theta = y : \sqrt{x^2+y^2}\,;$$

quindi

$$z(x^2 + y^2) = (\beta - \alpha)\,xy\,;$$

l'asse della dinamo appartiene ad un cilindroide (Part. I, Cap. 4°, eserc. 2); al quale appartengono anche gli assi delle due dinami componenti. La dinamo risultante è dunque l'intersezione del cilindroide con un piano condotto per $z$ parallelamente al vettore risultante delle due forze $R_1$, $R_2$. Quindi il cilindroide è per la composizione delle dinami (o dei moti elicoidali) ciò che il parallelogrammo delle forze è per le forze concorrenti.

Risulta ancora

$$k = \alpha\cos^2\theta + \beta\operatorname{sen}^2\theta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\cos 2\theta.$$

Si giunge quindi alla seguente costruzione; in un piano per $z$ consideriamo un cerchio di diametro

$$AB = \beta - \alpha$$

essendo

$$OA = \alpha, \quad OB = \beta.$$

Il piano del cerchio ruota uniformemente intorno $z$, mentre un punto $Q$ si muo-

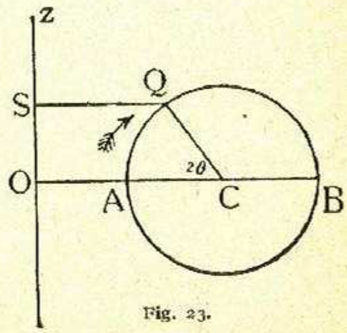


Fig. 23.

ve sul cerchio pure con moto uniforme, ma con velocità doppia; dopo un certo tempo il piano avrà descritto un angolo $\theta$, ed il punto $Q$ l'arco $2\theta$; orbene la $QS$ descrive il cilindroide e inoltre $QS = k$; come si vede subito con facile calcolo.

L'asse $z$ è una retta doppia; $S$ descrive su $z$ un segmento eguale al diametro del cerchio; ecc.

[R. S. Ball, *The Theory of Screws: a geometrical Study of the Kinematics, Equilibrium and small Oscillations of a Rigid Body.* Trans. of R. Irish Academy, **25**, Dublin (1871). Ivi è pure un bel modello del cilindroide].

14. Se $G$ è il centro di un sistema di forze parallele di intensità $m_r$, applicate nei punti $P_r$, ed $O$ una origine qualunque, si ha

$$\Sigma\, m_r (P_r - O)^2 = m\,(G - O)^2 + \frac{1}{m} \Sigma\, m_r\, m_s\, (P_r - P_s)^2 .$$

Quadriamo la (14) del § 8, ponendo $f_r = m_r$ e $m = \Sigma\, m_r$; ed aggiungiamo a primo e secondo membro

$$\Sigma\, m_r\, m_s \,\{ (P_r - O) - (P_s - O) \}^2 ;$$

risulta subito la precedente. Se $O$ coincide con $G$, il primo termine del secondo membro svanisce. Il primo membro esprime il momento quadratico di un sistema di punti di masse $m_r$ rispetto ad un punto $O$. Posto, nella ipotesi di ogni $m_r > 0$,

$$\Sigma\, m_r (P_r - O)^2 = m\, k^2$$

si ha

$$k^2 = (G - O)^2 + \frac{1}{m^2}\, \Sigma\, m_r\, m_s\, (P_r - P_s)^2$$



quindi $k$ raggiunge il suo valore minimo per $O = G$. Se $k_1$ corrisponde ad un altro polo $O_1$, si ha

$$k^2 - k_1^2 = (G - O)^2 - (G - O_1)^2,$$

cioè $G$ trovasi nella intersezione di due sfere di centri $O$ e $O_1$ e di raggi $k$ e $k_1$.

[Lagrange, Nouv. mém. de l'Acad. Royale de Berlin (1783); Oeuvres compl., **5**, pag. 535].

15. I punti di due solidi si corrispondono in modo che

$$x = a + a_1\, x_1 + b_1\, y_1 + c_1\, z_1, \text{ ecc.};$$

trovare la relazione tra i loro centri di massa.

Poichè

$$d\,\tau = D\, d\,\tau_1,$$

essendo $D$ il valore assoluto del determinante funzionale delle $x$ (che è costante), risulta subito dalla (18)

$$\xi = a + a_1\, \xi_1 + b_1\, \eta_1 + c_1\, \zeta_1, \text{ ecc.}$$

In forma assoluta, se poniamo

$$P_1 - O_1 = \sigma\,(P - O)$$

$\sigma$ essendo una omogr. vettoriale, risulta pure

$$G_1 - O_1 = \sigma\,(G - O).$$

16. Trovare il centro di massa di un ottante di sfera e di ellissoide.

Per la simmetria si ha $\xi = \eta = \zeta$; detto $a$ il raggio della sfera

$$\frac{1}{6}\, \pi\, a^3\, \xi = \int x\, d\,x \int d\,y\, d\,z.$$

L' integrale doppio esprime l'area della 4ª parte d'un cerchio di raggio $\sqrt{a^2 - x^2}$ e vale quindi $\frac{1}{4}\pi(a^2 - x^2)$; poscia l'integrale rispetto $x$ (tra o ed $a$) ha per valore $\frac{1}{16}\pi a^4$; onde

$$\xi = \eta = \zeta = \frac{3}{8} a.$$

Ponendo poscia

$$x = a x_1 \quad , \quad y = b y_1 \quad , \quad z = c z_1$$

il punto $x, y, z$ descrive un ellissoide, se il corrispondente descrive una sfera di raggio uno, quindi per un ottante di ellissoide:

$$\xi = \frac{3}{8} a \;,\; \eta = \frac{3}{8} b \;,\; \zeta = \frac{3}{8} c.$$

17. Centro di massa del volume compreso tra un paraboloide ed un piano normale all'asse.

Trovasi evidentemente sull'asse (delle $x$); se le due parabole principali sono

$$y^2 = 2 p x \quad , \quad z^2 = 2 q x,$$

notando, come prima, che

$$\int dx \int d y \, d z = 2 \pi p q \int_0^a x \, d x = \pi p q a^2$$

$$\iiint x \, d x \, d y \, d z = \frac{2}{3} \pi p q a^3,$$

risulta

$$\xi = \frac{2}{3} a;$$

dunque il centro di gravità coincide con quello della superficie del cono retto inscritto.



Nel caso del paraboloide di rotazione si può dare di questa proprietà una dimostrazione elementarissima.

18. Lo stesso per il triangolo limitato dalla parabola

$$a y^{2n} = x^m,$$

dalla ascissa $\alpha$ e dall'ordinata $\beta$.

Si trova, senza alcuna difficoltà,

$$(m + 4n)\xi = (m + 2n)\alpha \;;\; 4(m + n)\eta = (m + 2n)\beta.$$

Per $n = m = 1$, si ritrovano risultati notissimi.

[ARCHIMEDE, *De Aequiponderantibus*. Lib. 2, Prop. 8; *Oeuvres* traduites par PEYRARD, pag. 307].

19. Lo stesso per l'area compresa tra la cissoide ed il suo asintoto.

La cissoide, di equazione

$$(a - x) y^2 = x^3,$$

ha la seguente rappresentazione parametrica:

$$x = a \cos^2\varphi \;,\; y = a \cos^3\varphi : \operatorname{sen}\varphi \;;\; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Quindi

$$\int x y \, d x = 2 a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi \, d\varphi = \frac{5}{6} \cdot 2 a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \, d\varphi$$

$$\int y \, d x = 2 a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \, d\varphi$$

e infine

$$\xi = \frac{5}{6} a.$$

**20.** Lo stesso per l'area compresa tra un intero ramo di cicloide e la sua base.

Le equazioni parametriche della cicloide sono

$$x = a\,(\varphi - \operatorname{sen}\varphi)\ ,\quad y = a\,(1 - \cos\varphi)\,;$$

quindi con un calcolo analogo si trova

$$\eta = \frac{5}{6}\,a.$$

**21.** Lo stesso per un arco di catenaria e per un'area compresa tra l'arco, l'asse $x$ e due ordinate.

Si ha (Cap. 3°, § 6°)

$$y = a\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}\ ,\quad d\,s = \mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}\,d\,x;$$

quindi per un arco contato dal punto $A$ più basso della curva si trova

$$\xi\int \mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}\,d\,x = \int x\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}\,d\,x = a x\,\mathrm{Sh}\,\frac{x}{a} - a^2\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a} + a^2$$

$$\eta\int \mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}\,d\,x = a\int \mathrm{Ch}^2\frac{x}{a}\,dx = \frac{a}{2}\left(a\,\mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a} + x\right).$$

Si ha dunque

$$\xi = x + a\,\frac{1 - \mathrm{Ch}\,\frac{x}{a}}{\mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}}\qquad \eta = \frac{1}{2}\left(a\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a} + \frac{x}{\mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}}\right);$$

e poichè la equazione della tangente nell'estremo $B$ è

$$Y - y = (X - x)\,\mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}\ ,$$



$\xi$ è l'ascissa del punto d'intersezione delle due tangenti in $A$ e $B$.

La normale in $B$ incontra l'asse $y$ in un punto di ascissa

$$Y = a\,\mathrm{Ch}\,\frac{x}{a} + \frac{x}{\mathrm{Sh}\,\frac{x}{a}}\ ;$$

quindi

$$\eta = \frac{1}{2}\,Y.$$

Per le coordinate $\xi_1$, $\eta_1$ del centro di massa dell'area compresa tra la curva, l'asse delle $x$ e le ordinate dei punti $A$ e $B$ si trova

$$\xi_1 = \xi\ ,\ 2\,\eta_1 = \eta.$$

**22.** Un solido è terminato da facce piane e parallele; l'area di una qualunque sezione intermedia è una funzione intera di secondo grado della distanza dalla base. Centro di massa.

Diciamo $S_0$ l'area della base inferiore; $S_1$ quella della superiore, $S_2$ quella della sezione mediana, $S$ quella distante di $z$ dalla base inferiore, e $2\,h$ l'altezza.

Sarà, per ipotesi,

$$S = a\,z^2 + b\,z + c\,;$$

quindi

$$\text{Volume} = \int_0^{2h}(a\,z^2 + b\,z + c)\,d\,z = \frac{h}{3}\,(S_0 + S_1 + 4\,S_2)$$

$$\mathrm{V}\,\zeta = \int_0^{2h}(a z^2 + b z + c)\,z\,d z = \frac{2}{3}\,h^2\,(S_1 + 2\,S_2).$$

Se $\zeta_1$ è la distanza del centro di massa dalla base superiore, si trae

$$\zeta : \zeta_1 = (S_1 + 2\,S_2) : (S_0 + 2\,S_2).$$

La regola precedente è applicabile a quadriche, tronchi di coni, di piramidi, ecc.

Così per un semiellissoide, notando che $S_1 = 0$, e che gli assi della sezione mediana sono $\frac{\sqrt{3}}{2} a, \frac{\sqrt{3}}{2} b$ e quindi

$$S_2 = \frac{3}{4} S_0 ,$$

risulta

$$\zeta : \zeta_1 = 3 : 5$$

## 23. Teoremi di Pappo e di Guldin.

Sia $\sigma$ un'area piana, $x$ un asse del suo piano; l'ordinata $\eta$ del centro di massa di $\sigma$ è tale che

$$\eta\, \sigma = \int\int y\, d\,x\, d\,y = \frac{1}{2} \int y^2\, d\,x.$$

Dicasi $V$ il volume generato da $\sigma$ ruotando intorno ad $x$, per es., di 360°; avremo

$$V = \pi \int y^2\, d\,x = 2\,\pi\,\eta\,.\,\sigma\,;$$

il volume è dato dall'area per la circonferenza descritta dal centro di massa.

In modo analogo, l'area descritta da un arco è eguale alla lunghezza dell'arco per la circonferenza descritta dal centro di massa dell'arco.

[PAPPI ALEXANDRINI, *Collectiones quae supersunt*; ediz. Hultsch; **2**, pag. 683; GULDIN, *Centrobaryca*, **2**, pag. 144 (1640). Vedi anche: CAVERNI, *Storia del metodo sperim. in Italia*, **4**, p. 112 (Firenze, 1895)].



## 24. Dicesi viriale di un sistema di forze, rispetto ad un punto $O$, la somma dei prodotti scalari dei vettori delle forze per i vettori $P - O$. Investigare le sue proprietà.

Porremo:

$$V = \Sigma\,(P_r - O) \times \mathbf{f}_r\,;$$

e quindi se $\sigma$ è l'omografia definita all'eserc. 7 e relativa al punto $O$, si ha

$$\mathrm{I}_1\, \sigma = V.$$

Se $V'$ è il viriale relativo ad un altro punto $O'$ si ha

$$V' = V + (O - O') \times \mathbf{R}\,;$$

quindi $V' = V$ se $O'$ è sul piano condotto da $O$ normale ad $\mathbf{R}$. Se il sistema di forze è una coppia, il viriale è costante per ogni punto dello spazio.

Detto $V_0$ il viriale relativo ad $O$, i punti $O'$ per cui il viriale è nullo sono tali che

$$(O' - O) \times \mathbf{R} = V_0$$

e quindi sono su di un piano normale alla forza risultante, ecc. I punti pei quali il viriale ha lo stesso valore sono su piani paralleli.

Se le forze i cui punti di applicazione sono $P_i$ agiscono secondo le congiungenti i punti due a due e sono funzioni delle distanze di questi punti si ha:

$$\mathbf{f}_{ik} = f_{ik}\,(r_{ik})\, \frac{P_k - P_i}{r_{ik}}\;;\; \mathbf{f}_{ik} = f_{ki}\,(r_{ik})\, \frac{P_i - P_k}{r_{ik}}$$

dove $r_{ik} = \mathrm{mod}\,(P_i - P_k)$,

$$V = \sum_{ik} \{ \mathbf{f}_{ik} \times (P_i - O) + \mathbf{f}_{ki} \times (P_k - O) \}$$

$$= \sum_{ik} \frac{f_{ik}}{r_{ik}} \{ (P_i - O) \times (P_k - P_i) + (P_i - P_k) \times (P_k - O) \}$$

e finalmente

$$V = \sum r_{ik} f_{ik} (r_{ik}).$$

[La considerazione del viriale è dovuta a MÖBIUS, *Lehrbuch der Statik* (1837); Werke, **3**; e poi a SCHWEINS, Journal für r. und ang. Mathem., **38**, p. 77 (1848); **47**, p. 238 (1853). Il nome è dovuto a CLAUSIUS, Annalen der Physik, **141**, p. 124 (1870)].

---

# CAPITOLO II.

## IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI.

Il problema generale della Statica è la ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un sistema di corpi soggetti a determinate forze. Il principio che ora esporremo, il più fondamentale della Statica, permette di risolvere un tal problema, perchè:

1° raggruppa in un solo enunciato le svariate condizioni di equilibrio dei sistemi materiali;

2° permette di dedurre le equazioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio con un procedimento semplice e uniforme.

§ 1. **Spostamento virtuale.** — Se un punto $P$ di un sistema materiale può assumere lo spostamento infinitesimo $P_1 - P$, pensato anche come semplicemente possibile, si dice che può ricevere uno spostamento *virtuale* o *facoltativo*. Se poi tale spostamento può aver luogo anche in senso opposto, esso dicesi *invertibile*; altrimenti *non invertibile*.