

CAPITOLO QUINTO

MOTO CONTINUO DI UN SISTEMA RIGIDO.

Il teorema del § 2 del Cap. precedente ci ha dato una rappresentazione semplice e chiara del moto istantaneo di un sistema rigido. Ora cercheremo di ottenere una rappresentazione pure semplice del moto continuo di un tal sistema; perciò cominceremo a considerare, come nel § 4 del Cap. 2^o, due casi particolari, i quali, oltre a facilitare la trattazione del caso generale, sono importanti per se stessi, sotto vari punti di vista.

§ 1. **Moto continuo di una figura piana nel proprio piano. Centro istantaneo di rotazione. Le due curve Γ_1 e Γ' .** — Nel moto continuo di un corpo rigido un piano scorra su se stesso; ogni punto del corpo si muoverà su di una curva contenuta in un piano parallelo al primo; i punti situati su di una stessa normale al piano descriveranno curve eguali, ecc. Dunque basterà limitarci allo studio del moto continuo di una figura piana nel proprio piano.

Dimostreremo che

Esiste un punto C del piano tale che al tempo t si ha

$$(1) \quad P' = \omega i(P - C).$$

Infatti riflettendo che P' ed O' sono paralleli al piano, risulta che Ω è normale al piano; quindi, valendoci del solito operatore i , si ha, dalla (1) del Cap. prec.,

$$P' = O' + \omega i(P - O).$$

Di qui si deduce

$$(2) \quad P + \frac{iP'}{\omega} = O + \frac{iO'}{\omega} = C$$

essendo C un punto determinato del piano, indipendente da P e da O ; e poichè

$$O' + \omega i(C - O) = 0$$

sottraendo questa eguaglianza dal valore di P' , risulta la (1).

Il punto C dicesi *centro istantaneo di rotazione* (*) e la (1) esprime, che per rispetto alla velocità:

Il moto istantaneo di una figura piana nel proprio piano equivale ad una rotazione intorno al centro istantaneo di rotazione.

(*) JOH. BERNOULLI, *De centro spontaneo rotationis*. Opera omnia, 4 (1742), p. 265.

Il numero ω , funzione di t , dicesi semplicemente *velocità angolare*.

Valgono i seguenti teoremi:

Le normali alle traiettorie dei punti della figura mobile, in un determinato istante, concorrono nel centro istantaneo; i punti di contatto di una curva, connessa colla figura mobile, col proprio involuppo sono i piedi delle normali condotte alla curva dallo stesso centro. ()*

La $P-C$ essendo infatti normale a P' , è la normale alla traiettoria di P .

Sia poscia σ una curva connessa col piano mobile; nel moto della figura, σ invilupperà un'altra curva σ_1 ; sia P uno dei loro punti di contatto al tempo t . Un osservatore connesso colla figura mobile, vedrà spostarsi P su σ , cioè la velocità relativa di P è diretta secondo la tangente a σ ; mentre quella assoluta è diretta secondo la tangente a σ_1 ; e però velocità assoluta e relativa hanno la stessa direzione, che è poi quella stessa della velocità di strascinamento; cioè normale a $P-C$.

All'istante $t_1 > t$, P sia venuto in A su σ , in A_1 su σ_1 ; pongasi

$$s = \text{arco } AP; \quad s_1 = \text{arco } A_1P.$$

(*) Questi teoremi sulle normali sono di CHASLES: vedi la memoria del 1829 già citata alla pag. 90.

Inoltre, per quanto si è detto, il modulo della velocità assoluta è la somma dei moduli di quella relativa e di strascinamento; cioè

$$\frac{d(s_1 - s)}{dt} = \omega \text{ mod } (P-C);$$

il primo membro dicesi *velocità di scivolamento* di σ su σ_1 . Se è sempre nulla, si dice che σ rotola senza strisciare su σ_1 ; in tal caso $s_1 - s = \text{cost.}$, e poichè all'istante t , tanto s che s_1 si annullano, la costante è nulla e si ha $s = s_1$.

Immaginiamo ora sdoppiato il piano, composto cioè di due fogli sovrapposti, uno dei quali è tenuto fisso, mentre l'altro, sostegno della figura mobile, scorre sul primo. Consideriamo il luogo dei punti C sul piano fisso; avremo, in generale, una curva Γ_1 , *luogo del centro istantaneo di rotazione sul piano fisso*; e sul piano mobile consideriamo il luogo dei punti che diventano successivamente centri istantanei di rotazione; tale luogo è una curva Γ , detta *luogo del centro istantaneo di rotazione sul piano mobile*.

In ogni istante, cioè per ogni posizione della figura mobile, le due curve hanno un punto comune (centro istantaneo relativo a quel determinato istante). Questo punto ha nulla la velocità di strascinamento e però velocità relativa ed assoluta sono eguali: cioè le due curve si toccano e Γ_1 può considerarsi come involuppo di Γ ;

inoltre la velocità di scivolamento è nulla; e quindi:

Nel moto continuo della figura piana la curva Γ rotola senza strisciare sulla curva Γ_1 . ()*

Di guisa che immaginando ritagliate due sagome curvilinee Γ e Γ_1 , se si connette la figura mobile con Γ e si fa rotolare senza strisciare l' su Γ_1 , si riproduce, cinematicamente, il moto continuo della figura. Un tal movimento dicesi *cicloïdale*; ed otteniamo quindi la immagine più semplice del moto continuo suddetto dicendo:

Il moto continuo di una figura piana nel proprio piano è un moto cicloïdale.

§ 2. **Centro delle accelerazioni; cerchio dei flessi.** — Facciamo ora alcune considerazioni sull'accelerazione di strascinamento. Derivando la (1) si ha successivamente

$$(3) \quad \begin{cases} P'' = \omega' i(P - C) + \omega i(P' - C') \\ P'' = (\omega' i - \omega^2)(P - C) - \omega i C'. \end{cases}$$

Ponendo

$$(4) \quad \omega' i - \omega^2 = \rho e^{i\varphi}$$

si ottiene

$$P'' = \rho e^{i\varphi}(P - C) - \omega i C'.$$

(*) Questo teorema trovasi nella memoria di CAUCHY (1827), già citata a pag. 126; e poi in quella di CHASLES (1829).

Determiniamo il punto O la cui accelerazione di strascinamento è nulla; tale punto dicesi *centro delle accelerazioni* ed è determinato dalla

$$(5) \quad \rho e^{i\varphi}(O - C) - \omega i C' = 0;$$

quindi per sottrazione

$$(6) \quad P'' = \rho e^{i\varphi}(P - O);$$

cioè l'accelerazione di un punto qualunque è eguale al vettore $P - O$ ruotato di un angolo φ (che è lo stesso per tutti i punti della figura mobile e varia col tempo) e poscia moltiplicato per ρ .

L'angolo φ è eguale all'angolo che $O - C$ forma con $i C'$, perchè da (5) risulta appunto che $O - C$ ruotato dell'angolo φ , diventa parallelo ad $i C'$.

Il punto G tale che

$$\omega(G - C) + i C' = 0$$

dicesi *centro geometrico delle accelerazioni*. Esso è la posizione di O nella ipotesi che $\omega' = 0$; in tal caso infatti l'operatore $\rho e^{i\varphi}$ diventa $-\omega^2$ e la (5) si trasforma nella equazione precedente.

È facile verificare che $G - O$ ed $O - C$ sono perpendicolari.

Se $\omega' = 0$ la (6) diventa

$$P'' = \omega^2(G - P)$$

cioè l'accelerazione dei vari punti è diretta verso G .

Tornando al caso generale, $\omega' \neq 0$, si deduce subito che se $\text{mod } P''$ è costante, è anche costante $\text{mod } (P - O)$; onde

I punti che all'istante t hanno accelerazione di grandezza costante stanno su cerchi aventi il centro nel centro delle accelerazioni.

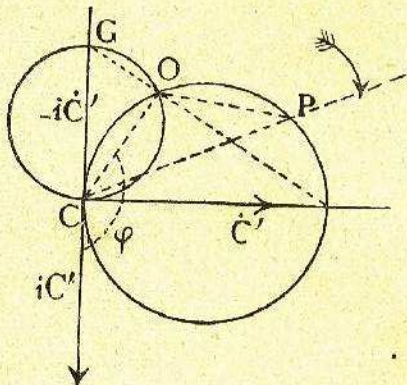


Fig. 8.

Il luogo dei punti la cui accelerazione tangenziale è nulla stanno su di un cerchio passante per O , per C e ivi tangente alla iC' ; il luogo dei punti la cui accelerazione normale è nulla stanno pure su di un cerchio (cerchio dei flessi) passante per O , per G e per C e ivi tangente alla C' .

Infatti, i punti per cui è nulla l'accelerazione tangenziale hanno l'accelerazione diretta secondo la normale $P - C$ alla propria traiettoria; quindi

$P - O$, ruotato dall'angolo φ , deve risultare parallelo a $P - C$ e perciò $O \hat{P} C = \varphi$; il luogo è dunque un cerchio, ecc. Lo stesso dicasi per secondo, e poichè l'accelerazione di G è tutta tangenziale, così anche il punto G appartiene a questo cerchio.

L'equazione di un tal cerchio è

$$M - C = - \frac{V}{\omega} \text{sen } \theta e^{i\theta} \mathbf{t}$$

dove \mathbf{t} è un vettore unitario tale che

$$C' = V \mathbf{t}.$$

Infatti se $\theta = \frac{\pi}{2}$ si riottiene appunto l'equazione che determina il punto G .

I punti di questo cerchio presentano un flesso per la loro traiettoria, essendo in essi $\frac{1}{\rho} = 0$ [Cap. 2^o, (6)] (*). Il punto C però fa eccezione: la sua accelerazione essendo, per la (3), $-\omega i C'$,

(*) DE LA HIRE, *Traité des Roulettes* [Mém. de l'Acad. Royale de Paris, 1706, pp. 342 e 347] ha considerato un tal cerchio e distinto il senso della curvatura di un punto della figura mobile a seconda della sua posizione rispetto al cerchio. I due cerchi furono considerati da BRESSE: *Mém. sur un théorème nouveau concernant les mouvements plans* [Journ. de l'École Polytechn., Cah. 35 (1853), pp. 89-115].

essa è tutta normale; la velocità di strascina-mento è nulla, quindi dalla solita formula (6) del Cap. 2^o si deduce che è nullo il raggio di curvatura; cioè C è un regresso per la propria traiettoria; ciò che risulta anche chiaro colla diretta considerazione del moto di rotolamento di Γ su Γ_1 .

Se infine ci riferiamo ad un sistema ortogonale $C(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ essendo \mathbf{i} parallelo a C' , le (1) e (3), al modo solito, ci danno per le componenti della velocità e dell'accelerazione di strascina-mento

$$(7) \begin{cases} v_{sx} = -\omega y & , v_{sy} = \omega x \\ w_{sx} = -\omega^2 x - \omega' y & , w_{sy} = \omega' x - \omega^2 y - \omega V. \end{cases}$$

§ 3. Formula di Eùler-Savary. Costruzione dei centri di curvatura. — Una curva σ connessa colla figura mobile inviluppa un'altra curva σ_1 ; uno dei punti di contatto Q giace sulla normale condotta da C su σ ; siano P, P_1 i centri di curvatura di σ e σ_1 relativi a Q ; r ed r_1 le loro rispettive distanze da C ; e supponiamo che la loro disposizione sia quella segnata nella fig. 9 e inoltre $\omega > 0$.

Decomponiamo la velocità angolare ω intorno C in altre due intorno P e P_1 colla regola (22) del Cap. prec. e le solite convenzioni sui segni. Detta ω_1 la velocità istantanea intorno P_1 , sarà

$\omega_1 > 0$ e inoltre

$$\omega_1 : r = \omega : r - r_1$$

cioè

$$\omega = \omega_1 r_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right).$$

Se il punto P cade invece tra C e P_1 , si dovrebbe sostituire ω_1 con $-\omega_1$ e la formula precedente varrebbe egualmente. Se invece C cade tra P e P_1 , $\omega_1 > 0$, riguarderemo $r > 0$ e sostituiremo r_1 con $-r_1$. Con queste convenzioni, la formola detta è sempre valida.

Poscia osserviamo che se Q_1 è la posizione di Q su σ_1 al tempo $t + dt$ la normale in Q passa ancora per P_1

e taglia la tangente in C alle due curve Γ e Γ_1 in un punto C_1 e la normale in C alla CP in un punto L tale ch 

$$CL = V \operatorname{sen} \theta \cdot dt = \omega_1 r_1 dt,$$

quindi

$$\omega_1 r_1 = V \operatorname{sen} \theta$$

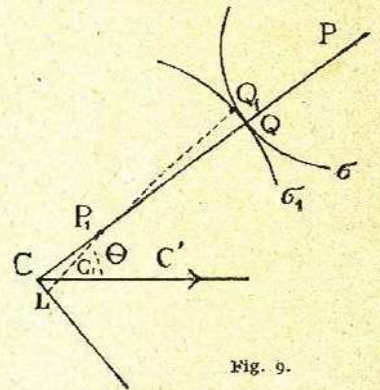


Fig. 9.

ed abbiamo la formula

$$(8) \quad \frac{\omega}{V} = \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right).$$

Il primo rapporto non dipende dalla curva σ considerata; se quindi assumiamo per curva σ la Γ e quindi Γ_1 per σ_1 , sarà $\theta = 90^\circ$ e se diciamo R ed R_1 i raggi di curvatura in C di queste due curve, ferme restando per il segno di R_1 le stesse convenzioni fatte per r_1 , otteniamo

$$(9) \quad \frac{\omega}{V} = \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R},$$

conosciuta ora col nome di *formula di Euler-Savary* (*).

(*) Fu data da EULER, *Supplementum de figura dentium rotarum* [Novi Comm. Acad. Petrop., II (1765), p. 219, § 17], e poscia ritrovata da SAVARY ed esposta nelle sue lezioni sugli ingranaggi nel corso di macchine alla Scuola Politecnica di Parigi, come risulta da una comunicazione di CHASLES [Journ. de Mathém., 10 (1845), p. 204]. La dimostrazione del testo è, crediamo, dovuta ad ARONHOLD, *Grundzüge der kinematischen Geometrie* [Verh. des Verein zur Beförd. des Gewerbfl. in Preussen, 51, (1872)]. Si veda inoltre: F. BUKA, *Ueber das sphärische Kurbelgetriebe...* (Inaug. Diss., Göttingen 1876); *Die Elemente der kinematischen Geometrie des zweigliedrigen ebenen Systeme*. Charlottenburg, 1890.

Se in particolare σ si riduce al punto P , allora P_1 è il centro di curvatura della traiettoria descritta da P ; quindi

Il centro di curvatura dell'inviluppo di una curva coincide con quello della traiettoria descritta dal centro di curvatura della invilupante.

Dalla (9) si deducono due semplici costruzioni per la ricerca dei raggi di curvatura delle traiettorie descritte dai punti della figura mobile (ai quali soltanto basterà limitarci, per l'osservazione precedente).

a) Se è noto il cerchio dei flessi, per costruire della traiettoria di ogni punto P il corrispondente centro di curvatura P_1 , si congiunga P con G e da C si tiri la normale alla CP e dal loro punto d'incontro H si conduca la parallela alla CG ; questa incontrerà la CP nel punto P_1 .

Infatti (Fig. 10) se M è il punto d'incontro della CP col cerchio dei flessi, si ha

$$M - C = -\frac{V}{\omega} \operatorname{sen} \theta e^{i\theta} t;$$

$$P - C = r e^{i\theta} t;$$

e quindi

$$P - M = \left(r + \frac{V}{\omega} \operatorname{sen} \theta \right) e^{i\theta} t = \frac{r^2}{\rho} e^{i\theta} t$$

tenendo conto della (9) e di $\rho = r - r_1$ (ρ raggio di curvatura in P).

Si deduce che

$$\text{mod}(P - M) = \frac{r^2}{\rho}.$$

Poichè MG e CH ; CG e HP_1 sono

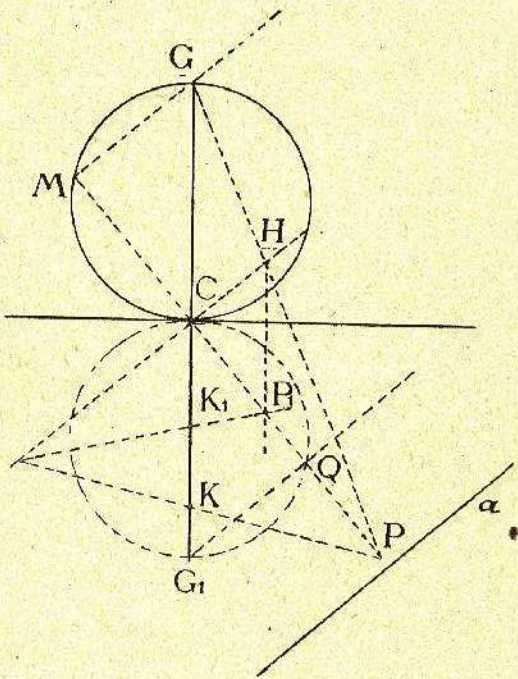


Fig. 10.

parallele, si deduce

$$r : \text{mod}(P - M) = \text{mod}(P - P_1) : r$$

e quindi

$$\rho = \text{mod}(P - P_1).$$

Discendono da questa semplice costruzione alcune notevoli conseguenze; così la traiettoria di P volge la sua concavità o convessità verso C secondo che P è esterno o interno al cerchio dei flessi. Il centro di curvatura dell'involuppo di una retta della figura mobile si otterrà applicando la costruzione precedente al centro di curvatura della retta stessa, supponendo cioè P all'infinito sulla normale in C alla retta; risulta subito che per tale centro Q , $CQ = CM$; col variare della retta, Q descrive un cerchio simmetrico in C a quello dei flessi e che dicesi dei regressi; ossia

Tutte le rette della figura mobile inviluppano delle curve i cui centri di curvatura sono sul cerchio dei regressi.

Una retta passante per G_1 , simmetrico di G , tocca il proprio involuppo in Q , piede della normale condotta da C sulla retta; e Q è pure il centro di curvatura dell'involuppo stesso; cioè Q è un regresso per l'involuppo; di qui il nome di cerchio dei regressi. Si è già precedentemente notato che C è un regresso per la propria traiettoria.

Se una retta passa per un punto fisso, esso è l'involuppo della retta e però esso deve trovarsi sul cerchio dei regressi.

b) Se sono noti i centri di curvatura K e K_1 delle due curve Γ e Γ_1 , si congiunga P con K e si determini il suo punto d'incontro colla

normale in C alla CP ; si congiunga tale punto con K_1 ; tale retta taglierà la CP nel punto P_1 (Costruzione di SAVARY).

Infatti si supponga nella (9), $\theta = 90^\circ$ e sulla $i C'$ si considerino le due punteggiate $A, \dots; A_1, \dots$ tali che le distanze di due punti corrispondenti r, r_1 , soddisfino la

$$(10) \quad \frac{\omega}{V} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}.$$

Le due punteggiate sono proiettive; C è un punto unito; al punto K corrisponde K_1 ; G è il punto limite della prima, G_1 della seconda. Proiettandole da P e P_1 rispettivamente si otterranno due fasci prospettivi: l'asse di prospettiva passa per C e per H cioè è la retta CH normale in C alla CP ; su questo asse debbono incontrarsi PK e P_1K_1 ; onde è vero, ecc.

La costruzione non è applicabile se $\theta = 90^\circ$; ma in tal caso da (10), dato r è facile, con ricerche di quarte proporzionali, trovare r_1 .

Nel caso poi di $\theta = 0$, da (9) si deduce $r_1 = 0$; cioè:

I punti della tangente comune a Γ e Γ_1 descrivono traiettorie col centro di curvatura in C .

§ 4. Alcune applicazioni dei risultati precedenti.

a) Supponiamo date le due curve Γ e Γ_1 e precisamente Γ_1 sia una retta e Γ un cerchio

(moto puro cicloidale). Ogni punto della figura mobile descrive una cicloide allungata, accorciata od ordinaria secondo che è esterno, interno o sopra Γ (Fig. 1); C è il centro istantaneo di rotazione e quindi PC , qualunque sia la posizione di P , è la normale alla traiettoria di P . Se P è un punto di Γ , la congiungente P col punto diametralmente opposto a C è la tangente alla cicloide. Per trovare il centro di curvatura P_1 di P , applicheremo la costruzione di Savary, notando che K coincide con G , K_1 col punto all'infinito di CG ; e si ritrova la costruzione nota. Il punto G descrivendo una retta è sempre un flesso per la sua traiettoria; il cerchio di diametro CG è il cerchio dei flessi; G il centro geometrico delle accelerazioni, ecc.

Supponendo fisso il cerchio Γ , mobile la retta Γ_1 , abbiamo il moto inverso del precedente; ogni punto di Γ_1 descrive una sviluppante di cerchio.

In modo identico si può trattare il caso (Fig. 11) in cui Γ e Γ_1 sono due circonferenze (moto *epi* o *ipocicloidale*).

Se P trovasi su Γ , notando che le rette O_1A , OP sono parallele, si deduce che il gruppo PP_1CA è armonico; quindi il centro di curvatura corrispondente a P è l'intersezione di PC colla polare di P rispetto Γ_1 ; il luogo di P_1 (evolvente della epicycloide) è pure una epicycloide.

b) Supponiamo ora date le traiettorie di due punti della figura mobile; e precisamente (Fig. 12) due punti A e B descrivano due rette ortogonali OA, OB . Le normali in A e B alle due rette si incontrano nel centro istantaneo C , e poichè $OC = AB = \text{cost.}$, la curva Γ_1 è un cerchio di raggio AB e di centro O . Un osservatore connesso colla figura mobile, cioè con AB ,

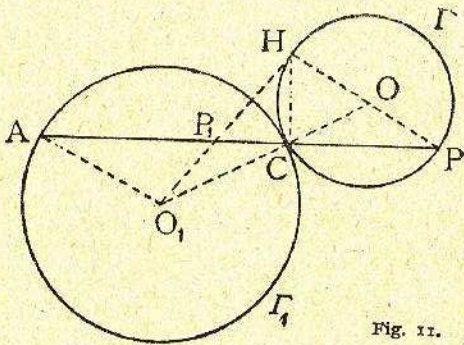


Fig. 11.

vedrà muoversi C su Γ , in modo che $A\hat{C}B$ sia retto; dunque Γ è il cerchio circoscritto al rettangolo $OABC$; il moto (ipocicloidale) si riproduce facendo rotolare un cerchio internamente ad uno di raggio doppio. A e B sono punti di flesso per le loro traiettorie e quindi Γ è il cerchio dei flessi ed ogni suo punto deve descrivere una retta; ma la normale passa per O , dunque ogni punto di Γ descrive un diametro di Γ_1 .

Un punto P di AB descrive una ellissi di centro O cogli assi diretti secondo OA e OB e di grandezze eguali a $2BP$ e $2AP$.

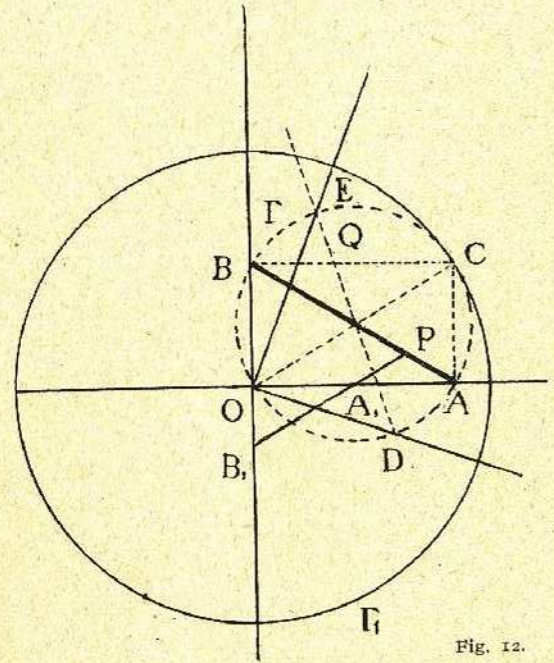


Fig. 12.

Consideriamo un altro punto Q della figura mobile; si congiunga col centro di Γ e siano D, E i punti di incontro con Γ ; D ed E descrivono le rette OE, OD ; quindi anche Q de-

scrive una ellissi di centro O e i cui assi hanno le direzioni OD , OE , ecc. Dunque:

Tutti i punti della figura mobile descrivono delle ellissi (rette) col centro in O ().*

Se da P conduciamo $PA_1 = PA$, risulta pure $PB_1 = PB$ e quindi $A_1B_1 = \text{cost.}$, e relativamente al segmento A_1B_1 potranno costruirsi due cerchi analoghi ai considerati, ecc.

La retta AB involuppa un'astroide.

Osservando che due estremi di una corda qualunque di Γ descrivono due rette uscenti da O , si conclude che le proprietà dimostrate valgono nella ipotesi, apparentemente più generale, in cui A e B descrivono due rette qualunque.

Nel moto inverso (vedi esercizio 2 in fine del capitolo) ogni punto della figura descrive una lumaca di Pascal; ogni retta involuppa un cerchio.

(*) Su questa proprietà, conosciuta da lungo tempo (LORIA, l. c., p. 497) è fondato il compasso ellittico (*ellissografo*). Vedansi i modelli cinematici dello SCHILLING. La considerazione di un tal movimento è dello CHASLES (mem. già citata del 1829). Si veda F. EBNER, *Leitfaden der technischen wichtigen Kurven*. Leipzig, Teubner, 1906. Cap. I.

L'esempio svolto è uno dei più semplici del così detto moto ellittico, in cui almeno un punto della figura mobile descrive una ellissi. Vedi: R. WIRTH, *Ueber elliptische Bewegung*. Inaug. Diss., Marburg 1890.

c) Nel moto di una figura piana una retta passa per un punto fisso A , mentre un suo punto percorre una curva: per es. una retta OB .

La AB (Fig. 13) involuppa in A un cerchio infinitamente piccolo; la normale in A alla AB (cioè

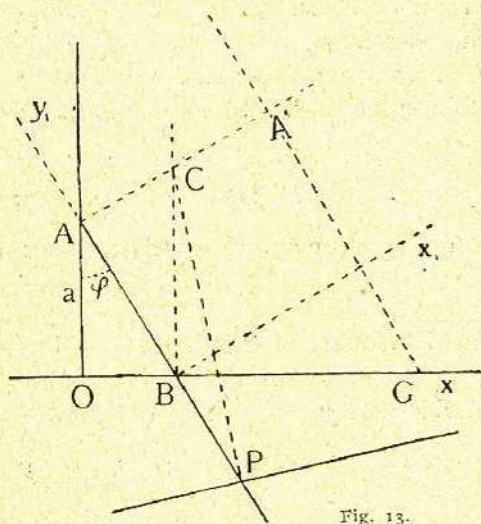


Fig. 13.

alla retta involuppante) e la normale in B alla retta s'incontrano nel centro istantaneo. Il cerchio dei flessi passa per B e per C ; quello dei regressi per A e per C ; ma i due cerchi essendo simmetrici rispetto a C , quello dei flessi passerà pel simmetrico A' di A , rispetto C e sarà quindi pienamente determinato. L'interse-

zione di OB colla normale in A' alla AG è il centro G geometrico delle accelerazioni.

Un punto P di AB descrive la conoide della retta rispetto al polo A ; PC è la normale alla conoide; si determinerà il centro di curvatura colla prima delle costruzioni date, conoscendosi il cerchio dei flessi.

Possiamo ancora determinare le due curve Γ_1 e Γ . Riferendoci agli assi fissi x, y , avremo

$$x = OB = a \operatorname{tang} \varphi;$$

$$y = CB = AB : \cos \varphi = a : \cos^2 \varphi;$$

eliminando φ , otteniamo l'equazione della Γ_1

$$x^2 = a(y - a);$$

parabola il cui vertice è A e AO è l'asse. Riferendo invece la posizione di C ad una coppia d'assi mobili x_1, y_1 , si ha:

$$x_1 = CA = CB \operatorname{sen} \varphi = a \operatorname{sen} \varphi : \cos^2 \varphi$$

$$y_1 = AB = a : \cos \varphi$$

ed eliminando φ ,

$$y_1^2 = a^2(x_1^2 + y_1^2)$$

che è l'equazione di Γ .

§ 5. **Moto continuo di un sistema rigido intorno ad un punto fisso.** — È il secondo dei casi particolari che vogliamo considerare e si riduce anche al moto continuo di una

figura sferica sulla propria sfera. Se O è il punto fisso, la velocità di un punto P è espressa da

$$P' = \Omega \wedge (P - O)$$

[Cap. 4^o, (1)]; quindi

Il moto istantaneo equivale ad una rotazione istantanea intorno ad un asse uscente dal punto fisso (asse istantaneo di rotazione) ().*

La velocità essendo inoltre diretta normalmente al piano determinato dal punto e dall'asse, risulta che:

I piani normali alle traiettorie dei vari punti del sistema, in un determinato istante, passano per l'asse di rotazione.

Sia

$$C - O = \Omega;$$

il punto C dicesi *polo di rotazione*. Le sue varie posizioni nello spazio costituiscono una curva che dicesi *erpoloide*; il cono Γ_1 che la proietta da O dicesi cono della erpoloide, od anche *cono degli assi istantanei di rotazione nello spazio fisso*. Consideriamo inoltre quei punti del corpo che diventano successivamente poli di rotazione; essi

(*) Fu scoperto da D'ALEMBERT, *Recherches sur la préces. à. équinoxes*. Paris, 1749, p. 83; poi da EULER, pag. 202 della mem. citata a pag. 124 e quindi prima del teorema analogo per le posizioni finite. Vedi nota a p. 111.

costituiscono nel corpo (che potremo dire spazio mobile) un'altra curva che dicesi *poloide*; il cono Γ , che la proietta da O , dicesi cono della poloide, od anche *cono degli assi istantanei di rotazione nello spazio mobile*.

I due coni hanno in ogni istante una generatrice comune, l'asse di rotazione istantaneo relativo; i punti di questo avendo nulla la velocità di strascimento, hanno eguali la velocità assoluta e relativa; però i due coni hanno il piano tangente comune lungo quella generatrice. Di qui, come al § 1, si può concludere che:

Il moto continuo di un sistema rigido intorno ad un punto fisso equivale al rotolamento, senza strisciamento, di un cono connesso col corpo su di un cono fisso (*).

Questi risultati danno luogo ad altri relativi al moto di una figura sferica sulla propria sfera, per il quale potrebbe svilupparsi una teoria del tutto analoga a quella del moto piano precedentemente svolto.

(*) Questo teorema, dato pure da CAUCHY nella memoria più volte citata (1827), e poi da CHASLES pel moto su di una sfera (1829), fu posto in maggior luce da POINSOT, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*; Paris, 1834 [Jour. de Mathém., 16 (1851), pp. 9-129, 289-336] a cui è dovuta la considerazione della poloide ed erpoloide. Vedi Cap. 2°, § 5 della mem. cit.

Così se r ed r_1 sono gli archi sferici, contati da C , dei centri di curvatura sferica di una curva σ e del proprio involuppo σ_1 , applicando le stesse considerazioni del § 3, si trova

$$\frac{\omega}{V} = \text{sen } \theta \frac{\text{sen}(r - r_1)}{\text{sen } r \text{ sen } r_1} = \text{sen } \theta (\text{cotg } r - \text{cotg } r_1),$$

e quindi se diciamo R_1 ed R i raggi di curvatura sferica in C delle due curve Γ_1 e Γ , si avrà, come per la (9),

$$(11) \quad \frac{\omega}{V} = \text{sen } \theta \left(\frac{1}{\text{tg } r} - \frac{1}{\text{tg } r_1} \right) = \frac{1}{\text{tg } R} - \frac{1}{\text{tg } R_1},$$

che è la formola di Euler-Savary per la sfera, e dalla quale si deduce che proiettando dal centro della sfera sul piano tangente in C alla sfera, abbiamo un moto piano in cui i centri di curvatura sono i corrispondenti di quelli di curvatura sferica, ecc. (*)

§ 6. **Poloide ed erpoloide.** — Vogliamo ora ottenere la rappresentazione parametrica di queste due curve mediante i parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ della rotazione [Cap. 3°, (10), (23)].

Diciamo *diretto* il moto del corpo rispetto allo spazio circostante; *inverso* il moto dello spazio rispetto al corpo. Si ha:

Il polo di rotazione, la poloide ed erpoloide del moto diretto sono rispettivamente simmetrici,

(*) Vedi nota citata a pag. 152.

rispetto al punto fisso, del polo di rotazione, dell'erpoloide e della poloide del moto inverso (*).

Infatti in questi due moti le velocità angolari sono eguali e di senso contrario; e quindi i due poli di rotazione C e C_1 sono simmetrici rispetto O ; inoltre quando C descrive la poloide nel moto diretto, cioè nel moto del corpo rispetto allo spazio circostante, C_1 descrive la curva, supposto fisso il corpo, nello spazio; cioè la erpoloide nel moto inverso; onde è vero, ecc.

Riferiamo ora la posizione del corpo, al tempo t , ad una terna di assi connessi col corpo e colla origine in O ; la posizione di essa rispetto ad un'altra fissa sia definita dai parametri $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, funzioni del tempo. Se diciamo p, q, r le componenti, secondo gli assi connessi col corpo, della velocità angolare Ω , ed accenniamo con α', \dots le $\frac{d\alpha}{dt}, \dots$, abbiamo:

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha' = \frac{1}{2} ir\alpha + \frac{1}{2} (ip + q)\beta \\ \beta' = \frac{1}{2} (ip - q)\alpha - \frac{1}{2} ir\beta \\ \gamma' = \frac{1}{2} ir\gamma + \frac{1}{2} (ip + q)\delta \\ \delta' = \frac{1}{2} (ip - q)\gamma - \frac{1}{2} ir\delta. \end{cases}$$

(*) KLEIN u. SOMMERFELD, l. c., pag. 14.

Infatti, diciamo α_1, β_1, \dots i parametri della rotazione con cui dalla posizione al tempo t si passa a quella al tempo $t + \tau$; 2φ l'ampiezza, a_1, b_1, c_1 i coseni dell'asse di rotazione. Le (28) del Cap. 3° ci danno

$$\alpha_1 = \cos \varphi + i c_1 \sin \varphi; \beta_1 = \sin \varphi (-b_1 + i a_1).$$

Diciamo ora $\alpha + \Delta\alpha, \dots$ i parametri della rotazione risultante di queste due considerate; per le (24) dello stesso Cap. avremo

$$\alpha + \Delta\alpha = \alpha \alpha_1 + \beta \gamma_1; \beta + \Delta\beta = \alpha \beta_1 + \beta \delta_1$$

cioè:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -\alpha(1 - \cos \varphi) + i \alpha c_1 \sin \varphi + \beta \sin \varphi (b_1 + i a_1) \\ \Delta\beta &= -\beta(1 - \cos \varphi) - i \beta c_1 \sin \varphi \\ &\quad + \alpha \sin \varphi (-b_1 + i a_1). \end{aligned}$$

Dividiamo ora per τ e passiamo al limite per $\tau = 0$; 2φ tende a zero, ma $\lim \frac{2\varphi}{\tau} = \omega$, grandezza della velocità istantanea di rotazione.

Notando che

$$\lim \frac{\sin \varphi}{\tau} = \lim \frac{\sin \varphi}{\varphi} \cdot \frac{\varphi}{\tau} = \frac{1}{2} \omega$$

e che $a_1 \omega, b_1 \omega, c_1 \omega$ hanno per limiti le componenti p, q, r della velocità angolare al tempo t , risultano subito le due prime delle (12). Le altre risultano subito osservando che cambiando i in $-i$, α si muta in δ , β in $-\gamma$.

Dalle (12) possiamo ricavare p, q, r (coordinate di un punto della poloide), cioè ottenere la rappresentazione parametrica della poloide. Infatti si deduce

$$(13) \quad \begin{cases} p + iq = 2i(\beta\delta' - \beta'\delta) \\ -p + iq = 2i(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) \\ r = 2i(\alpha\delta' - \beta'\gamma) = 2i(\beta\gamma' - \alpha'\delta). \end{cases}$$

Dette invece p_1, q_1, r_1 le componenti di Ω secondo gli assi fissi, cioè le coordinate di un punto della erpoloide, avremo

$$(14) \quad \begin{cases} p_1 + iq_1 = 2i(\beta\alpha' - \beta'\alpha) \\ -p_1 + iq_1 = 2i(\delta\gamma' - \delta'\gamma) \\ r_1 = 2i(\gamma\beta' - \delta'\alpha) = 2i(\alpha\delta' - \gamma'\beta). \end{cases}$$

Basta per ciò osservare che i parametri del moto inverso sono $\delta, -\beta, -\gamma, \alpha$ e la poloide del moto inverso è simmetrica dell'erpoloide del moto diretto; quindi le (14) si deducono subito dalle (13) cambiando α in δ, β e γ in $-\beta, -\gamma$ e p, q, r in $-p_1, -q_1, -r_1$.

Finalmente valendoci delle (10) del Cap. 3^o, con un calcolo assai semplice si ottiene

$$p + iq = (\theta' + i\psi' \operatorname{sen} \theta) e^{-i\varphi}; \quad r = \varphi' + \psi' \operatorname{cos} \theta;$$

cioè:

$$(15) \quad \begin{cases} p = \theta' \operatorname{cos} \varphi + \psi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \\ q = -\theta' \operatorname{sen} \varphi + \psi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \varphi \\ r = \varphi' + \psi' \operatorname{cos} \theta \end{cases}$$

Se in queste mutiamo p, q, r in $-p_1, -q_1, -r_1$ e quindi ψ, θ, φ in $-\varphi, -\theta, -\psi$, otterremo ancora

$$(16) \quad \begin{cases} p_1 = \theta' \operatorname{cos} \psi + \varphi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi \\ q_1 = \theta' \operatorname{sen} \psi - \varphi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{cos} \psi \\ r_1 = \psi' + \varphi' \operatorname{cos} \theta, \end{cases}$$

le quali danno la rappresentazione della poloide ed erpoloide per mezzo degli angoli di EULER.

§ 7. **Moto continuo di un sistema rigido.** — Abbiamo già dimostrato che il moto istantaneo di un sistema rigido (Cap. 4^o, § 2) equivale ad un moto istantaneo elicoidale. I successivi assi di moto elicoidale, corrispondenti alle successive e continue posizioni del corpo, costituiscono una superficie rigata Γ_1 ; le rette del corpo che successivamente diventano assi di moto elicoidale costituiscono un'altra rigata Γ . Queste due superficie, nei due casi particolari precedentemente considerati, si riducono a due cilindri o a due coni. In ogni istante esse hanno a comune una generatrice, asse di moto elicoidale relativo; e lungo questa hanno a comune tutti i piani tangenti. Infatti sia P un suo punto; essendo P'_s diretta secondo la generatrice, P'_s, P'_r, P'_t giacciono in uno stesso piano, contenente la generatrice; e poichè il piano di P'_s e dell'asse è il piano tangente in P a Γ_1 ; quello di P'_r e

dell'asse è tangente in P a Γ , così è vero quanto si era asserito; e di più:

Il moto continuo del sistema rigido potrà quindi riprodursi immaginando che una rigata connessa col sistema si muova su di una rigata fissa a cui è tangente secondo una generatrice e sulla quale essa rotola scivolando sulla generatrice ().*

Esercizi.

1. Un angolo retto EO_1B si muove in modo che il punto B percorre una retta mentre il lato O_1E passa per un punto fisso A tale che $OA = O_1B$, essendo OA normale alla retta. Trovare le due curve Γ e Γ_1 .

Il centro istantaneo (Fig. 14) è nel punto d'incontro delle normali AC e BC rispettivamente alle O_1E , OB ; risulta $CB = CA$, onde Γ_1 è una parabola col fuoco in A e direttrice OB ; Γ è una parabola eguale col fuoco in B e direttrice O_1E , simmetrica alla prima rispetto la tangente comune CL . Il cerchio dei flessi passa per B , per C in cui è tangente alla CL ; condotta CG normale a CL , G è il centro geometrico delle accelerazioni.

Il luogo di O_1 è la curva ottenuta costruendo i simmetrici di O rispetto Γ_1 , cioè una strofoide retta di cui

(*) L'esistenza di queste due rigate appare già nella memoria di CAUCHY più volte citata. Il teorema poi fu esplicitamente enunciato da PONCELET nel suo corso alla Faculté des Sciences de Paris, 1838.

possiamo trovare normale, raggio di curvatura, ecc. (LORIA, loc. cit., p. 58).

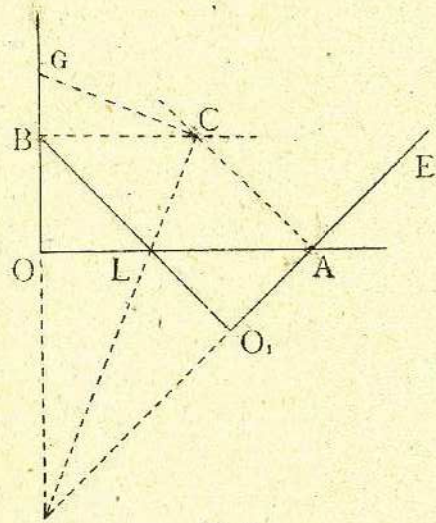


Fig. 14.

2. Nel moto di una figura piana due rette a, b inviluppano due cerchi di centri α e β . Trovare le due curve Γ e Γ_1 e l'inviluppo di ogni altra retta c .

Il centro istantaneo C (Fig. 15) è nel punto d'incontro delle normali condotte da α e β su a e b . Conducendo da α e β le parallele ad a e b formeremo un quadrilatero inscrittibile; il luogo di C , essendo $\alpha \hat{C} \beta = \widehat{ab}$, è il cerchio circoscritto Γ_1 ; e poichè CM (diametro) è costante, Γ è un cerchio di centro M e raggio doppio del primo. Si ha il

moto inverso di quello considerato al § 4, b. La $C\gamma$ è la normale all'inviluppo di c ; γ essendo un punto fisso di Γ_1 , l'inviluppo di c è un cerchio; cioè tutte le rette inviluppano cerchi i cui centri sono su di un altro cerchio.

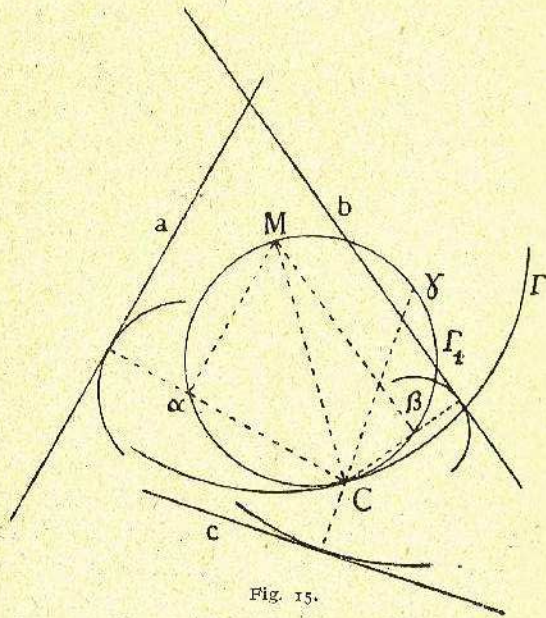


Fig. 15.

[Teorema di E. BOBILLIER (1797-1832); vedi *Cours de Géométrie*, 10^e édit. (1850), pp. 207-208]. Il cerchio Γ_1 è il cerchio dei regressi; e però resta determinato anche quello dei flessi.

3. Due punti A e B si muovono sopra due circonferenze eguali di centri O, O_1 ed è $OO_1 = AB$.

Trovare le due curve Γ e Γ_1 , ed il luogo del punto medio M di AB nell'ipotesi che i due cerchi si taglino ortogonalmente.

Il punto d'incontro di OA e O_1B è il centro istantaneo C , e poichè $CO_1 - CO = r, CA - CB = r, \Gamma_1$ è un'iperbole di fuochi O ed O_1 , Γ una iperbole eguale di fuochi A e B . La tangente comune è la bisettrice dell'angolo C ; poichè della traiettoria di A conosciamo il centro di curvatura, sarà determinata l'intersezione di OA col cerchio dei flessi che quindi può costruirsi.

Se i due cerchi si taglino ad angolo retto,

$$OO_1 = AB = r\sqrt{2},$$

Γ e Γ_1 sono iperboli equilateri. Sia Q il punto medio di OO_1 ; ρ e θ le coordinate polari di M rispetto a Q e all'asse polare OO_1 ; si ha

$$AO_1^2 + r^2 - 2r\sqrt{2}AO_1 \cos \theta = 0;$$

lo stesso per OB ; quindi

$$\rho = \frac{1}{2}(AO_1 - OB) = r\sqrt{\cos 2\theta};$$

equazione di una lemniscata avente per fuochi O ed O_1 .

4. Stesso problema supponendo A mobile su di un cerchio di centro O e B su di una retta passante per O .

Posto $OA = r, AB = a$ e scelto O per polo e OB per asse polare, l'equazione di Γ_1 è

$$\rho(\rho - 2r)\cos^2 \theta = a^2 - r^2.$$

Scelto invece A per polo, AB per asse polare, quella di Γ è

$$a^2(\rho_1 - r)^2 = (a^2 - r^2)(\rho_1^2 - r^2).$$

Entrambe sono curve di 6° ordine.

5. Stesso problema supponendo che A percorra una retta tangente ad un cerchio di centro O , mentre una retta della figura, passante per A , si mantiene tangente allo stesso cerchio.

La curva Γ_1 è una parabola che ha O per fuoco ed a per direttrice; Γ è pure una parabola avente A per fuoco e per direttrice la parallela condotta per O alla tangente mobile, eguale alla prima.

6. Il vertice V di un angolo costante descrive una spirale logaritmica, mentre un suo lato passa pel polo O . L'involuppo dell'altro lato (sviluppoide della spirale) è una spirale collo stesso polo.

Il centro istantaneo C è nella intersezione della normale in V alla spirale colla perpendicolare in O alla OV ; il piede N della normale tirata da C sull'altro lato dell'angolo è il punto di contatto coll'involuppo; ma ON forma un angolo costante con NV , dunque è vero, ecc.

Si deduce in particolare che l'evoluto di una spirale è una spirale; supposto O punto luminoso e la spirale curva riflettente o rifrangente, l'involuppo dei raggi riflessi o rifratti è una spirale.

7. Dimostrare che il vertice V di un angolo costante, i cui lati sono tangenti ad una spirale,

descrive una spirale collo stesso polo (curva isoptica).

Se P e Q sono due punti di contatto dei lati dell'angolo colla spirale, C il centro istantaneo, osservando che i punti $OCPQV$ sono su di un cerchio, risulta che la normale CV alla traiettoria forma un angolo costante con OV ; ecc.

8. Dimostrare che se una spirale logaritmica rotola su di una retta, il suo polo descrive una retta.

Infatti la curva descritta da O ha le tangenti egualmente inclinate sulla retta.

9. Condurre la tangente alla podaria di una curva rispetto ad un punto O .

La podaria può considerarsi come la curva descritta dal vertice V di un angolo retto di cui un lato passa per O , l'altro è tangente alla curva. Se P è il punto di contatto, si determina subito il centro istantaneo; la normale in V è la congiungente V col punto medio di OP .

10. Dato il centro istantaneo, la tangente comune delle due curve Γ e Γ_1 e di un punto P il corrispondente centro di curvatura, trovare di ogni altro punto Q il relativo centro di curvatura; oppure dati due punti P e Q ed i loro centri di curvatura, di ogni altro punto trovare il corrispondente.

Sopra ogni retta uscente da C (Fig. 16), la punteggiata dei punti P e quella dei punti corrispondenti (centri di curvatura)

sono proiettive (come al § 3, b); C è un punto unito, il punto limite di P è l'incontro della retta col cerchio dei flessi; il punto limite di P_1 è l'incontro col cerchio dei regressi. Da nota proprietà risulta che le congiungenti

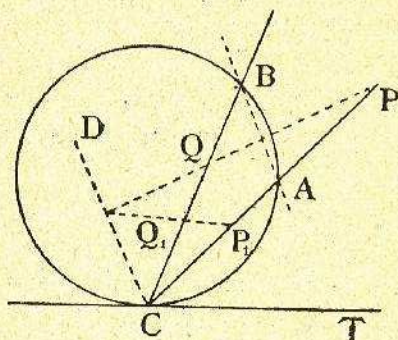


Fig. 16.

PQ, P_1Q_1 ; ecc. si incontrano in punti della CD parallela alla congiungente i punti AB limiti delle punteggiate P e Q . Quindi

$$D\hat{C}B = C\hat{B}A = A\hat{C}T$$

e siccome quest'ultimo è noto, sarà determinata la CD e quindi Q_1 .

Cogniti invece $P, P_1; Q, Q_1$ la intersezione di PP_1 con QQ_1 è il centro istantaneo; CD è determinata e quindi anche la tangente CT e ricadiamo nel caso di prima.

BOBILLIER [l. c. all'esercizio 2].

11. Trovare le coordinate di P_1 in funzione di quelle di P rispetto agli assi del § 2 e reciprocamente.

Partendo dalla formula (8) si ha

$$r_1 = \frac{V}{\omega} r \operatorname{sen} \theta \left(\frac{V}{\omega} \operatorname{sen} \theta + r \right)^{-1};$$

e di qui

$$x_1 = \frac{V}{\omega} x y \left(x^2 + y^2 + \frac{V}{\omega} y \right)^{-1};$$

$$y_1 = \frac{V}{\omega} y^2 \left(x^2 + y^2 + \frac{V}{\omega} y \right)^{-1};$$

reciprocamente, dalla espressione di r mediante r_1 , oppure osservando che

$$x : y = x_1 : y_1$$

si deduce

$$x = -\frac{V}{\omega} x_1 y_1 \left(x_1^2 + y_1^2 - \frac{V}{\omega} y_1 \right)^{-1};$$

$$y = -\frac{V}{\omega} y_1^2 \left(x_1^2 + y_1^2 - \frac{V}{\omega} y_1 \right)^{-1};$$

formule che definiscono una trasformazione quadratica.

Di qui segue che se P descrive una retta a , il punto corrispondente descrive una conica α_1 , che è una iperbole se a taglia in due punti reali il cerchio dei flessi. Tutte le coniche α_1 hanno in C per cerchio osculatore il cerchio dei regressi; parimenti alle rette descritte da P_1 corrispondono coniche aventi in C per cerchio osculatore il cerchio dei flessi. Basta trovare l'equazione di una qualunque conica α_1 e il raggio di curvatura di essa in C .

12. Nel moto di un sistema rigido intorno a un punto fisso, trovare

a) i punti la cui accelerazione totale, in un dato istante, è nulla o costante;

b) i punti la cui accelerazione tangenziale o normale è nulla;

c) i punti la cui accelerazione totale è diretta verso il punto fisso;

d) dimostrare inoltre che tutti i punti di uno stesso raggio uscente da O hanno velocità, accelerazioni parallele; i centri di curvatura delle loro traiettorie sono su di una retta perpendicolare alle normali delle traiettorie.

Ci varremo delle formule (5) e (6) del Cap. 4°, tenendo presente che O è il punto fisso.

a) Dovendo essere $\beta(P-O) = 0$, risulta $P = O$; cioè, in generale, il solo punto fisso ha accelerazione nulla. Se poi si osserva che

$$\beta \Omega = \Omega' \wedge \Omega, \quad \beta \Omega' = \Omega \wedge \{\Omega \wedge \Omega'\}$$

si deduce che colla ipotesi di Ω' parallelo ad Ω , $\beta \Omega = 0$, e quindi l'asse istantaneo di rotazione è asse di accelerazione nulla. Se $\Omega' = 0$, vale la stessa conseguenza; se $\Omega = 0$, l'asse di accelerazione nulla è l'asse $O\Omega'$.

Se $P'' = k^2$, risulta

$$\beta(P-O) \times \beta(P-O) = k^2;$$

od anche pel teorema di commutazione, [Cap. 1°, (40)]

$$(P-O) \times K \beta \cdot \beta(P-O) = k^2,$$

la quale rappresenta un ellissoide col centro in O , perchè l'omografia $K \beta \cdot \beta$ è una dilatazione; gli assi dell'ellissoide sono appunto le direzioni unite di questa dilatazione.

b) I punti la cui accelerazione tangenziale è nulla sono tali che

$$P'' \times P' = \{\Omega' \wedge (P-O)\} \times \{\Omega \wedge (P-O)\} = 0;$$

essi formano un cono quadratico contenente le rette $O\Omega$, $O\Omega'$; inoltre i piani passanti per la generatrice $P-O$ e per queste due rette sono ortogonali.

Il solo punto O ha accelerazione normale nulla. Ma se $\Omega' = 0$, la proprietà ha luogo per tutti i punti dell'asse di rotazione.

c) Poniamo

$$\beta(P-O) = m(P-O) \quad (m \text{ numero}),$$

l'omografia $\beta - m$ essendo degenerare, $I_3(\beta - m) = 0$ [Capit. 1°, § 7 (30)]; quindi m risulta determinato da una equazione cubica. I punti richiesti sono dunque su tre rette uscenti da O , di cui una almeno reale (rette unite dell'omografia β).

d) Se $P_1 - O = m(P-O)$, si ha subito $P_1'' = m P''$; ecc. Di più coi simboli del Cap. 2°, § 3, (6), poichè $(P-O) \times \mathbf{t} = 0$,

$$P'' \times (P-O) = \frac{v^2}{\rho} (P-O) \times \mathbf{n} \\ = (P-O) \times \Omega \wedge \{\Omega \wedge (P-O)\} = -v^2$$

ossia

$$(P-O) \times \mathbf{n} = -\rho$$

il raggio di curvatura è la proiezione ortog. di $P-O$ su \mathbf{n} ; onde è vero ecc.

GILBERT [Comp. rendus, 107, pp. 726, 830 (1888)].

SCHELL, *Theorie der Bewegung u. der Kräfte*, Leipzig, 1879-1880, I, p. 493.

Il lettore potrà per esercizio trovare agevolmente la dimostrazione di questi teoremi coi metodi della geometria analitica, assumendo per asse ζ l'asse di rotazione, e per piano ζx il piano tangente ai due coni Γ_1 e Γ ; con ciò risulta, al tempo t ,

$$p = q = q' = 0; \quad r = \omega.$$

13. Nel moto di un sistema rigido libero trovare i punti la cui accelerazione è nulla o costante; i punti la cui accelerazione tangenziale o normale è nulla, ecc.

È una ricerca analoga alla precedente, ma nella ipotesi che $O'' \neq 0$.

Se $O'' + \beta(P - O) = 0$, si ricava, essendo $\beta^{-1}P$ inversa di β :

$$P - O = \beta^{-1}O'';$$

esiste dunque un punto di accelerazione nulla; sia esso O_1 . Avremo

$$P'' = \beta(P - O_1)$$

quindi: il luogo dei punti la cui accelerazione totale è nulla sono di un ellissoide che ha per centro O_1 ; il luogo dei punti la cui accelerazione tangenziale è nulla sono un di una quadrica, ecc.

14. Se nel moto continuo di un sistema rigido, l'asse di moto elicoidale istantaneo è fisso nel corpo, esso è pure fisso nello spazio e viceversa.

In tal caso infatti Γ (oppure Γ_1) si riduce ad una retta. Il teorema vale pel moto piano o sferico. CAUCHY, mem. cit.

15. Studio di alcune proprietà del quadrilatero piano articolato.

Consideriamo il moto di una biella AB i cui estremi descrivono due circonferenze di centri O, O' fissi (vedi esercizio 3); tal moto è detto dagli inglesi « three Bar Motion ». A seconda dell'è grandezze delle aste il moto di A o di B intorno ad O o ad O' può effettuarsi con giro completo o limitato.

L'intersezione C di OA e $O'B$ è il centro istantaneo di rotazione; la curva Γ_1 (come pure Γ) è di ottavo ordine ed è stata studiata da R. MÜLLER [Zeitschrift f. Mathem. u. Physik, 48, pp. 224-248 (1908)].

Un punto P rigidamente connesso con AB descrive una curva detta di WATT o a lunga inflessione (LORIA, l. c., p. 232). È una curva di 6° ordine avente i punti ciclici come punti tripli (tricircolare); con tre nodi e due fuochi O, O' ; i nodi sono su di un cerchio passante per O, O' e capace dell'angolo APB . Essa può essere generata in due altri modi per mezzo di due altri sistemi a tre aste. Per lo studio di tale curva, vedi i numerosi lavori di ROBERTS S. e CAYLEY [Proc. of the London Mathem. Soc., 2 (1869); 3 (1870); 4 (1872); 6 (1874); 7 (1875)]; di MÜLLER e infine l'opera di F. EBNER, già citata a pag. 160, Cap. 3°, interessante anche per i numerosi grafici che l'accompagnano, nonché la monografia di L. ALLIEVI, *Cinematica della biella piana*, Napoli 1895.

La trattazione di alcuni casi particolari è più semplice ed interessante.

Se i due cerchi sono eguali e di raggio b , si può agevolmente trovare l'equazione della curva descritta dal punto medio di AB . Posto $OO' = 2a$, $AB = 2c$, l'origine delle coordinate nel punto medio di OO' (asse delle x), e detti 2θ e $2\theta'$ gli angoli che OA e $O'B$ formano con OO' ; le coordinate di A e di B sono espresse da

$$a - b \cos 2\theta, b \sin 2\theta; \quad -a + b \cos 2\theta', b \sin 2\theta'$$

e quindi quelle di M da

$$x = b \sin(\theta - \theta') \sin(\theta + \theta'),$$

$$y = b \sin(\theta + \theta') \cos(\theta - \theta').$$

Esprimendo che la distanza dei due punti AB è costante, si giunge dopo facili riduzioni all'equazione

$$2ab \cos(\theta + \theta') \cos(\theta' - \theta) = x^2 + y^2 + c^2 - a^2 - b^2;$$

tra queste equazioni eliminiamo θ e θ' ed otterremo

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2 + 4a^2y^2(x^2 + y^2 - b^2) = 0.$$

Se $c = a$ (v. esercizio seguente) tale curva si spezza in un cerchio ed in una lemniscata di BOOTH (LORIA, p. 238); e se finalmente $b = a\sqrt{2}$, in una ordinaria lemniscata (esercizio 3).

Nel caso di $OA = OO' = a$, $AB = O'B = b$, (Fig. 17) si ha la figura di un cervo volante. Ogni punto connesso con AB descrive una curva bicircolare unicursale, podaria di una conica. Le due curve Γ_1 e Γ sono due ovali di Cartesio. Infatti, notando che l'area del triangolo ACB è la somma di quella di OCO' e del doppio di $O'O'B$, e posto

$$OC = \rho, \quad O'C = \rho'$$

$$AC = R, \quad BC = R'$$

risulta

$$b(a + \rho) = a\rho' + 2ab$$

cioè

$$b\rho - a\rho' = ab,$$

ovale di cui due fuochi sono O, O' (curva Γ_1); ed inoltre

$$bR - aR' = ab,$$

altra ovale di cui due fuochi sono A e B (curva Γ).

L'equazione di Γ_1 , posto il polo in O' e $O\widehat{O}'C = \varphi$, si trova osservando che

$$b^2\rho^2 = (ab + a\rho')^2 = b^2(a^2 + \rho'^2 - 2a\rho'\cos\varphi),$$

quindi

$$\rho' = \frac{2ab}{b^2 - a^2} (a + b \cos \varphi).$$

che rappresenta una lumaca di PASCAL.

Sono specialmente interessanti per le applicazioni pratiche i casi in cui una parte della curva descritta da M differisce assai poco da una retta; cioè, per es., parallelogrammo di WATT (in cui $a^2 = b^2 + c^2$); e meccanismo di CEBICEFF (vedi esercizio 17).

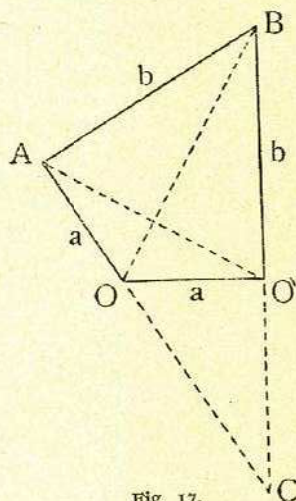


Fig. 17.

16. Dell'antiparallelogrammo di Hart. Antiparallelogrammo sferico.

È la figura, formata da due lati e da due diagonali di un trapezio isoscele (Fig. 18); il punto di intersezione C delle due diagonali è il centro ist. di rotazione se si tiene fisso il lato AB ; invece tenendo fissa la diagonale AA_1 , il cen-

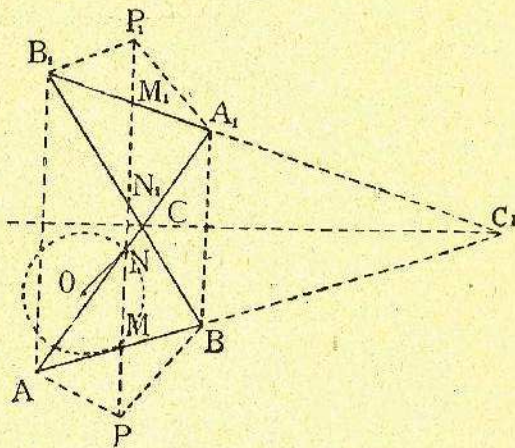


Fig. 18.

tro ist. è l'intersezione C_1 dei due lati. Nel primo caso Γ_1 è una ellissi coi fuochi in A e B e Γ una ellissi simmetrica coi fuochi in A_1 e B_1 ; nel secondo caso si hanno invece due iperboli coi fuochi in A e A_1 e in B e B_1 . Nel primo caso si conoscono i centri di curvatura A e B delle traiettorie di A_1 e B_1 e quindi di ogni altro punto può trovarsi il corrispondente centro di curvatura (esercizio 10).

Consideriamo un punto P_1 connesso con A, B_1 ed il suo simmetrico P ; il punto medio di MM_1 descrive la podaria di P rispetto alla ellissi Γ_1 ; dunque P_1 descrive una curva simile a tale podaria.

Pongasi, supposto che M sia il punto medio di AB ,

$$A_1B = 2MN = 2\rho, \quad AB_1 = 2MN_1 = 2\rho_1, \\ AB = 2a, \quad AA_1 = 2b;$$

applicando il teorema di Tolomeo al quadrilatero inscrittibile ABA_1B_1 , si ha

$$\rho\rho_1 = b^2 - a^2.$$

Se quindi immaginiamo libere tutte le aste e fissiamo il punto M ; poscia mediante una quinta asta facciamo muovere N su di un cerchio di centro O passante per M , il punto N_1 descrive, in base alla relazione trovata, la curva inversa di tal cerchio, cioè una retta normale ad

OM . Infatti posto $\widehat{OMN} = \theta$, $OM = r$, si ha

$$\rho = 2r \cos \theta$$

e quindi

$$\rho_1 \cos \theta = \frac{b^2 - a^2}{2r},$$

cioè costante la proiezione di MN_1 su OM .

Si è con ciò realizzata la trasformazione rigorosa di un moto circolare in rettilineo; di qui il nome di *inversore di Hart* dato a questo sistema articolato. È facile vedere che lo stesso si otterrebbe fissando un altro punto qualunque di AB .

HART, *On some Conversions of Motion* [Mess. of Mathem. 4 (1874), pp. 82, 116].

Ogni sistema articolato capace di una tale trasformazione deve essere formato di un numero dispari di aste; e poichè con tre essa non riesce, si conclude che l'inversore di HART contiene il minimo numero di lati. Esso fa parte della collezione di modelli di cinematica dello SCHILLING.

Le precedenti considerazioni si possono estendere allo studio dell'antiparallelogrammo sferico; le curve Γ_1, Γ_2 sono due ellissi (o iperboli) sferiche.

Scegliamo l'asse ζ (l'origine essendo il centro O della sfera) passante pel punto medio di AB , e il piano OAB per piano ζ ; poniamo inoltre

$$\text{arco } AB = 2c, \text{ arco } AA_1 = 2a.$$

Dette x, y, ζ le coordinate di C , si ottiene, notando che i coseni del raggio OC sono x, y, ζ e quelli di OA , $\text{sen } c, 0, \text{cos } c$; ecc.,

$$\text{cos } CA = x \text{sen } c + \zeta \text{cos } c; \quad \text{cos } CB = -x \text{sen } c + \zeta \text{cos } c;$$

poscia, essendo arco $CB = \text{arco } A_1C$, si ha

$$\text{cos } CB = \text{cos } 2a \cdot \text{cos } CA + \text{sen } 2a \cdot \text{sen } CA$$

e di qui, facilmente,

$$\text{sen } CA = \zeta \text{cos } c \text{tg } a - x \text{sen } c \text{cotg } a.$$

Eliminando l'arco CA , otteniamo l'equazione del cono Γ_1

$$\frac{x^2}{\text{tg}^2 a} + \frac{y^2}{\text{tg}^2 b} - \zeta^2 = 0$$

dove

$$\text{tg}^2 b = \frac{\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 c}{\text{cos}^2 a}.$$

Lo stesso dicasi del cono Γ_2 .

Se come prima P_1 è un punto della sfera connesso con A_1B_1 e P il simmetrico (fisso) la corda PP_1 è normale al piano tangente al cono Γ_1 ; essa quindi descrive un cono quadratico e la curva di P_1 è quindi una conica sferica.

SELLENTIN, *Ueb. die Rouletten des sphär.*, Antip. Inaug. Diss., Iena, 1881.

17. Inversore di Peaucellier.

Nel quadrilatero articolato $AMPM'$ (Fig. 19) le diagonali si tagliano ad angolo retto in O ; di più, per semplicità, si

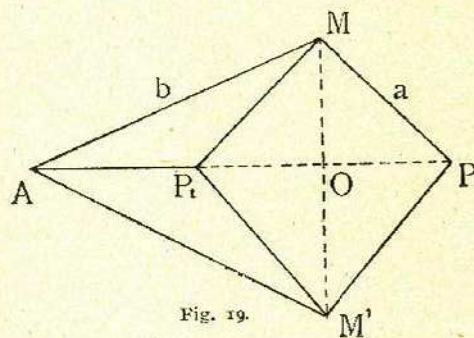


Fig. 19.

suppone $AM = AM'$. Sia inoltre

$$OP = OP_1; \quad MP = a, \quad MA = b, \quad AP = \rho, \quad AP_1 = \rho_1.$$

Poichè

$$AO^2 - OP^2 = b^2 - a^2$$

risulta

$$\rho \rho_1 = b^2 - a^2.$$

Se quindi P_1 , collegato con un punto fisso C mediante una settima asta descrive un cerchio passante per A fisso,

il punto P descrive una retta, come nell'esercizio precedente.

Tale inversore per la trasformazione rigorosa di un moto circolare in rettilineo è stato scoperto da PEAUCELLIER nel 1864: *Note sur une question de Géométrie du compas* [Nouvelles Ann. de Mathém. (2), **3** (1864), p. 414, (2), **12** (1873), pp. 71-78]; e poi da LIPKIN, *Ueber eine genaue Gelenk-Geradführung* (1870) [Bull. de l'Ac. des Sciences de St. Pétersbourg, v. **16** (1871), col. 57]. Tale scoperta è stato il punto di partenza di tutti i numerosi lavori sui sistemi articolati dal 1870 in poi. Vedi SYLVESTER, *On recent Discoveries in Mechanical Conversion of Motion* [Notices of the Proc. of the R. Inst. of Great-Britain, **7** (1873-75); Revue scientifique (2), **4** (1874), p. 490] in cui sono descritti numerosi e più complicati inversori con 7, 9, 11, 13, 15, 73, ... etc. Cfr. pure LIGUINE [Nouv. Ann. (2), **14** (1875), pp. 529-560].

Questi sistemi però, anche i più semplici, non si sono riconosciuti opportuni in pratica. D'altra parte è da notarsi che CEBICEFF nel 1878 ha potuto costruire un sistema articolato con *tre sole aste*, col quale si ottiene una risoluzione approssimata, ma assai conveniente, del problema. *Oeuvres*. St. Pétersbourg, 1889. **1**, p. 539, **2**, p. 51. Riferendosi alla Fig. 18, tale sistema è costituito dalle tre aste AA_1 , BB_1 e A_1B_1 fissate in A e in B_1 , per modo che la loro somma eguagli tre volte la distanza AB_1 , e la distanza A_1B sia di poco superiore alla $AA_1 = BB_1$; il punto medio di A_1B descriverà una curva molto vicina ad una retta.

Sui sistemi articolati si fondono molti strumenti o compassi per il tracciamento di speciali curve; e si ha infatti un compasso per la lumaca di PASCAL, per le curve

di CASSINI, ecc. dovuti ad HART [Mess. of Mathem., **5** (1876), p. 35; **6** (1876), p. 169]. KEMPE, *On a general Method of describing plane Curves of the n^{th} degree by linkwork* [Proc. of the London Mathem. Society, **7** (1876), pp. 213-216] ha poi dimostrato che qualunque curva algebrica piana può essere descritta mediante un sistema articolato.