CAPITOLO QUARTO

ANALISI DEL MOTO ISTANTANEO DI UN SISTEMA RIGIDO.

§ 1. Velocità e accelerazione nel moto di un sistema rigido. Formula fondamentale di Cinematica. — Dimostriamo anzitutto che:

Se P ed O sono due punti qualunque di un sistema rigido in moto, ed accenniamo con P', O' le loro velocità all'istante t, si ha

$$P' = O' + \Omega \wedge (P - O) \tag{1}$$

essendo Ω un vettore funzione di t.

La (1) dicesi appunto *formula fondamentale di Cinematica;* essa dà la legge della distribuzione delle velocità o lo *stato cinetico* dei punti del sistema in un qualunque istante.

Infatti, sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una terna di vettori ortogonali destrogira, parallela ad una terna connessa con un corpo rigido in un suo punto O.

Indicando con accenti le derivate rispetto al tempo, dalle identità

$$\mathbf{i}^2 = 1; \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = 0, \text{ ecc.},$$

ricaviamo: $i \times i = 1$ $\quad i \times i' + i' \times i = 0$ $\quad i' \times k + i \times k' = 0$

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i}' = 0; \qquad \mathbf{i}' \times \mathbf{k} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k}'; \text{ ecc.}$$

Quindi la identità:

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}' \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{i}' \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{i}' \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$$

può scriversi, per le (8) del Cap. I,

$$\mathbf{i}' = \mathbf{j}' \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + \mathbf{k}' \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} + \mathbf{i}' \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \wedge \mathbf{i};$$

ossia, posto:

$$\Omega = \mathbf{j}' \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{k}' \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{i}' \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{k}, \tag{2}$$

$$\mathbf{i}' = \Omega \wedge \mathbf{i}. \tag{3}$$

$\frac{dP}{dt} - \frac{dO}{dt} = \Omega \wedge i$

Ma Ω non varia permutando circolarmente $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; quindi la (3) vale, collo stesso valore per Ω, per i vettori $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$; e quindi ancora per ogni altro vettore $P - O$ che è funzione lineare ed omogenea, con coefficienti costanti, di $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Quindi è vera la (1).

Il vettore Ω riceve un'altra espressione importante.

Nella (1) riguardiamo il primo membro funzione del solo punto P; allora [Cap. I, eserc. 2] essendo Ω costante rispetto P, deduciamo

$$\Omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} P'. \tag{4}$$

Se $\Omega = 0$, il moto istantaneo del sistema si riduce ad una traslazione; se $O' = 0$, si riduce invece ad una rotazione [Cap. III, (2)] intorno all'asse $O\,\Omega$ ed Ω è il vettore della velocità angolare. In base poi ad un teorema che dimostreremo, § 4, la (1) si interpreta così:

Il moto istantaneo di un sistema rigido è, per rispetto alle velocità, la risultante di un moto di traslazione e di un moto di rotazione istantanei, in infiniti modi.

Passiamo ora alla accelerazione; dico che

$$(5)\quad \mathbf{P}'' = O'' + \beta(P - O) = O'' + \Omega' \wedge (P - O) + \operatorname{grad}\varphi$$

in cui, l'omografia β e la funzione φ sono espresse da

$$(6)\quad \begin{cases} \beta = \mathrm{H}(\Omega, \Omega) - \Omega^2 + \Omega' \wedge \\ 2\,\varphi = -[\Omega \wedge (P - O)]^2 = [\Omega \times (P - O)]^2 - \Omega^2 (P - O)^2. \end{cases}$$

Derivando infatti la (1) rispetto al tempo, si ha successivamente

$$P'' = O'' + \Omega' \wedge (P - O) + \Omega \wedge (P' - O'),$$
$$\Omega \wedge (P' - O') = \Omega \wedge [\Omega \wedge (P - O)] = \Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 (P - O) = [\mathrm{H}(\Omega, \Omega) - \Omega^2](P - O)$$

per la (40) del Cap. I. Risulta quindi provata la prima delle (5). Quanto alla seconda, basta osservare che (supposto variabile solamente P)

$$\operatorname{grad}\varphi = \Omega \times (P - O) \cdot \Omega - \Omega^2 (P - O)$$

(Cap. I, eserc. 2).

È importante osservare che l'omografia β ha per dilatazione $\mathrm{H}(\Omega, \Omega) - \Omega^2$ e per vettore Ω'.

Le formole cartesiane che sostituiscono le (1) e (5) si ottengono facilmente. Rispetto al solito sistema fondamentale $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ rigidamente connesso col corpo, diciamo u, v, w; u_0, v_0, w_0; p, q, r le componenti di P', O', Ω; x, y, z le coordinate di P; moltiplicando (1) scalarmente per $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, otteniamo [Cap. I, (12)]

$$(7)\quad \begin{cases} u = u_0 + q\,z - r\,y \\ v = v_0 + r\,x - p\,z \\ w = w_0 + p\,y - q\,x. \end{cases}$$

Lo stesso potrebbe farsi per la (5).

Dalla (3) e analoghe, osservando che, (13) Cap. I,

$$\Omega \wedge \mathbf{i} = \Omega \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = \Omega \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} - \Omega \wedge \mathbf{j} \cdot \mathbf{k};$$

otteniamo pure

$$(8)\quad \mathbf{i}' = r\,\mathbf{j} - q\,\mathbf{k},\quad \mathbf{j}' = p\,\mathbf{k} - r\,\mathbf{i},\quad \mathbf{k}' = q\,\mathbf{i} - p\,\mathbf{j}.$$

Quindi:

$$(9)\quad p = \mathbf{k} \times \mathbf{j}',\quad q = \mathbf{i} \times \mathbf{k}',\quad r = \mathbf{j} \times \mathbf{i}'.$$

Riferiamoci ora ad una terna fondamentale fissa $O(\mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$; e diciamo a_1, a_2, a_3 i coseni direttori di $\mathbf{i}$ rispetto alla terna fissa; b_1, b_2, b_3 quelli di $\mathbf{j}$; c_1, c_2, c_3 quelli di $\mathbf{k}$. Dalla (3), ricordando la regola (11) del Cap. I, si ha:

$$(10) \qquad a'_1 = q_1 a_3 - r_1 a_2, \quad a'_2 = r_1 a_1 - p_1 a_3, \quad a'_3 = p_1 a_2 - q_1 a_1$$

ecc., essendo p_1, q_1, r_1 le componenti di Ω rispetto alla terna fissa.

Invece dalla (8) moltiplicando scalarmente per $\mathbf{i}_1, \ldots\ldots$, si ha

$$(11) \qquad a_1' = r b_1 - q c_1, \quad b'_1 - p c_1 - r a_1, \quad c_1 = q a_1 - p b_1$$

ecc.

Le (10) e (11), dette *formule di* ***Poisson***, esprimono le derivate dei nove coseni della terna mobile in funzione degli stessi coseni e delle componenti di Ω secondo la terna fissa o la terna mobile. (*)

È anche facile assegnare la forma assoluta di dette formule. Sia infatti $\mathbf{u}_0$ il valore iniziale del

(*) Euler, *Découverte d'un nouveau principe de Mécanique.* [Mém. de l'Ac. de Berlin, 1750, pp. 185-217; vedi spec. pag. 205] ha date le formule (7) nel caso del punto O fisso; e poi anche le (11): *Du mouvement de rotation des corps solides autour d'un axe variable.* [Ibid, 1758, pp. 153-203; vedi spec. pag. 171].

vettore $\mathbf{u} = P - O$. Esiste una omografia λ, funzione del tempo, tale che

$$\mathbf{u} = \lambda\, \mathbf{u}_0\,;$$

essa dicesi *isomeria vettoriale*.

Soddisfa alle seguenti relazioni

$$(12) \qquad \lambda \cdot K\lambda = K\lambda \cdot \lambda = 1, \quad I_3\,\lambda = 1.$$

Infatti, essendo $\mathbf{u}^2 = \mathbf{u}_0^2$, risulta successivamente

$$\lambda\,\mathbf{u}_0 \times \lambda\,\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 \times K\lambda \cdot \lambda\,\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}_0,$$

pel teorema di commutazione; e da qui per la arbitrarietà di $\mathbf{u}_0$ risulta facilmente la prima delle (12). Prendendo l'invariante terzo della (12), in virtù della (34) Cap. I, si deduce che $I_3\,\lambda = \pm 1$; e quindi la seconda delle (12), osservando che $\lambda = 1$ per $t = 0$.

Infine si ha, come forma assoluta delle (10), (11),

$$(13) \qquad \lambda' = \Omega \wedge \lambda.$$

Infatti si ha subito

$$\mathbf{u}' = \lambda'\,\mathbf{u}_0 = \Omega \wedge \mathbf{u} = \Omega \wedge \lambda\,\mathbf{u}_0,$$

e quindi la (13). (*)

(*) Vedi, per altre notizie bibliografiche: Giornale di Matematiche, v. 54 (1916), pp. 137-140.

§ 2. **Asse di moto elicoidale. Teorema di Mozzi.** — Dimostreremo questo teorema:

Nel moto istantaneo di un sistema rigido esiste un'unica retta i cui punti hanno velocità parallela alla retta stessa; ed il moto istantaneo equivale a due moti, uno di traslazione lungo la retta, l'altro di rotazione intorno alla stessa; cioè equivale ad un moto istantaneo elicoidale. (*).

Sia $\mathbf{a}$ un vettore parallelo a tale retta, supposta esistente; dico che essa è parallela ad Ω. Infatti le velocità di due suoi punti qualunque saranno espresse da $m\,\mathbf{a}$ e $m'\,\mathbf{a}$ (m, m' numeri); quindi, per la (1),

$$O' + \Omega \wedge (P - O) = m\,\mathbf{a}; \quad O' + \Omega \wedge (P_1 - O) = m'\,\mathbf{a};$$

moltiplicando scalarmente le due equazioni per

(*) Questo teorema, scoperto come tutti gli altri relativi al moto istantaneo prima del suo analogo per i moti finiti, è dovuto ad un matematico fiorentino, Giulio Mozzi (1730-1813) nel: *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi;* Napoli, 1763; poi ritrovato da Cauchy nella memoria: *Sur les mouvements que peut prendre un système invariable,* etc. [Eserc. de Mathém. Anc. Exer. Seconde Année, 1827. Oeuvres compl. (2), **7,** pag. 120]; e quindi da Chasles e Giorgini nelle memorie già citate al § 4 del Cap. 3°.

Su Mozzi si veda: Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matem., v. 8 (1905).

Ω si deduce $m = m'$; poscia sottraendole

$$\Omega \wedge (P - P_1) = 0;$$

cioè Ω parallela a $P - P_1$ e quindi ad $\mathbf{a}$.

Cominciamo quindi a cercare un punto R la cui velocità è parallela ad Ω; cioè, h essendo un numero:

$$R' = O' + \Omega \wedge (R - O) = h\,\Omega.$$

Moltiplicando vettorialmente per Ω, si ottiene

$$\Omega \wedge O' + \Omega \times (R - O) \cdot \Omega - \Omega^2 \cdot (R - O) = 0.$$

A questa equazione si può soddisfare con

$$R - O = \frac{\Omega \wedge O'}{\Omega^2};$$

perchè infatti sostituendo questo valore nell'eguaglianza precedente, il secondo termine si annulla, ed il terzo diventa eguale al primo. Dunque esiste almeno un punto R la cui velocità è parallela ad Ω; di più è facile vedere che tutti i punti della retta $R\,\Omega$ godono della stessa proprietà; e che non ne esistono al di fuori di questa retta. Se infatti S è un altro punto siffatto si ha

$$S' = k\,\Omega = h\,\Omega + \Omega \wedge (S - R);$$

moltiplicando scalarmente per Ω, risulta $h = k$; quindi $\Omega \wedge (S - R) = 0$; cioè $S - R$ parallelo ad Ω. Poichè infine per ogni altro punto P del sistema si ha

$$P' = h\,\underline{\Omega} + \Omega \wedge (P - R);$$

il teorema è dimostrato.

La grandezza della velocità di traslazione del moto elicoidale è data da

$$h = \frac{O' \times \Omega}{\Omega^2}.$$

§ 3. **Moto assoluto e relativo.** — Sono dati due sistemi rigidi in movimento s ed S; il moto di un punto P rispetto ad un osservatore connesso con s dicesi *relativo*; quello rispetto ad un osservatore connesso con S dicesi *assoluto*; finalmente il moto del sistema s rispetto ad S dicesi moto di *strascinamento*. Quindi nel moto relativo, P è da riguardarsi funzione del tempo t e della posizione del sistema s; porremo cioè

$$P = f(t, s);$$

e

$$P'_r = \frac{\partial P}{\partial t}$$

rappresenterà la derivata del punto P calcolata dall'osservatore connesso con s, ossia la *velocità relativa*.

Consideriamo ora il moto di strascinamento; in esso la posizione di s dipenderà nuovamente dal tempo e dalla posizione S. Per evitare confu-

sioni, chiameremo τ il tempo in questo secondo caso: e poi infine faremo $t = \tau$; porremo quindi

$$s = \varphi(\tau, S).$$

Pensando in P, t costante ed s funzione di τ otterremo il moto di un punto rigidamente connesso con s; e quindi

$$P'_s = \frac{\partial P}{\partial \tau}$$

rappresenterà la *velocità di strascinamento*.

Finalmente riguardando in P variabile tutti gli elementi, e derivando totalmente rispetto a t, avremo la *velocità assoluta* P'_a; e poichè

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial \tau}$$

risulta

$$P'_a = P'_r + P'_s: \tag{14}$$

La velocità assoluta è la risultante della velocità relativa e della velocità di strascinamento.

Deriviamo di nuovo totalmente rispetto a t. Avremo, con evidente significato dei simboli:

$$P''_a = P''_{rr} + P''_{ss} + P''_{rs} + P''_{sr}.$$

I primi due termini del secondo membro rappresentano l'accelerazione relativa e di strascimento; per avere il significato degli altri due termini, scriveremo le (3) ed (1) così:

$$\mathbf{i}_s' = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{i}_s ; \quad P_s' = O_s' + \boldsymbol{\Omega} \wedge (P - O) ;$$

applichiamo la prima al vettore P_r'; e deriviamo la seconda parzialmente rispetto a t e quindi ritenendo O_s', $\boldsymbol{\Omega}$ costanti: risulterà

$$\boldsymbol{P}_{rs}'' = \boldsymbol{\Omega} \wedge P_r' ; \quad \boldsymbol{P}_{sr}'' = \boldsymbol{\Omega} \wedge P_r' ;$$

quindi

(15) $$P_a'' = \boldsymbol{P}_{rr}'' + P_{ss}'' + \boldsymbol{P}_c''$$

dove

(16) $$P_c'' = 2\, \boldsymbol{\Omega} \wedge P_r' ,$$

dicesi *accelerazione complementare*:

L'accelerazione assoluta è la risultante delle accelerazioni relativa, di strascinamento e complementare. (*Teorema di Coriolis*). (*)

Una semplice applicazione di questi teoremi è la seguente. Consideriamo l'odografo del moto assoluto di P rispetto ad una origine qualunque fissa A, ponendo

$$Q = P_a' + A.$$

La velocità di Q è eguale all'accelerazione assoluta di P; quindi per la (14)

$$P_a'' = Q_r' + O_s' + \boldsymbol{\Omega} \wedge (Q - O)$$

(*) Coriolis, *Mém. sur les équations du mouvement relatif*, etc. [Journ. de l' École Polyt., Cah. **24** (1835), pp. 142-154].

od anche

$$P_a'' = P_{ar}'' + A_r' + O_s' + \boldsymbol{\Omega} \wedge (Q - O).$$

Esprimendo che A è un punto fisso, e quindi ha nulla la velocità assoluta, si ha

$$A_r' + O_s' + \boldsymbol{\Omega} \wedge (A - O) = 0 ;$$

e sottraendo dalla precedente:

(17) $$P_a'' = P_{ar}'' + \boldsymbol{\Omega} \wedge P_r' .$$

Se ci riferiamo alla terna $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ connessa con s e accenniamo per simmetria di scrittura con $v_{ax}, \ldots\ldots$ le u, v, w date dalle (7) e con $w_{ax}, \ldots\ldots$ le componenti di P_a', da (17), moltiplicando al solito scalarmente per $\mathbf{i}$, ecc. si deduce:

(18) $$w_{ax} = \frac{d\, v_{ax}}{d\, t} + q\, v_{az} - r\, v_{ay} \; ; \text{ ecc. } (*)$$

§ 4. **Composizione dei moti simultanei ed istantanei.** — Supponiamo che il punto P precedentemente considerato faccia parte di un sistema s_1 in movimento. Il moto di P rispetto all'osservatore S si può pensare come *risultante* di due altri, simultanei e istantanei; quello di P rispetto ad s e di quello dovuto al moto di s

(*) Bour, *Mém. sur les mouvements relatifs*. [Journ. de Mathématiques (2), **8** (1863), pp. 1-51]. La memoria è del 1856.

rispetto S. Questi due movimenti diconsi *componenti*; ed il teorema (14) ci dice che:

La velocità di un punto nel moto risultante è la somma delle velocità dei singoli moti componenti;

e quindi

Più moti istantanei simultanei sono, per rispetto alle velocità, invertibili.

Queste semplici proprietà permettono di assegnare le formule definitive per la composizione dei moti istantanei.

Per le traslazioni vale ancora il teorema del Cap. 3°, § 5.

Dico che:

Il moto risultante di più rotazioni istantanee intorno ad assi concorrenti equivale ad una rotazione istantanea intorno ad un asse concorrente coi primi; il vettore della velocità angolare è la somma dei vettori delle velocità angolari componenti. (*)

Infatti, un punto P del sistema, in virtù delle singole rotazioni, ha velocità date da

$$\Omega_1 \wedge (P - O), \quad \Omega_2 \wedge (P - O), \dots$$

essendo O il punto di concorso degli assi.

(*) Questo teorema è di Paolo Frisi, *Dissertationum variarum*, t. I, p. 1, Lucca, 1759. Su questo matematico vedi: Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matem., v. 9 (1906).

(Cap. 3°, § 2). La velocità risultante è

$$\Omega \wedge (P - O)$$

essendo

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots$$

e ciò dimostra il teorema.

In particolare, ad una rotazione istantanea intorno $O\,\Omega$ si possono sostituire tre rotazioni intorno a tre assi uscenti da O; e se essi sono ortogonali, le velocità angolari dei moti componenti sono

$$p = \Omega \times \mathbf{i}, \quad q = \Omega \times \mathbf{j}, \quad r = \Omega \times \mathbf{k},$$

e con ciò abbiamo la interpretazione cinematica delle p, q, r che figurano nelle (7); e che diconsi *velocità angolari secondo gli assi.*

La risultante di più rotazioni istantanee intorno ad assi paralleli è una rotazione istantanea intorno ad un asse parallelo ai primi; la grandezza della velocità angolare è la somma algebrica di quelle delle singole velocità angolari; oppure è un moto istantaneo di traslazione.

Gli assi di rotazione, paralleli al vettore unitario $\mathbf{k}$, escano dai punti A_1, A_2, ...; siano ω_1, ω_2, ... i numeri positivi o negativi che misurano all'istante t le singole velocità angolari. Poichè $\Omega_r = \omega_r\,\mathbf{k}$, la velocità di un punto P nel moto istantaneo risultante è espressa da

$$P' = \mathbf{k} \wedge \Sigma\, \omega_r (P - A_r).$$

Poniamo

$$\omega = \Sigma\, \omega_r$$

e supponiamo anzitutto $\omega \neq 0$. Si determini un punto G tale che

$$(19) \qquad \Sigma\, \omega_r (G - A_r) = 0.$$

Tale punto è perfettamente determinato; rispetto ad una origine O abbiamo

$$(20) \qquad \omega (G - O) = \Sigma\, \omega_r (A_r - O);$$

e si vede subito che G è indipendente da O. Se da P' si sottrae la (19) abbiamo

$$P' = \mathbf{k} \wedge \Sigma\, \omega_r (P - G) = \omega\, \mathbf{k} \wedge (P - G),$$

la quale esprime appunto che il moto risultante è una rotazione istantanea intorno ad un asse parallelo a $\mathbf{k}$ ed uscente da G, ecc.

Supponiamo ora $\omega = 0$, in cui non esiste il punto G. Si ha

$$P' = \mathbf{k} \wedge \Sigma\, \omega_r (O - A_r) + \mathbf{k} \wedge (P - O)\, \Sigma\, \omega_r$$

cioè qualunque sia O,

$$(21) \qquad P' = \mathbf{k} \wedge \Sigma\, \omega_r (O - A_r).$$

La velocità è indipendente da P; tutti i punti del corpo avendo all'istante t la stessa velocità, il moto istantaneo è una traslazione.

Le rotazioni da comporre siano due. La (19) ci dà

$$\omega_1 (G - A_1) + \omega_2 (G - A_2) = 0.$$

e se $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$, deduciamo che il punto G giace sulla retta $A_1 A_2$ e divide il segmento $A_1 A_2$ in parti inversamente proporzionali ad ω_1 e ω_2, internamente od esternamente secondo che ω_1 e ω_2 sono dello stesso segno o no. Inoltre si ha:

$$(22) \qquad \frac{G - A_1}{\omega_2} = \frac{A_2 - G}{\omega_1} = \frac{A_2 - A_1}{\omega}.$$

Se $\omega_1 + \omega_2 = 0$ si ha il caso di *una coppia di rotazioni istantanee* equivalente ad un moto di traslazione. Da (21), facendo $O = A_1$, risulta

$$(23) \quad P' = \omega_2\, \mathbf{k} \wedge (A_1 - A_2) = \omega_1\, \mathbf{k} \wedge (A_2 - A_1)$$

cioè la velocità di traslazione è normale al piano di $A_1 A_2$ e dell'asse.

Esercizi.

1. *Comporre più rotazioni istantanee intorno ad assi uscenti dai punti A_1, A_2,..... e i cui vettori delle velocità angolari sono Ω_1, Ω_2,.....*

La velocità di un punto P nel moto risultante si pone subito sotto la forma

$$P' = \Sigma\, \Omega_r \wedge (O - A_r) + \Omega \wedge (P - O),$$

essendo O un punto arbitrario del sistema, ed

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \ldots.$$

Quindi, per la (1),

$$O' = \Sigma\, \Omega_r \wedge (O - A_r)$$

e con ciò risulta determinata la velocità del moto istantaneo di traslazione e il vettore Ω della rotazione risultante. Si deduce subito

$$O' \times \Omega = \Omega_1 \wedge \Omega_2 \times (A_1 - A_2) + \ldots$$

il secondo membro esprime la somma dei sestupli volumi dei tetraedri aventi per vertici A_1, $A_1 + \Omega_1$, A_2, $A_2 + \Omega_2$. Se essa è nulla ed $\Omega \neq 0$, il moto è una rotazione.

Se O_1 è un punto dell'asse di moto elicoidale, si ha

$$O'_1 = \pm \frac{\tau}{\omega} \Omega$$

essendo τ ed ω i moduli di O'_1 e di Ω.

2. Dimostrare che l'asse di moto elicoidale equivalente a due rotazioni istantanee, taglia normalmente la perpendicolare comune ai due assi. Luogo degli assi di moto elicoidale.

Potremo sempre supporre che i punti A_1 e A_2 siano sulla perpendicolare comune ai due assi. Dalle formule dell'esercizio precedente si ha:

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2,$$

$$\pm \frac{\tau}{\omega} \Omega + \Omega \wedge (O - O_1) = \Omega_1 \wedge (O - A_1) + \Omega_2 \wedge (O - A_2)$$

essendo O un punto qualunque della retta $A_1 A_2$. Moltiplicando le due equazioni scalarmente per $A_2 - A_1$ si deduce:

$$\Omega \times (A_2 - A_1) = 0, \qquad \Omega \wedge (O - O_1) \times (A_1 - A_2) = 0$$

le quali provano il teorema.

Se scegliamo O nel punto medio di $A_1 A_2 = 2a$ e centro di un sistema ortogonale in cui $\mathbf{i}$ è parallelo alla bisettrice dell'angolo 2φ di Ω_1, Ω_2; $\mathbf{k}$ è parallelo ad $A_2 - A_1$

e diciamo ψ l'angolo di Ω con $\mathbf{i}$, dalle equazioni stabilite, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, deduciamo:

$$\omega \cos\psi = (\omega_1 + \omega_2)\cos\varphi, \quad \omega \operatorname{sen}\psi = (\omega_2 - \omega_1)\operatorname{sen}\varphi,$$
$$\pm \tau\cos\psi - \omega z \operatorname{sen}\psi = -a(\omega_1 + \omega_2)\operatorname{sen}\varphi,$$
$$\pm \tau \operatorname{sen}\psi + \omega z \cos\psi = a(\omega_2 - \omega_1)\cos\varphi$$

avendo scelto O_1 nel punto d'incontro di $A_1 A_2$ coll'asse di moto elicoidale e posto $z = \operatorname{mod}(O_1 - O)$. Eliminando τ, $\omega_1 + \omega_2$, ecc. si trova

$$z = \frac{a}{\operatorname{sen} 2\varphi} \operatorname{sen} 2\psi.$$

L'asse elicoidale dipende dalle direzioni degli assi delle due rotazioni e dal rapporto di ω_1 a ω_2; per i suoi punti è $x : y = \operatorname{tang}\psi$; eliminando ψ si ottiene pel luogo degli assi di moto elicoidale la superficie (*cilindroide*)

$$z(x^2 + y^2) = \frac{2a}{\operatorname{sen} 2\varphi} x y.$$

Inoltre si ha:

$$\frac{z + a}{z - a} = \frac{\operatorname{tang}(\varphi + \psi)}{\operatorname{tang}(\varphi - \psi)} = \frac{\operatorname{tang}(\Omega_1, \Omega)}{\operatorname{tang}(\Omega_2, \Omega)}$$

(Si veda Eserc. 13 del Cap. I, Parte 2ª).

3. Nel moto istantaneo di un sistema rigido:

a) La velocità dei punti di una retta, secondo la retta stessa, è costante;

b) le rette i cui punti hanno velocità normali alle rette stesse (coniugate di se stesse) appartengono ad un complesso lineare, il cui asse è l'asse di moto elicoidale;

c) i piani normali alle velocità dei punti di una retta inviluppano un'altra retta (coniugata della prima);

d) in ogni piano v'è un punto (fuoco) la cui velocità è normale al piano, ed una retta i cui punti hanno velocità contenute nel piano;

e) i punti la cui velocità è diretta ad un punto stanno su di una cubica gobba; le direzioni della velocità formano un cono quadratico.

Se $\mathbf{a}$ è un vettore unità parallelo ad una retta luogo dei punti P, si ha

$$P' \times \mathbf{a} = O' \times \mathbf{a} + \Omega \wedge (P - O) \times \mathbf{a};$$

il secondo membro è indipendente da P, poichè il secondo termine esprime il sestuplo volume del tetraedro avente per vertici opposti $O, O + \Omega, P, P + \mathbf{a}$.

Supponendo P' normale ad $\mathbf{a}$, e riferendoci ad un sistema fondamentale coll'origine in O e $\mathbf{k}$ parallelo all'asse di moto elicoidale, si ha nelle (7), $u_0 = v_0 = p = q = 0$; l'equazione precedente ci dà

$$w_0 \gamma + r(\beta x - \alpha y) = 0$$

essendo α, β, γ i coseni direttori ed x, y le coordinate di un punto qualunque di $\mathbf{a}$; si ha cioè l'equazione di un complesso lineare.

Siano a, a_1 due assi di rotazione equivalenti al moto elicoidale istantaneo; P e P_1 due loro punti; la velocità di P è normale al piano $P a_1$; e quella di P_1, al piano $P_1 a$; dunque risulta *c*); a ed a_1 sono rette coniugate,

Due rette del complesso si taglino in P (in ogni piano esse formano un fascio). La velocità di P è normale alle due rette e quindi al piano σ, di cui P è il fuoco. Se a è la normale, la coniugata a_1 giace nel piano; se P_1 è un punto di a_1 la sua velocità, normale al piano $P_1 a$, è contenuta in σ e normale inoltre alla retta $P P_1$; le direzioni della velocità dei punti di a_1 inviluppano una parabola di cui P è il fuoco; ecc.

La dimostrazione analitica di questi teoremi, valendosi delle semplici espressioni delle componenti della velocità, non presenta difficoltà. Si può notare ancora che:

Le rette che incontrano due assi di rotazione appartengono al complesso; vi sono ∞^1 complessi aventi per rette coniugate i due assi; il luogo degli assi del complesso è il cilindroide.

4. Comporre tre rotazioni intorno a tre assi ortogonali due a due e che non s'incontrano.

L'asse r_1, parallelo ad x, incontri z alla distanza a_3 da O: l'asse r_2, parallelo ad y, incontri x alla distanza a_1; ecc. Colle formule dell' Eser. 1 si trova

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2; \quad \omega\tau = a_1 \omega_2 \omega_3 + a_2 \omega_3 \omega_1 + a_3 \omega_1 \omega_2.$$

5. Un sistema è rigidamente connesso con la terna $O(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ relativa ad un punto O di una curva gobba e che su essa si sposta. Trovare l'asse di moto elicoidale.

Per le (23) e (25) del Cap. I e le (3) di questo Cap. si ha

$$\mathbf{t}' = \Omega \wedge \mathbf{t} = \frac{v}{\rho}\mathbf{n}; \quad \mathbf{b}' = \Omega \wedge \mathbf{b} = \frac{v}{\tau}\mathbf{n}; \quad O' = v\,\mathbf{t};$$

quindi $\Omega \times \mathbf{n} = 0$; l'asse di moto elicoidale è normale ad $\mathbf{n}$ cioè complanare con $\mathbf{t}$ e $\mathbf{b}$ e si trova subito

$$\Omega = v\left(\frac{\mathbf{b}}{\rho} - \frac{\mathbf{t}}{\tau}\right).$$

Per i punti dell'asse di moto elicoidale si ha

$$v\,\mathbf{t} + \Omega \wedge (P - O) = h\,\Omega.$$

Moltiplicando scalarmente per **n** risulta

$$\Omega \wedge (P - O) \times \mathbf{n} = 0,$$

cioè l'asse incontra ad angolo retto la normale principale. Se P è il punto d'incontro a distanza ρ_1 da O, posto $P - O = \rho_1 \mathbf{n}$, sostituiamo nella precedente equazione ed eguagliamo i coefficienti di **t** e **b**, si ha

$$1 - \frac{\rho_1}{\rho} = -\frac{h}{\tau}; \qquad \frac{\rho_1}{\tau} = -\frac{h}{\rho}$$

onde:

$$\rho_1 = \frac{1}{\rho} : \left(\frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) < \rho.$$

6. Esprimere le p, q, r in funzione dei parametri di Rodrigues e delle loro derivate.

Basta valersi delle (16) del Cap. 3°, le quali derivate rispetto al tempo dànno:

$$a'_2 = 2\rho^2 (\lambda' \mu + \lambda \mu' - \nu') + \frac{2\rho'}{\rho} a_2: \text{ ecc.};$$

quindi per le formule (9) di questo Cap., si deduce

$$p = c_1 b'_1 + \dots \qquad = 2\rho^2 (\nu \mu' - \mu \nu' + \lambda'); \text{ ecc.}$$

Cayley, *On the Rotation of a solid Body*, etc. [The Cambridge a Dublin Mathem. Journ., **1** (1846); Mathem. Papers, v. 1, pp. 237-252].

7. Dimostrare che l'accelerazione di strascinamento è la risultante di quella di un punto O, di una seconda eguale ad $\Omega' \wedge (P - O)$ e di una terza eguale ad $\Omega^2 (M - P)$, M essendo il piede della normale condotta da P su $O\,\Omega$.

Basta osservare che nella (6) si ha appunto

$$\text{grad } \varphi = \Omega^2 (M - P)$$

essendo

$$M - P = (M - O) + (O - P);$$

ed

$$M - O = \frac{\Omega \times (P - O)}{\Omega^2} \cdot \Omega.$$

8. La posizione di un punto P in un piano è riferita ad un sistema di assi ortogonali $O(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ mobili intorno ad O con velocità angolare costante ω. Trovare le componenti dell'accelerazione assoluta.

Le componenti dell'accelerazione relativa sono $\frac{d^2 x}{d t^2}, \frac{d^2 y}{d t^2}$; quelle dell'accelerazione di strascinamento, per la (5), essendo $\Omega' = 0$ e $\Omega \times (P - O) = 0$, $2\varphi = -\omega^2 (x^2 + y^2)$, sono $-\omega^2 x$, $-\omega^2 y$. Finalmente le componenti dell'accelerazione complementare, per la (16) sono $-2\omega \frac{dy}{dt}$, $2\omega \frac{dx}{dt}$; quindi

$$w_{ax} = \frac{d^2 x}{d t^2} - 2\omega \frac{d y}{d t} - \omega^2 x, \quad w_{ay} = \frac{d^2 y}{d t^2} + 2\omega \frac{d x}{d t} - \omega^2 y.$$