CAPITOLO TERZO.

ANALISI DEL MOTO FINITO DI UN SISTEMA RIGIDO. COMPOSIZIONE DEI MOTI FINITI.

Nella prima parte di questo capitolo ci proponiamo di risolvere la seguente questione: *Date due diverse posizioni di uno stesso sistema rigido, con quali movimenti semplici si potranno far coincidere tre punti (non disposti in linea retta) della prima coi loro corrispondenti della seconda, e quindi far coincidere le due posizioni?*

I movimenti semplici sono: il *moto di traslazione*, di *rotazione intorno ad un asse* ed *elicoidale*, che ora definiremo.

§ 1. **Moto di traslazione.** — Siano A ed A_1 due posizioni corrispondenti di uno stesso punto in due diverse posizioni S ed S_1 di un sistema rigido. Il vettore $A_1 - A$ dicesi *spostamento* di A; se tutti i punti di S subiscono spostamenti eguali, si dice che la posizione S_1 è ottenuta da S con una *traslazione semplice* definita da $A_1 - A$.

Immaginiamo ora la serie delle posizioni intermedie del sistema tra S ed S_1 e per due posizioni successive, comunque vicine, abbia luogo la stessa proprietà. I vari punti di S descriveranno curve eguali e parallele ed il passaggio da S in S_1 si dice effettuato con un *moto continuo di traslazione.* Gli archi descritti da due punti qualunque di S, a partire dalle loro posizioni iniziali, sono eguali; le tangenti nei loro estremi sono parallele e però:

In un moto continuo di traslazione le velocità dei vari punti del sistema, in ogni istante, sono eguali, e reciprocamente.

Se poi in un sistema in moto avverrà che, all'istante t, le velocità dei vari suoi punti sono eguali, mentre in generale sono diverse per ogni altro istante $t + \tau$; allora, *per rispetto alle velocità e all'istante t* il moto del sistema dicesi di *traslazione istantanea*, perchè coincide, in quell'istante, con quello di un sistema identico dotato di un moto continuo di traslazione in cui la velocità è la stessa del sistema primitivo nell'istante t.

§ 2. **Moto di rotazione.** — Il sistema S abbia due punti fissi e quindi fissa la loro congiungente. Due diverse posizioni S ed S_1 verranno a coincidere quando un punto P della prima verrà a coincidere col corrispondente P_1 della seconda: ossia quando il piano meridiano

σ (cioè passante per l'asse) contenente P, verrà a coincidere col corrispondente σ_1. Si dice che il sistema ha compiuto una *rotazione semplice* intorno all'asse. Assumeremo per senso positivo dell'asse quello tale che un osservatore, situato sull'asse al modo solito, veda compiersi le rotazioni positive in senso orario.

Il più piccolo angolo θ di cui occorre far ruotare σ, nel senso positivo, per portarlo a coincidere con σ_1, dicesi *ampiezza* della rotazione. Lo stesso effetto si raggiunge colla rotazione $\theta + 2k\pi$ (k intero); cioè *l'ampiezza della rotazione è determinata a meno di multipli di* 2π.

Immaginando segato S con un piano normale all'asse in O, si dice pure che il sistema piano ha effettuato una *rotazione semplice intorno ad* O; e quando si ha particolare riguardo al moto continuo con cui da S passiamo ad S_1 si dice che il moto è di *rotazione continua*. Si ha:

In un moto continuo di rotazione le velocità dei vari punti sono normali all'asse ed hanno senso concorde; le loro grandezze, in uno stesso istante, stanno come le distanze dei punti dall'asse.

Infatti i punti di S descrivono archi di cerchio normali ai piani meridiani e coi centri sull'asse; punti che stanno alla stessa distanza dall'asse percorrono, in tempi eguali, archi eguali; e se stanno a distanze diverse percorrono archi proporzionali alle distanze stesse.

Dicesi *velocità angolare* ω all'istante t la grandezza della velocità dei punti che stanno alla distanza *uno* dall'asse; quella dei punti alla distanza r è ωr. È facile vedere che:

La velocità angolare è espressa dalla derivata rispetto al tempo dell'angolo che un qualunque piano meridiano mobile forma con uno fisso.

Seghiamo infatti il sistema S con un piano normale all'asse e su questo piano siano P e P' due punti appartenenti al sistema e alla distanza uno dall'asse; φ e φ' gli angoli che i piani meridiani σ e σ' formano con uno fisso. Per la rigidità del sistema, non varia, col tempo, l'angolo $\varphi - \varphi'$ tra σ e σ'; inoltre l'arco percorso da P è φ; e quello percorso da P' è φ'; quindi effettivamente

$$(1) \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi'}{dt}.$$

Se ω è costante il moto di rotazione è uniforme e scegliendo convenientemente il piano fisso risulta $\varphi = \omega t$. Unità di velocità angolare è quella per cui, nel moto uniforme, un piano meridiano si sposta dell'arco di un secondo in una unità di tempo; e l'equazione di dimensione è

$$[\omega] = [t^{-1}].$$

Consideriamo finalmente il *vettore della velocità angolare*, cioè un vettore Ω che abbia per direzione e senso, la direzione ed il senso positivo dell'asse di rotazione ed il cui modulo sia eguale ad ω, al tempo t. Dico che:

$$\frac{dP}{dt} = \Omega \wedge (P - O), \tag{2}$$

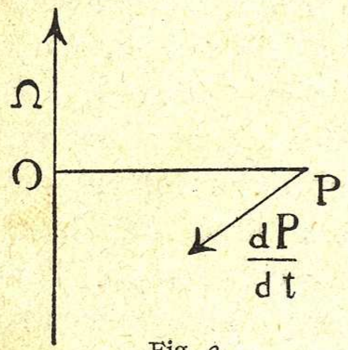

Fig. 2.

O essendo un punto qualunque dell'asse.

Infatti se O è il piede della normale condotta da P sull'asse, il secondo membro, in base alle convenzioni fatte, rappresenta in grandezza, direzione e senso la velocità di P, essendo ωr il modulo del prodotto vettoriale; che poi ad O possa sostituirsi un altro punto O' dell'asse risulta dalla identità

$$\Omega \wedge (P - O) = \Omega \wedge (P - O') + \Omega \wedge (O' - O) = \Omega \wedge (P - O').$$

Se infine il moto di un sistema al tempo t è tale che la velocità dei vari suoi punti è data dalla (2), si dirà che il moto all' istante t è una *rotazione istantanea* intorno ad un asse condotto per O parallelo ad Ω e la cui velocità angolare è mod Ω; e ciò per la stessa ragione accennata al § precedente.

§ 3. **Moto elicoidale.** — Il sistema S subisca una traslazione, di ampiezza τ, parallelamente a un asse e poi una rotazione, di ampiezza θ, intorno allo stesso. La posizione A_1 assunta da un punto A non varia effettuando prima la rotazione e poi la traslazione, cioè invertendo i due movimenti che, perciò, diconsi *invertibili*. Il moto risultante dicesi *moto elicoidale*.

Immaginando decomposta la traslazione e la rotazione in altre m parziali da effettuare alternatamente e supponendo m infinitamente grande, noi verremo a far muovere ciascun punto di S su di un cerchio, mentre il cerchio si sposta normalmente all'asse. Dunque ogni punto di S descrive un'elica cilindrica intorno al dato asse; le varie eliche hanno lo stesso passo e si è infine riprodotto il moto della vite nella madrevite; il moto dicesi *elicoidale continuo* e risulta composto di una rotazione e traslazione lungo lo stesso asse. Se questi due movimenti sono istantanei, il moto elicoidale dicesi *istantaneo*.

Se Ω è il vettore della velocità angolare, sarà $\Omega \wedge (P - O)$ la velocità nel moto istantaneo di rotazione; potremo rappresentare con $h\,\Omega$ quella del moto istantaneo di traslazione; la velocità di P nel moto elicoidale sarà la somma di queste due; e se diciamo τ la grandezza della velocità di traslazione avremo

$$\tau = h \bmod \Omega = h\,\omega.$$

h è una costante che dicesi *parametro* del moto elicoidale; e poichè

$$\tau = r\,\omega \operatorname{cotg} \alpha,$$

essendo α l'angolo che la tangente in P all'elica forma coll'asse, risulta

$$h = r \operatorname{cotg} \alpha\,;$$

e $2\pi h$ esprime quindi il passo comune delle eliche.

La traslazione e la rotazione corrispondono ai valori ∞ e 0 del parametro.

§ 4. **Analisi del moto finito di un sistema rigido.** — L'importanza dei moti semplici precedentemente considerati apparisce subito dal teorema seguente che dimostreremo:

Il trasporto di un sistema rigido da una ad un'altra posizione dello spazio può effettuarsi con un unico moto elicoidale.

Consideriamo anzitutto due casi particolari; e cioè quello in cui un piano del sistema S resta sovrapposto a se stesso (e quindi ogni piano parallelo), e quello in cui un punto O di S coincide col proprio corrispondente in S_1 e quindi ogni sfera avente per centro O resta sovrapposta a se stessa; O dicesi punto unito. Considerando le sezioni di S e di S_1 con tale piano nel primo caso e con una sfera arbitraria di centro O nel secondo, otterremo due figure s e s_1

(piane o sferiche) tra loro corrispondenti; e se porteremo a coincidere s con s_1 e precisamente due punti qualunque di s coi loro corrispondenti di s_1, otterremo pure la coincidenza di S con S_1. In questi due casi adunque noi ci dobbiamo limitare al *trasporto di una figura piana o sferica da una ad un'altra posizione del proprio piano o della propria sfera;* ossia rispettivamente al *moto piano* o al *moto sferico*. Dimostriamo che *tale trasporto si può ottenere o con una rotazione intorno ad un asse normale al piano o alla sfera, cioè passante pel centro della sfera; o con una traslazione o con una simmetria (rotazione di π).*

Infatti sia A un punto di s diverso dal suo corrispondente A_1 di s_1 e che certamente esiste; immaginiamo A_1 appartenente ad s e sia A_1' il suo corrispondente in s_1. Poichè $A A_1 = A_1 A_1'$, A_1' non coinciderà con A_1. Supponiamo che questi tre punti non siano in linea retta, oppure non siano su di un cerchio massimo, secondo che si tratta di un moto piano o sferico; e per essi si faccia passare un cerchio di centro C. Con una rotazione semplice intorno C, ossia intorno ad

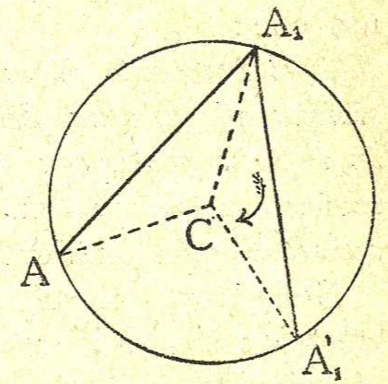

Fig. 3.

un asse per C normale al piano (oppure alla sfera), porteremo A su A_1, A_1 su A_1' e quindi s su s_1.

Se i tre punti sono in linea retta, nel moto piano, la coincidenza si otterrà con una traslazione $A_1 - A$; se i tre punti sono su di un cerchio massimo, moto sferico, C coincide con O e l'asse della rotazione è la normale in O al cerchio massimo. Finalmente se A_1' coincide con A, l'asse di rotazione passa pel punto medio di $A A_1$ ed è normale al piano o alla sfera e l'ampiezza della rotazione è π. In ogni caso poi l'asse di rotazione è unico.

Passiamo ora al caso generale e dimostriamo che:

Il trasporto di un sistema rigido da una posizione ad un'altra dello spazio si può ottenere, in infiniti modi, con una traslazione ed una rotazione semplice; tutti gli assi di rotazione sono paralleli e le ampiezze delle rotazioni sono eguali.

Nella posizione S_1 scegliamo un punto A_1 ad arbitrio; sia A il suo corrispondente in S; se A coincide con A_1 ricadiamo nel caso precedente. Siano adunque diversi ed imprimiamo al sistema S la traslazione $A_1 - A$; da S passeremo alla nuova posizione S' che è pure una diversa posizione di S_1. Se S' coincide con S_1, il trasporto si è ottenuto con una sola traslazione; se ciò non è, A_1 essendo un punto unito per S' ed S_1, potremo ottenere la loro sovrapposizione con una rotazione intorno ad un asse uscente da A_1.

Sia a_1 quest'asse; a la parallela passante per A; è chiaro che a ed a_1 sono rette corrispondenti in S ed S_1. Consideriamo un'altra coppia B, B_1 di punti corrispondenti e sia b_1 il nuovo asse di rotazione. Quando si effettua la traslazione $B_1 - B$, il punto A verrà in A' e la retta a prenderà la posizione parallela a'; e poichè con la rotazione intorno a b_1, A' dovrà portarsi su A_1 ed a' su a_1, è necessario che a' ed a_1 siano parallele a b_1.

L'ampiezza della rotazione intorno b_1 è eguale al diedro formato dai due piani $a' b_1$ e $a_1 b_1$; invece quella intorno a_1 è eguale al diedro dei piani $a_1 b'$ e $a_1 b_1$ che è lo stesso di prima. Il teorema è provato.

Poichè

$$B_1 - B = A' - A = (A_1 - A) + (A' - A_1)$$

e $A' - A_1$ è normale ad a_1, b_1, si conclude pure che *le varie traslazioni hanno la stessa proiezione sulla direzione degli assi di rotazione.*

Possiamo finalmente dimostrare il teorema enunciato al principio di questo §. Sia σ un piano di S normale alla direzione degli assi di rotazione; poichè σ non muta di orientazione nè durante la traslazione, nè durante la rotazione, si deduce che il suo corrispondente σ_1 è parallelo a σ. Con una traslazione normale a σ, cioè parallela alla direzione degli assi di rotazione, portiamo a coincidere σ con σ_1; non coincideranno con ciò, in generale, le figure s ed s_1 sezioni di S ed S_1 con σ e σ_1; ma esse si potranno far coincidere con una rotazione intorno ad un asse normale al piano. Quindi S ed S_1 verranno a coincidere col duplice moto di traslazione e rotazione intorno allo stesso asse, cioè con un moto elicoidale. Resta dunque provato il teorema enunciato. (*)

(*) Il teorema, pel caso di un sistema con un punto fisso, è stato scoperto da Euler, *Formulae generales pro translatione*, ecc. [Novi Comm. Acad. Petrop., **20**, pagine 189-207 (1775)] che ne ha data una dimostrazione geometrica; A. I. Lexell, *Theoremata nonnullia generalia de translatione corporum rigidorum* [Ibid., pp. 239-270] subito dopo ne diè una dimostrazione analitica. Il teorema generale fu dato da Chasles, *Note sur les propriétés générales de deux corps*, etc. [Bull. des sciences mathém. phys. et chim. de Férussac, **14**, pp. 321-326 (1830)]; il quale ha anche considerato il caso particolare del moto piano e sferico in una memoria presentata alla Soc. philom. nel 1829 e pubblicata molti anni dopo: *Mém. de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques* [Bull. de la Société mathém. de France, **6**, pp. 208-250 (1877-78)]; e da Giorgini, *Intorno alle proprietà geometriche dei movimenti di un sistema di punti, di forma invariabile. Appendice* (1832). [Mem. Società italiana delle Scienze, **21**, pp. 1-50 (1834)].

Per molti risultati di questo § vedi pure: Rodrigues' *Des lois géométriques qui régissent les déplacements*, etc. [Journ. de Mathém., **5**, pp. 380-440 (1840)].

L'asse di moto elicoidale dicesi pure di *rotazione e scorrimento*, ed è unico; se infatti ne esistesse un altro, dovrebbe essergli parallelo; ma questo, mentre nella traslazione resterebbe sovrapposto a se stesso, non lo sarebbe più nella rotazione intorno al primo.

Notiamo ancora che *la traslazione relativa al moto elicoidale è la minima.*

Con questo teorema possiamo dare una semplice rappresentazione del trasporto di un sistema rigido dalla posizione S alle successive S_1, S_2,.... Diciamo r_1 l'asse di moto elicoidale per cui da S si passa ad S_1; r_2 quello per cui da S_1 si passa in S_2; ecc.; e siano r_1', r_2',.... quelle rette rigidamente connesse con S e che vengono successivamente a coincidere con r_1, r_2.... Facendo quindi coincidere questa serie rigata (fissa nel corpo), colla serie r_1, r_2,... fissa nello spazio, con opportuni moti elicoidali, si viene a riprodurre, con una immagine chiara e netta, il passaggio di S in S_1, S_2,....

Nei due casi particolari del moto piano e sferico, le r_1.... sono perpendicolari al piano o escono dal centro O; quindi le due serie costituiscono due superfici poliedriche a lati paralleli o concorrenti; e se le seghiamo con un piano o con una sfera col centro in O, noi verremo a costruire due spezzate poligonali (rettilinee o sferiche) a lati rispettivamente eguali; facendo coincidere successivamente i lati della prima (cui è connessa rigidamente s) con quelli della seconda, supposta fissa, trasporteremo s in s_1, s_2,...

§ 5. **Composizione dei moti finiti.** — Mediante n movimenti elicoidali successivi intorno r_1, r_2,...., un sistema S passi nelle posizioni $S_1, S_2, ... S_n$. Ma possiamo passare direttamente da S in S_n con un unico moto elicoidale che, in questo senso, ha lo stesso effetto dei precedenti. Questi si dicono *componenti* e quello *moto elicoidale risultante* o *prodotto*; quindi

Il prodotto di più moti elicoidali è un moto elicoidale.

Il moto risultante dipende dai moti componenti e dal loro ordine di successione; ed il problema generale della composizione dei moti è quello di assegnare la posizione dell'asse, la traslazione e la rotazione del moto risultante, cogniti gli elementi analoghi dei moti componenti.

Noi ci limiteremo a considerare solamente alcuni casi particolari.

Anzitutto è facile verificare che:

Il prodotto di più traslazioni è una traslazione rappresentata da un vettore che è somma dei vettori delle traslazioni componenti.

In questo caso i movimenti sono invertibili; come pure sono invertibili più rotazioni e traslazioni lungo lo stesso asse.

La considerazione poi delle varie posizioni di una figura piana (sferica) sul proprio piano (sfera) conduce al seguente caso particolare del precedente teorema generale:

Il prodotto di più rotazioni intorno ad assi concorrenti (a distanza infinita o finita) è una rotazione intorno ad un asse concorrente coi primi o una traslazione.

a) Si può assegnare la posizione di questo asse e l'ampiezza della rotazione risultante con una costruzione geometrica semplice; e consideriamo anzitutto il caso di due rotazioni intorno ad assi paralleli. Seghiamo questi due assi con un piano normale in O_1 e O_2 e a questo piano immaginiamo connessa la figura piana (intersezione di S col piano); le due rotazioni di ampiezze $2\,\omega_1$ e $2\,\omega_2$ siano dello stesso senso (orario). Per O_1 tracciamo nel piano due rette s_1 e s_1' che formino con $O_2 - O_1$ un angolo ω_1; e per O_2 altre due rette s_2 ed s_2' che formino con $O_1 - O_2$ un angolo ω_2; poichè $\omega_1 + \omega_2 < \pi$, s_1 ed s_2 si incontreranno in un punto O, ed s_1' e s_2' nel simmetrico O'. Per effetto della prima rotazione O si porterà in O' e per effetto della seconda

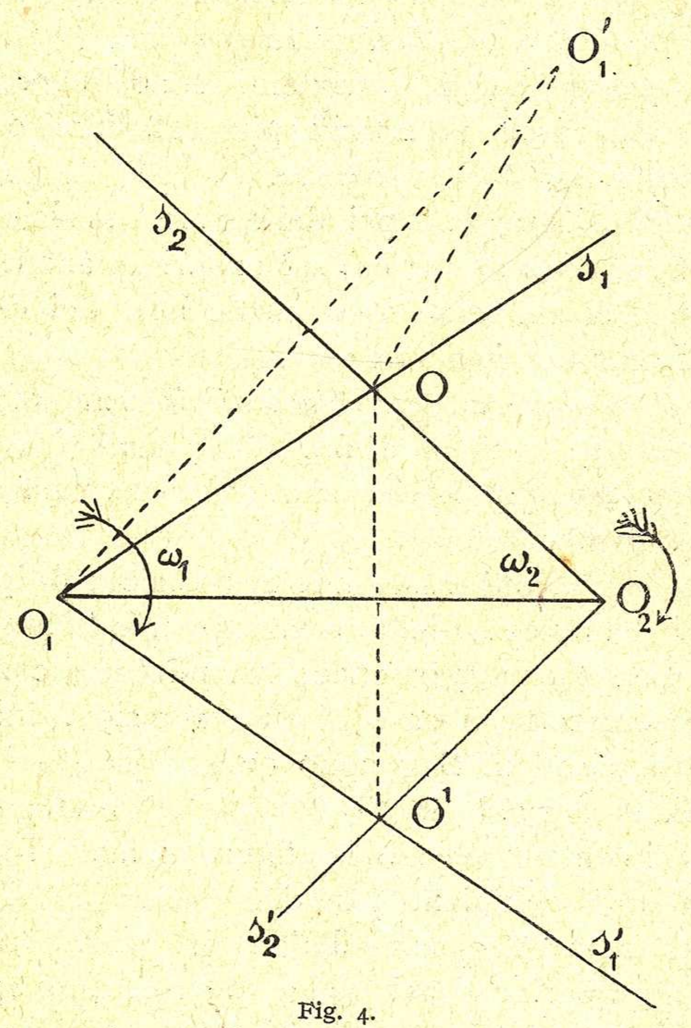

Fig. 4.

O' tornerà in O; dunque l'asse della rotazione risultante passa per O ed è parallelo ai primi due. Sia O_1' il simmetrico di O_1 rispetto ad s_2;

per effetto della prima rotazione O_1 rimane fisso e per la seconda si porta in O_1' e poichè si deve passare da O in O_1' con una rotazione unica intorno ad O, sarà $O_1 \widehat{O} O_1'$ l'ampiezza della rotazione risultante che è di senso concorde con quello delle componenti ed eguale alla loro somma.

Se le due rotazioni non sono di senso concorde, per es. la seconda sia di senso antiorario, possiamo riguardarla pure di senso orario ma di ampiezza $2\pi - 2\omega_2$; allora la s_2 formerà con $O_1 - O_2$ l'angolo $\pi - \omega_2$; ossia s_2 formerà con $O_2 - O_1$ l'angolo ω_2 e si applicherà il procedimento di prima; la rotazione risultante sarà di senso orario o no secondochè $\omega_1 \gtreqless \omega_2$ e la sua ampiezza è $\omega_1 - \omega_2$. Quindi riguardando come positive le rotazioni che avvengono in senso orario e negative le altre si può dire:

L'ampiezza della rotazione risultante di due altre i cui assi sono paralleli è la somma algebrica delle rotazioni componenti.

I due movimenti considerati non sono invertibili; se infatti precede la rotazione intorno ad O_2, l'asse della rotazione risultante passa per O'.

Inoltre la costruzione data cade in difetto se le due rotazioni sono eguali e di senso contrario, cioè quando costituiscono una *coppia di rotazioni*. Dimostriamo che:

Una coppia di rotazioni è equivalente ad una traslazione.

Infatti sia $A - O_1$ il vettore che con una rotazione $2\,\omega_1$ intorno O_1 coincide con $O_2 - O_1$ e sia inoltre $B - O_2 = O_1 - A$. Il punto A colla prima rotazione viene in O_2 e poichè O_2

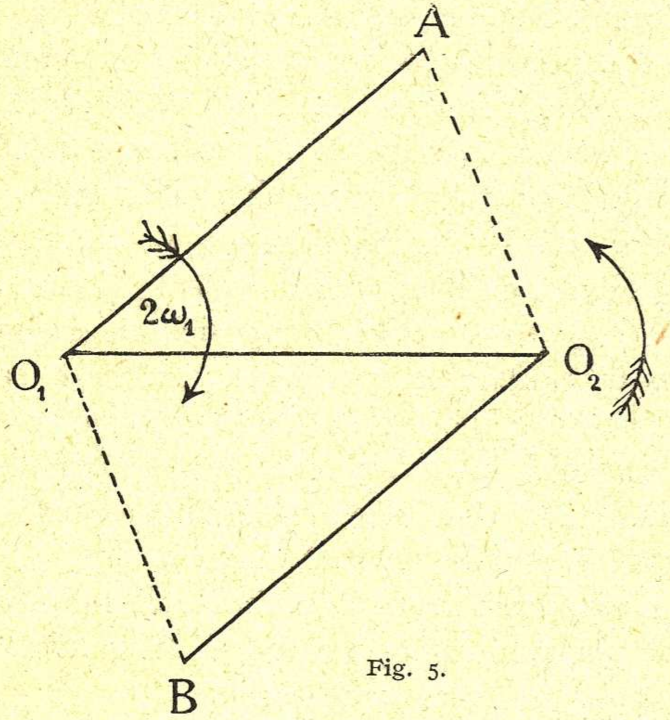

Fig. 5.

non si muove nella seconda rotazione, lo spostamento di A è $O_2 - A$; parimenti si vede che quello di O_1 è $B - O_1 = O_2 - A$; dunque il moto risultante è una traslazione rappresentata da $O_2 - A$. I due movimenti non sono invertibili. Reciprocamente:

Una traslazione si può in infiniti modi riguardare come la risultante di una coppia di rotazioni.

Notiamo ancora che:

Il prodotto di una traslazione e di una rotazione, intorno ad un asse normale alla traslazione, è una rotazione intorno ad un asse parallelo, dello stesso senso e della stessa ampiezza.

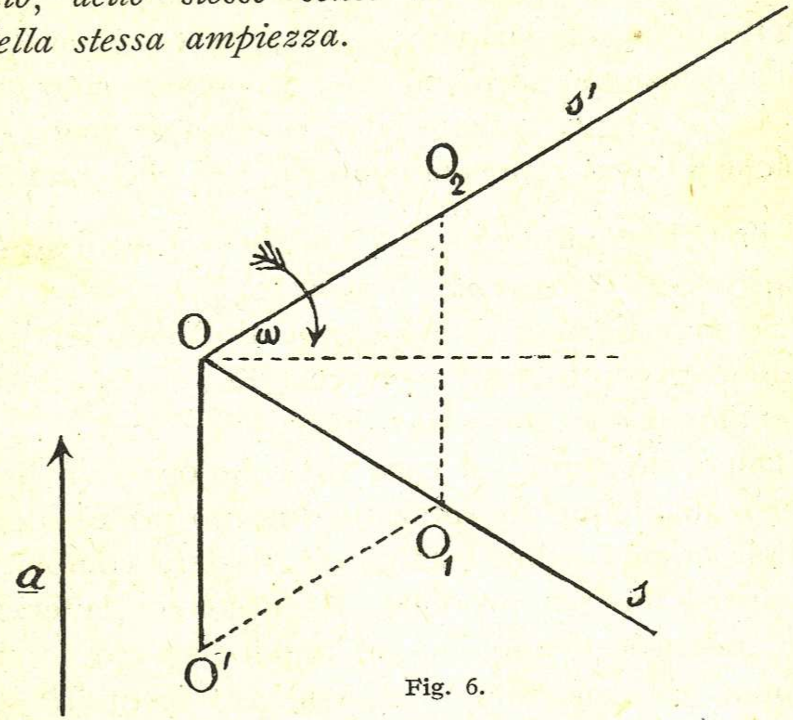

Fig. 6.

Sia **a** il vettore della traslazione, O la traccia dell'asse di rotazione su di un piano normale all'asse e quindi parallelo ad **a**; $2\,\omega$ l'ampiezza della rotazione (che supporremo di senso orario). Sia $O' - O = -\mathbf{a}$ e per O, nel piano suddetto, si traccino due semirette s' ed s tali che con due rotazioni di ampiezze rispettive $\frac{\pi}{2} + \omega$, $\frac{\pi}{2} - \omega$

e dello stesso senso di ω assumano la direzione e il senso di $O' - O$. Da O' conducasi la parallela ad s' sino all'incontro O_1 con s, e da O_1 la parallela ad $O' - O$. Il punto O_1 è la traccia dell'asse della rotazione prodotto; infatti O_1 per effetto della traslazione si porta in O_2 e da O_2, colla rotazione, torna in O_1. Poi osserviamo che O' va in O per effetto dei due movimenti; e poichè l'unica rotazione, intorno O_1, che conduce O' in O ha l'ampiezza $2\,\omega = O'\,\widehat{O_1}\,O$ ed il senso orario, così il teorema è provato.

Se invertiamo i due movimenti l'asse della rotazione prodotto ha per traccia O_2, sicchè questi due movimenti non sono invertibili.

Dopo ciò siamo al caso di comporre un numero qualunque di rotazioni intorno ad assi paralleli in un ordine stabilito; basterà comporre le prime due; il prodotto di queste con la terza; ecc. Se procedendo in tal modo si trova una coppia di rotazioni, ad esse si sostituirà la traslazione prodotto; poi si dovrà comporre una traslazione con una rotazione normale, ecc.; si conclude:

Il prodotto di più rotazioni intorno ad assi paralleli è una rotazione intorno ad un asse parallelo ai primi e la cui ampiezza è la somma algebrica delle ampiezze delle componenti; oppure è una traslazione normale alla direzione comune degli assi, o l'unità (cioè il sistema ritorna alla posizione primitiva) se tale somma è nulla.

b) Il caso di più rotazioni intorno ad assi concorrenti in C non presenta maggior difficoltà. Basta considerare quelle semirette per C lungo gli assi s_1, s_2 e tali che un osservatore collocato su queste, al modo solito, vede avvenire le rotazioni in senso orario; poi segare queste rette con una sfera di centro C e ripetere sulla sfera le costruzioni precedentemente fatte sul piano. Al triangolo piano $O_1\,O\,O_2$ si sostituirà un triangolo sferico i cui angoli interni sono ω_1, ω_2, $\pi - \omega$; l'asse della rotazione risultante s è $C\,O$; ω l'ampiezza della rotazione risultante. Per note proprietà del triangolo sferico si deduce

$$\omega_1 + \pi - \omega + \omega_2 > \pi$$

cioè

$$\omega_1 + \omega_2 > \omega,$$

e poi, applicando una nota formula di trigonometria sferica, si ha:

$$\cos\omega = \cos\omega_1 \cos\omega_2 - \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2 \cos(s_1,\ s_2)\ ,$$

la quale determina $\cos\omega$ in funzione delle rotazioni componenti e dell'angolo dei due assi; tale valore non dipende dall'ordine di successione delle rotazioni.

Data la rotazione risultante e le direzioni di s_1 e s_2, restano determinate le rotazioni componenti.

Si può anche enunciare il risultato così:

Il prodotto di tre rotazioni intorno agli spigoli di un triedro, di senso concorde e di ampiezze eguali ai doppi degli angoli diedri del triedro è uguale all'unità; cioè le rotazioni riconducono il corpo alla posizione primitiva. (*)

§ 6. **Formule per la composizione dei moti finiti.** — Alcuni dei risultati precedenti si possono dimostrare in un modo che condurrà a stabilire le formule per la composizione dei moti finiti.

Consideriamo il piano di una figura s; siano O e P due punti di s ed $\mathbf{a}$ un vettore parallelo al piano di s, che nella posizione s_1 abbiano per corrispondenti O_1, P_1 ed $\mathbf{a}_1$ Sarà

$$P - O = r e^{i\theta}\mathbf{a},\quad P_1 - O_1 = r e^{i\theta}\mathbf{a}_1,\quad \mathbf{a}_1 = e^{i\varphi}\mathbf{a}$$

quindi

$$P_1 - O_1 = e^{i\varphi}(P - O). \tag{3}$$

(*) Il teorema sulla composizione di due rotazioni, e tutta la teoria della composizione dei moti finiti trovasi in Rodrigues (Mem. cit. al § 4). L'enunciato precedente è dovuto ad Hamilton, *Lectures on Quaternions* (Dublin, 1853) § 217 e 344; *Elements of Quaternions* (1ª ediz. 1866); 2ª ediz. 1899. 1° vol., p. 415.

Vedi, esercizio 1 in fine del Cap., il teorema più generale di Halphen.

Cerchiamo quel punto C che coincide col suo corrispondente; dovrà essere

$$C - O_1 = e^{i\varphi}(C - O), \tag{4}$$

la quale determina C, purchè $\varphi \neq 0$; se è eguale a zero, il movimento equivale ad una traslazione. Da (3) e (4) per sottrazione ricaviamo

$$P_1 - C = e^{i\varphi}(P - C); \tag{5}$$

dunque ruotando $P - C$ intorno a C di un angolo φ, da P passeremo in P_1 e riotteniamo uno dei risultati del § 4.

Per comporre due rotazioni $2\omega_1$, $2\omega_2$ intorno a due assi normali al piano della figura s in O_1 e O_2, diciamo P_1, P_2 le successive posizioni di un punto P della stessa figura. Per la (5) avremo:

$$P_1 = O_1 + e^{2i\omega_1}(P - O_1);$$
$$P_2 = O_2 + e^{2i\omega_2}(P_1 - O_2)$$

quindi:

$$P_2 = O_2 + e^{2i\omega_2}(O_1 - O_2) + e^{2i(\omega_1+\omega_2)}(P - O_1).$$

Si determina poscia un punto O tale che

$$O = O_2 + e^{2i\omega_2}(O_1 - O_2) + e^{2i(\omega_1+\omega_2)}(O - O_1),$$

il quale risulterà univocamente determinato purchè $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$; allora per sottrazione risulta:

$$P_2 - O = e^{2i(\omega_1+\omega_2)}(P - O),$$

cioè P_2 si otterrà direttamente da P con una rotazione $\omega_1 + \omega_2$ intorno ad O. E se $\omega_1 + \omega_2 = 0$, avremo invece una traslazione. Il procedimento è evidentemente generale.

Se rispetto ad un sistema O ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$) diciamo x, y le coordinate di P; x_1, y_1 quelle di P_1, e ξ, η quelle di C, dalla (5) si dedurrà

$$(6) \quad \begin{cases} x_1 - \xi = (x - \xi)\cos\varphi - (y - \eta)\operatorname{sen}\varphi \\ y_1 - \eta = (x - \xi)\operatorname{sen}\varphi + (y - \eta)\cos\varphi; \end{cases}$$

ossia, accennando con z il numero complesso $x + iy \, (i = \sqrt{-1})$; ecc., in forma più concisa

$$z_1 - \zeta = (z - \zeta)\, e^{i\varphi}.$$

Quindi, posto

$$\alpha = e^{-i\varphi}; \qquad \beta = \zeta(1 - e^{-i\varphi}).$$

risulta

$$(7) \qquad z = \alpha z_1 + \beta;$$

In una rotazione del piano intorno ad un suo punto, la variabile complessa z subisce una trasformazione lineare.

Passiamo ora alla considerazione di una figura sferica s sulla propria sfera, di cui supporremo eguale ad uno il raggio, e che riferiremo ad una terna destrogira ortogonale O ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$). Nel passaggio da s in s_1 assuma la posizione O ($\mathbf{i}_1$,

$\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$) e siano a_1, b_1, c_1 i coseni di $\mathbf{i}_1$ rispetto alla primitiva terna; a_2, b_2, c_2 quelli di $\mathbf{j}_1$; a_3, b_3, c_3 quelli di $\mathbf{k}_1$.

Le note proprietà $\mathbf{i}_1^2 = 1$, $\mathbf{i}_1 \times \mathbf{j}_1 = 0$, ecc., dimostrano subito che il determinante formato coi nove coseni è ortogonale, ed essendo $\mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_1 \times \mathbf{k}_1 = 1$, ha il valore $+1$; ogni suo elemento è eguale al suo complemento algebrico, perchè $\mathbf{k}_1 = \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_1$; cioè $a_3 = b_1 c_2 - b_2 c_1$, ecc.

I nove coseni soddisfacendo a sei relazioni, possono esprimersi in funzione di tre di essi, o, in generale, di tre altre quantità. Tra le varie rappresentazioni la seguente è assai importante.

Poniamo

$$(8) \quad c_1 = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\vartheta, \quad c_2 = \cos\varphi \operatorname{sen}\vartheta, \quad c_3 = \cos\vartheta;$$

$$(9) \quad a_3 = \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\vartheta, \quad b_3 = -\cos\psi \operatorname{sen}\vartheta.$$

I tre angoli φ, ψ, ϑ così definiti coincidono con i cosidetti *angoli euleriani*; si vede subito che ϑ è l'angolo di $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}_1$; e se OL è quella semiretta intersezione dei due piani condotti per O parallelamente ad $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, tale che la terna OL, $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1$ sia destrogira, allora φ è l'angolo di OL con $\mathbf{i}$, e ψ quello di OL con $\mathbf{i}_1$.

Sarebbe semplice dedurre da (8) e (9) i valori degli altri coseni espressi per φ, ψ, ϑ; ma procederemo invece in altro modo, introducendo altri quattro parametri (legati da una relazione), definiti da

$$(10)\begin{cases}\alpha = \cos\frac{\vartheta}{2}\, e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)}, & \beta = i \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\, e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)} \\ \gamma = i \operatorname{sen}\frac{\vartheta}{2}\, e^{\frac{i}{2}(-\psi+\varphi)}, & \delta = \cos\frac{\vartheta}{2}\, e^{-\frac{i}{2}(\psi+\varphi)}.\end{cases}$$

Eliminando φ, ψ ϑ, troviamo l'accennata relazione

$$(11)\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Risulta inoltre che α e δ; β e $-\gamma$ sono immaginarii coniugati.

Valendoci delle (10) otteniamo per le (8) e (9) le formule

$$(12)\begin{cases}c_1 = -\alpha\gamma + \beta\delta, \quad c_2 = -i\alpha\gamma - i\beta\delta \\ c_3 = \alpha\delta + \beta\gamma, \quad a_3 + i b_3 = -2\alpha\beta.\end{cases}$$

Inoltre si ha:

$$(a_1 + i b_1) c_1 + (a_2 + i b_2) c_2 = -(a_3 + i b_3) c_3$$
$$(a_1 + i b_1) c_2 - (a_2 + i b_2) c_1 = i (a_3 + i b_3)$$

oppure

$$(a_1 + i b_1) c_1 + (a_2 + i b_2) c_2 = 2\alpha\beta(\alpha\delta + \beta\gamma)$$
$$(a_1 + i b_1) c_2 - (a_2 + i b_2) c_1 = -2 i \alpha\beta(\alpha\delta - \beta\gamma);$$

da queste possiamo ricavare $a_1 + i b_1$ ed $a_2 + i b_2$; osservando che

$$c_1^2 + c_2^2 = -4\alpha\beta\gamma\delta,$$

si trova

$$(13)\quad a_1 + i b_1 = \alpha^2 - \beta^2;\quad a_2 + i b_2 = i\alpha^2 + i\beta^2.$$

Le (12) e (13) sono le formule che ci occorrono; tuttavia è bene notare subito una conseguenza notevole.

Separiamo nelle α, β, γ, δ la parte reale dalla immaginaria, ponendo

$$(14)\begin{cases}\alpha = \rho(1 + i\nu), & \delta = \rho(1 - i\nu) \\ \beta = \rho(-\mu + i\lambda), & \gamma = \rho(\mu + i\lambda),\end{cases}$$

ρ, λ, μ, ν essendo quattro numeri reali, tra i quali, per la (11), sussiste la

$$(15)\qquad \rho^2(1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) = 1.$$

Sostituendo le (14) nelle (12) e (13) deduciamo le seguenti espressioni *razionali* dei nove coseni in funzione di tre indeterminate λ, μ, ν:

$$(16)\begin{cases}a_1 = \rho^2(1 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2), \quad b_1 = 2\rho^2(\lambda\mu + \nu), \\ \qquad c_1 = 2\rho^2(\lambda\nu - \mu) \\ a_2 = 2\rho^2(\lambda\mu - \nu), \quad b_2 = \rho^2(1 - \lambda^2 + \mu^2 - \nu^2), \\ \qquad c_2 = 2\rho^2(\mu\nu + \lambda) \\ a_3 = 2\rho^2(\lambda\nu + \mu), \quad b_3 = 2\rho^2(\mu\nu - \lambda), \\ \qquad c_3 = \rho^2(1 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2).\end{cases}$$

I tre parametri λ, μ, ν diconsi *parametri razionali.* (*)

Torniamo ora alla figura sferica s e sia $P(x, y, z)$ un suo punto, Q la sua proiezione stereografica dal polo N sul piano equatoriale $x\, y$. Le coordinate di Q si deducono da quelle x, y di P, riducendole nel rapporto di 1 a $1 - z$. Quindi considerando la variabile complessa w relativa al punto Q, abbiamo

$$w = \frac{x + iy}{1 - z} = \frac{1 + z}{x - iy}, \tag{17}$$

poichè, in virtù dell'equazione della sfera, si ha

$$(x + iy)(x - iy) = (1 + z)(1 - z).$$

(*) Queste formule sono un caso particolare di quelle di Cayley che esprimono gli n^2 coefficienti di una sostituzione ortogonale in funzione di $\frac{1}{2} n(n-1)$ parametri. [Crelle's Journal, **32**, pp. 119-123 (1846)]. Esse sono state date da Euler: *Problema algebraicum*, etc. [Novi Comm. Acad. Scient. Imper. Petropolitanae, **15**, pag. 75 e 101 (1770)]. Euler ha anche trattato, quasi divinando, il caso di $n = 4$. Le stesse formule furono ritrovate da Rodrigues nella memoria già citata.

Sono state dedotte con metodi svariati. Cfr. una nota di F. Caspary, *Sur les expressions des angles d'Euler*. [Bull. des Sciences mathém. et astron., (2) **13**, pp. 89-111 (1889)]; un'altra di Darboux nella 4ª parte della *Théorie générale des surfaces*; ed infine una mia nota in *Jorn. de Sciencias Mathem. e Astr.*, **14**, pp. 161-168 (1901).

Dato Q, oppure w, resta univocamente determinato P. Due punti diametralmente opposti P e P' della sfera hanno per proiezioni stereografiche due punti Q e Q' allineati con O e situati da parti opposte; i loro argomenti differiscono quindi di π; ed essendo retto l'angolo $Q N Q'$ il prodotto dei loro moduli è eguale ad 1; e reciprocamente. Se quindi accenniamo con $\overline{w}$ il coniugato di w, il numero complesso w' relativo a Q' è espresso da $-\frac{1}{\overline{w}}$.

Sia P_1 il corrispondente di P in s_1, in un movimento (rotazione) della sfera su se stessa, ed x_1, y_1, z_1, le sue coordinate rispetto alla terna $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$: abbiamo

$$x = a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1, \text{ ecc.}$$

Poniamo
$$w_1 = \frac{x_1 + i y_1}{1 - z_1}$$

ed osserviamo che

$$w = \frac{x + iy}{1 - z}$$

$$= \frac{(a_1 + i b_1) x_1 + (a_2 + i b_2) y_1 + (a_3 + i b_3) z_1}{1 - (c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 z_1)},$$

cioè sostituendo i valori (12), (13) e tenendo presente la (11)

$$w = \frac{\alpha^2 (x_1 + i y_1) - \beta^2 (x_1 - i y_1) - 2 \alpha \beta z_1}{\alpha\gamma(x_1 + i y_1) - \beta\delta(x_1 - i y_1) + \alpha\delta(1 - z_1) - \beta\gamma(1 + z_1)}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $x_1 + i y_1$, la eguaglianza precedente si trasforma nella

$$w = \frac{[\alpha(x_1 + i y_1) + \beta(1 - z_1)][\alpha(x_1 + i y_1) - \beta(1 + z_1)]}{[\gamma(x_1 + i y_1) + \delta(1 - z_1)][\alpha(x_1 + i y_1) - \beta(1 + z_1)]}$$

cioè infine

$$(18) \qquad w = \frac{\alpha w_1 + \beta}{\gamma w_1 + \delta}.$$

La variabile complessa w, per ogni rotazione della sfera su se stessa, subisce una trasformazione lineare fratta della forma (18). (*)

La ricerca dell'asse di rotazione si fa determinando quel punto della sfera che coincide col proprio corrispondente, pel quale quindi $w = w_1$; la (18) ci dà

$$\gamma w^2 + (\delta - \alpha) w - \beta = 0;$$

ed è facile vedere che alle due radici corrispondono due punti diametralmente opposti della sfera; perchè cambiando i in $-i$ e quindi rispettivamente $\alpha, \beta, \gamma, \delta, w$ in $\delta, -\gamma, -\beta, \alpha, \overline{w}$, si trova che $w' = -\frac{1}{\overline{w}}$ soddisfa alla stessa equazione; diciamo w_0, w'_0 le sue radici.

(*) Questa formola è di HELMHOLTZ: *Optique Physiologique* (traduz. francese, Paris, 1867, pag. 658; ediz. tedesca, Leipzig, 1867, pag. 513) nel § « Stereographische Proiection der Drehungen ». Sono state poi ritrovate da CAYLEY [Mathem. Annal., **15**, p. 238 (1879); Collected Papers, I, p. 332].

Chiamando con a, b, c le coordinate del polo di rotazione, ossia i coseni dell'asse di rotazione, e notando che

$$w_0 = \frac{a + i b}{1 - c}, \quad w'_0 = -\frac{a + i b}{1 + c} = -\frac{1 - c}{a - i b},$$

si deduce agevolmente:

$$\frac{1 - w_0 w'_0}{w'_0} = \frac{2a}{c - 1}; \quad \frac{i(1 + w_0 w'_0)}{w'_0} = \frac{2b}{c - 1}$$

$$\frac{w_0 + w'_0}{w'_0} = \frac{2c}{c - 1};$$

e quindi

$$a : b : c = \gamma + \beta : i(\gamma - \beta) : \alpha - \delta,$$

e finalmente per le (14),

$$(19) \qquad a : b : c = \lambda : \mu : \nu.$$

Per la ricerca della rotazione 2ω, possiamo osservare che l'asse di rotazione forma angoli eguali con $\mathbf{i}$ ed $\mathbf{i}_1$; quindi considerando il triedro che ha per spigoli l'asse di rotazione e gli assi x ed x_1 otterremo:

$$a_1 = a^2 + (1 - a^2) \cos 2\omega$$

e così

$$b_2 = b^2 + (1 - b^2) \cos 2\omega$$
$$c_3 = c^2 + (1 - c^2) \cos 2\omega.$$

Sommando e riducendo si trova

$$(20) \qquad 4 \cos^2 \omega = 1 + a_1 + b_2 + c_3 ;$$

poscia, osservando che

$$2 a^2 \operatorname{sen}^2 \omega = a_1 - \cos 2\omega,$$

si ha

$$(21) \quad \begin{cases} 4 a^2 \operatorname{sen}^2 \omega = 1 + a_1 - b_2 - c_3 \\ 4 b^2 \operatorname{sen}^2 \omega = 1 - a_1 + b_2 - c_3 \\ 4 c^2 \operatorname{sen}^2 \omega = 1 - a_1 - b_2 + c_3 . \end{cases}$$ (*)

Dalla (20), tenendo presenti le (16) e la (15), si deduce

$$\rho^2 = \cos^2 \omega,$$

e allora dalle (19), osservando che

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = \frac{1 - \rho^2}{\rho^2} = \operatorname{tang}^2 \omega,$$

deduciamo:

$$(22) \quad \lambda = a \operatorname{tang} \omega, \quad \mu = b \operatorname{tang} \omega, \quad \nu = c \operatorname{tang} \omega ;$$

otteniamo così l'interpretazione cinematica dei parametri razionali.

(*) Queste formule si trovano nella memoria di Lexell, citata al § 4.

Dopo ciò le (14) ci danno:

$$(23) \quad \begin{cases} \alpha = \cos \omega + i c \operatorname{sen} \omega, \quad \delta = \cos \omega - i c \operatorname{sen} \omega \\ \beta = \operatorname{sen} \omega (- b + i a), \quad \gamma = \operatorname{sen} \omega (b + i a) \\ \alpha + \delta = 2 \cos \omega, \end{cases}$$

otteniamo cioè tutti gli elementi della rotazione della sfera in funzione di α, β, γ, δ che perciò diconsi *parametri di rotazione*.

Possiamo dedurre ora le formule per la composizione delle rotazioni.

Siano α_1, β_1, γ_1, δ_1; α_2, β_2,.... i parametri di due rotazioni intorno ad assi concorrenti; un punto P della sfera passi successivamente in P_1 e poi in P_2 e la w diventi w_1 e w_2; avremo

$$w = \frac{\alpha_1 w_1 + \beta_1}{\gamma_1 w_1 + \delta_1}, \quad w_1 = \frac{\alpha_2 w_2 + \beta_2}{\gamma_2 w_2 + \delta_2};$$

quindi

$$w = \frac{(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2) w_2 + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2)}{(\gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \gamma_2) w_2 + (\gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2)};$$

i parametri della rotazione risultante, mercè la quale da P si passa a P_2, sono, in conseguenza,

$$(24) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2, \quad \beta = \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2 \\ \gamma = \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \gamma_2, \quad \delta = \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2 . \end{cases}$$

Questo risultato si esprime più compendiosamente ponendo

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$$

e convenendo di moltiplicare, a secondo membro, le linee del primo per le colonne del secondo determinante. E così di seguito per più rotazioni.

Risulta subito la non invertibilità delle due rotazioni; inoltre, sostituendo ad $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ i valori (23), possiamo avere, con semplici calcoli, l'ampiezza e i coseni della rotazione risultante in funzione degli elementi analoghi delle rotazioni componenti; otteniamo con ciò, oltre alla formula che dà $\cos\omega$, già trovata al § 5, queste altre:

$$a \operatorname{sen}\omega = a_1 \operatorname{sen}\omega_1 \cos\omega_2 + a_2 \cos\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2 - (b_1 c_2 - b_2 c_1) \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2,$$

ecc.

Se la seconda rotazione riconduce il punto P_1 nella posizione primitiva P, essa dicesi *inversa* della prima. Dovendo essere

$$\alpha = \delta = 1, \qquad \beta = \gamma = 0$$

dalle (24) si deduce

$$\alpha_2 = \delta_1, \quad \beta_2 = -\beta_1, \quad \gamma_2 = -\gamma_1, \quad \delta_2 = \alpha_1,$$

cioè *i parametri della rotazione inversa si ottengono scambiando tra loro* α_1 *e* δ_1 *e cambiando segno agli altri due.*

Ciò del resto è anche evidente così: scambiando la terna **i**, **j**, **k** con $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$, l'angolo ϑ si muta in $-\vartheta$; φ in $-\psi$; ψ in $-\varphi$ come risulta subito dalle (8) e (9); quindi dalle (10) risulta la regola enunciata. (*)

Esercizi.

1. Comporre due simmetrie intorno a due assi.

Siano anzitutto i due assi concorrenti ed O il punto di incontro delle due semirette a e b; c una semiretta uscente pure da O e normale alle a e b e tale che la

(*) La considerazione dei parametri α, β, γ, δ, che potrebbe farsi risalire a Gauss ed a Weierstrass, è stata fatta esplicitamente da Caspary nella mem. già citata, e poi dal Klein e Sommerfeld nella *Theorie des Kreisels*, Leipzig, 1898, che ne mostrarono tutta la importanza nello studio della rotazione. Si vedano pure i lavori di Study [Mathem. Annal., **39**, p. 441 (1891)] e di Schoenflies [Jahresb. der deutsch. Mathem.-Verein., **18**, pag. 456 (1909); Rendiconti del Circolo matem. di Palermo, **29**, pp. 329-339 (1910)].

L'applicazione successiva della regola (25) permette di assegnare le formule per la composizione dei moti finiti. Vedi: *Formule per la composizione di più moti finiti* [Annali di Matem., (2) **26**, pp. 101-112 (1897)].

terna a, b, c sia destrogira; per effetto delle due simmetrie intorno a e b (e in questo ordine) c torna a coincidere con se stessa. Di più a, pure per effetto delle due simmetrie, assume la posizione a' simmetrica rispetto b. Dunque il prodotto di queste due simmetrie è una rotazione intorno c di ampiezza eguale al doppio dell'angolo a, b.

Di qui in particolare si deduce che il prodotto di due simmetrie intorno a due assi ortogonali, è una terza simmetria intorno ad un asse normale ai primi due.

Si può del pari agevolmente dedurre che il prodotto di tre rotazioni intorno a tre assi normali nei vertici di un triangolo piano, di ampiezze eguali ai doppi degli angoli del triangolo e dello stesso senso, è eguale all'unità. Infatti se A, B, C sono i vertici del triangolo ed il percorso ABC è di senso antiorario, alla rotazione intorno ad A, di senso orario, e di ampiezza doppia dell'angolo in A, possiamo sostituire due simmetrie intorno AC e AB, ecc. Di qui si deduce la regola per la composizione di due rotazioni intorno ad assi paralleli.

Collo stesso procedimento e colla considerazione del triedro supplementare di uno dato, si può dimostrare in altro modo l'ultimo teorema del § 5.

Supponiamo ora che i due assi non siano concorrenti e sia c la loro perpendicolare comune che taglia in A e B i due assi. Collo stesso metodo si vede subito che il prodotto di queste due simmetrie è un moto elicoidale intorno c; l'ampiezza della rotazione è il doppio dell'angolo di a e b; l'ampiezza della traslazione è il doppio della distanza AB e il senso è da A in B.

Da ciò discende quest'altro teorema:

Date tre rette A_{12}, A_{23}, A_{31} e le loro minime distanze due a due D_1, D_2, D_3; se intorno alla prima si effettua

un moto elicoidale la cui traslazione è doppia della distanza tra D_1 e D_2 e nel senso da D_1 a D_2 e la cui rotazione ha per ampiezza il doppio dell'angolo tra D_1 e D_2; e così per la seconda e terza retta; *il prodotto di questi tre moti elicoidali è eguale all'unità.* Infatti al primo si può sostituire il prodotto di due simmetrie rispettivamente intorno D_1 e D_2; ecc.

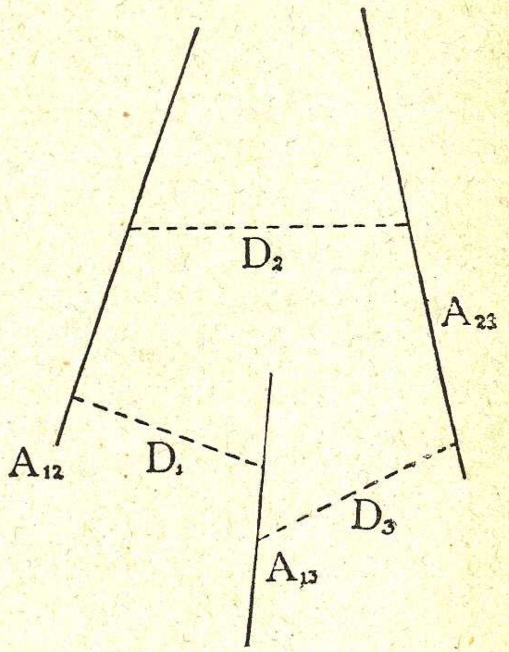

Fig. 7.

Possiamo inoltre osservare che col moto elicoidale intorno A_{12} dal sistema S_1 passiamo in S_2; da questo, col secondo moto, passiamo in S_3; e da S_3, col terzo, nuovamente in S_1. Ora colla simmetria intorno D_1, S_1 assumerà la posizione S simmetrica rispetto D_1; colla simmetria intorno D_2 da S passeremo in S_2; ecc.; si conclude che:

tre posizioni di uno stesso sistema rigido sono simmetriche di una quarta posizione rispetto a tre rette.

HALPHEN, *Sur la théorie du déplacement* [Nouvelles Ann. (3) **1**, (1882), pp. 296-299].

In particolare: *tre posizioni di una stessa figura piana nel proprio piano sono simmetriche di una quarta rispetto a tre rette del piano.* R. de Saussure, *Théorie géométrique du mouvement des corps.* [Archives des Sciences phy. et nat. de Genève, **13, 14** (1902)].

2. Trovare i parametri della rotazione risultante di due altre.

Per maggior simmetria nelle formule, poniamo

$$\alpha = \varkappa + i\nu, \qquad \delta = \varkappa - i\nu$$
$$\beta = -\mu + i\lambda, \quad \gamma = \mu + i\lambda$$

con

$$\varkappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$$

conforme alla (11); ciò equivale in fondo a sostituire nelle (14) ρ, $\rho\lambda$, $\rho\mu$, $\rho\nu$ con $\varkappa$, λ, μ, ν. Si assumono indifferentemente le α, β, γ, δ o le $\varkappa$, λ.... come parametri della rotazione; e si ha dalle (23)

$$\varkappa = \cos\omega, \quad \lambda = a \operatorname{sen}\omega, \quad \mu = b \operatorname{sen}\omega, \quad \nu = c \operatorname{sen}\omega.$$

Detti $\varkappa_1$, λ_1....; $\varkappa_2$, λ_2.... i parametri delle due rotazioni, l'applicazione della regola (25) conduce subito alle formule seguenti pei parametri $\varkappa$, λ,... della rotazione prodotto:

$$\varkappa = \varkappa_1\varkappa_2 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2,$$
$$\lambda = \varkappa_1\lambda_2 + \lambda_1\varkappa_2 + \mu_1\nu_2 - \varkappa_1\mu_2,$$
$$\mu = \varkappa_1\mu_2 + \mu_1\varkappa_2 + \nu_1\lambda_2 - \lambda_1\nu_2,$$
$$\nu = \varkappa_1\nu_2 + \nu_1\varkappa_2 + \lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2.$$

3. Comporre tre rotazioni di ampiezze $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ intorno a tre assi ortognali.

I parametri della prima rotazione sono, posto $c_r = \cos\omega_r$, $s_r = \operatorname{sen}\omega_r$,

$$\varkappa_1 = c_1, \quad \lambda_1 = s_1, \quad \mu_1 = 0, \quad \nu_1 = 0$$

ecc., nella ipotesi che gli assi di rotazione siano gli assi coordinati. La successiva applicazione delle formule del-

l'esercizio precedente ci dà, per i parametri della rotazione 2ω risultante intorno ad un asse di coseni a, b, c,

$$\cos\omega = \varkappa = c_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3,$$
$$a \operatorname{sen}\omega = \lambda = s_1 c_2 c_3 + c_1 s_2 s_3,$$
$$b \operatorname{sen}\omega = \mu = s_2 c_3 c_1 - c_2 s_3 s_1,$$
$$c \operatorname{sen}\omega = \nu = s_3 c_1 c_2 + c_3 s_1 s_2.$$

4. Decomporre una rotazione $2\omega(a, b, c)$ in altre tre secondo tre assi ortogonali.

Applicheremo le formule dell'esercizio precedente e cercheremo le ampiezze delle rotazioni componenti in funzione di $\varkappa$, λ, μ, ν. Si trova subito con facili calcoli

$$2(\varkappa\lambda - \mu\nu) = \operatorname{sen} 2\omega_1 \cos 2\omega_2, \quad 2(\varkappa\mu + \nu\lambda) = \operatorname{sen} 2\omega_2$$
$$2(\varkappa\nu - \lambda\mu) = \operatorname{sen} 2\omega_3 \cos 2\omega_2$$

e inoltre:

$$\varkappa^2 + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 = \cos 2\omega_2 \cos 2\omega_3,$$
$$\varkappa^2 - \lambda^2 - \mu^2 + \nu^2 = \cos 2\omega_1 \cos 2\omega_2.$$

Da queste per divisione, si ricavano i valori di $\operatorname{tang} 2\omega_1$ e $\operatorname{tang} 2\omega_3$.

5. Date tre coppie di punti corrispondenti di due diverse posizioni di un sistema rigido, costruire l'asse di moto elicoidale.

Siano A, A_1, ecc. le tre coppie di punti corrispondenti; $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}_1$ due altri punti corrispondenti e situati rispettivamente nei piani $A\,B\,C$ ed $A_1\,B_1\,C_1$. Sarà quindi

$$\boldsymbol{P} - A = m(\boldsymbol{P} - B) + n(\boldsymbol{P} - C)$$
$$\boldsymbol{P}_1 - A_1 = m(\boldsymbol{P}_1 - B_1) + n(\boldsymbol{P}_1 - C_1).$$

Sia O un punto arbitrario e si faccia $A_2 - O = \mathcal{A}_1 - A$; ecc.; risulta subito

$$P_2 - A_2 = m(P_2 - B_2) + n(P_2 - C_2);$$

cioè il punto P_2 giace nel piano del triangolo $A_2 B_2 C_2$; e scelto su questo ad arbitrio P_2 restano facilmente determinati P e P_1; basta osservare che, condotta da P la parallela ad $A C$ sino ad incontrare in M la $A B$, e da P_2 la parallela ad $A_2 C_2$ sino ad incontrare in M' la $A_2 B_2$, il rapporto di $A_2 M'$ ad $A_2 B_2$ è lo stesso di $A M$ ad $A B$; e quindi, fissato M', si trova M; ecc.

Ma se P_2 è il piede della normale condotta da O sul triangolo $A_2 B_2 C_2$, i vettori $A_1 - A, \ldots, P_1 - P$ avranno le stesse proiezioni su $P_1 - P$; dunque l'asse di moto elicoidale è la retta $P P_1$.

R. Mehmke, *Zur Bestimmung der Axe der Schraubung*,... [Civilingenieur, (1883); Zeitschr. f. Mathematik, **44**, pagina 176 (1889)].

6. Posto

$$\xi = x + iy; \quad \eta = -x + iy, \quad \zeta = -z$$
$$\xi_1 = x_1 + iy_1; \quad \eta_1 = -x_1 + iy_1, \quad \zeta_1 = -z_1$$

esprimere le ξ_1, η_1, ζ_1 mediante le ξ, η, ζ e viceversa.

Si ha

$$\xi = (a_1 + i b_1) x_1 + (a_2 + i b_2) y_1 + (a_3 + i b_3) z_1$$

e per le (12), (13),

$$\xi = \alpha^2 \xi_1 + \beta^2 \eta_1 + 2 \alpha \beta \zeta_1$$

e così

$$\eta = \gamma^2 \xi_1 + \delta^2 \eta_1 + 2 \gamma \delta \zeta_1$$
$$\zeta = \alpha \gamma \xi_1 + \beta \delta \eta_1 + (\alpha \delta + \beta \gamma) \zeta_1 .$$

Considerando il moto inverso e quindi scambiando α con δ e mutando segno a β e γ, si otterranno immediatamente, dalle formule precedenti, le inverse. Si dimostra che il determinante di questo sistema ha per valore $+1$. (Klein u. Sommerfeld, l. c., pag. 91).

7. Ricerca degli elementi della rotazione mediante ξ, η, ζ.

Se la rotazione 2ω avvenisse intorno z, avremmo

$$z_1 = z, \quad x_1 \pm i y_1 = e^{\pm 2 i \omega} (x \pm i y);$$

dunque le ξ, η, ζ dei punti delle rette

$$x = y = 0; \quad z = 0, \ x + i y = 0; \quad z = 0, \ x - i y = 0$$

acquistano nella rotazione uno dei tre fattori $1, e^{\pm 2 i \omega}$; indicando con k uno qualunque di questi, si ha $\xi = k \xi_1$, ecc., e le equazioni dell'esercizio precedente diventano

$$(\alpha^2 - k) \xi_1 + \beta^2 \eta_1 + 2 \alpha \beta \zeta_1 = 0, \text{ ecc.}$$

Ponendo eguale a zero il determinante di questo sistema e sviluppando si ha l'equazione cubica

$$k^3 - A k^2 + B k - 1 = 0$$

dove

$$A = \alpha^2 + \delta^2 + \alpha \delta + \beta \gamma = (\alpha + \delta)^2 - 1$$
$$B = (\alpha \delta + \beta \gamma) \delta^2 - 2 \beta \gamma \delta^2 + \ldots. = A.$$

Esclusa quindi la radice 1, l'equazione quadratica risultante

$$k^2 - (A - 1) k + 1 = 0$$

ha per radici $e^{\pm 2 i \omega}$; onde

$$e^{2 i \omega} + e^{-2 i \omega} = 2 \cos 2 \omega = A - 1 = (\alpha + \delta)^2 - 2$$
$$4 \cos^2 \omega = (\alpha + \delta)^2.$$