Ammessa infatti l'esistenza di tale omografia, pel teorema di commutazione (46) e per la definizione (29) risulta

$$\begin{aligned} & K\alpha \cdot R\alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \\ & = (\alpha\,\mathbf{u}) \wedge (\alpha\,\mathbf{w}) \times \alpha\,\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{w} \cdot I_3\,\alpha \end{aligned}$$

e per l'arbitrarietà dei vettori **u**, **v**, **w**, risulta la prima delle relazioni date. Essa poi, valendosi della identità di Hamilton, può scriversi

$$K\alpha \cdot R\alpha = K\alpha(K\alpha^2 - I_1\,\alpha \cdot K\alpha + I_2\,\alpha)\,;$$

quindi

$$R\alpha = K\alpha^2 - I_1\,\alpha \cdot K\alpha + I_2\,\alpha$$

la quale dimostra l'esistenza di $R\alpha$; ecc.

CAPITOLO II.

VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE.

§ 1. **Oggetto della Cinematica.** — Dicesi *movimento* il variare delle posizioni di una parte dello spazio, rispetto ad un'altra, riguardata come fissa, col variare del tempo. La Meccanica si propone lo studio delle leggi e delle cause del moto. Quella parte poi che si occupa dello studio delle proprietà geometriche del movimento, fatta astrazione dalle cause che lo producono e dai corpi che ne sono animati, dicesi *Cinematica*. Essa si fonda sui concetti di spazio e di tempo e perciò suol definirsi come geometria del movimento o geometria a quattro dimensioni; e giova premetterne lo studio a quello della Meccanica propriamente detta. (*)

(*) L'importanza e la convenienza dello studio della cinematica (detta in passato anche *Foronomia*), da premettersi a quello della Dinamica, furono riconosciute da d'ALEMBERT, EULER [Novi Comm. Acad. Petrop., v. 20

§ 2. **Velocità ed accelerazione in un moto rettilineo.** — Un corpo o un sistema di punti dicesi *rigido* quando la distanza di due punti qualunque non varia col tempo. Un punto sia in movimento rispetto ad un sistema rigido; ammetteremo che esso si sposti con continuità col variare continuo del tempo (*postulato della*

(1776), pag. 189], KANT [*Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft*; Riga, 1786; Leipzig, 1900], CARNOT [*Essai sur les machines*, 1797; *Géométrie de position*, 1803; pp. 336-338], WRONSKI [*Syst. archit. absolu* (1818)] e finalmente da AMPÈRE [*Essai sur la philosophie des sciences* — 1ere Partie, Paris, 1834, pp. 50-53] al quale è dovuto il nome di Cinematica. LAGRANGE definiva tutta la Meccanica una geometria a quattro dimensioni [*Théorie des fonctions analytiques*, Paris 1813, p. 311].

WILLIS [*Principles of mechanisms*, London, 1841]; OLIVIER [*Théorie géométrique des engrenages*, Paris, 1842]; LABOULAYE [*Traité de cinématique ou théorie des mécanismes*, Paris 1849; 2a ediz. 1861; 3a ediz. 1878], pubblicarono i primi trattati di cinematica tecnica. A RÉSAL nel 1862 [*Traité de cinématique pure*, Paris, 1862] è dovuto il primo trattato di cinematica teorica.

Fra i trattati recenti si possono consultare: BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik*, Leipzig, 1889; SCHÖNFLIES, *Geometrie der Bewegung in syntetischer Darstellung*, Leipzig, 1886 (tradotta in francese — Paris, Gauthier-Villars, 1893); MANNHEIM, *Principes et développements de géométrie cinématique*, Paris, 1894 e finalmente: KÖNIGS, *Leçons de Cinématique*, Paris, 1897.

continuità del movimento). Il luogo delle successive posizioni occupate dal punto nello spazio dicesi *traiettoria* del punto; e se su questa si fissa una origine O ed un senso per gli archi s, la posizione P del punto mobile è una funzione dell'arco s e quindi anche del tempo t; ossia

$$P = P(t); \qquad s = f(t). \tag{1}$$

La seconda dicesi *equazione finita* del movimento. Si suppone naturalmente stabilita una unità di misura per le lunghezze e per i tempi; nel sistema di misure assolute, che noi seguiremo, esse sono rispettivamente il centimetro ed il secondo di tempo solare medio.

Cominciamo a considerare il caso semplicissimo della traiettoria rettilinea e in cui

$$s = a + b\,t,$$

a e b essendo due costanti; a è lo spazio tra l'origine e la posizione iniziale del punto (spazio iniziale); b lo spazio percorso in un secondo; inoltre spazî eguali sono percorsi in tempi eguali. Un tal moto dicesi *uniforme*; b è la *velocità*; cioè:

Nel moto uniforme la velocità è lo spazio percorso in un secondo.

Consideriamo ora un moto rettilineo ma *vario*, in cui s è definito dalla (1) e sia P' la posizione del mobile corrispondente al tempo $t+\tau$; σ lo spazio percorso nel tempo τ. Sarà

$$\sigma = f(t+\tau) - f(t) = \tau f'(t) + \tau^2 \varepsilon,$$

supponendo la $f(t)$ derivabile rispetto al tempo e la $f'(t)$ continua.

Parta da P, contemporaneamente al mobile, un altro mobile che con moto uniforme, la cui velocità arbitraria è v, percorra sulla stessa retta e nel tempo τ uno spazio

$$\sigma_1 = v\tau;$$

quindi

$$\sigma - \sigma_1 = \tau[f'(t) - v] + \tau^2 \varepsilon$$

esprime la differenza tra lo spazio percorso nel tempo τ nel moto vario e nel moto uniforme. Tra gl'infiniti moti uniformi corrispondenti agli infiniti valori di v, quello la cui velocità è $f'(t)$ rende $\sigma - \sigma_1$ dell'ordine di τ^2, per τ infinitamente piccolo; mentre in ogni altro caso $\sigma - \sigma_1$ è dell'ordine di τ. Un tal moto uniforme differirà dunque meno di ogni altro (pure uniforme) dal moto vario nel tempo τ; e la sua velocità si assumerà, per definizione, come velocità del moto vario all'istante t:

Nel moto vario rettilineo la velocità è la derivata dello spazio rispetto al tempo, cioè:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{2}$$

Unità di velocità è la velocità di quel moto rettilineo uniforme in cui il mobile percorre un centimetro in un secondo; è una unità derivata che varia come la prima potenza dello spazio e come la potenza — 1 del tempo: cioè l'equazione di dimensione è

$$[v] = [l, t^{-1}].$$

Se s, in un certo intervallo, cresce col tempo il moto dicesi *diretto* e in tal caso v è positivo; se invece decresce col tempo il moto dicesi *retrogrado* e v è negativo. Nota v in funzione del tempo, integrando la (2), si ha

$$s = a + \int_0^t v(t)\,dt;$$

lo spazio è noto a meno di una costante, che è nota, se è dato lo spazio iniziale.

Consideriamo un altro caso particolare, cioè un moto rettilineo definito da

$$s = a + bt + \frac{1}{2}ct^2; \tag{3}$$

a, b, c sono costanti; inoltre, per la (2), si ha

$$v = b + ct. \tag{4}$$

Si riconosce dunque che: a è lo spazio iniziale; b è la velocità iniziale; c è la quantità costante di cui si accresce, in un secondo, la velocità. Il moto quindi si accelera o si ritarda in modo uniforme secondo che $c > 0$, < 0; però il moto definito dalla (3) dicesi *uniformemente accelerato* e c è l'*accelerazione*.

Per estendere ad un moto vario il concetto di accelerazione, si parta, come nel caso precedente, dalla

$$\sigma = f(t+\tau) - f(t) = \tau f'(t) + \frac{1}{2}\tau^2 f''(t) + \tau^3 \varepsilon,$$

supponendo $f(t)$ derivabile due volte.

Parta da P, contemporaneamente al mobile, un altro mobile che si muova di moto uniformemente accelerato sulla stessa retta, con velocità iniziale v_0, con accelerazione c e per un tempo τ. Lo spazio percorso σ_1 sarà

$$\sigma_1 = v_0 \tau + \frac{1}{2} c \tau^2 ;$$

e quindi

$$\sigma - \sigma_1 = \tau [f'(t) - v_0]$$
$$+ \frac{1}{2}\tau^2 [f''(t) - c] + \tau^3 c.$$

Ragionando come prima, si vede che quell'unico moto uniformemente accelerato la cui velocità iniziale (all'istante t) è $f'(t)$, cioè la velocità del mobile allo stesso istante, e la cui accelerazione è $f''(t)$, differisce meno di qualunque altro dal moto vario nel tempuscolo τ. L'accelerazione di tale moto uniformemente accelerato è, per definizione, l'accelerazione del moto vario; dunque:

Nel moto vario rettilineo l'accelerazione è la derivata seconda dello spazio, o la derivata prima della velocità rispetto al tempo.

La indicheremo con w; quindi

$$w = \frac{d^2 s}{d t^2} = \frac{d v}{d t}. \tag{5}$$

Unità di accelerazione è l'accelerazione di quel moto uniformemente accelerato in cui la velocità cresce di un centimetro in un secondo; e l'equazione di dimensione è

$$[w] = [l,\ t^{-2}].$$

Se v cresce col tempo il moto dicesi *accelerato*; in tal caso $w > 0$; se decresce dicesi *ritardato* ed è $w < 0$.

Cognita w in funzione del tempo, da (5), successivamente avremo

$$v = b + \int_0^t w(t)\, dt$$

$$s = a + b t + \int_0^t dt \int_0^t w(t)\, dt ;$$

il moto è dunque definito a meno di un moto uniforme, che risulta determinato se viene assegnata la velocità e lo spazio iniziale.

In modo perfettamente analogo si potrebbero definire le accelerazioni di 2°, 3°,.... ordine, come le derivate terze, quarte, ecc. dello spazio; ma esse non hanno che un interesse geometrico. (*)

Alla velocità ed accelerazione si suole anche attribuire una direzione (quella della retta su cui avviene il moto) ed un senso che è quello degli archi crescenti se il moto è diretto, per la velocità; e se il moto è accelerato, per l'accelerazione.

§ 3. **Velocità ed accelerazione in un moto curvo.** — Supponiamo ora che la traiettoria di un punto P sia curvilinea; il punto P è funzione $P(t)$ del tempo; supporremo che sia derivabile due volte rispetto al tempo.

Diconsi velocità ed accelerazione del punto P rispettivamente la derivata prima e seconda del punto rispetto al tempo.

La velocità è parallela alla tangente in P alla traiettoria ed è diretta nel senso degli archi crescenti o decrescenti, secondo che il moto è diretto o retrogrado. La sua grandezza v è eguale al valore assoluto della derivata dell'arco.

L'accelerazione è parallela al piano osculatore e le sue componenti tangenziale (secondo la tangente) e normale (secondo la normale principale) sono

$$\frac{dv}{dt}, \quad \frac{v^2}{\rho}.$$

(*) LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1813; pp. 312 e seguenti.

Infatti se come nel moto rettilineo definiamo v con la (2) e riguardiamo P come funzione di s, che è a sua volta funzione di t, risulta, ricordando le (27) del Cap. I,

$$\frac{dP}{dt} = v\,\mathbf{t}; \quad \frac{d^2P}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\,\mathbf{t} + \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{n}, \tag{6}$$

le quali provano il teorema enunciato.

È anche da osservare che l'accelerazione tangenziale è diretta nel senso degli archi crescenti se il moto è accelerato; invece quella normale è sempre diretta verso il centro di curvatura. La prima è nulla (e quindi l'accelerazione è tutta normale) soltanto quando il moto è uniforme; è invece nulla l'accelerazione normale quando il moto è rettilineo. $\frac{dv}{dt}=0$ $\rho=\infty$

Se nel sistema fisso di riferimento sono $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ le coordinate di P all'istante t, avremo, da

$$P - O = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}; \tag{7}$$

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k};$$

ossia: *le componenti della velocità e della accelerazione sono rispettivamente le derivate prime e seconde delle coordinate del punto mobile.*

Osservando che $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ sono la grandezza della velocità e della accelerazione della proiezione del punto P sull'asse x, che è arbitrario, si conclude:

La proiezione della velocità (accelerazione) di un punto su di un asse è la velocità (accelerazione) della proiezione del punto sull'asse.

Però le derivate prime delle coordinate chiamansi *velocità componenti*; la diagonale del parallelepipedo rettangolo i cui lati paralleli agli assi hanno per lunghezze queste derivate, dà la *velocità risultante.*

Lo stesso dicasi per le derivate seconde e per l'accelerazione.

Poniamo

$$Q - O = \frac{dP}{dt}\,; \tag{8}$$

essendo O un punto fisso qualunque, Q risulterà funzione del tempo ed il suo movimento dicesi *moto odografo*, la sua traiettoria l'*odografo* del moto di P.

Derivando la (8) risulta subito:

La velocità del moto odografo è eguale all'accelerazione del moto curvo.

Odografo

Nel moto piano l'odografo è una curva piana; nel moto uniforme una curva sferica, ecc. (*)

§ 4. **Componenti della velocità ed accelerazione in coordinate polari nel moto piano.** — Il moto di P abbia luogo in un piano e sia riferito ad un sistema di coordinate polari r, θ; sia O il polo; **a** un vettore unità parallelo all'asse polare; **l** ed **n** altri due vettori unità paralleli a $P - O$ e alla normale a $P - O$. Le componenti della velocità e della accelerazione di P secondo **l** ed **n** chiamansi *velocità ed accelerazione radiale e normale.* Si indicano con v_r, v_n; w_r, w_n.

Dico che:

$$\left\{\begin{aligned} v_r &= \frac{dr}{dt}, \quad v_n = r\frac{d\theta}{dt}, \\ w_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2; \quad w_n = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right). \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Infatti, poichè, § 4 Cap. I,

$$\mathbf{l} = e^{i\theta}\mathbf{a}, \qquad \mathbf{n} = i\mathbf{l}\,;$$

(*) La considerazione dell'odografo è dovuta a Möbius [*Die Elemente der Mechanik des Himmels*, 1843; *Gesamm. Werke*, Bd. 4, p. 47] e più specialmente ad Hamilton [Trans. of the Irish Academy, Dublin, 1846, v. 3; ed *Elements of Quaternions*, London, 1866; p. 100 e 718].

risulta :

$$\frac{d\,\mathbf{l}}{d\,\theta}=\mathbf{n}, \qquad \frac{d\,\mathbf{n}}{d\,\theta}=-\mathbf{l}\,;$$

quindi derivando successivamente rispetto al tempo la

$$P-O=r\,\mathbf{l}$$

abbiamo :

$$\frac{d\,P}{d\,t}=\frac{d\,r}{d\,t}\mathbf{l}+r\frac{d\,\theta}{d\,t}\mathbf{n}\,;$$

$$\frac{d^2\,P}{d\,t^2}=\left(\frac{d^2\,r}{d\,t^2}-r\left(\frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2\right)\mathbf{l}+\left(2\frac{d\,r}{d\,t}\frac{d\,\theta}{d\,t}+r\frac{d^2\,\theta}{d\,t^2}\right)\mathbf{n}$$

e da queste si deducono le (9).

Pensando una curva piana come traiettoria di un punto, i risultati precedenti danno un mezzo semplice per tracciare la tangente.

Sia (con θ funzione del tempo) la spirale logaritmica

$$r=a\,e^{m\theta}\,;$$

quindi

$$v_{\mathrm{r}}=a\,m\,e^{m\theta}\frac{d\,\theta}{d\,t}=m\,r\frac{d\,\theta}{d\,t}=m\,v_{\mathrm{n}}\,.$$

Se riportiamo sul raggio vettore e sulla normale, a partire da P, due segmenti proporzionali (od eguali) rispettivamente ad m ed 1, la diagonale uscente da P del rettangolo così costruito dà la direzione del moto e quindi la tangente. È da osservare che non essendo determinato il moto di P sulla spirale, non è determinata la velocità; e che dalla costruzione precedente risulta costante l'angolo che la tangente alla spirale forma col raggio vettore.

Consideriamo le curve i cui punti sono determinati dalle distanze r, r' a due punti fissi; cioè rappresentate in *coordinate bipolari* da una equazione della forma

$$f(r,\,r')=0.$$

Derivando rispetto al tempo :

$$\frac{\partial f}{\partial r}\frac{d\,r}{d\,t}+\frac{\partial f}{\partial r'}\frac{d\,r'}{d\,t}=0$$

cioè

$$v_{\mathrm{r}}:v_{\mathrm{r'}}=-\frac{\partial f}{\partial r'}:\frac{\partial f}{\partial r}\,;$$

per ogni punto della curva è noto il rapporto tra le due componenti ortogonali della velocità secondo i raggi vettori; quindi presi a partire da P su r e r' due segmenti il cui rapporto (in valore e segno) sia il precedente ed elevate negli estremi le rispettive perpendicolari, la diagonale uscente da P del quadrilatero così costruito dà la tangente in P.

Di qui si deduce ancora che se α ed α' sono gli angoli che la normale in P forma coi due raggi vettori, si ha

$$\operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} \alpha' = \frac{\partial f}{\partial r} : \frac{\partial f}{\partial r'} ;$$

dunque se a partire da P si riportano sui raggi r ed r' due segmenti proporzionali a $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial f}{\partial r'}$, la diagonale del parallelogrammo costruito su questi segmenti dà la normale.

L'applicazione di queste due regole alle coniche conduce immediatamente alle note regole. (*)

(*) Il metodo esposto, fondato sul principio della composizione delle velocità, ed uno dei primi escogitati dai geometri del secolo XVII per risolvere il problema delle tangenti, è dovuto a TORRICELLI [vedi un lavoro di F. JACOLI in Bollettino di Bibliografia e Storia del Boncompagni, t. 8, pp. 265-304 (1875)] e a ROBERVAL: *Observations sur la comp. des mouv.* [Anc. Mém. de l'Académie des Sciences, t. 6 (1730)]. Nel caso delle coordinate bipolari, ROBERVAL ed altri presero abbaglio costruendo su v_r e v_r' un parallelogrammo; ciò che non è valido che in casi particolari o quando le velocità sono eguali o formano un angolo retto. Cfr. DUHAMEL, *Sur la méthode des tangentes de Roberval* [Mém. des savants étrangers, t. 5 (1834)].

La semplice regola relativa alla normale è di POINSOT [Journ. École Polytechnique. Cah. 13, pp. 206-241 (1806)] ed è in fondo una forma diversa di quella data da DE L'HOSPITAL: *Analyse des infin. petits;* 2e èd. Paris, 1725; pagine 27-30.

§ 5. **Moto centrale.** — Dicesi *centrale* quel movimento in cui l'accelerazione è diretta ad un centro fisso O. Hanno luogo le seguenti proprietà:

La traiettoria è contenuta in un piano passante pel centro; l'area descritta dal raggio vettore, a partire dalla posizione iniziale, cresce proporzionalmente al tempo; la velocità varia in ragione inversa della distanza del centro dalla tangente; il moto è sempre diretto o sempre retrogrado.

Infatti essendo l'accelerazione parallela a $P - O$ sarà

$$(P - O) \wedge \frac{d^2 P}{d t^2} = 0 ;$$

e se notiamo che il primo membro è una derivata esatta, si conclude, integrando:

$$\frac{d(P-O)}{dt} = \frac{dP}{dt}$$

$$(P - O) \wedge \frac{d P}{d t} = \mathbf{k},$$

dove $\mathbf{k}$ è un vettore costante; e poichè $P - O$ è normale ad esso, la traiettoria è piana.

Sia S l'area del settore descritto da $P - O$ a partire dalla posizione iniziale $P_0 - O$; p la lunghezza della normale condotta da O sulla tangente in P. Il modulo del precedente prodotto vettoriale è costante ed eguale a $p\,v$; quindi

$$p\,v = c = \operatorname{mod} \mathbf{k} ;$$

inoltre

$$2\,d\,S = p\,d\,s = p\,v\,d\,t = c\,d\,t;$$

integrando

$$S = \frac{1}{2}\,c\,t;$$

e queste dimostrano il teorema. Che il moto poi sia sempre diretto (o retrogrado) risulta dal fatto che l'area S cresce proporzionalmente al tempo.

L'espressione di $d\,S$ in coordinate polari essendo

$$d\,S = \frac{1}{2}\,r^2\,d\,\theta$$

risulta

$$\boxed{r^2\,\frac{d\,\theta}{d\,t} = c} \tag{10}$$

alla quale si giunge pure considerando, (9), che $w_n = 0$. La (10) dicesi *integrale delle aree*; c è il doppio dell'area descritta in un secondo.

Valendosi di questo integrale, si può trovare la accelerazione in funzione di r e θ colla formula

$$\frac{d^2\,P}{d\,t^2} = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{d\,\theta^2} + \frac{1}{r}\right)\mathbf{l}. \tag{11}$$

Basta osservare che l' accelerazione è tutta radiale e quindi ricavare la $w_r = w$ dalle (9), notando che

$$\frac{d\,r}{d\,t} = \frac{d\,r}{d\,\theta}\cdot\frac{d\,\theta}{d\,t} = \frac{c}{r^2}\,\frac{d\,r}{d\,\theta} = -\,c\,\frac{d\,\frac{1}{r}}{d\,\theta}$$

$$\frac{d^2\,r}{d\,t^2} = -\,c\,\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{d\,\theta^2}\cdot\frac{d\,\theta}{d\,t} = -\,\frac{c^2}{r^2}\,\frac{d^2\,\frac{1}{r}}{d\,\theta^2}\,.$$

Se è cognita la traiettoria, e quindi r in funzione di θ, con semplici derivazioni si otterrà l'accelerazione; se invece è cognita l'accelerazione mediante r e θ, integrando la (11) si trova l'equazione della traiettoria. Diamo due esempi classici.

a) *L'accelerazione, diretta verso O, è proporzionale al raggio.* Anzichè integrare la (11), si scriva che

$$\frac{d^2\,P}{d\,t^2} = -\,\alpha^2\,(P - O)$$

(α costante reale). L'integrale di questa equazione è:

$$P - O = \mathbf{a}\cos\alpha\,t + \mathbf{b}\,\mathrm{sen}\,\alpha\,t.$$

Per determinare i due vettori costanti coi valori iniziali del raggio vettore e della velocità, si ponga:

$$P_0 - O = \mathbf{a} = r_0\,\mathbf{i};\quad \left(\frac{d\,P}{d\,t}\right)_0 = \alpha\,\mathbf{b} = v_0\,\mathbf{j};$$

quindi sostituendo,

$$P - O = r_0 \cos \alpha t \cdot \mathbf{i} + \frac{v_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t \cdot \mathbf{j}\,.$$

La traiettoria è una ellissi di centro O e di cui due semidiametri coniugati sono $r_0\,\mathbf{i}$, $\frac{v_0}{\alpha}\,\mathbf{j}$. (Cap. I, § 4). Inoltre, poichè

$$\frac{dP}{dt} = Q - O = -r_0\, \alpha \operatorname{sen} \alpha t \cdot \mathbf{i} + v_0 \cos \alpha t \cdot \mathbf{j}$$

anche l'odografo è una ellissi.

b) *L'accelerazione, sempre diretta verso O, sia inversamente proporzionale al quadrato del raggio.*

$$\frac{d^2 P}{d t^2} = -\frac{c^2 \alpha^2}{r^2}\,\mathbf{l}$$

(α costante reale); la (11) ci dà subito

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \alpha^2.$$

Posto

$$y = \frac{1}{r} - \alpha^2$$

si deduce, integrando,

$$y = A \cos\theta + B \operatorname{sen}\theta = m \cos(\theta - \theta_0),$$

avendo fatto

$$A = m \cos\theta_0\,, \qquad B = m \operatorname{sen}\theta_0\,.$$

Quindi

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}\,, \quad \left(p = \frac{1}{\alpha^2}\,,\ e = \frac{m}{\alpha^2}\right);$$

cioè *la traiettoria è una conica col fuoco in O.* Si può anche osservare che (§ 4)

$$\frac{d^2 P}{d t^2} = -\frac{\alpha^2 c^2}{r^2} e^{i\theta}\,\mathbf{a} = -\alpha^2 c\, e^{i\theta} \frac{d\theta}{dt}\,\mathbf{a}\,,$$

a causa della (10). Integrando

$$\frac{dP}{dt} = \mathbf{b} + \alpha^2 c\, e^{i\theta}\, i\,\mathbf{a}\,;$$

e se rappresentiamo con $v_0\,\mathbf{k}$ la velocità iniziale, risulta per l'idografo

$$Q = O_1 + \alpha^2 c\, e^{i\theta} i\,\mathbf{a}; \qquad O_1 = O + v_0 \mathbf{k} - \alpha^2 c\, i\,\mathbf{a};$$

cioè *l'odografo è un cerchio* di centro O_1, e raggio $\alpha^2 c$.

§ 6. **Moto armonico.** — Un punto mobile percorre con moto uniforme un cerchio di centro O e di raggio a; la sua accelerazione è normale, diretta verso il centro ed eguale a $\frac{v^2}{a}$, § 2; oppure, se diciamo ω l'angolo descritto dal raggio in un secondo e riflettiamo che $v = a\,\omega$, è data da $a\,\omega^2$.

Il moto della proiezione di P su di un diametro dicesi *armonico*, di *ampiezza* a; poichè la sua velocità ed accelerazione sono le proiezioni di quelle di P, si deduce che nel moto armonico il punto effettua periodicamente delle oscillazioni lungo il diametro; la velocità, nulla agli estremi, è massima nel centro; l'accelerazione, diretta verso il centro, è eguale ad $\omega^2 x$, cioè varia proporzionalmente alla distanza x del punto dal centro. Per modo che l'equazione che definisce il moto armonico è

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \omega^2 x = 0. \tag{12}$$

Dicesi *periodo* il tempo τ impiegato a percorrere due volte il diametro, cioè il tempo impiegato da P a percorrere il cerchio; sarà

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

essendo $\tau v = 2\pi a = a\tau\omega$. Inoltre si ha

$$x = a\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \alpha\right) \tag{13}$$

α dicesi *fase* ed è l'arco di cui all'inizio del moto il punto sul cerchio dista dall'estremo del diametro; e finalmente $n = \frac{1}{\tau}$ è la *frequenza*.

Riguardando x e t come coordinate cartesiane di un punto in un piano, la (13) rappresenta una sinusoide (*diagramma del moto*).

Esercizi.

1. Un punto P si muove di moto uniforme su di un cerchio di raggio r il cui centro si muove di moto pure uniforme su di una retta (o su di un cerchio). Il moto avviene in un piano; trovare la traiettoria di P.

Se ω è l'angolo descritto da $P - C$ in un secondo, v la grandezza della velocità di C, parallela al vettore unitario **a**, la velocità risultante di P è

$$\frac{dP}{dt} = (v + r\,\omega\,e^{i\omega t}\,i)\,\mathbf{a};$$

integrando si trova che la traiettoria di P è una cicloide (o una epicicloide).

LORIA, *Spezielle, algebraischen u. transcendenten Kurven der Ebene. Theorie u. Geschichte.* Leipzig, 1902; p. 487.

2. Due punti P_1, P_2 si muovono di moto uniforme su due cerchi concentrici in O; trovare la traiettoria del vertice P del parallelogrammo che ha per lati adiacenti OP_1 e OP_2.

Con evidente significato dei simboli si ha

$$P - O = (r_1 e^{i\omega_1 t} + r_2 e^{i\omega_2 t})\,\mathbf{a};$$

la traiettoria è una epicicloide (vedi Cap. I, eser. 4) ed è appunto su questa proprietà che è fondato un istrumento per la costruzione delle epicicloidi. [SCHILLING, Zeitschrift f. Mathem. u. Physik, Bd. 44, p. 24 (1899)].

3. **La traiettoria d'un punto, la cui accelerazione è costante, è una parabola; il moto odografo è rettilineo ed uniforme.**

Dicendo $\mathbf{a}$ il vettore costante dell'accelerazione, cioè della derivata seconda del punto; $v_0\,\mathbf{b}$ la velocità iniziale, con successive integrazioni si trova

$$P - O = v_0\, t\, \mathbf{b} + \frac{1}{2}\, t^2\, \mathbf{a}$$

che rappresenta una parabola (Cap. I, § 4); e per l'odografo

$$Q = O_1 + \mathbf{a}\, t, \qquad O_1 = O + v_0\, \mathbf{b}$$

cioè una retta parallela ad $\mathbf{a}$ passante per O_1.

4. **Un punto Q si muove su di una retta con velocità costante u; un altro punto P si muove in un piano passante per la retta e con velocità costante v diretta verso Q; traiettoria di P (curva di fuga, o del cane o di *poursuite*).**

Quando il punto $P(x, y)$ è in A, la sua velocità sia normale alla retta e Q si trovi in O; scelto O come origine, la retta come asse x, si ha

$$O\,Q = u\, t = x - y\frac{d\,x}{d\,y}; \quad \text{arco } P\,A = s = v\, t;$$

eliminando il tempo; posto $u = a\, v$, e derivando rispetto ad y, risulta

$$a\sqrt{1 + \left(\frac{d\,x}{d\,y}\right)^2} = -\,y\,\frac{d^2 x}{d\,y^2}.$$

Per integrare questa equazione, si ponga $\frac{d\,x}{d\,y} = \mathrm{Sh}\, w$; con breve calcolo l'equazione si trasformerà nella

$$\frac{a\, d\, y}{y} + d\, w = 0$$

e quindi

$$w = \log\left(\frac{y_0}{y}\right)^a; \quad \frac{d\,x}{d\,y} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{y_0}{y}\right)^a - \left(\frac{y}{y_0}\right)^a\right\}.$$

Con una nuova e facile integrazione, in cui converrà distinguere il caso di $a = 1$, si trova l'equazione della curva.

(LORIA, lib. cit., p. 607).

5. **La posizione di un punto P nello spazio sia riferita ad un sistema di coordinate polari r (raggio vettore), φ (longitudine) e θ (colatitudine). Trovare le componenti della velocità e della accelerazione secondo il raggio vettore, la tangente al meridiano e al parallelo.**

Siano $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ tre vettori fondamentali; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ altri tre vettori fondamentali paralleli al raggio vettore, alla tangente al meridiano e alla tangente al parallelo in P, nel senso di r, φ, θ crescenti. Si ha;

$$\mathbf{i}_1 = \cos\varphi \,\mathrm{sen}\,\theta \cdot \mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot \mathbf{j} + \cos\theta \cdot \mathbf{k}$$
$$\mathbf{j}_1 = \cos\varphi \cos\theta \cdot \mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\varphi \cos\theta \cdot \mathbf{j} - \mathrm{sen}\,\theta \cdot \mathbf{k}$$
$$\mathbf{k}_1 = -\,\mathrm{sen}\,\varphi \cdot \mathbf{i} + \cos\varphi \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i}_1 \wedge \mathbf{j}_1.$$

Indicando con accenti le derivate rispetto al tempo, si ha anche

$$\mathbf{i}_1' = \theta' \cdot \mathbf{j}_1 + \varphi'\,\mathrm{sen}\,\theta \cdot \mathbf{k}_1,$$
$$\mathbf{j}_1' = -\,\theta' \cdot \mathbf{i}_1 + \varphi' \cos\theta \cdot \mathbf{k}_1,$$
$$\mathbf{k}_1' = -\,\varphi'(\mathrm{sen}\,\theta \cdot \mathbf{i}_1 + \cos\theta \cdot \mathbf{j}_1)$$

Poi osservando che $P - O = r\,\mathbf{i}_1$, derivando due volte rispetto al tempo, si ottengono per le richieste componenti della velocità ed accelerazione le espressioni:

$$v_r = \frac{dr}{dt}\,, \quad v_\varphi = r\,\frac{d\theta}{dt}\,, \quad v_\theta = r \operatorname{sen}\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\,;$$

$$w_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\operatorname{sen}^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$w_\varphi = \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$w_\theta = \frac{1}{r\operatorname{sen}\theta}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\operatorname{sen}^2\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Per $\varphi = \text{cost.}$ si riottengono le formule del § 4.

Ecco alcune semplici applicazioni. Se in un moto piano si ha $v_r : v_\varphi = \text{cost.}$, la traiettoria è una spirale logaritmica; se il moto avviene su di un cono circolare (per cui $\theta = \text{cost.}$) in modo tale che $v_r : v_\theta = \text{cost.}$, la traiettoria è una lossodromia conica: se invece avviene su di una sfera ($r = \text{cost.}$) in modo che $v_\varphi : v_\theta = \text{cost.}$ si ha l'equazione

$$d\theta = c \operatorname{sen}\theta\, d\varphi$$

il cui integrale è

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = a\,e^{c\varphi}$$

e rappresenta (in coordinate sferiche) una lossodromia.

6. Trovare le componenti dell'accelerazione di secondo ordine nel moto di un punto, secondo la tangente, la normale principale e la binormale.

Derivando la seconda delle (6), si ottiene, mediante le formule del § 6, Cap. I (formule di Frenet)

$$\frac{d^3 P}{dt^3} = \left(v'' - \frac{v^3}{\rho^2}\right)\mathbf{t}$$

$$+ \left(3\,\frac{v}{\rho}\,v' - \frac{v^2}{\rho^2}\,\rho'\right)\mathbf{n} - \frac{v^3}{\rho\,\tau}\,\mathbf{b}\,;$$

gli accenti indicano derivate rispetto al tempo. E così di seguito.

7. Costruire le tangenti alle curve di Cassini e alle ovali di Cartesio rappresentate rispettivamente in coordinate bipolari da

$$r\,r' = \text{cost}\,; \qquad a\,r + b\,r' = c.$$

Si applica la regola del § 4 e si osserva che il rapporto $v_r : v_{r'}$, nel primo caso è $-r : r'$; nel secondo $-b : a$. Più semplice è l'applicazione della regola di Poinsot per la costruzione della normale, avendosi, per le ovali

$$\operatorname{sen}\alpha : \operatorname{sen}\alpha' = \mathrm{a} : \mathrm{b}.$$

Per le prime si vede che le normali ai raggi vettori nei fuochi tagliano sulla tangente parti eguali. [LORIA, l. c., p. 193].

8. Trovare l'accelerazione di un punto che percorre una spirale logaritmica o una spirale sinusoide, sapendo che tale accelerazione è diretta verso il polo.

Le equazioni polari delle due curve sono

$$r = a\,e^{m\theta} \qquad r^k \cos k\theta = a^k\,.$$

Applicando la (11), si trova che nel primo caso l'accelerazione varia come r^{-3}; nel secondo come r^{2k-3}.

9. Trovare il raggio di curvatura ρ' dell'odografo in un moto centrale.

Se θ ha il solito significato, $d\theta$ è l'angolo fra due direzioni infinitamente vicine dell'accelerazione, cioè l'angolo fra due tangenti pure inf. vicine dell'odografo. Detto σ il suo arco, si ha, per l'integrale delle aree (10)

$$\rho' = \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{d\sigma}{dt} : \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{r^2}{c}$$

ma la velocità dell'odografo è eguale all'accelerazione del moto dato, quindi

$$\rho' = \frac{r^2}{c} w.$$

Di qui si deduce il risultato del § 5, b; se infatti w è inversamente proporzionale al quadrato del raggio, $\rho' = \text{cost}$; cioè l'odografo è un cerchio.

10. Nel moto di un punto su di una curva l'accelerazione tangenziale varia proporzionalmente all'arco; studiare il moto.

L'accelerazione tangenziale essendo espressa da

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2},$$

si ha

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = k s \qquad (k \text{ costante}).$$

Se $k = 0$, il moto è uniforme; se è positivo ed eguale ad α^2 l'integrale è

$$s = a \operatorname{Ch}(\alpha t + \beta);$$

il punto si allontana indefinitamente; se è negativo, il moto è armonico, § 6.

11. Studiare il moto rettilineo definito da

$$x = a e^{-ht} \cos \omega t$$

(oscillazioni smorzate). Le costanti a, h, ω sono positive.

Si ha:

$$v = -a e^{-ht} (h \cos \omega t + \omega \operatorname{sen} \omega t);$$

quindi la velocità si annulla per tutti i valori del tempo che sono radici di

$$h \cos \omega t + \omega \operatorname{sen} \omega t = 0.$$

Se t_1, compreso tra $\frac{\pi}{2}$ e π, è la più piccola radice, ogni altra ha la forma $t_1 + \frac{r\pi}{\omega}$ (r intero).

Il punto parte inizialmente da A_0, distante di a dall'origine O; al tempo t_1 giunge con velocità nulla in A_1, alla sinistra di O, la cui ascissa è $x_1 = a e^{-ht_1} \cos \omega t_1$, in valor assoluto minore di a; dopo il tempo $t_1 + \frac{\pi}{\omega}$ giunge con velocità nulla in A_2, alla destra di O, la cui ascissa è $x_2 = -x_1 e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$, in valor assoluto minore di

x_1; e così via. I tratti $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ vanno decrescendo e precisamente x_1, x_2,.... decrescono in progressione geometrica di ragione $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$ (fattore di smorzamento).

Con due derivazioni si deduce che

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + 2 h \frac{d x}{d t} + (h^2 + \omega^2) x = 0 ;$$

l'accelerazione è la somma di due altre, rispettivamente proporzionali alla velocità ed alla distanza.

Infine considerando la spirale logaritmica $r = a e^{\frac{-h\theta}{\omega}}$ percorsa da un punto con moto uniforme, in modo che $\theta = \omega t$, la sua proiezione ortogonale sull'asse x si muove col moto ora considerato.

Per $h = 0$ otteniamo il moto armonico e sarà utile tracciare il diagramma del moto studiato e di quello armonico.

12. Comporre due o più moti armonici rettilinei di stesso periodo.

Posto:

$$x = a \cos(\omega t - \alpha) + b \cos(\omega t - \beta)$$

x è la risultante di due moti armonici di stesso periodo $\frac{2\pi}{\omega}$ e di ampiezze rispettive a e b e fasi α e β. Se definiamo c e γ in modo che

$$c \operatorname{sen} \gamma = a \operatorname{sen} \alpha + b \operatorname{sen} \beta, \quad c \cos \gamma = a \cos \alpha + b \cos \beta$$

e poscia i vettori

$$A - O = a e^{i\alpha} \mathbf{i}, \quad B - O = b e^{i\beta} \mathbf{i}, \quad C - O = c e^{i\gamma} \mathbf{i} ;$$

risulta

$$x = c \cos(\omega t - \gamma) ; \quad C - O = (A - O) + (B - O),$$

Il moto risultante è un moto armonico dello stesso periodo, la cui ampiezza e fase si deducono colla regola espressa dall'ultima eguaglianza.

13. Comporre due moti armonici ortogonali di stessa ampiezza e di stesso periodo e di fase diversa.

Siano i due moti rappresentati da

$$x = a \operatorname{sen}(\omega t - \alpha) ; \quad y = a \operatorname{sen}(\omega t - \beta) ;$$

il punto P di coordinate $(x y)$ descrive l'ellissi

$$P - O = \mathbf{a} \operatorname{sen} \omega t + \mathbf{b} \cos \omega t$$

dove

$$\mathbf{a} = a (\cos \alpha + \cos \beta) \mathbf{i} ; \quad \mathbf{b} = a (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) \mathbf{j} ;$$

ed è, § 5 *a*, la traiettoria di un punto la cui accelerazione è diretta verso O ed è proporzionale alla distanza.

Dunque il moto risultante è un moto ellittico; la traiettoria è sempre compresa entro un quadrato di lato $2a$ a cui risulta tangente.

Per investigare le varie forme della traiettoria col variare di α e β, supponiamo $\beta > \alpha$, $\beta - \alpha < 2\pi$; e consideriamo i punti A, B, C corrispondenti ai valori del tempo $\alpha + \frac{\pi}{2\omega}$, $\beta + \frac{\pi}{2\omega}$, $\beta + \frac{\pi}{\omega}$ e di cui è facile assegnare le coordinate. Il tempo per andare da A in B è $\frac{1}{\omega}(\beta - \alpha) < \frac{2\pi}{\omega}$, cioè minore del periodo; se quindi $\beta - \alpha < \pi$, tale tempo è minore del semi-periodo cioè A raggiunge B per l'arco più piccolo; se $\beta - \alpha > \pi$, A raggiungerà B per l'arco più lungo. Ciò posto:

se $\beta = \alpha$, il moto è armonico e rettilineo (diagonale del quadrato); i punti A e B coincidono con uno dei vertici e C col centro;

$\beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$; i punti A e B si allontanano di parti eguali dal vertice (punti di tangenza della ellissi) C giace dalla parte negativa delle x; l'ellissi è percorsa in senso antiorario;

$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$; la traiettoria è un cerchio descritto pure in senso antiorario;

$\frac{\pi}{2} < \beta - \alpha < \pi$; la traiettoria è una ellissi, A e B cadono dalla parte delle x ed y negative, ecc. Ed ora continuando, per $\beta - \alpha = \pi$ otterremo un altro moto rettilineo sull'altra diagonale e poi ritroveremo tutte le traiettorie di prima, ma percorse in senso orario.

Tutte le ellissi hanno per assi le diagonali del quadrato.

14. Comporre due moti armonici ortogonali di stessa ampiezza ma di periodi e fasi diversi.

Le due equazioni

$$x = a \operatorname{sen}(\omega_1 t - \alpha), \quad y = a \operatorname{sen}(\omega_2 t - \beta)$$

danno la rappresentazione parametrica della traiettoria del moto risultante. Essa risulterà chiusa se dopo un tempo t', x ed y riprendono lo stesso valore; cioè

$$\omega_1 t' - \alpha = \omega_1 t - \alpha + 2 n \pi,$$

$$\omega_2 t' - \beta = \omega_2 t - \beta + 2 m \pi \qquad (m,\ n \text{ interi})$$

ossia $m \omega_1 = n \omega_2$: *il rapporto dei due periodi deve essere razionale,* e si potrebbe dimostrare che la condizione è anche sufficiente. In tal caso cambiando l'origine dei

tempi cioè mutando t in $t + \tau$, potremo determinare τ e δ in modo che

$$\omega_1 \tau - \alpha = 2 n \pi - \delta; \qquad \omega_2 \tau - \beta = 2 m \pi - \delta$$

e quindi in altre parole ridurci al caso di $\alpha = \beta = \delta$.

Se $\delta = 0$, $\omega_1 = 2\,\omega_2 = 2\,\omega$ risulta

$$x = a \operatorname{sen} 2\,\omega\, t, \qquad y = a \operatorname{sen} \omega\, t;$$

l'equazione della traiettoria è

$$a^2 x^2 = 4\, y^2 (a^2 - y^2)$$

simmetrica rispetto agli assi, tangente nell'origine all'asse x e ai lati del quadrato di lato $2\,a$, ecc.

Se $\delta = \frac{\pi}{4}$ si ottiene una curva deformata della precedente e che ha un punto doppio sull'asse delle x, ecc.; finalmente se $\delta = \frac{\pi}{2}$, la traiettoria è la parabola

$$a\, x = 2\, y^2 - a^2.$$

Più generalmente se

$$x = a \cos(2\,\omega\, t - \varepsilon); \qquad y = a \cos \omega\, t$$

l'equazione della traiettoria è

$$x = a\left(\frac{2\,y^2}{a^2} - 1\right)\cos\varepsilon + 2\,y\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}}\ \operatorname{sen}\varepsilon.$$

Le curve precedenti, che possono riprodursi sperimentalmente con molti ingegnosi istrumenti, ad es. coll'autovibratore, si dicono *curve di* LISSAJOUS.

Per la bibliografia e i disegni vedi: Giornale di Matem., Napoli, s. 3, v. 5, pp. 257-266 (1914).