INTRODUZIONE

NOZIONI DI CALCOLO GRAFICO

§ 1. — Principio dei segni.

1. — Una retta indefinita può immaginarsi generata in due sensi opposti da un punto mobile; se assumiamo uno di questi sensi di generazione come positivo, riterremo l'altro come negativo. Due punti A, B di questa retta indefinita limitano un segmento finito, il quale verrà letto A B se il punto generatore C lo genera da A *origine* verso B *termine*, B A nel caso opposto.

Se A B indica il senso di generazione positivo della retta, il segmento A B sarà positivo, e perciò il segmento B A sarà negativo. Il senso di un segmento resta dunque fissato quando sia stabilito il senso positivo o negativo di generazione. Per più rette parallele si riterrà lo stesso senso di generazione positivo per tutte. I due segmenti A B e B A differiscono soltanto pel senso, si ha quindi

$$AB + BA = 0$$

ossia

$$AB = -BA. \tag{1}$$

Quando un segmento sia indicato con una sola lettera, si suole apporre alla sua linea una freccia la quale ne definisce il senso di generazione.

2. — Fra i tre segmenti A B, B C, C A che restano individuati da tre punti A, B, C in linea retta, qualunque sia la posizione del punto C rispetto agli altri due A, B, sussiste sempre la relazione

$$AB + BC + CA = 0.$$

Ed infatti se il punto C si trova fra A e B si ha

$$AC + CB = AB \quad \text{ovvero} \quad AB - AC - CB = 0$$

e per la (1) $\qquad AB + BC + CA = 0$

se il punto C si trova sul prolungamento di A B, si ha

$$AB + BC = AC \quad \text{ossia} \quad AB + BC + CA = 0$$

e finalmente se il punto C è sul prolungamento di B A, si ha

$$CA + AB = CB \quad \text{ossia} \quad AB + BC + CA = 0.$$

3. — Da questa relazione si ottiene l'espressione della distanza di due punti A e B in funzione delle distanze che essi hanno da un punto O allineato con essi. Infatti essendo i tre punti O, A, B in linea retta si ha

$$OA + AB + BO = 0 \text{ da cui } AB = OB - OA$$

od anche

$$AB = AO + OB.$$

4. — Se per n punti A, B, C..... M, N in linea retta sussiste la relazione: $AB + BC + \ldots + MN + NA = 0$, la stessa relazione sussiste per $n + 1$ punti. Infatti, se O è un altro punto della stessa retta, fra i tre punti N, A, O sussisterà la relazione $NA = NO + OA$: e quindi l'uguaglianza supposta diverrà

$$AB + BC + \ldots + MN + NO + OA = 0,$$

ossia essa vale anche per $n + 1$ punti, ma si è dimostrata per 3 punti, dunque vale per $4, 5 \ldots n$.

5. — L'angolo di 360° intorno ad un punto O possiamo immaginarlo generato da un raggio vettore mobile c il quale può ruotare intorno ad O nel senso in cui ruotano le lancette di un orologio, che chiameremo *senso positivo del piano*, ovvero, in senso opposto, *senso negativo*. Due raggi fissi a e b uscenti da O e non per diritto, dividono l'angolo di 360° in due angoli, uno minore, l'altro maggiore di 180°; uno di essi, per es., il minore, verrà letto ab se il raggio vettore lo genera da a verso b, nel caso opposto invece verrà letto ba; ma i due angoli sono eguali in grandezza, cosicchè si ha

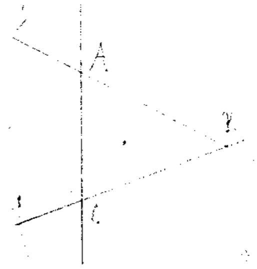
$$ab + ba = 0 \text{ od anche } ab = -ba.$$

6. — Chiameremo *circuito* la linea descritta da un punto mobile il quale parte da una *posizione iniziale* ed arriva ad una *posizione finale*: se questa coincide con quella, il circuito dicesi chiuso, altrimenti è aperto; il circuito può inoltre essere *semplice* o *intrecciato*, *piano* o *gobbo*. Se il circuito è formato da segmenti rettilinei, esso chiamasi *linea poligonale* ovvero *spezzata*. Il senso di generazione di un circuito resta definito dall'ordine di successione di due suoi punti se è aperto, di tre se è chiuso.

7. — Un circuito piano, chiuso e semplice racchiude una porzione limitata del piano, la cui misura chiamasi *area del circuito* e si considera come positiva o come negativa secondo che essa rimane alla destra ovvero alla sinistra di una persona che stando sul piano percorra il circuito nel senso di generazione di esso.

8. — Se O è un punto qualsivoglia del piano di un triangolo A B C, si ha sempre la relazione: $OAB + OBC + OCA = ABC$.

Infatti se il punto O è interno al triangolo, questo è appunto la somma dei tre triangoli OAB, OBC, OCA. Se il punto O è esterno al triangolo e si trova in uno degli spazi indefiniti contigui ad esso per un lato, per es., nello spazio contiguo per il lato A C, si ha



$$OAB + OBC - OAC = ABC,$$

ma

$$-OAC = OCA$$

quindi

$$OAB + OBC + OCA = ABC.$$

Finalmente se il punto O è esterno al triangolo e si trova in uno degli spazi indefiniti contigui ad esso per un vertice, per es., nello spazio contiguo per il vertice B, si ha

$$OCA - OCB - OBA = ABC$$

ovvero

$$OAB + OBC + OCA = ABC.$$

Da qui si ricava che l'area del triangolo A B C può intendersi generata da un raggio vettore mobile intorno al punto O e di lunghezza variabile per modo che la sua estremità percorra il contorno del triangolo nel suo senso di generazione.

9. — Il teorema ora dimostrato può estendersi ad un poligono di un numero qualunque di lati. Sia ABCD..... MN un poligono piano, chiuso e semplice, di un numero qualunque di lati, ed O un punto qualunque del suo piano. Proiettinsi i vertici del poligono dal punto O e dal vertice A, si avrà (n. 8)

$$OAB + OBC + OCA = ABC,\quad OAC + OCD + ODA = ACD,$$
$$OAD + \ldots\ldots = \ldots\ldots,\ \ldots\ldots + OMA = \ldots\ldots,\ OAM + OMN + ONA = AMN;$$

sommando e riducendo

$$OAB + OBC + OCD + \ldots\ldots + OMN + ONA = ABCD \ldots\ldots MN.$$

La dimostrazione è indipendente dal numero e dalla grandezza dei lati del poligono, e perciò sta anche per una figura a contorno curvilineo. L'area di un poligono piano, chiuso e semplice si può quindi intendere generata da un raggio vettore, girevole intorno ad un polo O, la cui lunghezza varia in modo che la sua estremità percorra il contorno del poligono nel suo senso di generazione.

§ 2. — Trasformazione delle figure piane.

10. — Ridurre una figura piana ad una data *base di riduzione* ***b***, significa trasformare la figura data in un rettangolo di cui un lato sia *b*; l'altro lato *h* del rettangolo dicesi *misura* della superficie rispetto alla base b. Si può anche trasformare la figura data in un triangolo di cui una dimensione sia $2b$, l'altra sarà evidentemente h.

La riduzione di una figura piana ad una data base può avere per iscopo sia di conoscere l'area, la quale viene così espressa dal prodotto bh, sia di ottenere un segmento proporzionale all'area, ciò che è indispensabile quando si debbano eseguire operazioni di calcolo grafico sopra più figure piane.

11. — Vogliasi ridurre alla base b il parallelogrammo A B C D (fig. 1): detta l l'altezza ed a la base, si tratta di costruire una quarta proporzionale $h = a \dfrac{l}{b}$. Preso $AE = b$, congiunto E con B e condotta per D la parallela DF, risulta $FK = h$. Questa costruzione si può anche interpretare come una trasformazione di aree: infatti condotte le rette BD, FE, i due triangoli ABD, AFE risultano equivalenti e quindi anche equivalenti il parallelogrammo dato e l'altro AFGE, il quale avendo per base b viene misurato dalla sua altezza h.

12. — La riduzione di un triangolo ABC si può operare in più modi:

a) Si prenda $AE = 2b$ (fig. 2), si congiunga E con B, da C

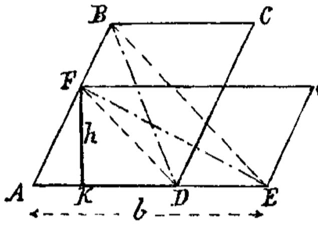


Fig. 1.

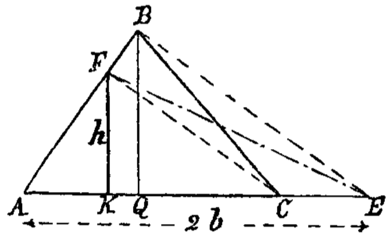


Fig. 2.

si tiri la parallela; risulta $FK = h$ la misura del triangolo; infatti $h = \dfrac{AC \times BQ}{2b}$; od anche: congiungendo F con E, il triangolo dato risulta equivalente all'altro AEF, il quale avendo per base $2b$ viene misurato dalla sua altezza h.

b) Centro in A (fig. 3), con raggio $2b$ si descriva un arco cir-

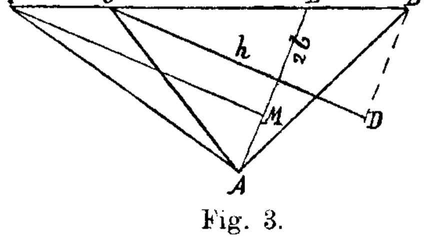


Fig. 3.

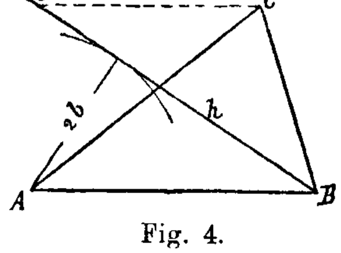


Fig. 4.

colare il quale intersechi in E la base BC: l'antiproiezione CD della base BC sulla direzione AE rappresenta la misura del triangolo rispetto alla base b. Infatti, portato BC in EF, il triangolo dato risulta equivalente all'altro AEF, il quale avendo per base $AE = 2b$ viene misurato dall'altezza $FM = CD = h$.

c) Se $2b$ è minore della minore altezza del triangolo, fatto ancora centro in A (fig. 4) e con raggio $2b$ si descriva un arco circolare: da uno degli altri due vertici si tiri una tangente e dal terzo vertice C si tiri la parallela al lato opposto; risulta $BC' = h$ la misura del triangolo. Infatti il triangolo dato è equivalente all'altro ABC', il quale avendo per altezza $2b$, viene misurato dalla sua base BC'.

13. — Si abbia da ridurre il quadrilatero ABCD (fig. 5) alla base b. Centro in un vertice A e con raggio $2b$ si descriva un arco di cerchio, dal vertice opposto C si conduca una tangente e su di essa si proiettino parallelamente alla diagonale AC gli altri due vertici in E ed F; risulta $EF = h$ la misura del quadrilatero; infatti con questa costruzione si sono ridotti alla base b i due triangoli ABC, ACD componenti il quadrilatero.

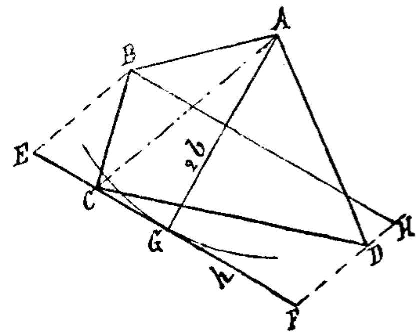


Fig. 5.

Se $2b$ è maggiore della maggior diagonale del quadrilatero, la costruzione ora esposta cade in difetto: in tal caso osserviamo che se da B si conduce la parallela ad EF, risulta $BH = EF = h$; basta quindi, per risolvere il problema, scambiare i due segmenti h e b; cioè fatto centro in B e con raggio $2b$ si descriva un arco di cerchio ad intersecare in H la parallela condotta per D alla diagonale AC; l'antiproiezione AG della diagonale AC sulla direzione BH è la misura cercata.

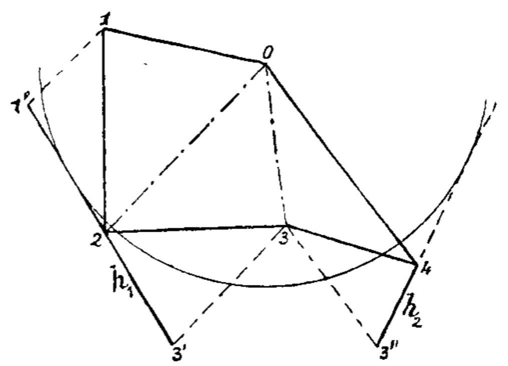


Fig. 6.

Le costruzioni ora esposte si estendono naturalmente anche al caso di un quadrilatero intrecciato.

14. — La riduzione del triangolo e del quadrangolo ad una data base facendo uso del compasso è utile specialmente quando abbiansi da ridurre più quadrangoli o triangoli aventi un vertice in comune. Si voglia, p. es., ridurre alla base b il poligono 01234 (fig. 6); esso risulta dalla somma del quadrangolo 0123 e del triangolo 034 aventi in comune il vertice 0, quindi speditamente si determinano le misure h_1, h_2 del quadrangolo e del triangolo; la somma $h_1 + h_2$ è la misura del poligono.

15. — Un poligono qualunque 012345 si può trasformare in un triangolo equivalente:

a) Col metodo del vertice fisso, conducendo la diagonale 02 (fig. 7) e proiettando parallelamente ad essa il vertice 1 sul lato 2.3 in 2′, quindi conducendo la diagonale 03 e proiettando parallelamente ad essa il punto 2′ in 3′ sul lato 3.4 e così di seguito. Il poligono 02′345 è equivalente al dato ed ha un lato di meno; il poligono 03′45 è equivalente al dato ed ha due lati di meno, ecc. Con questa costruzione si arriva al triangolo 04′5 equivalente al poligono dato e questo triangolo ha in comune col poligono l'ultimo lato.

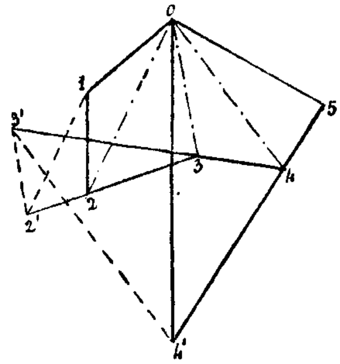


Fig. 7.

b) Col metodo del lato fisso, conducendo la diagonale 02 (fig. 8) e proiettando parallelamente ad essa il vertice 1 sul lato 05, quindi conducendo la diagonale 1′3 e proiettando parallelamente ad essa il vertice 2 in 2′ e così di seguito. Il poligono 1′2345 è equivalente al dato ed ha un vertice di meno; il poligono 2′345 è equivalente al dato ed ha due vertici di meno, ecc. Si arriva in questo modo al triangolo 3′45 equivalente al poligono e che ha in comune con esso il penultimo lato.

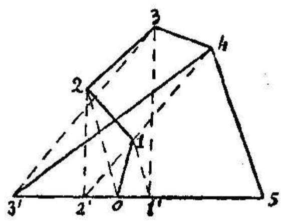


Fig. 8.

Nel fare la numerazione dei vertici, converrà tenere per ultimo lato, se si adotta il primo metodo, e per penultimo, se si adotta il secondo metodo, un lato abbastanza grande del poligono, per modo che il triangolo equivalente abbia i suoi lati non troppo differenti

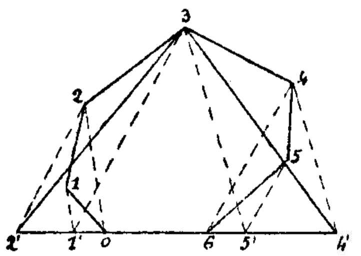


Fig. 9.

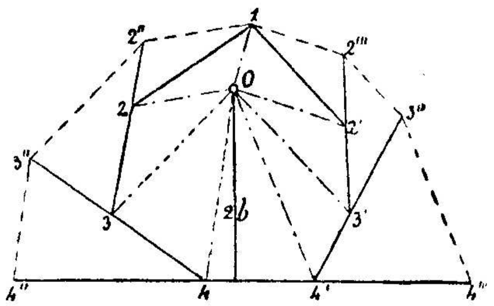


Fig. 10.

in lunghezza. Del resto si può anche raggiungere lo scopo eseguendo la trasformazione in due sensi opposti come è indicato nella fig. 9.

16. — Colle costruzioni del n. precedente abbiamo trasformato il poligono in un triangolo equivalente: se invece si volesse senz'altro la misura del poligono rispetto ad una base b, si prenda alla distanza $2b$ da un lato $4.4'$ del poligono (fig. 10) un polo 0 che congiungeremo con un vertice 1. Il poligono dato risulta dalla somma del poligono 01234, del triangolo $044'$ e del poligono $04'3'2'1$; trasformati quindi i due poligoni in triangoli equivalenti col metodo del vertice fisso in 0, si ottiene in $4''\,4'''$ la misura del poligono.

17. — Nella fig. 7 la retta $04'$ e nella fig. 8 la retta $3'4$ sono *rette di compenso* per la spezzata 01234 in quanto che essendo i triangoli $04'5$, $3'45$ equivalenti ai poligoni dati, le aree dei poligoni intrecciati $012344'0$, $012343'0$ nelle due figure risultano nulle. La costruzione delle rette di compenso può servire a risolvere molti problemi pratici di calcolo grafico; e la trasformazione delle aree trova una importante applicazione al calcolo dei movimenti di terra nelle costruzioni stradali (1).

18. Trasformazione delle figure piane a contorno curvilineo. — Per eseguire questa trasformazione costruiremo delle *spezzate di compenso* pei varî archi che limitano la figura data; in questo modo la trasformeremo in un poligono, che può essere poi trasformato in un triangolo o ridotto ad una data base. Il problema dunque di cui ora andiamo ad occuparci è di trovare le spezzate di compenso per archi di varia natura.

19. Spezzata di compenso per un arco circolare. — Sia AB (fig. 11) un arco circolare, O il centro, sia AB' lo sviluppo dell'arco circolare sulla tangente in A. È noto che l'area del settore OAB è equivalente a quella del triangolo OAB', e se da O si tira OD parallela alla BB' e si congiunge D con B, il triangolo OAB' è equivalente al quadrilatero OADB, quindi ADB è la spezzata di compenso per l'arco circolare.

20. — Il metodo più opportuno per sviluppare un arco circolare AB (fig. 12) sulla tangente in A è il seguente: si prende un'apertura di compasso tale che, nell'arco che si considera, possa essere ritenuta eguale alla lunghezza dell'archetto che essa sottende; si porta ripetutamente a partire dall'estremo B quest'apertura di compasso sull'arco circolare fino a quella posizione per cui le due punte del

(1) Cfr. C. Guidi, *Lezioni di Statica grafica.* — Torino, 1887.

compasso comprendono l'altro estremo A. In questa posizione, in generale, una delle due punte sarà più vicina ad A e si potrà considerare indifferentemente come situata sull'arco o sulla tangente in A;

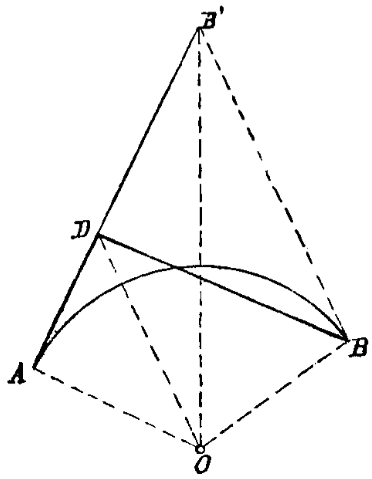


Fig. 11.

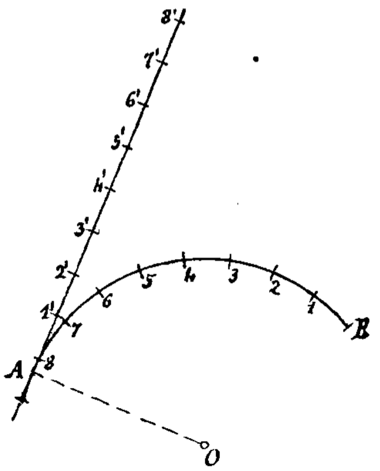


Fig. 12.

ruotando allora il compasso su tale punta, si camminerà sulla tangente, riportando su di essa l'apertura di compasso lo stesso numero di volte che si era portata sull'arco circolare: si ottiene così in A 8' lo sviluppo dell'arco A B. In questa operazione non conviene prendere l'apertura di compasso troppo piccola, perchè il maggior numero di volte che si deve in tal caso ripeterla e sull'arco e sulla tangente, può esser causa di un errore maggiore di quello che proverrebbe da una maggiore differenza fra l'apertura di compasso e la lunghezza dell'archetto sotteso. È facile determinare l'apertura di compasso più conveniente: sia a la lunghezza dell'archetto sotteso dalla piccola corda (apertura di compasso), la differenza fra l'archetto e la corda, detto r il raggio dell'arco circolare, è $a - 2r \operatorname{sen} \frac{a}{2r}$ e sviluppando il seno e riducendo si avrà:

$$a - 2r \operatorname{sen} \frac{a}{2r} = \frac{a^3}{2^2 3! r^2} - \frac{a^5}{2^4 5! r^4} + \ldots\ldots$$

e trascurando tutti i termini dopo il primo, possiamo ritenere

$$a - 2r \operatorname{sen} \frac{a}{2r} = \frac{a^3}{24 r^2} . \tag{2}$$

Se indichiamo ora con l la lunghezza di tutto l'arco A B, la differenza (2) verrà ripetuta $\frac{l}{a}$ volte, cioè la differenza totale d fra l'arco e lo sviluppo sarà

$$d = \frac{l a^2}{24 r^2},$$

da cui

$$a = r\sqrt{\frac{24 d}{l}}. \tag{3}$$

Ora nel valutare graficamente una lunghezza, non si può pretendere un errore minore di $\frac{1}{10}$ di millimetro; facciamo dunque nella (3) $d = \frac{1}{10}$ di millimetro, ovvero per semplificare la formola poniamo $d = \frac{1}{96}$ di centimetro, la (3) si riduce allora ad

$$a = \frac{r}{2\sqrt{l}} \tag{4}$$

nella quale la lunghezza l va espressa in centimetri, e per essa, tuttora ignota, si prenderà un valore approssimato.

Per archi ribassati possono anche seguirsi regole di rettificazione approssimata, fra cui citeremo quella di Huygens consistente nel prendere il doppio della corda che sottende l'arco metà e aggiungere un terzo della differenza fra questo doppio e la corda dell'arco dato. Quando l'arco raggiunge la quarta parte della circonferenza, l'errore, in meno, che si commette, raggiunge il valore di 0,001222.r.

21. — La fig. 13 mostra un'applicazione delle cose dette; in essa la sezione A B C D di una volta è stata trasformata nel poligono

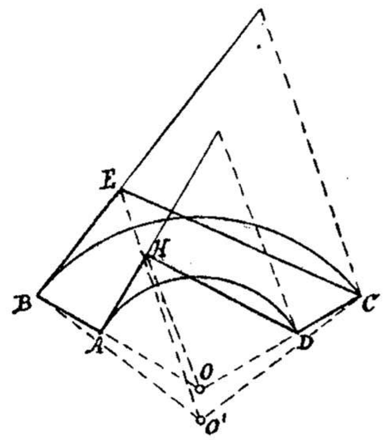


Fig. 13.

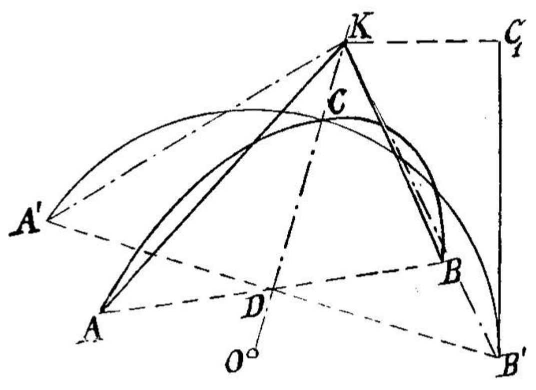


Fig. 14.

equivalente A B E C D H A, costruendo le spezzate di compenso pei due archi circolari B C, A D.

22. Spezzata di compenso per un arco ellittico. — Sia A C B (fig. 14) l'arco ellittico, O il centro: conduciamo il semidiametro O C coniugato alla corda A B e centro in O con raggio O C descriviamo l'arco circolare C B′ fino ad incontrare in B′ la normale ad O C pel punto D: i due archi C B, C B′ sono affini, essendo B B′ la direzione d'affinità ed O C l'asse d'affinità. Ciò posto, condotta in B′ la tangente all'arco circolare, sviluppiamo su di essa l'arco B′ C in B′ C_1, e da C_1 conduciamo C_1K ∥ O B′. Immaginiamo tracciato anche l'arco circolare A′C corrispondente dell'ellittico A C; la spezzata A′K B′ è spezzata di compenso per l'arco circolare A′C B′ e siccome il punto K è un punto dell'asse d'affinità, ne viene che la spezzata A K B è spezzata di compenso per l'arco ellittico. Per la costruzione del punto K, come si è visto, non è necessario di tracciare l'arco circolare A′C.

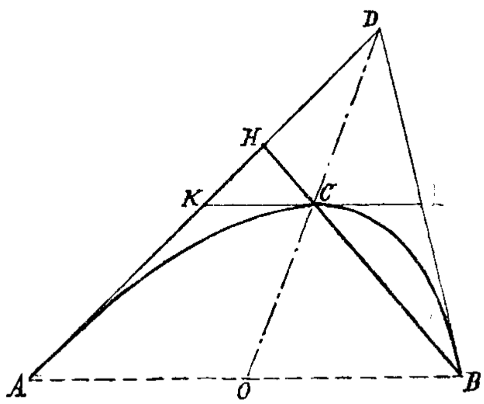


Fig. 15.

23. Spezzata di compenso per un arco parabolico. — Sia A C B (fig. 15) un arco parabolico: è noto che l'area del segmento parabolico A C B vale $\frac{2}{3}$ dell'area del triangolo A D B formato dalla corda A B e dalle tangenti estreme in A e B; quindi qualunque spezzata bilatera che abbia gli estremi in A e B e il cui vertice disti dalla corda A B nella direzione coniugata D O, di $\frac{4}{3}$ O C, è spezzata di compenso per l'arco parabolico. Così, per es., condotta CK ∥ A B, divisa A K in tre parti uguali e portatane una al di là in K H, risulterà A H B spezzata di compenso per l'arco parabolico. È facile dimostrare che la B H passa pel punto C (punto d'intersezione dell'arco parabolico col diametro, che biseca la corda, il quale punto, come è noto, è il punto medio di O D).

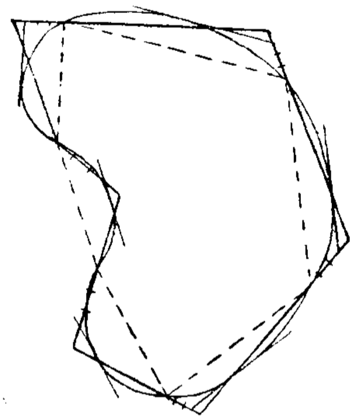


Fig. 16.

24. — Se la figura data è limitata da un contorno curvilineo irregolare (fig. 16), si potrà dividere tale contorno in tante piccole parti da potersi considerare come archi parabolici, e per ciascuno di essi trovare la spezzata di compenso come si è detto al n. precedente. La figura data resta così trasformata in un poligono equivalente di cui sappiamo valutare graficamente l'area. Questo metodo grafico per la valutazione dell'area di una figura piana limitata da un contorno irregolare può giustamente chiamarsi *metodo per trasformazione.*

25. Integrazione grafica. — Il problema del n. precedente può anche essere risoluto con altro metodo di cui ora andiamo a parlare, e che potremo chiamare *metodo per integrazione grafica.* Dividiamo

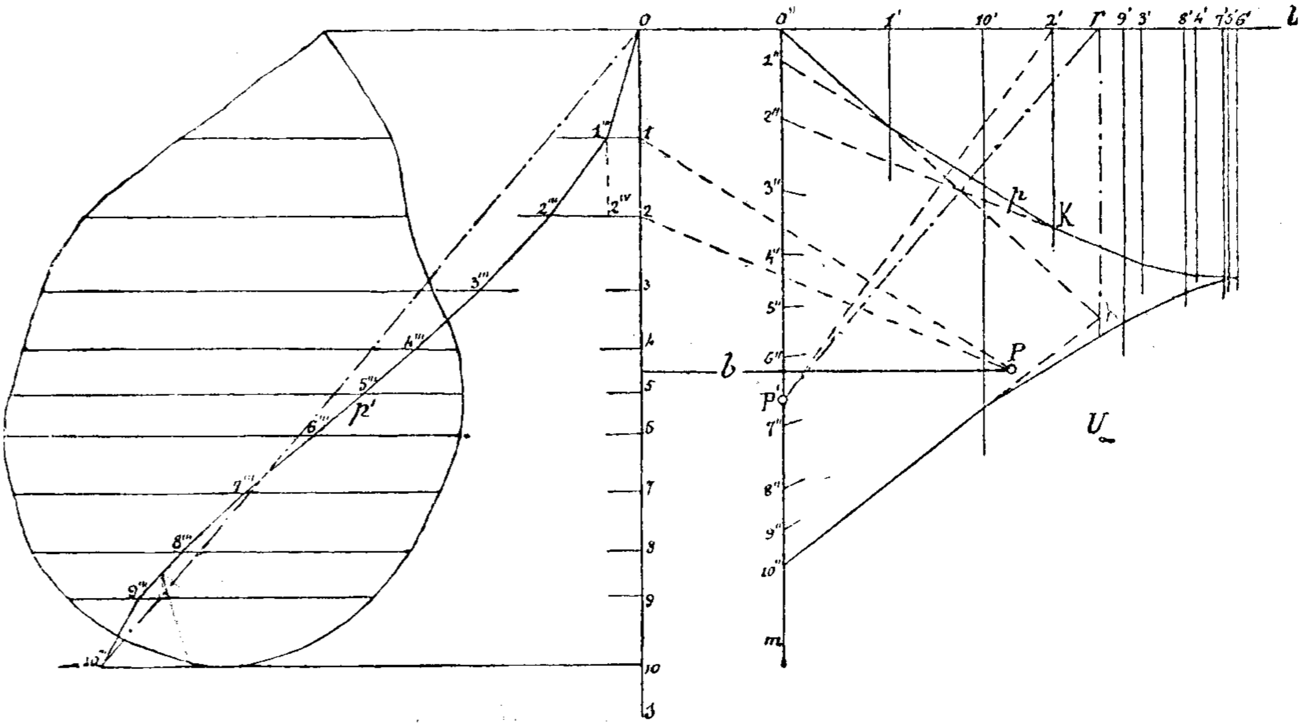


Fig. 17.

la figura data (fig. 17) in istriscie elementari con un sistema di corde parallele, e queste dividenti siano condotte per modo che i lati di ciascuna striscia che fanno parte del contorno della figura possano ritenersi senza errore apprezzabile come rettilinei, ad eccezione, nella nostra figura, dell'ultima striscia che sarà considerata come un segmento parabolico. È chiaro che le dividenti dovranno essere più vicine là dove la curvatura del contorno è maggiore. In questo modo la figura resta divisa in istriscie, di cui la prima (la più alta) può ritenersi come un triangolo, tutte le altre fino alla penultima possono considerarsi come trapezi e l'ultima come un segmento parabolico. Ciò posto, sia $\varDelta h_i$ l'altezza della striscia i^{esima}, sia l_i l'altra misura della striscia suddetta (metà della prima corda per la prima striscia, semisomma dei lati paralleli per tutte le striscie dalla seconda alla penultima, $\frac{2}{3}$ per l'ultima striscia): l'area della figura data sarà espressa da $\Sigma(\Delta h_i \,.\, l_i)$, e se riduciamo i prodotti $\Delta h_i \,.\, l_i$ ad una medesima base b ed indichiamo con m_i le misure corrispondenti, avremo $\Sigma(\Delta h_i \,.\, l_i) = b \Sigma m_i$, cioè il segmento Σm_i ci darà la misura della figura data rispetto alla base b. Questa riduzione può eseguirsi graficamente con i due metodi che passiamo a spiegare.

a) Condotta una trasversale s normale alle dividenti, si proiettino le altezze delle striscie da un polo P distante della base di riduzione b; quindi su di un asse l parallelo alle dividenti si portino sempre a partire da un punto 0 le altre dimensioni l delle striscie; si proietti la punteggiata che così si ottiene, dal punto all'∞ di s, $U\infty$, e si costruisca il ***poligono di moltiplicazione*** relativo al polo P, cioè un poligono i cui lati siano ordinatamente paralleli ai raggi proiettanti del polo P, ed i cui vertici cadano ordinatamente sui raggi del fascio $U\infty$. Sull'asse m otteniamo, prolungando i successivi lati del poligono, le misure delle varie striscie, come ricavasi immediatamente dalla considerazione di triangoli simili, quali, ad es., $P1\,.\,2$, $K\,1''2''$; e tutto il segmento $\overline{0{,}10''}$ intercetto fra il primo e l'ultimo lato ci dà la misura di tutta la superficie. Pel punto comune ai lati estremi del poligono di moltiplicazione si conduca la parallela all'asse m ad incontrare in r l'asse l; si ricava dalla figura

$$\overline{0.10''} \,.\, b = \overline{0.10} \,.\, \overline{0r};$$

ossia la figura data è anche equivalente ad un rettangolo della stessa altezza della figura data e di larghezza $\overline{0r}$.

b) Costruita come si è detto in *a)* la punteggiata $0\,1'2' \ldots\ldots 10'$, la si proietti da un polo P' distante della base di riduzione b; quindi si costruisca un poligono di moltiplicazione i cui lati siano paralleli ai raggi del fascio P' e i cui vertici cadano sulle dividenti; otteniamo in $\overline{1{,}1'''}$ la misura della prima striscia, in $\overline{2{,}2'''}$ la misura delle due prime striscie, ... in $\overline{10{,}10'''}$ la misura di tutta la superficie. Anche ciò si deduce dalla similitudine di triangoli, come ad es. $2'\gamma\,1'''\,2'''$ e $P'\,02'$. Condotta la retta $\overline{0{,}10'''}$ e da P' il raggio parallelo, questo incontra l'asse l nel punto r tale che $\overline{0r} \,.\, \overline{0{,}10} = \overline{10{,}10'''} \,.\, b$.

26. — Spesse volte occorre di dover integrare una figura piana (fig. 18) limitata da un'ascissa x, da due ordinate estreme e da una linea qualunque CD; a questa figura daremo il nome di *diagramma*.

Diviso il diagramma in istriscie verticali mediante altre ordinate intermedie, si può eseguire l'integrazione grafica con uno dei metodi generali spiegati al n. precedente; in questo caso si costruisce la punteggiata delle dimensioni l, semplicemente proiettando le ordinate medie delle varie striscie su di una verticale. Col primo metodo

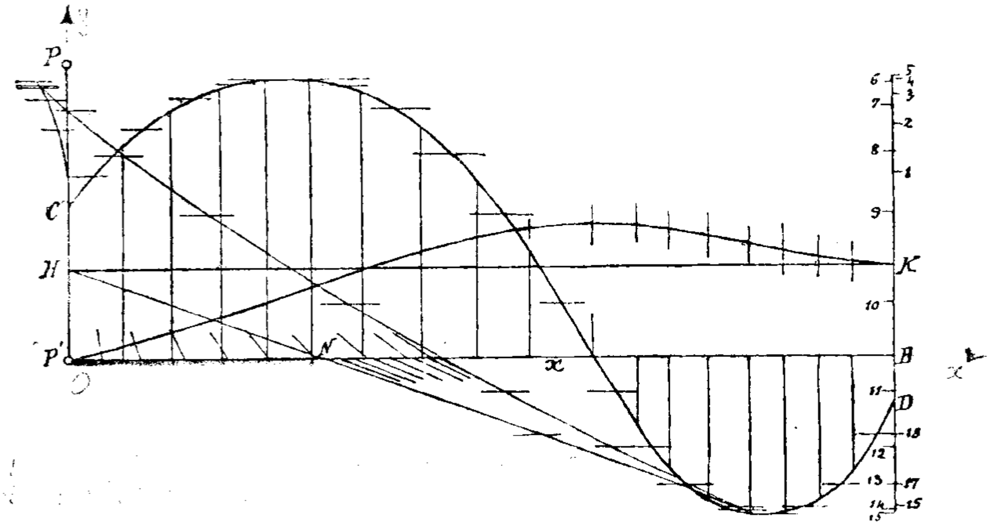


Fig. 18.

otteniamo sotto forma di punteggiata sull'ascissa la *funzione integrale* del diagramma dato; col secondo metodo invece questa funzione viene rappresentata dalla linea P'K, tale che la sua ordinata i^{esima} è la misura delle prime i striscie. Quando, oltre al risultato finale, cioè la misura di tutto il diagramma, interessi conoscere anche la funzione integrale, il secondo metodo è evidentemente preferibile al primo, giacchè ci rappresenta in modo molto più chiaro la funzione suddetta. Analogamente a quanto è stato trovato nel caso generale, se, adottando il primo metodo, si prolunga l'ultimo lato del poligono di moltiplicazione ad incontrare il primo nel punto H, il rettangolo P'HKB risulta equivalente all'area del diagramma. L'ordinata P'H assume qui il nome di *ordinata media del diagramma* e l'orizzontale HK *orizzontale di compenso.* Se, adottando il secondo metodo, si prende la base di riduzione eguale alla lunghezza del diagramma, l'ordinata estrema BK della linea integrale risulterà senz'altro l'ordinata media del diagramma. Dette Δx le larghezze delle varie striscie ed y le ordinate medie, si ha $P'H = \frac{\Sigma y \Delta x}{\Sigma \Delta x}$; se le n striscie del diagramma fossero tutte della medesima larghezza, risulterebbe allora $P'H = \frac{\Sigma y}{n}$, ossia in tal caso l'ordinata media del diagramma sarebbe la media aritmetica delle ordinate medie delle singole striscie.

27. — Se la linea CD che limita il diagramma dato è la rappresentazione grafica di una funzione qualunque fra due limiti della variabile indipendente, la linea P′K è la rappresentazione grafica della funzione integrale prima fra gli stessi limiti. Come dal diagramma dato si è dedotto il diagramma integrale primo, così da questo, con una nuova integrazione, si può ricavare il diagramma integrale secondo del diagramma dato, e così via. Eseguendo poi le operazioni inverse si può da un dato diagramma dedurre il *diagramma derivato primo,* da questo il *diagramma derivato secondo* e così di seguito. Fra le linee che limitano questi diagrammi è facile riscontrare le note relazioni che esistono fra una funzione e le sue derivate successive (1).

---

(1) L'integrazione grafica, oltre alle applicazioni di cui si tratterà in seguito, trova utilissimo impiego nel calcolo dei movimenti di terra nei progetti stradali. — Cfr. C. Guidi, *Lezioni di Statica grafica.* — Torino, 1887.