

(4) CREMONA L., *Corso di Statica grafica*. — Milano, 1868-69 (in autografo).  
 RITTER W., *Die Trägheitseigenschaften, geometrisch abgeleitet*. — Schweizerische Bauzeitung, 1888.

nella quale il segmento  $\Sigma m_i$  è la misura lineare della somma dei momenti statici di tutte le forze, ossia rappresenta quella somma ridotta alla base  $b$ .  
 Si abbia ora nello stesso piano  $\pi$  un secondo asse  $y$  e sia  $y_i$  la distanza del punto di applicazione della stessa forza  $p_i$  dall'asse  $y$ : al prodotto  $p_i x_i y_i$  si dà il nome di *momento di secondo ordine* o *momento centrifugo* della forza  $p_i$  rispetto agli assi  $x, y$ . E se l'asse  $y$

$$\Sigma p_i x_i = b \Sigma m_i,$$

176. — Sia dato un sistema di forze parallele  $p_i$  i cui punti di applicazione  $P_i$  giacenti in un medesimo piano  $\pi$  distino delle quantita  $x_i$  (valutate in direzione arbitraria) da un asse  $x$  giacente nello stesso piano  $\pi$ . Il prodotto  $p_i x_i$  fu già chiamato (n. 50) *momento statico* o *momento di prim'ordine* della forza  $p_i$  rispetto all'asse  $x$ , e, disponendo le forze parallelamente all'asse  $x$ , vedemmo già (n. 55) come si possa, per mezzo di un poligono funicolare, trasformare graficamente quel prodotto nell'altro  $b \Sigma m_i$  in modo da ottenere

§ 1. — Momenti centrifughi e momenti d'inerzia di un sistema di forze concentrate: ellissi d'inerzia (1).

## MOMENTI DI SECONDO ORDINE

### CAPITOLO VI.

triangoli e, per conseguenza, di tutti gli altri: la travatura è rigida. Nel caso opposto invece non potendo l'asta BC impedire una piccola rotazione di uno dei due triangoli limitrofi in un senso e dell'altro nel senso opposto, la travatura non risulterebbe rigida.  
 Partendo anche per questa travatura dal nodo caricato A e passando poi successivamente agli altri, non sarà difficile, in grazia delle considerazioni già svolte a proposito dell'equilibrio dei vari nodi, di procedere alla determinazione effettiva degli sforzi nelle varie aste.

coincide coll'asse  $x$ , il prodotto  $p_i x_i^2$  si chiama *momento d'inerzia* della forza  $p_i$  rispetto all'asse  $x$ . Mentre il segno positivo o negativo del momento statico dipende dal senso si della forza che della distanza  $x_i$ , quello del momento d'inerzia è sempre eguale e identemente al senso della forza  $p_i$ . Analogamente si definisce il momento d'ordine  $n$ -esimo di un sistema di forze parallele rispetto ad  $n$  assi sieno essi distinti ovvero alcuni o tutti coincidenti.

Noi qui ci occuperemo soltanto dei momenti centrifughi e dei momenti d'inerzia.

177. — Per costruire graficamente il momento centrifugo  $p_i x_i y_i$

costruiamo dapprima il momento statico

$$p_i x_i = b m_i$$

e consideriamo poi la misura  $m_i$  come una nuova forza applicata allo stesso punto  $P_i$  e, dopo averla disposta parallelamente all'asse  $y$ , costruiamo con un secondo poligono funicolare il momento statico  $m_i y_i = c m_i$ ; si avrà allora

$$p_i x_i y_i = b c m_i$$

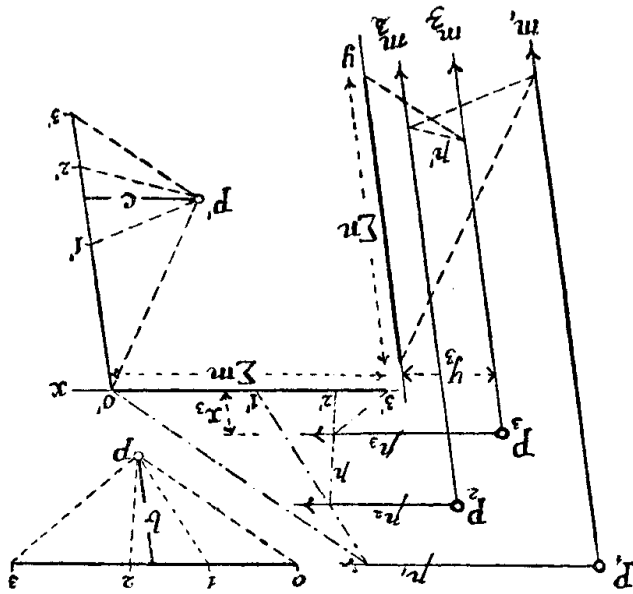


Fig. 103.

nella quale  $m_i$  rappresenta la misura lineare del momento centrifugo  $p_i x_i y_i$  ridotto alla base superficiale  $b c$ . Si avrà quindi per tutto il sistema di forze

$$\sum p_i x_i y_i = b c \sum m_i$$

in cui  $\sum m_i$  è il segmento intercetto sull'asse  $y$  fra i lati estremi del secondo poligono funicolare. Questa costruzione venne eseguita nella fig. 103 per tre forze e per gli assi  $x, y$ . Le basi di riduzione  $b, c$  sono naturalmente da valutarsi in direzione parallela rispettivamente alle distanze  $x, y$ .

178. — Similmente con due poligoni funicolari si ottiene graficamente il momento d'inerzia  $p_i x_i^2 = b c m_i$  e quindi

$$\sum p_i x_i^2 = b c \sum m_i$$

In questo caso la costruzione è più semplice, giacchè le linee d'azione delle  $p_i$  e delle  $m_i$  coincidono. Nella fig. 104 venne eseguita tale costruzione per tre forze e per l'asse  $x$ .

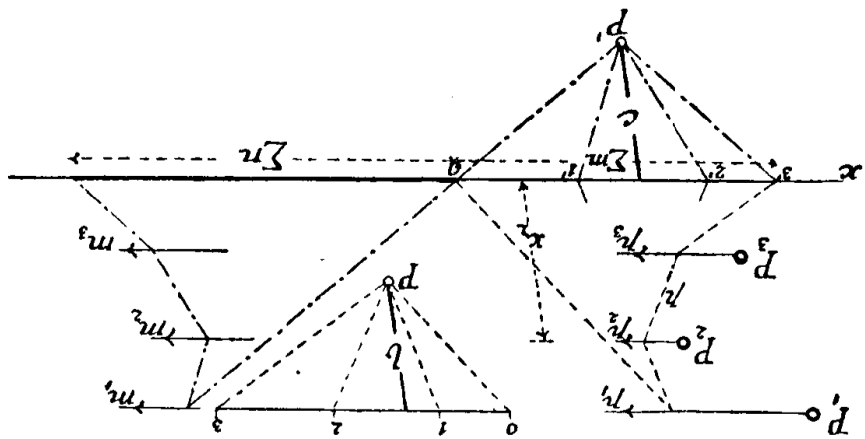


Fig. 104.

Il rapporto  $\Sigma p x^2$ :  $\Sigma p$  è un termine di second'ordine che possiamo perciò rappresentare col quadrato di un segmento  $r$ , a cui si è dato il nome di *raggio d'inertzia*; possiamo perciò scrivere

$$(24) \quad r^2 = \frac{\Sigma p x^2}{\Sigma p}$$

179. — Dalla relazione

$$p_i x_i^2 = b m_i x_i$$

deduciamo

$$\Sigma p_i x_i^2 = b \Sigma m_i x_i =$$

$$= 2b \Sigma \frac{1}{2} m_i x_i.$$

Se le distanze  $x_i$  e per conseguenza anche la  $b$ , sono valutate normalmente all'asse  $x$ , la

sommatoria  $\Sigma \frac{1}{2} m_i x_i$  non è altro se non che l'area  $F'$  racchiusa fra il

poligono funicolare e l'asse  $x$ , punteggiata nella fig. 105; si ha quindi

$$\Sigma p_i x_i^2 = 2 F' b,$$

od anche, prendendo

$$b = \frac{1}{2} \Sigma p_i,$$

$$\Sigma p_i x_i^2 = F' \Sigma p_i. \quad (25)$$

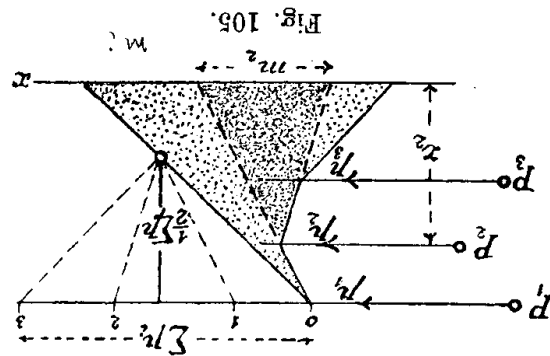


Fig. 105.

Dal confronto di questa colla (24) risulta  $F' = r^2$ . Questo metodo, dovuto al Mohr, per valutare il momento d'inerzia, torna opportuno in taluni casi.

180. — Sia  $x$  un asse qualunque del piano,  $x_0$  l'asse parallelo baricentrico, sia  $d$  la distanza fra i due assi,  $x$  ed  $x_0$  le distanze del punto d'applicazione  $P$  di una delle forze dagli assi suddetti (le distanze  $d$ ,  $x$  ed  $x_0$  sono valutate in direzione arbitraria); si ha:

$x = x_0 \pm d$ , e quindi, notando che  $\sum p x_0 = 0$ , si avrà

$$\sum p x^2 = \sum p x_0^2 + d^2 \sum p, \quad (26)$$

la quale esprime che il momento d'inerzia rispetto ad un asse qualunque è uguale al momento d'inerzia rispetto all'asse parallelo baricentrico aumentato del prodotto della somma delle forze pel quadrato della distanza fra i due assi.

Se  $r$  e  $\rho$  sono i raggi d'inerzia rispetto agli assi  $x$  ed  $x_0$ , la (26) può anche scriversi

$$r^2 = \rho^2 + d^2, \quad (27)$$

ossia: Il quadrato del raggio d'inerzia rispetto ad un asse qualunque è uguale al quadrato del raggio d'inerzia rispetto all'asse parallelo baricentrico aumentato del quadrato della distanza fra i due assi, od in altri termini: Il raggio d'inerzia rispetto ad un asse qualunque è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui un cateto è il raggio d'inerzia rispetto all'asse parallelo baricentrico e l'altro cateto è la distanza fra i due assi.

181. — Come le forze  $p_i$  applicate ai punti  $P_i$  ammettono un centro  $G$  (baricentro dei punti  $P_i$  affetti dai coefficienti  $p_i$ ), così anche le forze (momenti statici  $m_i$ , applicate agli stessi punti  $P_i$  ammettono un centro  $X$  (baricentro dei punti  $P_i$  affetti dai coefficienti  $m_i$ ), che chiameremo centro relativo all'asse  $x$ , la cui posizione dipende dalla posizione dell'asse  $x$ . Si determina il centro  $X$  al modo stesso come si determina il baricentro  $G$ .

182. — Sia  $G$  (fig. 106) il baricentro del sistema;  $X$ ,  $Y$  i centri relativi a due assi  $x$ ,  $y$ ; siano  $x_0$ ,  $y_0$  le distanze (valutate in una direzione arbitraria) del baricentro  $G$  dai due assi  $x$ ,  $y$ ; sia  $y_0$  la di-

stanza del centro X dall'asse y, ed x<sub>y</sub> la distanza del centro Y dall'asse x. Per noto teorema si ha

$$\sum p x = x_0 \sum p,$$

e similmente:

$$\sum p(x) y = y_0 \sum p x,$$

quindi:

$$\sum p x y = y_0 x_0 \sum p. \quad (28)$$

Analogamente:

$$\sum p y x = x_0 y_0 \sum p, \quad (29)$$

quindi:

$$y_0 x_0 = x_y y_0. \quad (30)$$

Supponiamo per un momento x<sub>0</sub> ed y<sub>0</sub> diversi da zero, ossia riteniamo che né l'asse x né l'asse y passino pel baricentro; se y\* = 0, ossia se l'asse y contiene il centro X, dalla (30) si ricava anche x<sub>y</sub> = 0, ossia l'asse x contiene il centro Y; dunque: se il centro relativo ad un'asse cade su di un altro asse, il centro relativo a quest'ultimo cade sul primo.

Ciò posto, se pel centro X relativo ad un asse x conduciamo un'asse qualunque, il centro relativo cadrà su x; al fascio di assi passanti per X corrisponde quindi una punteggiata di centri coincidente con x, che è l'asse relativo ad X e viceversa. Abbiamo dunque una corrispondenza reciproca fra asse e centro. Due assi tali, che uno passi pel centro dell'altro, come anche due centri tali che uno cada sull'asse dell'altro, diconsi *coniugati*. Il momento di secondo ordine rispetto a due assi coniugati è nullo, come rilevasi da ciascuna delle espressioni (28) e (29), e viceversa, se il momento di secondo ordine rispetto a due assi è nullo, essi sono coniugati.

Analogamente a quanto si è trovato pel momento di second'ordine, così pure il momento d'inertia rispetto ad un asse x, se s'indica con x\* la distanza del centro X da quest'asse, potrà esprimersi come segue

$$\sum p x^2 = x^* x_0 \sum p, \quad (31)$$

da cui:

$$x^* = \frac{\sum p x^2}{x_0 \sum p}. \quad (32)$$

Supponiamo ora che l'asse x passi per il baricentro, con che si ha x<sub>0</sub> = 0, questa formula dà allora x\* = ∞. Dunque il centro relativo ad un asse baricentrico cade sulla retta all'∞; al fascio degli assi

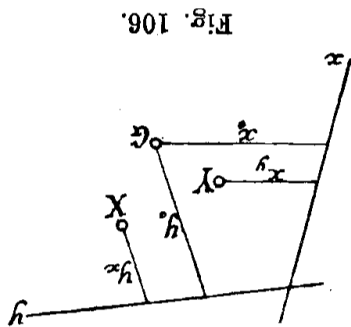


Fig. 106.

baricentrici corrisponde quindi come punteggiata di centri la retta all'∞; la quale è perciò l'asse relativo al baricentro del sistema. Ad un fascio di assi  $x$  paralleli, ossia passanti per un medesimo punto  $Y$  all'∞, corrisponde, come punteggiata di centri, un asse  $y$  baricentrico, il quale è coniugato a ciascuno degli assi  $x$ .

183. — Siano  $G, x, X$  (fig. 107) il baricentro del sistema, un asse

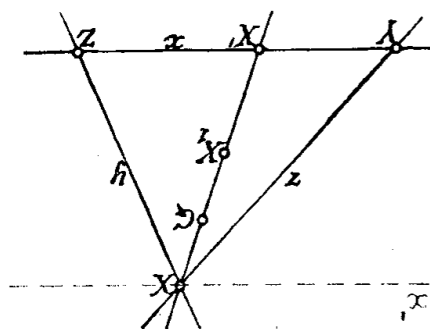


Fig. 107.

ed il suo centro relativo. Di un punto qualunque  $Y$ , scelto sull'asse  $x$ , sia  $y$  l'asse relativo, il quale passerà per  $X$ ; l'intersezione  $Z$  di questo asse col-

l'asse  $x$  avrà evidentemente per asse relativo  $z$  la congiungente  $XY$ . Ab- biamo adunque nel triangolo  $XYZ$  una terna di elementi coniugati, e poiché l'asse  $x$  ed il centro  $Y$  li abbiamo scelti ad arbitrio, così concludiamo che il complesso degli assi e dei centri relativi costituisce un sistema polare, di cui il centro coincide col baricentro del sistema.

L'intersezione  $X'$  della congiungente  $GX$  coll'asse  $x$  è il centro relativo all'asse  $x$  che passa per  $X$  ed è parallelo ad  $x$ ;  $X$  ed  $X'$  sono centri coniugati.

Se le forze sono tutte dello stesso senso, la distanza di un centro dall'asse relativo, ossia di un polo dalla sua polare, è sempre maggiore della distanza del baricentro dalla polare stessa; ne deriva che in tal caso (il solo che interessi nella scienza delle costruzioni, e però il solo che sarà preso qui in considerazione) la conica fondamentale del sistema polare è immaginaria. Dei vari centri, come  $X$ , immagini- niamo presi i punti simmetrici rispetto al baricentro, come  $X_1$ ; questi nuovi centri e gli assi costituiscono un nuovo sistema polare pel quale la conica fondamentale è reale ed è un'ellisse; essa chiamasi *ellisse centrale d'inertza*. Rispetto a quest'ellisse, asse e centro relativo si comportano come *polare* ed *antipolo* (cioè punto simmetrico del polo), una tangente ha per centro relativo il punto simmetrico del suo punto di contatto. Ciò posto, sia  $x$  un asse tangente all'el- lisse centrale, indichiamo con  $\rho$  la lunghezza del semidiametro coniu- gato alla direzione  $x$ ; se nel prendere il momento d'inertza  $\sum p x^2$  rispetto all'asse  $x$  valutiamo le distanze nella direzione coniugata, avremo  $x_0 = 2\rho$ ,  $x_0 = \rho$ , e quindi, conforme alla (31),

$$\sum p x^2 = 2\rho \cdot \rho \sum p,$$

ed in virtù della (26)

$$2 \delta \cdot \delta \sum p = \sum p x_0^2 + \delta^2 \sum p,$$

da cui:

$$(33) \quad \delta^2 = \frac{\sum p x_0^2}{\sum p},$$

ossia: *il raggio d'inerzia relativo ad un asse qualunque baricentrico è misurato dal semidiametro coniugato dell'ellisse centrale.*

L'ellisse centrale è adunque il diagramma polare della legge secondo cui varia il momento d'inerzia rispetto ad un asse il quale ruoti intorno al baricentro. Rispetto ai due assi, coincidenti uno coll'asse minore, l'altro coll'asse maggiore dell'ellisse centrale, il momento d'inerzia è dunque rispettivamente massimo e minimo; per tale motivo quei due assi chiamansi *assi principali d'inerzia pel baricentro*. Se nel prendere il momento d'inerzia, le distanze vengono valutate in un'altra direzione qualunque, che non sia quella coniugata ad  $x_0$ , è facile vedere che il raggio d'inerzia  $\rho$  viene misurato dalla distanza (valutata nella direzione voluta) che corre tra il baricentro e la tangente all'ellisse centrale, parallela ad  $x_0$ .

184. **Costruzione dell'ellisse centrale per un sistema di forze concentrate.** — Vediamo ora con un esempio come si costruisca graficamente l'ellisse centrale d'inerzia per un gruppo di forze. Siano 1, 2, 3, 4 (fig. 108), i punti d'applicazione di quattro forze parallele. Preso un asse  $x$  ad arbitrio, costruiamo parallelamente ad esso la retta delle forze 0, 1, 2, 3, 4 e proiettiamola da un polo  $P$ , e dopo aver disposte le forze parallelamente all'asse  $x$ , connettiamole con un poligono funicolare  $p$ , il quale ci dà i momenti statici ridotti 0'1, 1'2, 2'3, 3'4 e la linea della risultante, che deve contenere il baricentro  $G$  del sistema. Proiettata la retta dei momenti statici da un polo  $P'$  e connesse le stesse linee d'azione delle forze (ora linee d'azione delle forze momenti statici) con un secondo poligono funicolare  $p'$ , otteniamo la linea della risultante delle forze momenti statici, la quale conterrà l'antipolo  $X$  dell'asse  $x$ . Ad individuare il baricentro  $G$  e l'antipolo  $X$  ruotiamo le forze date e le forze momenti statici di  $90^\circ$  e connettiamole con due nuovi poligoni funicolari  $T$  e  $T'$  aventi i lati rispettivamente normali ai raggi dei fasci  $P$  e  $P'$ ; le linee delle risultanti fornite da questi ultimi poligoni funicolari incontrano quelle dei poligoni  $p$  e  $p'$  nei punti  $G$  ed  $X$ . Condotta la retta  $G X$ , i punti  $X$  ed  $X'$  sono coniugati, e quindi la media geometrica fra  $G X$  e  $G X'$  fornisce il semidiametro  $G E$  dell'ellisse centrale.





il suo centro  $C$  con  $E$  ad intersecare il circolo nei punti  $H$  e  $K$ ;  $OH$ ,  $OK$  sono le posizioni degli assi, le lunghezze dei semiassi valgono  $EK = a$ ,  $EH = b$  (1).

185.—Tracciata l'ellisse

centrale d'inertia si può determinare il raggio d'inertia relativo ad un asse qualunque. Si conduca (figura 110) l'asse baricentrico  $x_0$  parallelo al dato  $x$ ; ribaltato poi in  $GB$ , normalmente alla direzione coniugata  $AD$ , il semidiametro  $GA$  che rappresenti il raggio d'inertia relativo all'asse  $x_0$ , l'ipotenusa  $DB$  sarà, per la (27), il raggio d'inertia relativo all'asse  $x$ . Qualora nel prendere il momento d'inertia si dovessero valutare le distanze in una direzione diversa dalla coniugata  $AD$ , la costruzione precedente rimarrebbe tuttavia inalterata, salvo che la retta  $AGD$  assumerebbe la direzione voluta, pur rimanendo limitata fra l'asse  $x$  e la più lontana tangente all'ellisse parallela ad  $x$ .

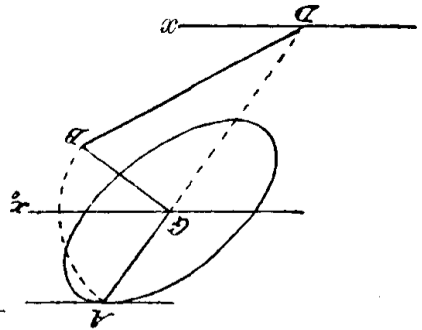


Fig. 110.

186. — Se l'ellisse centrale non è disegnata, ma è individuata soltanto da due diametri coniugati (figura 111), si procede nel seguente modo. Delle intersezioni  $M, N$  dell'asse dato  $x$  coi diametri  $PP', QQ'$  si trovino i punti coniugati  $M', N'$  (per ottenere, ad es., il punto  $M'$  basta ribaltare  $GP$  sulla normale a  $GP$  in  $GP_1$ , congiungere  $M$  con  $P_1$  e da  $P_1$  elevare la normale  $P_1M'$ ); la parallela per  $M'$  al diametro  $QQ'$  è l'asse del punto  $M$ , e la parallela per  $N'$  al diametro  $PP'$  è l'asse del punto  $N$ : il punto comune a questi due assi è quindi il centro  $X$  relativo all'ellisse centrale non disegnata, ma è individuata

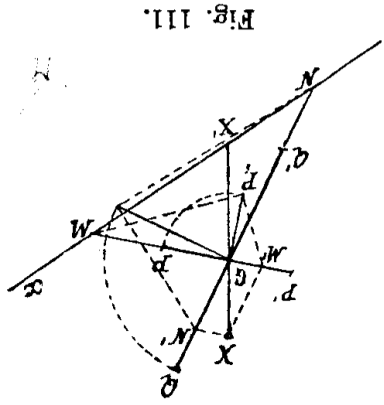


Fig. 111.

187. — Se l'ellisse centrale non è disegnata, ma è individuata soltanto da due diametri coniugati (figura 112), si procede nel seguente modo. Delle intersezioni  $M, N$  dell'asse dato  $x$  coi diametri  $PP', QQ'$  si trovino i punti coniugati  $M', N'$  (per ottenere, ad es., il punto  $M'$  basta ribaltare  $GP$  sulla normale a  $GP$  in  $GP_1$ , congiungere  $M$  con  $P_1$  e da  $P_1$  elevare la normale  $P_1M'$ ); la parallela per  $M'$  al diametro  $QQ'$  è l'asse del punto  $M$ , e la parallela per  $N'$  al diametro  $PP'$  è l'asse del punto  $N$ : il punto comune a questi due assi è quindi il centro  $X$  relativo all'ellisse centrale non disegnata, ma è individuata

(1) Questa costruzione si deduce facilmente da quella data dallo CHARRLES, Sections coniques, Paris, 1865.

l'asse  $x$ . Ciò posto, si ha il momento d'inerzia rispetto all'asse  $x$  dall'espressione  $G X' \cdot X X' \cdot Z p$  secondo la (31), e se si vuole il raggio d'inerzia, basta costruire la media geometrica fra  $X' G$  ed  $X' X$ .

187. Ellisse d'inerzia per un punto qualunque. — Sia  $O$  un punto qualunque del piano (fig. 112) ed  $o$  l'asse relativo, antipolare di  $O$  rispetto all'ellisse centrale del sistema: sia  $x$  un'asse uscente da  $O$  ed  $X$  il centro relativo. L'involuzione di punti coniugati  $X, X'$  esistente sull'asse  $o$  viene proiettata da  $O$  secondo un'involuzione di assi coniugati, a cui appartiene anche la coppia costituita dall'asse  $O G$  e dalla parallela ad  $o$  passante per  $O$ . Condotto per  $G$  l'asse  $x_0 \parallel x$ , il momento d'inerzia rispetto all'asse  $x$ , qualora si valutino le distanze nella direzione coniugata  $O X$ , è espresso da  $O X_1 \cdot O X_2 p$ , ovvero,

se  $O E$  è la media geometrica fra  $O X$  ed  $O X_1$ , da  $O E \cdot Z p$ .

Il punto  $E$  ed il simmetrico rispetto ad  $O$  sono i punti doppi dell'involuzione definita dal punto centrale  $O$  e dai due punti  $X, X_1$ , tracce dei due diametri coniugati  $G X, G X_1$  dell'ellisse centrale, i quali nella costruzione precedente si corrispondono in doppio modo. Ed inverso i raggi  $G X, G X_1$  proiettano da  $G$  il centro  $X$  ed il punto all'infinito del corrispondente asse  $x$ ; se ora in luogo di  $X$  si consideri il punto  $S$  di  $o$ , proiettato da  $G$  secondo  $G X_1$ , l'antipolare di  $S$  essendo la parallela a  $G X$  per  $O$ , il suo punto all'infinito è proiettato da  $G$  secondo  $G X$ . Da ciò si conchiude che il luogo geometrico di  $E$ , a cui non può appartenere il punto  $O$ , è un'ellisse. Rispetto ad essa l'asse  $o$  è la polare del baricentro  $G$  del sistema. Quest'ellisse resta determinata dai semidiametri coniugati  $OM, ON$ , il primo eguale al semidiametro dell'ellisse centrale parallelo ad  $o$ , il secondo dato dalla media geometrica fra  $OG$  ed  $OR$ .

Un punto qualunque del piano è adunque centro di un'ellisse, chiamata *ellisse d'inerzia*, che gode della stessa proprietà dell'ellisse centrale, e cioè che per un'asse qualunque passante per il suo centro, il raggio d'inerzia è misurato dal semidiametro coniugato.

188. Fochi. — Sull'asse minore dell'ellisse centrale alla distanza

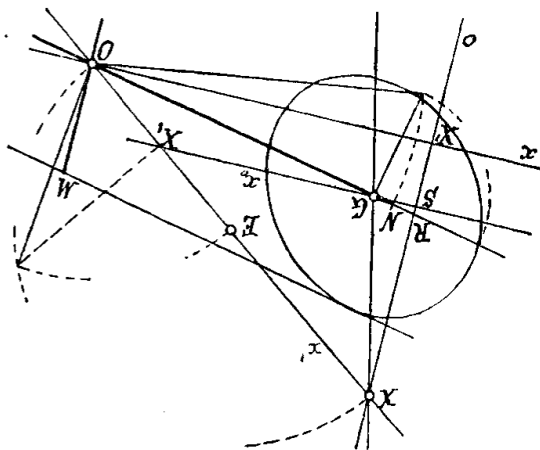


Fig. 112.

$\sqrt{a^2 - b^2}$  da una parte e dall'altra del baricentro, se  $a$  e  $b$  rappresentano rispettivamente i raggi d'inertza massimo e minimo pel baricentro, esistono due punti, *fochi*, per i quali evidentemente l'ellisse d'inertza diviene un circolo di raggio  $a$ , e tutte le coppie di assi coniugati sono, per conseguenza, ortogonali. Questi due circoli chiamansi *circoli d'inertza*; con essi anche si possono agevolmente risolvere i quesiti che vengono risolti coll'ellisse centrale, come: determinare il raggio d'inertza relativo ad un asse qualunque baricentrico; trovare il centro relativo ad un asse qualunque.

Gli assi principali d'inertza per un punto qualunque  $O$  del piano (fig. 113), cioè la coppia di assi coniugati ortogonali per quel punto, incontra l'asse minore dell'ellisse centrale in una coppia di punti coniugati in involuzione, rispetto ai quali i fochi rappresentano i punti uniti, e per conseguenza questi ultimi vengono proiettati da  $O$  secondo due raggi, di cui gli assi principali bisecano, uno l'angolo interno, l'altro l'angolo esterno. Questa proprietà fornisce il modo di tracciare immediatamente in posizione gli assi principali di inertza per un punto qualunque del piano, noti che siano i fochi (fig. 113): come pure di trovare per un dato asse  $x$  il punto  $O$  per cui quello e asse principale d'inertza (fig. 114), per il che basta calare da un

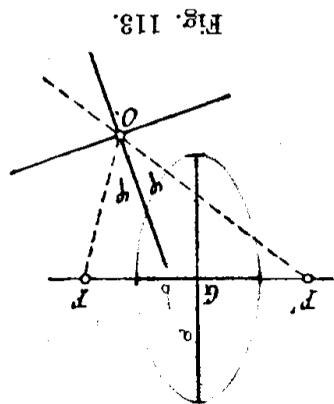


Fig. 113.

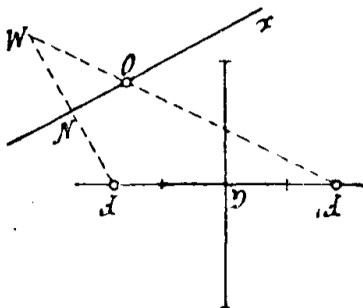


Fig. 114.

foco  $F$  la normale sull'asse dato, fare  $NM = FN$  e congiungere  $M$  con  $F'$ . Questo secondo problema può anche essere risoluto trovando il centro relativo all'asse dato (n. 186) e calando su di esso da quel punto la perpendicolare.

189. — Nella ricerca del momento d'inertza di un sistema di forze rispetto ad un asse, ovvero dell'antipolo di un asse, le quali operazioni servono poi anche alla costruzione della conica d'inertza, supponiamo le forze divise in gruppi. Per costruire i momenti statici rispetto all'asse  $x$ , potremo alle singole forze sostituire le risultanti

parziali dei vari gruppi, applicate ai baricentri dei gruppi stessi: si ha infatti, indicando con  $\Sigma p$  la somma delle forze di un gruppo qualunque, con  $d$  la distanza del suo baricentro dall'asse  $x$ ,

$$\Sigma p x = d \Sigma p.$$

Per determinare poi i momenti d'inerzia rispetto allo stesso asse,

ovvero per determinare l'antipolo  $X$ , di tutto il sistema, relativo all'asse  $x$ , potremo ancora sostituire ai momenti statici delle singole forze i momenti statici delle risultanti dei vari gruppi, purchè, invece di applicarli ai baricentri dei gruppi di forze, si applichino ai baricentri delle forze momentanti statici dei vari gruppi, che è quanto dire agli antipoli dell'asse  $x$  rispetto alle ellissi centrali dei vari gruppi (fig. 115).

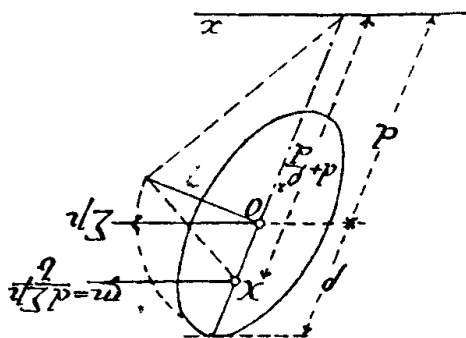


Fig. 115.

La distanza di uno di questi antipoli dall'asse  $x$  è  $d + \frac{p}{\rho}$ , dove  $\rho$  è il raggio d'inerzia relativo ad un asse che passi pel baricentro di quel gruppo e sia parallelo all'asse  $x$ . Il momento d'inerzia di quel gruppo è dunque espresso da

$$(34) \quad \Sigma p x^2 = d \cdot \left( d + \frac{p}{\rho^2} \right) \cdot \Sigma p;$$

i due poligoni funicolari servono appunto ad eseguire graficamente il prodotto  $d \cdot \Sigma p = b \cdot m$  e l'altro  $m \left( d + \frac{p}{\rho^2} \right) = c \cdot n$ . La (34) può anche scriversi

$$(35) \quad \Sigma p x^2 = (a^2 + \rho^2) \cdot \Sigma p,$$

la quale, come verifica, concorda colla (26), tenendo presente la (33). Per ciascun gruppo dunque la linea d'azione della forza (risultante parziale) la prima volta agisce alla distanza  $d$  dall'asse, ed è applicata al baricentro di quel gruppo; la seconda volta agisce alla distanza  $d + \frac{p}{\rho^2}$  ed è applicata all'antipolo dell'asse  $x$  rispetto all'ellisse centrale di quel gruppo. Questo mutamento di linea d'azione chiamasi *spostamento delle forze*. Quando per un dato gruppo di forze

la distanza  $d$  sia molto grande relativamente al valore  $\rho$ , lo spostamento  $\frac{d}{\rho^2}$  diviene piccolissimo e trascurabile nel disegno.

190. — L'espressione (35) mostra che, quando si abbia soltanto di mira di costruire il momento d'inerzia rispetto all'asse  $x$ , si può anche moltiplicare la risultante parziale  $\Sigma p$  due volte per  $\sqrt{d^2 + \rho^2}$ , ossia nei due poligoni funicolari si può far agire la risultante parziale sempre alla stessa distanza  $\sqrt{d^2 + \rho^2}$  dall'asse  $x$  (fig. 116). Tale distanza rappresenta poi il raggio d'inerzia di quel gruppo rispetto all'asse  $x$ . Si dice in tal caso che si è operato uno *spostamento intermedio*. Evidentemente con questo secondo metodo il primo poligono

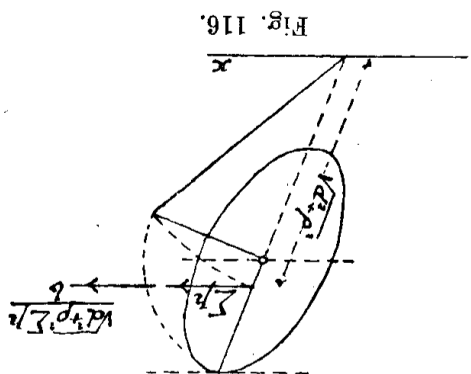


Fig. 116.

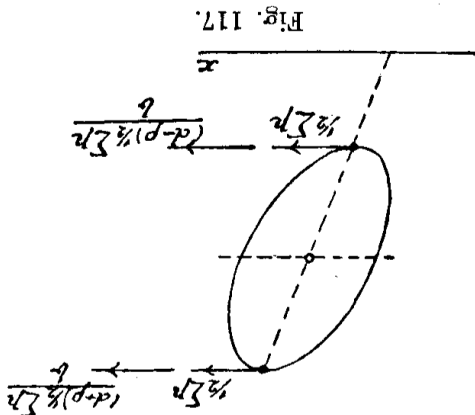


Fig. 117.

funicolare non ci dà più i momenti statici rispetto all'asse  $x$ , ed il secondo non serve più a darci il centro  $X$ , di tutto il sistema, relativo all'asse  $x$ . Questo secondo metodo è da adottarsi per quei gruppi, per i quali, per essere piccolissima la distanza  $d$  in confronto di  $\rho$ , lo spostamento  $\frac{d}{\rho^2}$  risulta tanto grande da portare la nuova linea d'azione fuori dei limiti del disegno. E poi indispensabile per quei gruppi per i quali  $d = 0$ , ossia per i quali l'asse rispetto a cui si cerca il momento d'inerzia è baricentrico; per essi lo spostamento intermedio si riduce a  $\rho$ .

191. — Da ultimo si può raggiungere lo stesso scopo frazionando tanto per primo che per secondo poligono funicolare la forza relativa al gruppo in due, applicate agli estremi del diametro (dell'ellisse centrale del gruppo) coniugato all'asse  $x$  (fig. 117). Si ha infatti

$$(d - \rho) (d - \rho) + \frac{1}{2} \Sigma p + (d + \rho) (d + \rho) + \frac{1}{2} \Sigma p = (d^2 + \rho^2) \Sigma p.$$

## § 2. — Momenti d'inerzia, ellisse centrale e nocciolo centrale di superficie piane.

192. — Chiamasi momento d'inerzia d'una superficie piana rispetto ad un asse  $x$  contenuto nel suo piano la somma  $\sum \omega x^2$  dei prodotti degli elementi superficiali  $\omega$  componenti la figura per i quadrati delle distanze  $x$  (in generale oblique) che essi hanno dall'asse.

Il momento d'inerzia d'una superficie piana è quindi proporzionale a quello di un sistema continuo di forze parallele applicate ai vari elementi della superficie e proporzionali alle aree degli elementi stessi. Il momento d'inerzia d'una superficie piana è un termine di 4° ordine, perchè è la somma di prodotti di aree per quadrati di distanze.

Il rapporto  $\frac{\sum \omega x^2}{\sum \omega}$  fra il momento d'inerzia e l'area è il quadrato del raggio d'inerzia di quella superficie rispetto all'asse  $x$ .

Per costruire graficamente il momento d'inerzia rispetto ad un asse, ovvero l'ellisse centrale d'inerzia di una superficie piana, la scomporremo in figure semplici, per le quali si sappia determinare il baricentro e l'ellisse centrale; applicheremo a questi baricentri parziali forze parallele proporzionali alle aree delle figure semplici, e cercheremo poi il momento d'inerzia, ovvero l'ellisse centrale di queste forze, avendo presente quanto è stato detto ai n. 189 a 191.

193. — Se nella figura data è possibile tracciare un sistema di corde parallele tali che risultino tutte bisecate da una medesima retta (mediama)  $y$ , questa mediana e la parallela  $x$  pel baricentro alle corde bisecate costituiscono in direzione due diametri coniugati dell'ellisse centrale. Infatti, consideriamo una striscia elementare compresa fra due corde successive: poichè tutti gli elementi di questa striscia distano della stessa quantità  $x$  dall'asse  $x$ , il momento di secondo ordine  $\sum \omega xy$  della striscia rispetto ai due assi  $x$  ed  $y$  potrà scriversi  $x \sum \omega y$ , ma  $\sum \omega y = 0$ , dunque  $\sum \omega xy = 0$ , e ciò valendo per una striscia qualunque, vale per tutta la figura, ossia i due assi  $x, y$  sono coniugati. 193

194. — Se un asse  $x$  si muove comunque nel piano della figura data, il centro relativo  $X$  genera la curva *antipolare reciproca* di quella involupata dall'asse  $x$  rispetto all'ellisse centrale. Se l'asse  $x$  involuppa il contorno della figura data senza mai segarla, la linea descritta dal centro  $X$  è il contorno di una figura che chiamasi *nocciolo centrale* della figura data. Disegnato il nocciolo centrale, si può

subito riconoscere se l'antipolare di un dato centro X taglia o è esterna, ovvero tocca il contorno della figura data. Si verificherà infatti il primo, o il secondo, ovvero il terzo caso, secondochè il centro X è esterno od interno, ovvero è situato sul contorno del nocciolo. Il nocciolo centrale può adunque essere definito: *il luogo dei centri relativi a tutti gli assi che non segano la figura data.*

195. — Chiamasi *momento d'inerzia polare di una superficie piana rispetto ad un polo* la somma dei prodotti dei vari elementi superficiali per quadrati delle distanze che essi hanno dal polo. Sia  $r$  la distanza di un elemento  $\omega$  dal polo  $O$ , siano  $x, y$  due assi ortogonali pel polo  $O$ , siano  $J_x, J_y$  il momento d'inerzia rispetto al polo  $O$  ed i momenti d'inerzia normali (1) rispetto agli assi  $x$  ed  $y$ , si avrà

$$J_p = \sum \omega r^2 = \sum \omega (x^2 + y^2) = \sum \omega x^2 + \sum \omega y^2 = J_x + J_y,$$

ossia: *il momento d'inerzia polare è eguale alla somma dei momenti d'inerzia normali relativi a due assi ortogonali passanti pel polo.* E siccome gli assi  $x, y$  possono avere un'orientazione qualunque, così: *rispetto a tutte le coppie di assi ortogonali incrociatisi in un medesimo punto la somma dei momenti d'inerzia normali è costante.* Supponiamo  $J_x = J_y = J$ , allora

(36)

$$J_p = 2J.$$

Per tutte le figure per le quali l'ellisse centrale degenera in un circolo, *circolo centrale*, la (36) dà il modo di dedurre il momento d'inerzia  $J$  rispetto ad un diametro, e quindi il raggio del circolo, dal momento d'inerzia polare  $J_p$  che è più facile a trovarsi, come vedremo in qualche esempio.

### Ellisse centrale

e nocciolo centrale di varie superficie piane semplici.

Passiamo ora alla ricerca dell'ellisse centrale e del nocciolo di varie figure semplici. Nell'esprimere il momento d'inerzia rispetto ad un asse baricentrico intenderemo sempre valutate le distanze nella direzione coniugata, di guisa che il raggio d'inerzia relativo a quell'asse rappresenterà il semidiametro dell'ellisse centrale che ha la direzione coniugata.

(1) Cioè valutando le distanze in direzione normale all'asse.





ciolo di un rettangolo è quindi un rombo  $\beta\gamma\alpha\delta$  omotetico al rombo EMNR ed il rapporto di omotetia è  $\frac{1}{3}$ : il nocciolo comprende sopra ciascuna mediana il terzo medio.

**Quadrato.** — Per un quadrato l'ellisse centrale diviene un cerchio; il momento d'inerzia rispetto ad un asse qualunque baricentrico, se  $b$  è il lato del quadrato, è  $\frac{1}{12}b^4$ ; il quadrato del raggio del circolo d'inerzia è  $\frac{1}{12}b^2$ ; il nocciolo è anche un quadrato.

**197. Parallelogrammo.** — Le due mediane e le due diagonali rappresentano in direzione due coppie di diametri coniugati; indicando con  $b$  e  $h$  i lati del parallelogrammo, con  $G_P$ ,  $G_Q$  i due semidiametri dell'ellisse centrale distesi sulle mediane, si ha  $G_P^2 = \frac{1}{12}h^2$ ,  $G_Q^2 = \frac{1}{12}b^2$ . Si costruiscono quindi i diametri coniugati  $PP_1$ ,  $QQ_1$  dell'ellisse, ed il nocciolo centrale colle stesse regole che valsero a determinare gli assi dell'ellisse ed il nocciolo centrale del rettangolo.

**198. Triangolo.** — Le tre mediane e le parallele pel baricentro ai lati del triangolo costituiscono in direzione tre coppie di diametri coniugati. Cominciamo a determinare il raggio d'inerzia relativo al-

l'asse  $x$  baricentrico parallelo al lato AC (fig. 119). Il triangolo dato è meta del parallelogrammo ABEC; rispetto all'asse  $x'$  parallelo ad  $x$  e che contiene il baricentro del parallelogrammo, sono evidentemente eguali i momenti d'inerzia dei due triangoli ACB, BCE, che sono inoltre equivalenti in area; ne deriva che il quadrato del raggio d'inerzia del triangolo dato rispetto all'asse  $x'$  è uguale a quello del parallelogrammo, ossia (nella direzione BD)

$$\text{è } \frac{1}{12} h^2 \text{ (1).}$$

(1) Tutte le volte che una superficie piana è decomponibile in  $n$  altre tutte equivalenti in area, e tali che i loro momenti d'inerzia rispetto ad un dato asse siano pure eguali fra loro, il raggio d'inerzia di tutta la figura rispetto a quell'asse, com'è facile dimostrare, risulta eguale a quello di una qualunque delle figure componenti.

è uguale a quello del parallelogrammo, ossia (nella direzione BD)

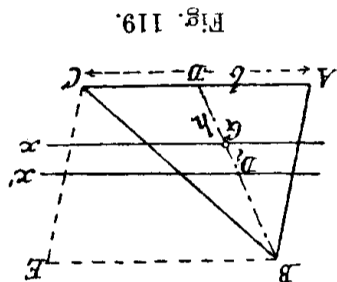


Fig. 119.

E quindi il quadrato del semidiametro GP della ellisse centrale, che va disteso sulla mediana, sarà dato (n. 180) da

$$GP^2 = \frac{1}{12} h^2 - \frac{36}{1} h^2 = \frac{1}{18} h^2;$$

questo semidiametro può costruirsi come media geometrica fra GD ed  $\frac{1}{2} GD$ .

Cerchiamo ora il raggio d'inerzia rispetto alla mediana BD. Rispetto a quest'asse sono evidentemente eguali i raggi d'inerzia dei due triangoli equivalenti ADB, DBC in cui la mediana divide il triangolo dato; quindi il raggio d'inerzia di uno di essi rispetto alla BD è eguale al raggio d'inerzia di tutto il triangolo rispetto alla stessa BD. Ora essendo  $\frac{1}{18} h^2$  il quadrato del raggio d'inerzia di un triangolo rispetto all'asse baricentrico parallelo alla base, quello relativo alla base sarà  $\frac{1}{18} h^2 + \frac{1}{9} h^2 = \frac{6}{1} h^2$ ; perciò il quadrato del semidiametro

che va disteso sull'asse  $x$  sarà dato da  $\frac{1}{1} \left( \frac{1}{2} b \right)^2 = \frac{1}{24} b^2$ , cosicchè questo

semidiametro può costruirsi come media geometrica fra  $\frac{1}{2} b$  ed

$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} b$ . L'ellisse centrale risulta in tal modo determinata.

Trovandosi i tre vertici del triangolo sulle tre mediane, i lati del nocciolo centrale saranno paralleli ai lati del triangolo; e dovendo i vertici del nocciolo cadere sulle tre mediane, il nocciolo centrale sarà un triangolo omotetico al dato. Si ha poi, indicando con  $D_1$  il vertice situato sulla mediana BD,

$$DD_1 = GD + \frac{GP^2}{GD} = \frac{1}{3} h + \frac{1}{18} h^2 = \frac{1}{2} h,$$

ossia i vertici del nocciolo sono i punti di mezzo delle mediane.

Inoltre  $GD_1 = \frac{6}{1} h = \frac{1}{4} GB$ ; dunque il rapporto di omotetia fra

i due triangoli è  $\frac{1}{4}$ .

199. Trapezio. — Sono direzioni coniugate (fig. 120) la mediana e la parallela  $x$  pel baricentro ai lati paralleli. Per trovare il semi-

diametro GP che va disteso sulla mediana, scomponiamo il trapezio nei due triangoli ABC, ACD. Gli assi baricentrici di questi due

triangoli, paralleli ad  $x$ , incontrano la mediana nei punti E, F, e la dividono in tre parti uguali. Le aree dei due triangoli sono proporzionali ad  $al, bl$ , ed i loro momenti d'inerzia rispetto all'asse  $x$  ad

$$(37) \quad al \left( \frac{1}{18} l^2 + \frac{GE}{2} \right), \quad bl \left( \frac{1}{18} l^2 + \frac{GF}{2} \right),$$

ma

$$\frac{GE}{b} = \frac{GF}{a}$$

da cui:

$$GE = \frac{3(a+b)}{bl}, \quad GF = \frac{3(a+b)}{al}$$

quindi le espressioni (37) divengono

$$al \left( \frac{1}{18} l^2 + \frac{9(a+b)^2}{9l^2} \right), \quad bl \left( \frac{1}{18} l^2 + \frac{9(a+b)^2}{9l^2} \right).$$

L'area di tutto il trapezio ed il suo momento d'inerzia rispetto all'asse  $x$  sono adunque proporzionali ad

$$l(a+b), \quad l^3 \left( \frac{a+b}{a+b} + \frac{9}{a^2l^2 + b^2l^2} \right),$$

e quindi

$$\frac{GP^2}{l^2} = \frac{1}{9} \left( \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} \right)$$

od anche

$$(3. GP)^2 = \frac{2}{l^2} + \frac{2}{ab l^2} (a+b)^2.$$

Sulla mediana  $l$  si descriva una semicirconferenza e si tiri il raggio normale ad  $l$ ; risulta  $NR = \sqrt{\frac{l^2}{2}}$ . Indi dal punto S d'intersezione

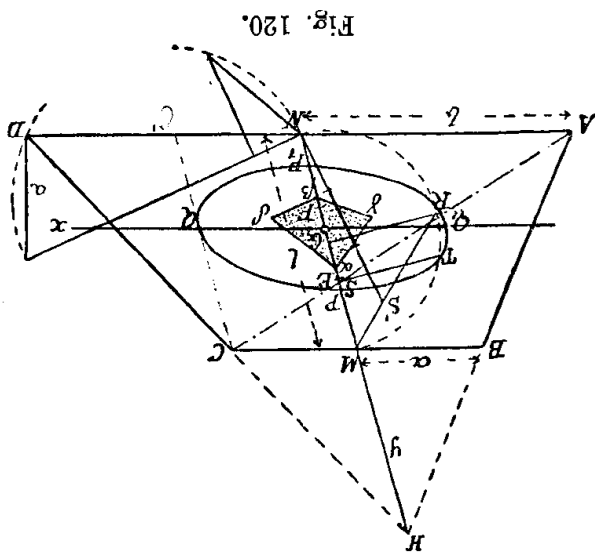


Fig. 120.

della diagonale AC colla mediana l si elevi la normale ST ad l, si avrà

$$ST = \sqrt{NS \cdot SM} = \sqrt{\frac{bl}{a+b} \cdot \frac{a+b}{al}} = \sqrt{\frac{ab}{a+b}}$$

Portato quindi ST in RS, si ottiene

$$GP = \frac{1}{3} NS;$$

Per costruire il semidiametro GQ, che va disteso sull'asse x, consideriamo il trapezio come differenza fra i due triangoli AHD, BHC. Si ha

$$HM = \frac{al}{b-a}, \quad HN = \frac{bl}{b-a};$$

le aree dei due triangoli sono proporzionali ad

$$\frac{a^2 l}{b-a}, \quad \frac{b^2 l}{b-a},$$

ed i loro momenti d'inerzia, rispetto all'asse y, ad

$$\frac{a^2 l}{a^2} \cdot \frac{b-a}{6}, \quad \frac{b^2 l}{b^2} \cdot \frac{b-a}{6}$$

Quindi l'area totale del trapezio ed il suo momento d'inerzia rispetto all'asse y sono proporzionali ad

$$\frac{b-a}{l} (b^2 - a^2), \quad \frac{6(b-a)}{l} (b^2 - a^2)$$

e perciò

$$\frac{GQ}{2} = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \cdot \frac{6(b-a)}{6} = \frac{6}{b^2 + a^2} = \frac{6}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{6}{6}$$

donde la costruzione grafica indicata nella figura.

Il nocciolo è un quadrilatero di cui due vertici opposti  $\alpha$  e  $\beta$  (centri degli assi AD, BC) si trovano sulla mediana, gli altri due  $\gamma$ ,  $\delta$  (centri degli assi CD, AB) si trovano sull'asse (parallelo ad x) relativo al punto H.

**200. Poligono regolare.** — Per un poligono regolare di  $n$  lati, l'ellisse centrale diviene evidentemente un circolo. Sia  $AB$  (fig. 121) un lato del poligono regolare,  $O$  sia il centro. Indichiamo con  $i_x, i_y$  rispettivamente il momento d'inertia polare relativo al centro  $O$ , il momento d'inertia normale relativo all'asse  $x$  ed il momento d'inertia normale per l'asse  $y$  del triangolo  $OAB$ ; si avrà

$$i_p = i_x + i_y = lh \left\{ \frac{1}{18} h^2 + \frac{9}{4} h^2 \right\} + \frac{6}{1} l^2 \left( h^2 + \frac{1}{3} l^2 \right),$$

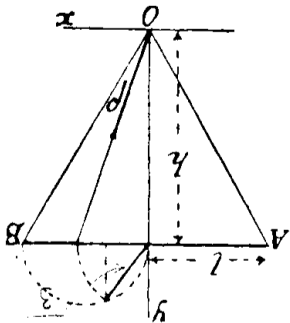
e quindi il momento d'inertia polare  $J_p$  di tutto il poligono sarà

$$J_p = n l h \left( h^2 + \frac{1}{3} l^2 \right),$$

ed il momento d'inertia  $J_x$  di tutto il poligono rispetto ad un asse  $x$  qualunque baricentrico sarà

$$J_x = n l h \left( h^2 + \frac{1}{3} l^2 \right),$$

Fig. 121.



e finalmente il raggio  $\rho$  del circolo centrale d'inertia verrà dato da

$$(38) \quad \rho = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{l^2} h^2 + \frac{1}{3} l^2}$$

che si costruisce come è indicato nella figura. Il nocciolo è un poligono regolare dello stesso numero di lati, inversamente omotetico a quello inscritto nel poligono dato; il suo raggio  $r$  ha il valore

$$(39) \quad r = \frac{\rho^2}{h} = \frac{1}{4} \left( h + \frac{1}{3} \frac{l^2}{h} \right)$$

**201. Circolo.** — Il momento d'inertia polare del circolo rispetto al suo centro è dato da

$$J_p = \int_R 2\pi r^2 r dr = \frac{\pi R^4}{2},$$

dove  $R$  è il raggio del circolo,  $r$  il raggio di una corona circolare elementare; quindi il momento d'inertia rispetto ad un diametro risulta

$$J = \frac{\pi R^4}{4},$$

ed il raggio del cerchio centrale d'inerzia vale

$$r = \frac{R}{2},$$

ed il raggio  $r$  del cerchio, nocciolo centrale, ha il valore

$$r = \frac{R}{4} = \frac{R^2}{4R}.$$

Agli stessi risultati conducono le formole (38) (39) facendo in esse  $h = R$  ed  $l$  infinitesimo.

202. ELLISSE. — Sia l'ellisse (fig. 122) di semiasse  $a$  e  $b$ ; si determina nel modo più semplice il momento d'inerzia rispetto all'asse  $x$ , considerando l'ellisse come figura affine

elementare del cerchio, punteggiata nella figura, di larghezza  $\alpha$  e di altezza  $\beta$ , corrisponde nell'ellisse un'altra striscia elementare della stessa altezza  $\beta$  e di larghezza  $\alpha_1 = \frac{b}{a} \alpha$ . Si avrà quindi

$$J_x = \Sigma \left( \frac{1}{12} \alpha_1 \beta^3 \right) = \frac{b}{a} \Sigma \left( \frac{1}{12} \alpha \beta^3 \right) = \frac{b}{a} \frac{\pi b^4}{4} = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Similmente si trova

$$J_y = \frac{\pi b a^3}{4},$$

e quindi  $\rho_x = \frac{b}{2}$ ,  $\rho_y = \frac{a}{2}$  ossia l'ellisse centrale di un'ellisse è

un'altra ellisse omotetica, ed il rapporto di omotetia è  $\frac{1}{2}$ .

Il nocciolo centrale è un'altra ellisse, omotetica ed il rapporto di omotetia è  $\frac{1}{4}$ ; infatti, detti  $a_1$  e  $b_1$  i semiasse di quest'ellisse, si ha

$$a_1 = \frac{a}{4} = \frac{a^2}{4a}, \quad b_1 = \frac{b}{4} = \frac{b^2}{4b}.$$

203. Superficie anulare compresa fra due ellissi omotetiche concentriche. — Siano  $a, a_1$  i due semiasse distesi sull'asse  $x$ ; siano

$$\int y dx, \quad \int y x^2 dx,$$

205. Segmento parabolico. — Il diametro BD coniugato alla base AC (fig. 123) e la parallela  $x_0$  a questa pel baricentro sono, in direzione, diametri coniugati dell'ellisse centrale. Per ottenere il semidiametro  $GQ$  che va disteso sull'asse  $y$  cominciamo a determinare il momento d'inertia rispetto all'asse  $x$ . L'area ed il momento d'inertia sono proporzionali rispettivamente ad

$$r = \frac{4R}{R_2 + R_1}.$$

e per il raggio del circolo nocciolo centrale

$$\rho = \frac{1}{2} \sqrt{R_2 + R_1}$$

204. Superficie anulare compresa tra due cerchi concentrici. — Si ottengono le formole relative a questa figura facendo in quelle del numero precedente  $a = b = R$ ,  $a_1 = b_1 = R_1$ . Si ottiene così per il raggio del circolo centrale d'inertia

$$\frac{4b}{b_2 + b_1^2} \text{ e quello disteso sull'asse } x \text{ è } \frac{4a}{a_2 + a_1^2}.$$

Il nocciolo è un'altra ellisse di cui il semiasse disteso sull'asse  $y$  è semiasse della ellisse centrale. cateti rispettivamente  $b, b_1; a, a_1$ . Questi raggi d'inertia sono poi i che si costruiscono come semipotenuse di due triangoli rettangolari di

$$\rho_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = \frac{1}{2} \sqrt{b_2 + b_1^2}, \quad \rho_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \frac{1}{2} \sqrt{a_2 + a_1^2},$$

quindi

$$F = \pi a b (1 - c^2);$$

l'area della figura è data da

$$J_x = \frac{\pi a b^3 (1 - c^4)}{4}, \quad J_y = \frac{\pi b a^3 (1 - c^4)}{4};$$

$$\frac{a}{b_1} = \frac{a}{b} = c, \text{ e quindi}$$

$b, b_1$  quelli distesi sull'asse  $y$ . Essendo simili le due ellissi, si ha

ed essendo  $y^2 = \frac{a}{b^2} x$ , si ottiene

$$I^2_x = \int_{\frac{a}{2}}^a x^2 x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{a^3}{7} = \frac{7}{8} a^3,$$

$$I^2_y = \int_{\frac{a}{2}}^a x dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{3}{8} a^2,$$

e quindi

$$GQ^2 = \frac{7}{3} a^2 - \left(\frac{5}{3} a\right)^2 = \frac{175}{12} a^2 = \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 25} a^3;$$

ma  $a = \frac{2}{5} GD$ , perciò anche

$$GQ^2 = \frac{7}{3} GD^2 = GD \cdot \frac{7}{3} GD.$$

Quindi  $GQ$  si costruisce come media geometrica fra  $GD$  e  $\frac{7}{3} GD$ .

Per determinare il semidiametro coniugato  $GQ$ , prendiamo il momento d'inerzia rispetto all'asse  $x$ . L'area ed il momento d'inerzia della figura sono proporzionali rispettivamente ad

$$\int (a-x) dy, \quad \int (a-x) y^2 dy.$$

ma  $x = \frac{y^2}{b^2} a$ , quindi l'area ed il momento d'inerzia sono anche pro-

porzionali ad

$$\int_0^a \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{3}{2} a,$$

$$\int_0^a \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) y^2 dy = \frac{15}{2} b^2.$$

e quindi

$$GQ^2 = \frac{\frac{15}{2} b^2}{\frac{3}{2} a} = \frac{5}{b^2} a = b \cdot \frac{5}{b}.$$

Si costruisce dunque  $GQ$  come media geometrica fra  $b$  e  $\frac{5}{3} b$ .

Il contorno del nocciolo risulta di un arco ellittico (antipolare reciproco dell'arco parabolico) e di due tangenti a quest'ellisse, le quali sono le antipolari degli estremi  $A$  e  $C$  della corda. La curva antipolare reciproca di tutta la parabola è un'ellisse la quale passa per  $G$ ;

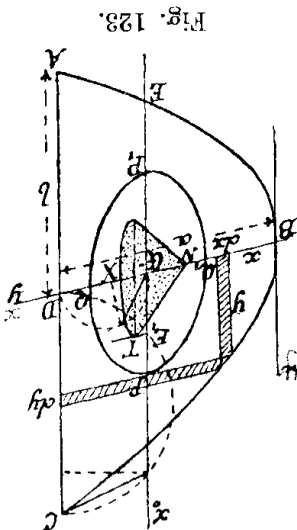


Fig. 123.



costruito il centro  $X$  relativo all'asse  $x$ ,  $G X$  ne è un diametro, il diametro coniugato è la parallela pel punto di mezzo di  $G X$  al-  
l'asse  $x_0$  e si determina la lunghezza del semidiametro costruendo  
l'asse  $E_1 T$  relativo al punto  $E$ .

**Momenti d'inerzia. Ellisse centrale e nocciolo centrale  
di superficie piane composte.**

206. Momento d'inerzia assiale di una figura composta. — La  
fig. 124 rappresenta la sezione di un ferro a T composto: se ne voglia

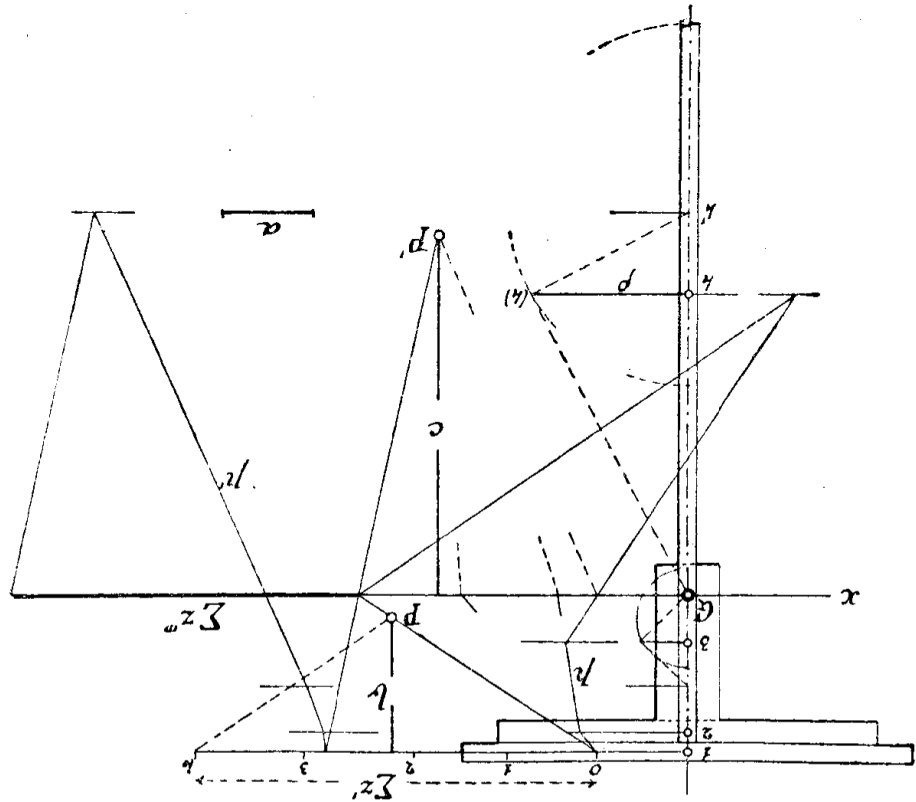


Fig. 124.

determinare graficamente il momento d'inerzia rispetto ad un asse  $x$ ,  
ad esempio, normale all'asse di simmetria e passante per il baricentro.  
Divisa la sezione in quattro aree rettangolari, come risulta dalla  
figura, si riducano queste ad una base arbitraria  $a$ , e coi segmenti  
proporzionali  $z'$  si formi la retta delle forze in direzione parallela  
ad  $x$ , orizzontale nel caso della figura, e la si proietti dal polo  $P$  a  
distanza  $b$  pure arbitraria. Le linee d'azione delle  $z'$ , cioè le orizzon-  
tali per i baricentri delle singole striscie, vengano connesse col poli-  
gono funicolare al polo  $P$ , con che restano determinati  
il baricentro  $G$  di tutta la figura e l'asse  $x$ , e prolungando i lati

del poligono fino a quest'asse vengono su di esso individuati i segmenti  $z''$  proporzionali ai momenti statici. Si considerino ora questi segmenti come nuove forze: si proiettino da un nuovo polo  $P'$  a distanza  $c$  arbitraria, e si trovino le nuove linee d'azione eseguendo gli spostamenti  $\frac{d}{c^2}$ . Nella figura essi sono apprezzabili sol-

tanto per il  $3^\circ$  e per il  $4^\circ$  rettangolo, e ne fu conservata la relativa costruzione geometrica; così per il rettangolo  $4$ , costruito il  $g$  come media geometrica fra  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{3}{2}$ .  $\frac{1}{1}$  dell'altezza del rettangolo, se ne è congiunto l'estremo (4) al punto  $G$ , e si è innalzata la normale (4)  $4'$  a tale congiungente, con che resta determinato l'antipolo  $4'$  dell'asse  $x$  rispetto all'ellisse centrale d'inertza del rettangolo  $4$ .

Le nove linee d'azione delle forze momenti statici vengono finalmente connesse col poligono funicolare  $p'$  relativo al polo  $P'$ . I lati estremi di questo secondo poligono funicolare (paralleli, perchè l'asse  $x$  è baricentrico) intercettano sull'asse  $x$  il segmento  $z''''$  tale che

$$J_x = abc z''''.$$

207. — La fig. 125 rappresenta la stessa ricerca eseguita col metodo di Mohr. Veramente con questo procedimento si dovrebbe dividere la figura in istrisce di piccolissima altezza, onde conseguire una sufficiente approssimazione; ma si può evitare questa complicazione osservando che la curva secondo cui degenera il poligono funicolare  $p$  quando le strisce divergono di altezza infinitesima, viene toccata dal poligono  $p$  in corrispondenza delle dividenti. Ciò da modo di tracciare con sufficiente approssimazione la suddetta curva, anche quando siasi divisa la figura in istrisce di notevole altezza.

Con questo metodo, indicando con  $F'$  l'area totale della figura, e con  $F''$  l'area punteggiata, si ottiene (n. 179)

$$J_x = a \cdot z z' \cdot F' = F \cdot F'' \quad (40)$$

Si ha infatti con i soliti simboli, e supponendo la figura divisa in istrisce di area  $\Delta F$  di altezza piccolissima

$$J_x = \sum \Delta F \cdot x^2 = a \sum z' x \cdot x = 2ab \sum \frac{1}{2} m x = 2ab \cdot F'$$

e facendo  $b = \frac{1}{2} z z'$  si ha la (40).

208. — I due metodi che abbiamo qui applicati supponendo che l'asse  $x$  passasse pel baricentro, sussistono invariati per un asse qua-

lungue. Così, ad esempio, col secondo metodo, se si vuole invece il momento d'inertia rispetto all'asse  $x'$  distante  $d$  dall'asse  $x$  baricentrico, tutto si riduce ad aggiungere all'area punteggiata quella del

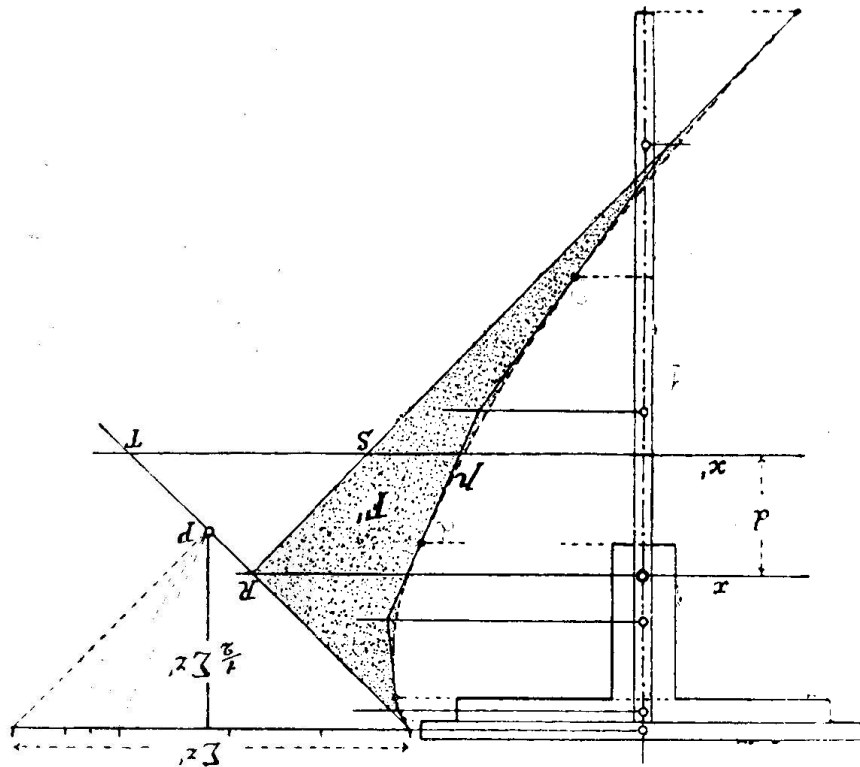


Fig. 125.

triangolo R S T. Si osservi che in questo triangolo, il quale è simile a quello che ha per vertice P e per base  $\sum z$ , risulta  $S T = 2d$ , e quindi la sua area vale  $d^2$ , e però

$$J_{x'} = J_x + F d^2$$

come appunto dev'essere.

209. — Vogliamo infine accennare ancora al metodo *Nehls* per valutare graficamente il momento d'inertia di un'area, con tutto che esso derivi da un semplice artificio di trasformazione di aree. Questo metodo può in taluni casi riuscire di qualche giovamento, supponendo, come del resto anche col metodo Mohr, che si abbia poi a disposizione un planimetro per la misura rapida delle aree. Supponiamo, per contemplare il caso più corrente, con tutto che il metodo sia generale, che la figura ammetta un asse di simmetria, e che se ne voglia il momento d'inertia rispetto ad un asse normale a

quello. Si potrà allora limitare la ricerca ad una metà dell'area; essa vedesi indicata punteggiata nella fig. 126: il suo momento rispetto all'asse  $x$  è espresso da

$$J_x = \int y^2 z dy$$

essendo  $z dy$  l'area di una striscia elementare parallela all'asse  $x$  e distante  $y$  da esso.

Si tiri una parallela all'asse  $x$  alla distanza  $a$ , come è indicato nella figura: vi si proiettì sopra parallelamente all'asse  $y$  la lunghezza  $z$  della striscia elementare, e questo segmento venga poi proiettato da  $O$  di nuovo sulla corda  $z$  prolungata. Si ottiene così il segmento

$$z' = z \frac{a}{y}.$$

Ripetuta la stessa costruzione per molte corde vicinissime della sezione data, e riunite con una linea continua le estremità di tutte le  $z'$ , si ottiene una nuova figura di area  $F'$  tale che

$$F' = \int z' dy = \frac{a}{1} \int z y dy = \frac{a}{1} J_x$$

se con  $J_x$  s'intende il momento statico della figura data rispetto all'asse  $x$ .

Ripetendo ora sulla figura  $F'$  la stessa trasformazione eseguita sulla figura  $F$ , ed indicando con  $F''$  l'area della nuova figura che così si ottiene, si avrà

$$F'' = \int z'' dy = \frac{a}{1} \int z' y dy = \frac{a^2}{1} \int z y^2 dy = \frac{a^2}{1} J_x.$$

Se si prende  $a = 1$  si ha semplicemente

$$F' = J_x, \quad F'' = J_x.$$

La posizione del baricentro della figura resta notoriamente determinata dalla

$$OG = \frac{F}{J_x} = a$$

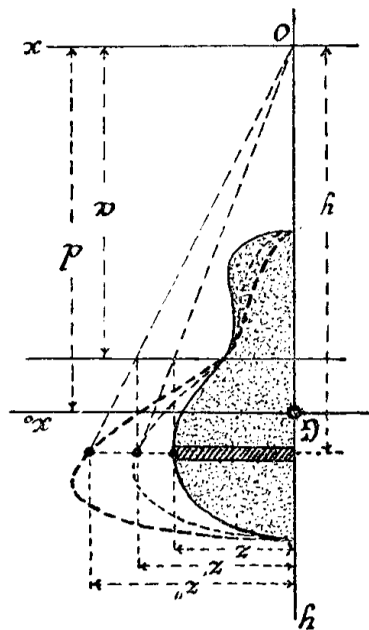


Fig. 126.

Il momento d'inertia rispetto all'asse baricentrico  $x_0//x$  viene finalmente espresso da

$$J_{x_0} = J_x - F d^2.$$

**210. Ellisse centrale e nocciolo centrale di superficie piane composte.** — Per le figure di cui si conoscono *a priori* le direzioni di due diametri coniugati si potrebbe costruire di un asse qualunque  $x$  il centro relativo  $X$  (fig. 111) e poi le medie geometriche fra  $G M$ ,  $G M'$ , e fra  $G N$ ,  $G N'$ , le quali rappresenterebbero i semidiametri coniugati  $G P$  e  $G Q$  dell'ellisse centrale. Ma il metodo del numero seguente è preferibile.

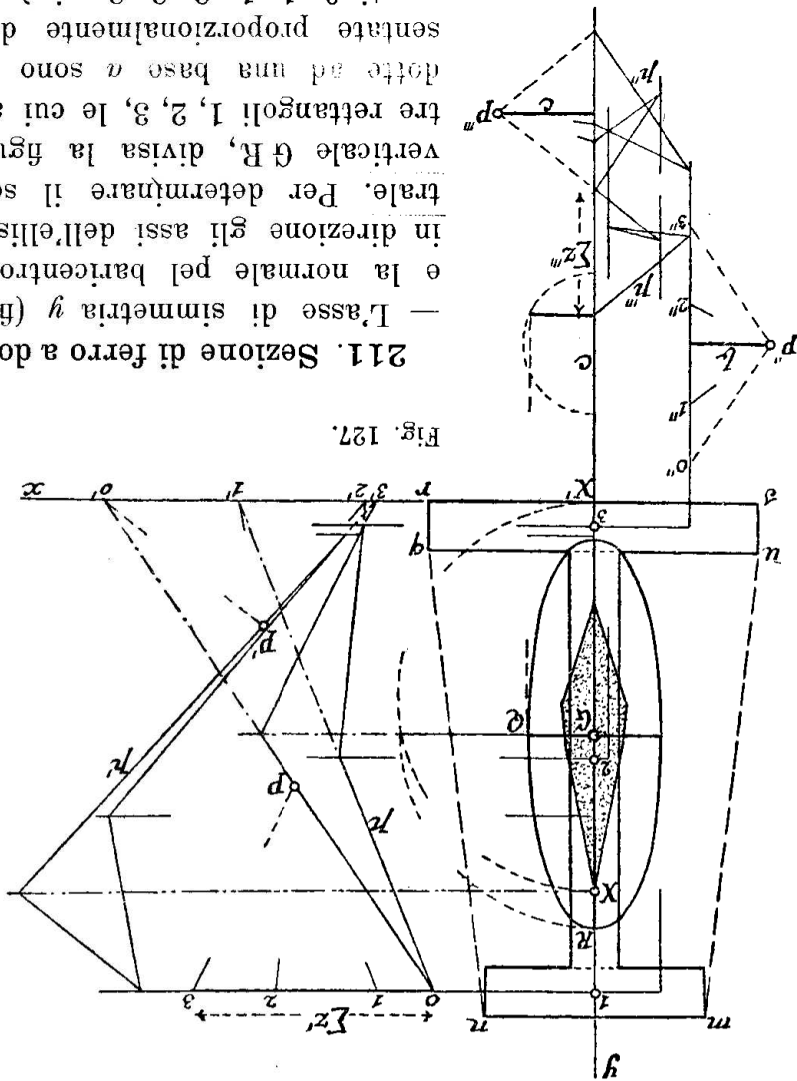


Fig. 127.

**211. Sezione di ferro a doppio T.** — L'asse di simmetria  $y$  (fig. 127) e la normale pel baricentro danno in direzione gli assi dell'ellisse centrale. Per determinare il semiasse verticale  $G R$ , divisa la figura nei tre rettangoli 1, 2, 3, le cui aree rappresentate ad una base  $a$  sono rappresentate proporzionalmente dai segmenti 0.1, 1.2, 2.3, si è cercato dell'asse  $x$  orizzontale il centro  $X$  (si è preso l'asse  $x$  coincidente col lato inferiore della figura per avere contemporaneamente nel punto  $X$  un vertice del nocciolo). Per ciò si sono applicate orizzon-

talmente ai baricentri parziali 1, 2, 3, le forze 0, 1, 1, 2, 2, 3 e si sono collegate col poligono funicolare  $p$  relativo al polo  $F$ ; questo poligono determina sull'asse  $x$  i segmenti  $0'1'$ ,  $1'2'$ ,  $2'3'$  proporzionali ai momenti statici rispetto all'asse  $x$  delle aree in cui si è scomposta la figura data; e nello stesso tempo serve a determinare il baricentro  $G$  della figura. Dipoi, eseguiti gli spostamenti  $\frac{d^2}{2}$  per il rettangolo  $I$  lo spostamento è trascurabile), ed applicati, sempre parallelamente all'asse  $x$ , alle distanze  $d + \frac{d^2}{2}$  da esso, i segmenti  $0'1'$ ,  $1'2'$ ,  $2'3'$ , considerati come nuove forze, si è costruito il secondo poligono funicolare  $p'$ , relativo al polo  $F'$ , il quale ha servito a determinare il centro  $X$ . La media geometrica fra  $G X$  e  $G X'$  ha dato il semiasse verticale  $G R$  dell'ellisse centrale.

Per determinare il semiasse orizzontale  $G Q$  si è tenuta un'altra via. Si è costruito il momento d'inerzia della figura rispetto all'asse di simmetria  $y$ ; essendo questo baricentrico per tutti e tre i rettangoli, si è dovuto operare per tutti lo spostamento intermedio, e per ciascuno dei tre rettangoli la linea d'azione della forza agisce alla distanza  $d$  dall'asse  $y$  (n. 190).  $p. 117$

Si è così ottenuto  $J_y = abcZz'''$ , mentre  $F = aZz'$ , e quindi

$$GQ = \frac{J_y}{F} = \frac{abcZz'''}{aZz'}$$

ed essendosi preso  $b = \frac{Zz'}{3}$ , si ha semplicemente

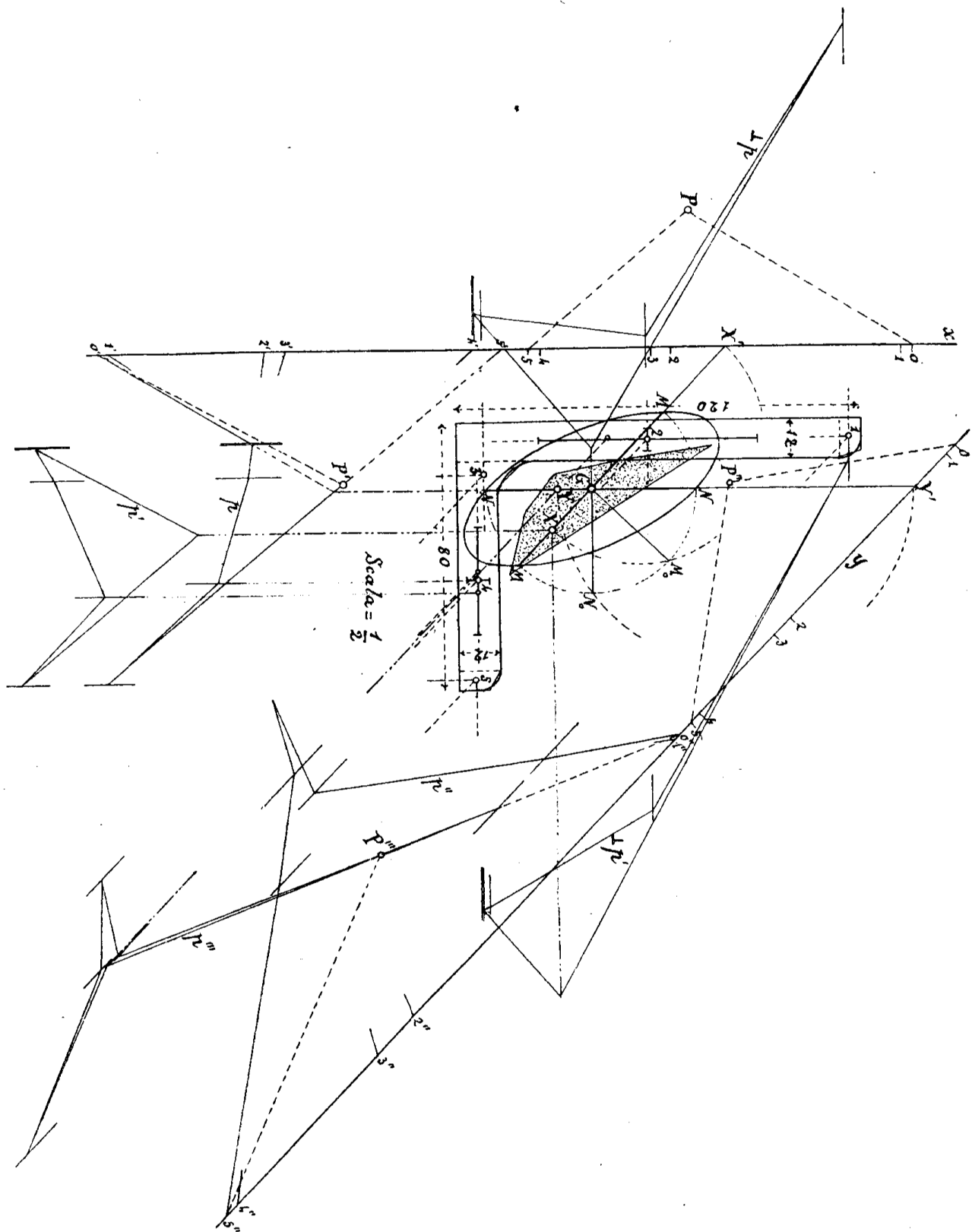
$$\frac{GQ}{Zz'''} = c \cdot \frac{1}{3}$$

e quindi si è costruito  $G Q$  come media geometrica fra  $c$  e  $\frac{1}{3} Zz'''$ .

Il nocciolo è un esagono: è la figura antipolare reciproca dell'esagono  $mnpqrsu$  rispetto all'ellisse centrale.

212. Sezione dissimmetrica. — Per una figura la quale non presenti un asse di simmetria, o più generalmente una mediana, per esempio la sezione di un ferro ad angolo (fig. 128), si segura il modo tenuto per un sistema di forze concentrate; si cercherà cioè di un asse  $x$  qualunque il centro relativo  $X$ ; la media geometrica fra  $G X$ ,  $G X'$  (dove  $G$  è il baricentro della figura,  $X'$  il centro coniugato ad  $X$ ) da un semidiametro dell'ellisse centrale. Preso poi un

Fig. 128.



asse  $y$  parallelo a  $G'X$ , se ne cerchi il centro relativo  $Y$ , il quale cadrà sull'asse baricentrico parallelo ad  $x$ ; la media geometrica fra  $G'Y$ ,  $G'Y'$  (dove  $Y'$  è il centro coniugato di  $Y$ ) dà il semidiametro coniugato.

L'ellisse centrale resta così definita per mezzo di una coppia di diametri coniugati: molte volte però interessa conoscerne gli assi e questi si possono facilmente determinare colla costruzione indicata al n. 184, fig. 109.

Nell'esempio trattato nella fig. 128, la sezione del cantonale (pro-  

$$\left( \frac{80 \times 120}{12} \right)$$
 venne divisa in cinque aree parziali:
   
due rettangoli e tre trapezi. Le forze proporzionali ai momenti statici rispetto all'asse  $x$ , si ritengono applicate ancora ai baricentri delle figure 1, 2, 3 e 5, riuscendo trascurabile lo spostamento (n. 189); il quale invece risulta apprezzabile per il rettangolo 4. Rispetto all'asse  $y$  risultano apprezzabili gli spostamenti per i due rettangoli.

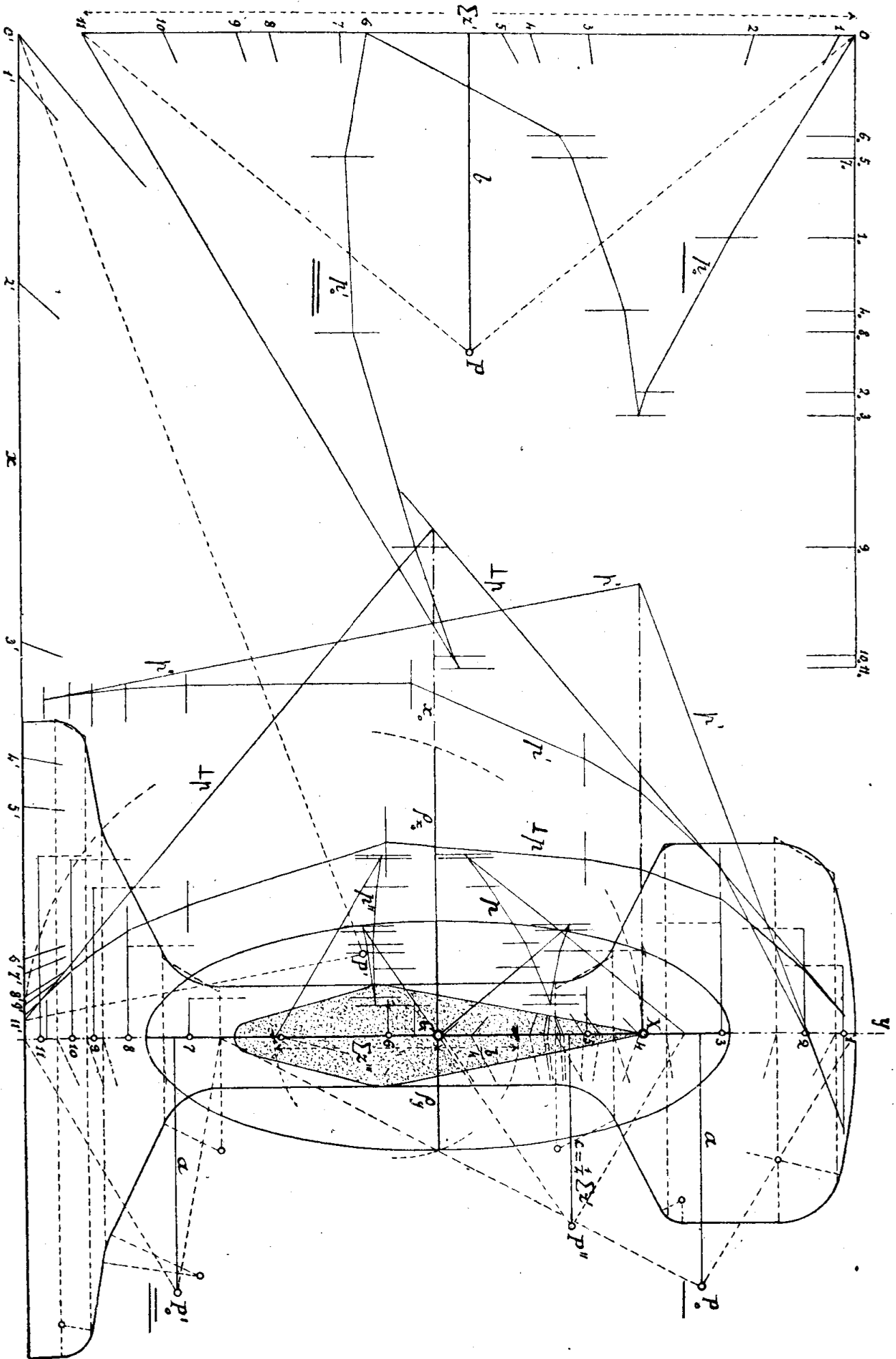
**213. Superficie piane a contorno curvilineo qualunque.** — Quando si debba determinare il momento d'inerzia rispetto ad un'asse  $x$ , ovvero il centro  $X$  relativo all'asse  $x$  in una figura a contorno curvilineo, conviene dividere la figura con un sistema di corde parallele, per modo che le striscie che ne risultano possano essere considerate con sufficiente approssimazione come rettangoli o parallelogrammi o trapezi o triangoli o segmenti parabolici, ecc.; cioè come superficie semplici, delle quali sappiamo determinare l'ellisse centrale. Che se poi le striscie sono abbastanza basse e parallele all'asse  $x$  e questo non è troppo vicino ad alcuna di esse, si ha una notevole semplificazione nelle costruzioni per il fatto che riescono trascurabili gli spostamenti.

Nella fig. 129 si è fatta la ricerca dell'ellisse centrale e del nocciolo centrale per una sezione di rotata. Si è divisa la figura in 11 striscie, di cui la prima si è considerata come un segmento parabolico e tutte le altre o come trapezi o come rettangoli. Il metodo seguito per la ricerca dell'ellisse centrale è quello stesso spiegato al n. 211. Gli spostamenti sono apprezzabili soltanto per le striscie 6<sup>a</sup> e 11<sup>a</sup>. Nella figura fu conservata la costruzione per la ricerca dei segmenti  $z$  proporzionali alle varie striscie (n. 25 a).

**214. Centro di spinta idrostatica.** — La ricerca del centro relativo ad un'asse serve anche alla determinazione del punto di applicazione della risultante delle pressioni idrostatiche che esercitansi



Fig. 129.



contro gli elementi di una superficie piana immersa nell'acqua stagnante. Infatti, su di un elemento  $\omega$  qualunque della detta superficie, alla distanza  $x$  sotto l'orizzontale corrispondente al livello superiore, la pressione idrostatica è proporzionale ad  $\omega x$ , ossia al momento statico dell'elemento  $\omega$  rispetto alla detta orizzontale; quindi il punto d'applicazione della risultante di tutte le pressioni elementari, punto che chiamasi *centro di spinta*, coincide col centro della superficie piana immersa, relativa all'orizzontale che segna il livello superiore.