

TRAVATURE RETICOLARI

CAPITOLO V.

Nozioni generali.

148. — Intendasi per *travatura reticolare* un sistema di aste rettilinee, collegate fra loro alle estremità a cerniera; chiamansi *nodi* della travatura i punti di concorso delle aste.

Sotto molteplici e svariate forme s'incontrano nella pratica le travature reticolari: nella costruzione dei ponti, delle tettoie, ecc.

Se ad alcuni o a tutti i nodi di una travatura reticolare sono ap-

plicate delle forze esterne, le quali formino un sistema in equilibrio, la travatura serve di nesso rigido fra queste forze. Se si prescinda dal peso proprio della costruzione, ovvero lo si imagina, in via di approssimazione, concentrato ai nodi, e se si trascura l'effetto dell'attrito che si sviluppa nelle cerniere in seguito alla deformazione elastica della travatura, le cerniere di estremità di ciascuna asta esercitano su di essa due forze uguali ed opposte, dirette secondo il suo asse geometrico, le quali tendono a stirarla, ovvero a comprimerla.

Nel primo caso l'asta è *tesa*, nel secondo *compressa*: l'asta reagisce con forze uguali ed opposte, esercitando sui nodi, nel primo caso uno sforzo di trazione, ed allora l'asta dicesi un *tirante*, nel secondo caso uno sforzo di compressione, ed in tal caso l'asta chiamasi un *puntone*.

Distinguonsi le travature reticolari in tre categorie, cioè in *travature deformabili*, *strettamente indeformabili* e *ad aste sovrabbondanti*. Una travatura dicesi *deformabile* se essa può assumere più forme, invariata restando la lunghezza delle sue aste. Si dice *strettamente indeformabile* quando non si può modificare la sua forma senza alterare la lunghezza di qualche asta, mentre, togliendo un'asta qualunque, la travatura diviene deformabile. Si dice, infine, *ad aste sovrabbondanti*, quando si può togliere una o più aste, senza che la travatura divenga deformabile (1).

(1) In queste considerazioni la parola *deformabilità* non riguarda le deformazioni elastiche, di cui si parlerà in altre parti del Corso.

§ 1. — Travature reticolari piane.

149. — Ci occuperemo in questo paragrafo soltanto delle travature reticolari *piane*, le cui aste cioè giacciono tutte in un medesimo piano contenente anche le forze ad esse applicate.

Sia a il numero delle aste ed n il numero dei nodi di una travatura strettamente indeformabile; sia a_1 l'asta che collega due nodi qualunque n_1, n_2 , un terzo nodo n_3 resta invariabilmente collegato ai due nodi n_1, n_2 per mezzo di due aste a_2, a_3 ; le tre aste a_1, a_2, a_3 formano una travatura strettamente indeformabile (un triangolo). Un quarto nodo qualunque n_4 resta collegato a questo sistema, invariabilmente, e col minor numero possibile di aste, mediante due aste a_4, a_5 che lo uniscono a due qualunque dei tre nodi n_1, n_2, n_3 , e così di seguito. I primi due nodi sono dunque collegati dall'asta a_1 , un altro nodo qualunque degli $n - 2$ rimanenti viene collegato mediante due aste, quindi il numero totale delle aste sarà $a = 2(n - 2) + 1$, ossia:

$$(18) \quad a = 2n - 3.$$

Questa relazione serve a decidere a quale categoria una travatura appartiene; secondo che si ha $a \leq 2n - 3$ la travatura appartiene

alla prima, alla seconda od alla terza categoria.

In questo modo di generazione della travatura due aste a, a' , colleganti un nodo C ad un sistema già strettamente indeformabile, non devono mai essere per diritto; altrimenti, se a quel nodo fosse applicata una forza esterna che dia una componente P normale ad aa' , gli sforzi interni nelle dette aste risulterebbero infiniti.

Vero è che, in seguito alla deformazione elastica del sistema, lo sforzo teoricamente infinito diverrebbe finito; tuttavia rimarrebbe sempre di un valore estremamente grande rispetto a P, talché la travatura non sarebbe pratica, sia per la enorme sezione da attribuirsi alle aste a, a' , sia perchè in seguito alla loro variazione elastica di lunghezza, ancorchè piccolissima, ne deriverebbe uno spostamento finito del nodo C. Che se poi il nodo C fosse scarico, le due aste a, a' si comporterebbero come un'unica asta, la quale perciò diverrebbe *sovrabbondante*.

Supposta verificata la relazione $a = 2n - 3$, prima di concludere che la travatura è strettamente indeformabile, bisogna verificare che essa non sia in qualche sua parte ad aste sovrabbondanti ed in altre indeformabile, cioè bisogna verificare che essa possa essere generata

nel modo sopra indicato, ossia che ciascun nodo sia collegato mediante due aste ad un sistema già di per sé indeformabile. Questa condizione è evidentemente soddisfatta nelle travature cosiddette *triangolari*, perchè costituite da una serie di triangoli contigui. Fra queste sono specialmente interessanti quelle che risultano da una successione di triangoli, ognuno dei quali ha un lato in comune col precedente ed uno in comune col susseguente, sicchè in tutti i nodi concorrono tre o più aste, salvo in due appartenenti al primo ed all'ultimo triangolo della serie, nei quali concorrono soltanto due aste. In queste travature chiamansi *aste di contorno* quelle che appartengono ad un solo triangolo, ed *aste di parte (montanti se verticali, diagonali se inclinate)* quelle che sono comuni a due triangoli.

150. — In verità, non tutte le travature reticolari strettamente indeformabili che può occorrere di considerare nella pratica, rispondono alla generazione sopra indicata; conviene quindi completare le nozioni a questo riguardo.

In una travatura strettamente indeformabile possiamo sempre scorgere più parti strettamente indeformabili (riducibili anche a semplici aste), le quali vengono poi collegate fra loro in modo indeformabile o per mezzo di una cerniera ed un'asta, ovvero per mezzo di tre aste non concorrenti in un punto. Così, ad esempio, nella travatura rappresentata dalla fig. 75, le due parti punteggiate, che sono per sé

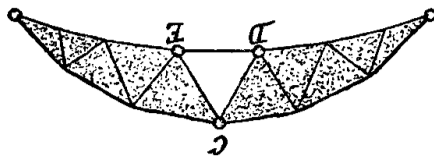


Fig. 75.

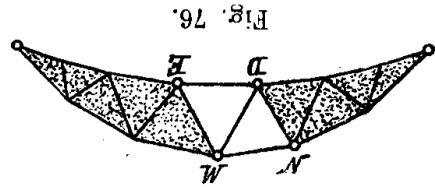


Fig. 76.

stesse travature strettamente indeformabili, vengono invariabilmente collegate fra loro da una cerniera C, che impedisce qualunque moto relativo di traslazione delle due parti, e da un'asta DE, che impedisce il moto relativo di rotazione delle due parti intorno a C. Ma l'ufficio della cerniera C resta egualmente disimpegnato da due aste; così nella fig. 76 le due parti punteggiate, già di per sé strettamente

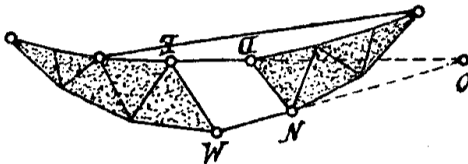


Fig. 77.

indeformabili, restano collegate fra loro mediante le due aste MN, MD, per modo che non è più possibile che un moto relativo di rotazione intorno ad M, e che viene impedito dall'asta DE. Se si togliesse l'asta MD (fig. 77), sarebbe ancora permessa alle due parti una rotazione istantanea relativa intorno al centro O *di istantanea rotazione*, o, come anche si

chiama, *polo di rotazione* o *cerniera ideale*; la terza asta è adunque indispensabile, ma può collegare due nodi qualunque delle due parti punteggiate, purchè la sua linea non passi anch'essa per O, nel qual caso il suddetto moto istantaneo di rotazione non resterebbe impedito. Le figg. 78 e 79 rappresentano altri casi semplicissimi di sistemi reticolari strettamente indeformabili, ottenuti nel modo teste indicato. Due triangoli, esterni nella fig. 78, uno interno all'altro nella fig. 79, vengono invariabilmente collegati fra loro colle tre aste 1, 2, 3.

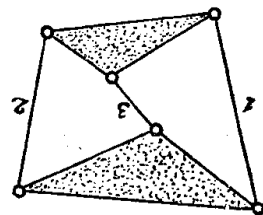


Fig. 78.

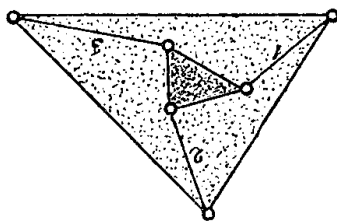


Fig. 79.

Senza alterare la posizione dei nodi ed il numero delle aste, è ovvia la trasformazione di questi sistemi in travature triangolari, quindi sta sempre la (18) caratterizzante una travatura strettamente indeformabile.

151. Vincoli. — Una travatura reticolare piana strettamente indeformabile ha nel suo piano tre libertà di movimento, e quindi per fissarne invariabilmente la posizione occorrono tre corrispondenti impedimenti o vincoli, o condizioni di appoggio. Se riguardiamo la terra

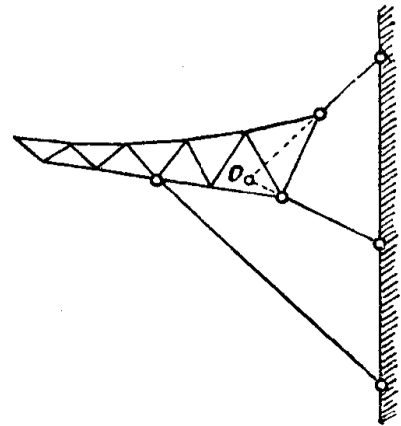


Fig. 80.

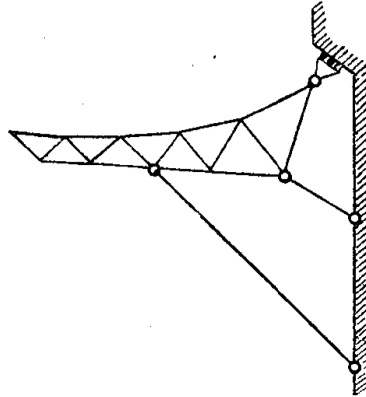


Fig. 81.

ferma come un altro sistema indeformabile, per collegare ad essa invariabilmente una travatura piana saranno necessarie e sufficienti tre aste non concorrenti in un punto (fig. 80) (ben inteso, sempre quando non esista alcuna azione tendente a far uscire la travatura dal suo piano; praticamente si evita questo pericolo con collegamenti

trasversali, dei quali non è qui il luogo di occuparci). Queste tre aste possono chiamarsi *aste di appoggio*: al nodo collegato da ciascuna di esse rimane ancora, e soltanto, la possibilità di uno spostamento piccolissimo in direzione normale all'asta; essa adunque equivale ad un *appoggio semplice scorrevole in direzione normale all'asta* (fig. 81). Due aste di appoggio inclinate, od i corrispondenti due appoggi semplici equivalenti ad una cerniera (ideale O nella fig. 80, reale A nella fig. 82). Se le due aste A B, A C di questo schema si considerano

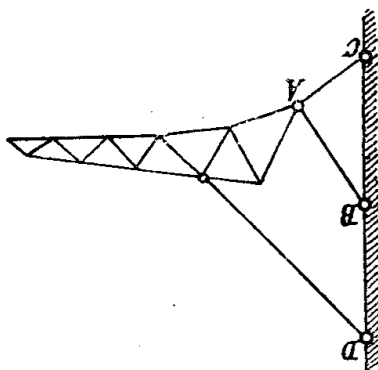


Fig. 82.

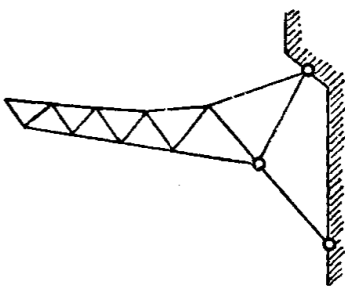


Fig. 83.

come appartenenti alla terra ferma, la travatura resta vincolata da una cerniera fissa (doppio impedimento), e da un'asta (fig. 83), ovvero da una cerniera fissa e da un appoggio scorrevole (fig. 84).

Se i vincoli che collegano la travatura alla terra equivalgono a più di tre appoggi semplici, la travatura diviene staticamente indeterminata, a meno che si sopprima in essa un numero di aste eguale

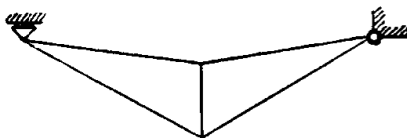


Fig. 84.

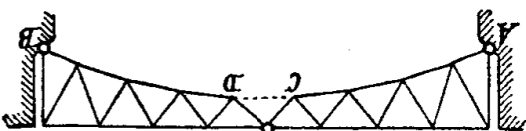


Fig. 85.

al maggior numero di condizioni d'appoggio. Così l'arco reticolare rappresentato dalla fig. 85, impostato con due cerniere fisse A e B, sarebbe staticamente indeterminato, corrispondendo le due cerniere in



Fig. 86.

complesso a 4 appoggi semplici; ma se si sopprime, per esempio, l'asta CD, esso diviene strettamente indeformabile (*arco con tre cerniere*). Un altro esempio lo offre la travatura della fig. 86, *trave Gerber*: essa presenta cinque condizioni d'appoggio, e cioè una cer-

niera A (doppio appoggio), e tre appoggi semplici; ma in compenso la travatura per se stessa difetta di due aste: essa è quindi staticamente determinata.

Riassumendo, se indichiamo con a' (≤ 3) il numero di condizioni semplici d'appoggio, od anche il numero di aste di appoggio, la travatura è strettamente indeformabile, e perciò staticamente determinata tutte le volte che

$$(19) \quad a + 3 = 2n \quad a + a' = 2n.$$

Naturalmente le condizioni di appoggio devono essere efficaci, non devono cioè corrispondere a casi di eccezione.

152. Travature caricate ai nodi. — Il problema di cui ora vogliamo occuparci è il seguente: Determinare gli sforzi interni lungo le aste componenti una travatura reticolare sollecitata ad alcuni od a tutti i suoi nodi da date forze esterne in equilibrio.

Tale problema può risolversi in modo unico e determinato, colle sole leggi della statica dei sistemi rigidi, quando la travatura non presenta aste nè vincoli sovrabbondanti. Di ciò ci si persuade immediatamente supponendo di risolvere il problema per via analitica, ed infatti, poichè ogni nodo della travatura è in equilibrio sotto l'azione della forza esterna (se vi è) e degli sforzi su di esso sviluppati dalle varie aste ivi concorrenti, si deduce che per ciascun nodo possono scriversi due equazioni lineari di equilibrio fra queste forze; in tutto si avranno dunque $2n$ equazioni, quante appunto occorrono per determinare i $2n - 3$ sforzi incogniti delle aste, se la travatura è strettamente indeformabile, e le reazioni dei vincoli.

Se la travatura è deformabile per la mancanza di k aste, il problema è più che determinato, ed una tale travatura rimarrà in equilibrio se le $2n$ equazioni soddisferanno, oltre che alle tre equazioni di equilibrio delle forze esterne, ad altre k condizioni esprimenti che gli sforzi nelle aste che mancano sono nulli: $2n - (3 + k)$ equazioni servono in tal caso a determinare gli sforzi nelle aste.

Se finalmente la travatura ha k aste sovrabbondanti, si dovrebbe con $2n - 3$ equazioni determinare $2n - 3 + k$ sforzi: il problema è dunque indeterminato colle sole leggi della statica, e non può essere risoluto senza il concorso della teoria dell'elasticità. Per tale ragione queste travature, di cui ci occuperemo in altre parti del Corso, vengono dette travature staticamente indeterminate, od anche iperstatiche.

153. — Graficamente si risolve il problema delle travature reticolari costruendo per ciascun nodo un poligono chiuso il quale ne rap-

presenti l'equilibrio, e ciò si farà, quando lo schema lo permetta, cominciando da un nodo nel quale concorrono due sole aste, e vi sia applicata una forza esterna, e passando poi successivamente agli altri nodi, per modo però che per ciascuno di essi non siano incogniti gli sforzi in più di due aste.

✕ *Metodo di Cremona.* — Si possono peraltro aggruppare tutti questi poligoni di equilibrio in una figura unica chiamata *diagramma reciproco* della travatura data, ciò che torna a vantaggio della celerità, dell'esattezza e dell'eleganza della costruzione. Fra questa figura e lo *schema* della travatura deve evidentemente esistere la seguente relazione: ad ogni nodo della travatura nel quale concorrono n rette, una delle quali può essere la linea d'azione di una forza esterna, e le altre le aste concorrenti in quel nodo, deve corrispondere nel diagramma reciproco un poligono chiuso di n lati, rispettivamente paralleli alle rette concorrenti in quel nodo.

Ma abbiamo veduto (n. 99) che le proiezioni ortografiche di due poliedri reciproci dedotti dal sistema focale, godono reciprocamente di questa proprietà; dunque, se riteniamo che una di queste figure rappresenti lo schema di una travatura reticolare, l'altra figura rappresenta il diagramma degli sforzi interni delle varie aste.

Abbiamo già mostrato (nn. 100 e 101) come il poligono delle forze ed il poligono funicolare possano essere riguardati come figure reciproche; supposto che i lati del poligono funicolare rappresentino delle aste articolate fra loro, abbiamo nei raggi protettanti del poligono delle forze gli sforzi interni a cui esse andrebbero soggette.

Andiamo ora a vedere come debbono immaginarsi i due poliedri reciproci, le cui proiezioni sul piano ortografico costituiscono una *schema* della travatura reticolare, l'altra il diagramma reciproco. Il primo poliedro risulta da un poligono gobbo s di n lati, orlo di una superficie poliedrica S semplicemente connessa e di una superficie piramidale il cui vertice n -edro sia O ; nel poliedro reciproco, ai lati del poligono gobbo s corrispondono n spigoli laterali σ tali che il primo sarà in un medesimo piano col secondo il secondo col terzo,, l'ultimo col primo; al vertice n -edro O corrisponderà un poligono piano Ω , n -latero, i cui vertici sono sugli spigoli laterali σ ; alla superficie poliedrica S , un'altra superficie poliedrica semplicemente connessa Z . Ai vertici del poligono gobbo s corrispondono in questo secondo poliedro le faccie quadrate formate da due spigoli successivi σ , da un lato del poligono Ω e da uno spigolo della superficie Z . Proiettiamo ora i due poliedri sul piano ortografico; rappresenti la fig. 87 a) la proiezione del secondo poliedro, siano 1, 2, 3, 4, 5 le proiezioni degli spigoli laterali σ , il poligono I, II, III, IV, V sia la

proiezione del poligono piano Ω , le rette 6, 7, ..., 12 rappresentino le proiezioni degli spigoli della superficie poliedrica Σ . Nella fig. *b*) il poligono 0 1 2 3 4 5 rappresenti la proiezione del poligono gobbo s , il fascio P la proiezione del vertice O ; costruiamo ora le proiezioni

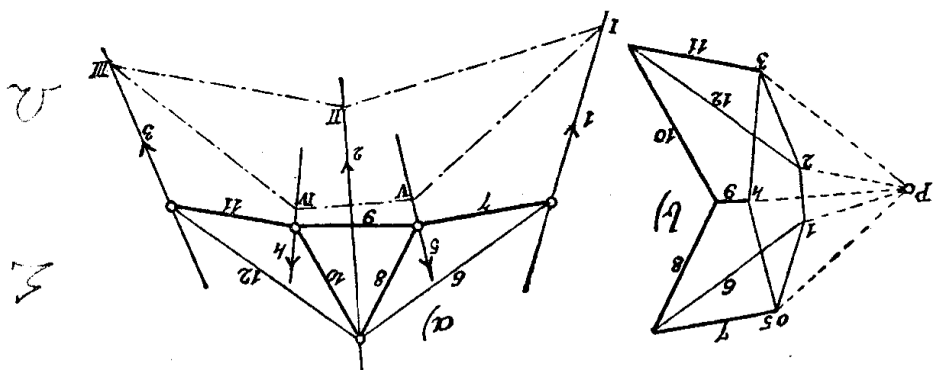


Fig. 87.

degli spigoli della superficie poliedrica S , che è quanto dire le proiezioni delle rette reciproche di quelle che si proiettano nelle rette 6, 7, ..., 12 della fig. *a*). Cominciamo dal costruire il triangolo corrispondente al punto 1. 6. 7 della fig. *a*), osservando che nella fig. *b*) la retta 6 deve uscire dal vertice 1 corrispondente al quadrilatero 1. 6. 2. I II della fig. *a*) e la retta 7, per analogia ragione, dal vertice 0. Costruiamo in seguito il quadrilatero corrispondente al punto 5. 7. 8. 9 della fig. *a*), osservando che nella fig. *b*) la retta 8 deve uscire dal punto 6. 7 corrispondente al triangolo 6. 7. 8 della fig. *a*) e la retta 9 dal vertice 4 corrispondente al quadrilatero 5. 9. 4. IV V della fig. *a*). Costruiamo in seguito il quadrilatero corrispondente al punto 4. 9. 10. 11, osservando che la retta 10 deve uscire dal punto 8. 9 e la retta 11 dal vertice 3. La retta che va dal vertice 2 della fig. *b*) al punto 10. 11 deve risultare parallela alla retta 12 della fig. *a*); ciò serve di verifica dell'esattezza della costruzione; il pentagono della fig. *b*) 1. 2. 12. 10. 8. 6 è il corrispondente del punto 2. 12. 10. 8. 6 della fig. *a*).

Supponiamo ora che le rette 6, 7, ..., 12 della fig. *a*) rappresentino lo schema di una travatura reticolare, ai nodi della quale siano applicate le forze esterne 1. 2. 3. 4. 5 in equilibrio, connesse dal poligono funicolare I II III IV V. Nella fig. *b*), 0 1 2 3 4 5 è il poligono delle forze esterne in equilibrio applicate ai nodi della travatura, P è il centro del fascio relativo al poligono funicolare che connette quelle forze; il complesso delle rette 6, 7, ..., 12, rappresenta il dia-

gramma reciproco dello schema della travatura, ossia quelle rette ci rappresentano gli sforzi interni nelle varie aste della travatura.

154. — Vediamo ora come si determina la natura degli sforzi nelle varie aste che concorrono in un nodo, cioè se sono essi sforzi di tensione, nel qual caso le aste diconsi *tiranti*, ovvero sforzi di compressione, nel qual caso le aste chiamansi *puntoni*. A tale uopo basta percorrere il poligono della fig. *b*) relativo a quel nodo, nell'ordine *ciclico* che viene definito dal senso della forza esterna (se vi è), ovvero dal senso già noto di uno sforzo interno: veniamo così a determinare il senso degli sforzi esercitati dalle aste contro quel nodo: se tali sforzi sono diretti contro il nodo, le aste sono puntoni, nel caso contrario sono tiranti. Rappresenteremo sempre i tiranti e i relativi sforzi di tensione con linee sottili, i puntoni e i relativi sforzi di compressione con linee più grosse; con linee di grossezza intermedia, le forze esterne.

Ciascuna retta del diagramma *b*) rappresenta due forze eguali ed opposte, che sono le reazioni uguali ed opposte che ogni asta della travatura esercita contro i due nodi che essa collega; ed infatti ogni lato del diagramma *b*) è comune a due poligoni, ed esso viene generato in opposti sensi quando i contorni di quei due poligoni vengono percorsi nel loro ordine ciclico.

155. — Spesse volte non è necessario di connettere le forze esterne date con un poligono funicolare allo scopo di determinare le reazioni degli appoggi, perchè esse sono già note; in tal caso non si presenta nella fig. *a*) il poligono funicolare e nella fig. *b*) il fascio proiezione *P*. Queste figure possono nondimeno considerarsi sempre come proiezioni di poliedri reciproci: basta supporre che il vertice *O* del primo poliedro cada nel punto all'∞ della direzione principale, il poliedro *O* del secondo cada allora nel punto all'∞ della direzione principale; in tal caso il poligono delle forze esterne si riduce ad una retta delle forze; ciò corrisponde a supporre che il poligono gobbo *s* del primo poliedro divenga un poligono piano contenuto in un piano avente la direzione principale.

156. — Dato lo schema di una travatura, per costruire il diagramma reciproco bisogna prima di tutto costruire il poligono delle forze esterne in equilibrio, *disponendole nell'ordine col quale s'incontrano percorrendo il contorno della travatura* (supposto, ciò che ammettremo sempre, che i nodi ai quali sono applicate le forze esterne si

trovino sul contorno della travatura), senza di che è impossibile costruire il diagramma. Questo poligono si può costruire immediatamente quando le reazioni degli appoggi siano note; nel caso contrario bisogna prima determinarle collegando le forze date con un poligono funicolare, e qui non è sempre possibile costruire il poligono delle forze esterne nell'ordine sopra detto; cosicchè bisognerà in certi casi, dopo determinate le reazioni degli appoggi, costruire di nuovo il poligono delle forze esterne disponendole nell'ordine voluto. Ciò fatto, si potrà cominciare la costruzione del diagramma partendo da un nodo della travatura nel quale concorrono due sole aste e sia applicata una forza esterna; si passerà poi successivamente in tutti gli altri nodi, in modo però che in ciascun nodo non vi siano più di due sforzi incogniti da determinare.

Questo elegante metodo di determinare gli sforzi a cui vanno soggette le aste di una travatura reticolare, basato sull'equilibrio dei singoli nodi, è dovuto al Cremona (1).

157. Metodo delle sezioni. — Un altro metodo che torna utile in taluni casi è il *metodo delle sezioni*, il quale può essere presentato sotto due forme distinte. Immaginando la travatura divisa in due parti, mediante una sezione la quale tagli alcune aste, una qualunque di queste parti può essere mantenuta in equilibrio, se raggiungiamo alle forze esterne sollecitanti quella porzione di travatura, altre forze agenti lungo le aste sezionate, esattamente equipollenti agli sforzi interni sopportati dalle aste stesse, quando la travatura completa era in equilibrio; se quindi di questi ultimi sono ignoti soltanto tre, purchè le loro linee d'azione soddisfino alle condizioni espresse al n. 67, si potrà decomporre la risultante di tutte le forze note secondo le tre linee suddette: queste componenti volte in senso opposto rappresenteranno gli sforzi ignoti. Questo metodo grafico è dovuto al Culmann (2).

Assunto come centro dei momenti il punto comune alle linee d'azione di due degli sforzi ignoti, l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a quel punto non contiene d'incognito che il terzo sforzo ignoto, e serve quindi a determinarlo. Sotto questa forma il metodo delle sezioni assume anche il nome di *metodo dei momenti statici* o

(1) CREMONA L., *Le figure reciproche nella Statica grafica.* — Milano, 1872. 2ª ediz. 1879. Ediz. franc., Paris, 1885.
(2) CULMANN K., *Die graphische Statik.* — Zürich, 1886, 2ª ediz. 1875. Edizione franc., 1880.

metodo di Ritter (1). Il centro dei momenti così scelto diceasi il polo dell'asta di cui si determina lo sforzo. Quando per date forze esterne si debbano determinare gli sforzi in tutte le aste della travatura, è preferibile il metodo di Cremona; quando invece si debba determinare lo sforzo in una sola od in poche aste, è preferibile il metodo delle sezioni.

158. Applicazioni. — Daremo ora soltanto alcuni esempi pratici di travature reticolari col corrispondente diagramma degli sforzi interni.

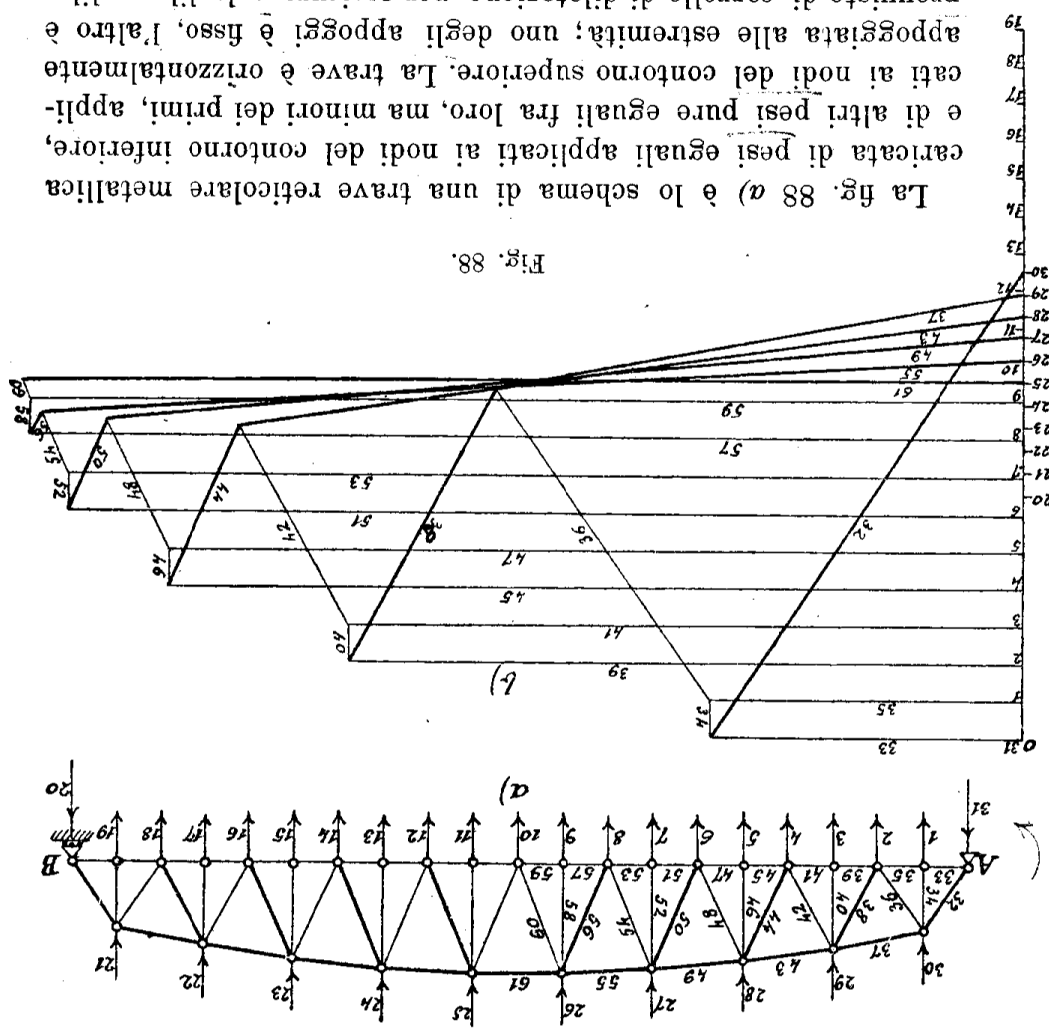


Fig. 88.

La fig. 88 (a) è lo schema di una trave reticolare metallica caricata di pesi eguali applicati ai nodi del contorno inferiore, e di altri pesi pure eguali fra loro, ma minori dei primi, applicati ai nodi del contorno superiore. La trave è orizzontalmente appoggiata alle estremità; uno degli appoggi è fisso, l'altro è provvisto di carrello di dilatazione, per assicurare la libera dilatazione della trave prodotta da variazioni di temperatura; ne deriva che ambedue le reazioni degli appoggi saranno verticali, tali essendo

(1) Ritter A., *Elementare Theorie und Berechnung eiserner Dach und Brücken-Construktionen.* — Leipzig, 1882.

159. — La fig. 89 a) rappresenta lo schema di una *capriata* per un *piano carricatore*, la quale, oltre ad essere caricata di pesi applicati ai nodi del contorno superiore, è investita dal vento sulla falda sinistra. Su ciascuno dei nodi di questa parte si ha quindi una forza risultante dal carico e dalla pressione del vento. La risultante totale

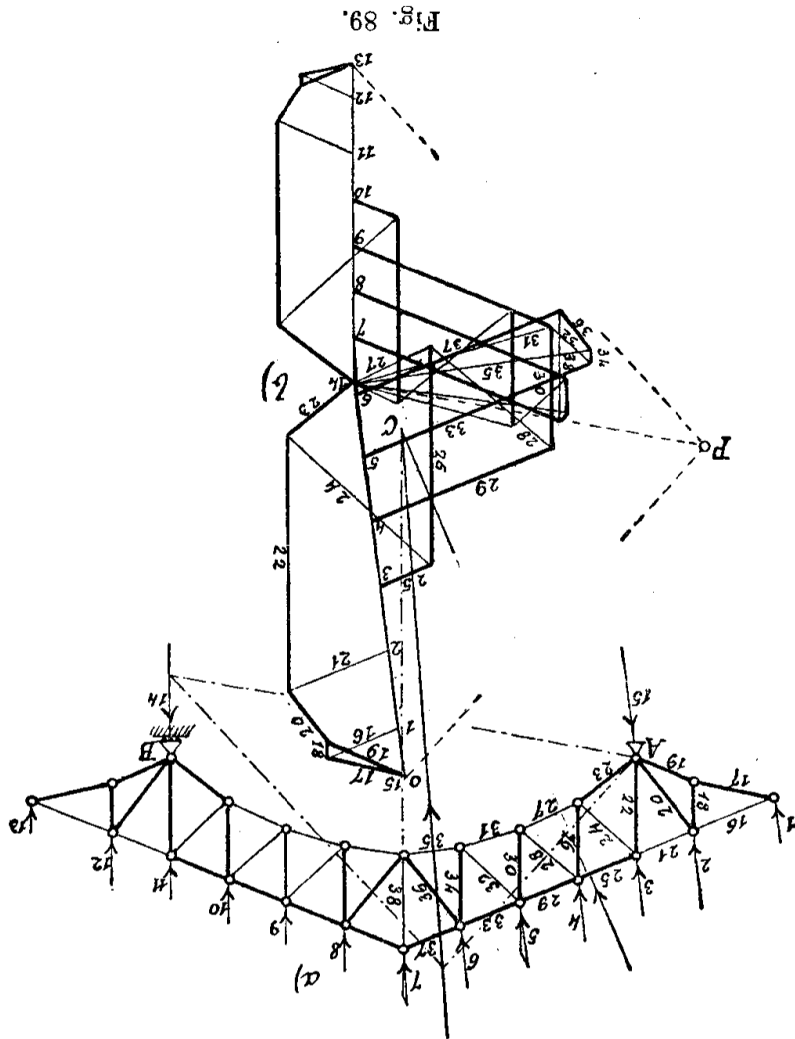


Fig. 89.

i carichi. Inoltre, poiché la trave è simmetrica e simmetricamente caricata, le reazioni degli appoggi saranno eguali ciascuna a metà del carico totale. È molto facile adunque costruire il poligono delle forze esterne in equilibrio, il quale in questo caso si riduce ad una retta (fig. 88 b).
Cio fatto, si può costruire il diagramma reciproco partendo dal nodo A e seguendo le norme per lo addietto indicate. Nella figura si è costruito soltanto una metà del diagramma, l'altra metà è simmetrica alla prima.

di tutte le forze applicate alla capriata, equipollente al lato di chiusura 0. 13, passa pel punto C comune alla verticale media, linea d'azione della risultante di tutto il carico, e alla linea della risultante della pressione del vento. Supposta la capriata semplicemente e orizzontalmente appoggiata in B, e vincolata in A, con un triangolo funicolare si sono determinate le reazioni 13. 14, 14. 15 degli appoggi. Completato così il poligono delle forze esterne in equilibrio, si è passato alla costruzione del diagramma reciproco, il quale non presenta alcuna difficoltà.

160. — La fig. 90 a) rappresenta lo schema di una travatura risultante di due parti articolate tra loro a cerniera in C e vincolate

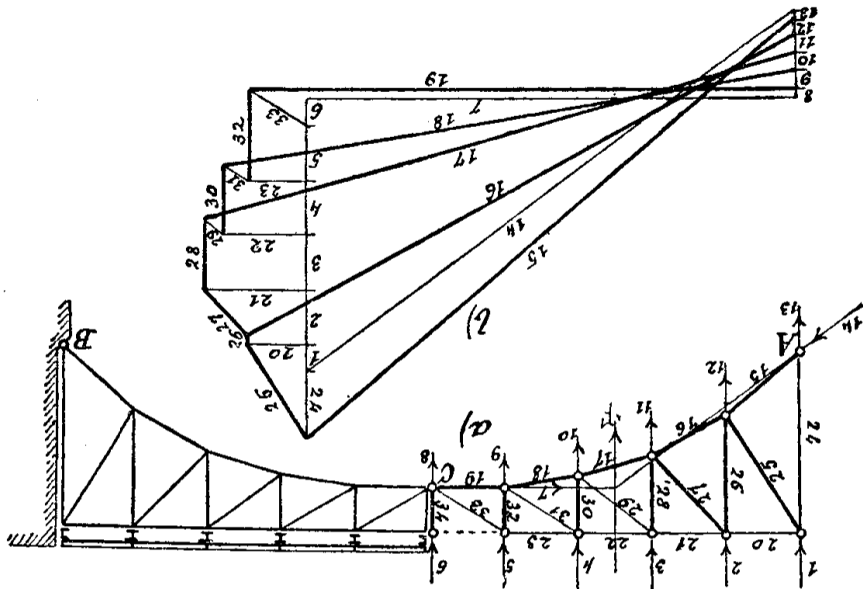


Fig. 90.

a cerniera alle imposte A e B; a questa travatura si dà il nome di *arco a tre cerniere con timpani reticolati*. Ai nodi del contorno superiore sono applicati dei carichi verticali eguali; peraltro sui nodi estremi insiste un carico metà. Eguale distribuzione di carichi è supposta per i nodi del contorno inferiore; ma l'intensità è minore. La reazione mutua che si trasmettono le due semitravature attraverso alla cerniera al vertice (cfr. fig. 64) è evidentemente orizzontale a causa della simmetria dello schema e del carico; resta quindi facilmente determinata anche la linea della reazione della imposta A. Dopo ciò possiamo costruire il poligono delle forze esterne in equilibrio applicate alla metà sinistra della travatura (valutando fra queste la spinta orizzontale al vertice che la metà destra esercita contro la

meta sinistra) ed in seguito il diagramma reciproco, fig. 90 b). Essendo la travatura simmetrica e simmetricamente caricata, il diagramma per l'altra meta risulterà simmetrico a quello disegnato.

161. — La fig. 91 a) è lo schema di una trave americana Fink a tre montanti, caricata ai nodi superiori: questa non è più una tra-

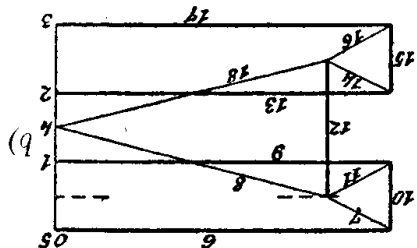
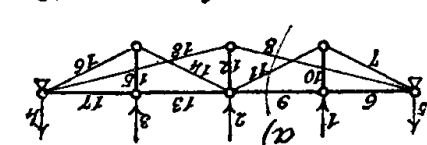


Fig. 91.

vatura triangolare e non c'è alcun nodo in cui concorrono soltanto due aste e sia applicata una forza esterna, cosicché si potrebbe dubitare della possibilità di costruire il diagramma degli sforzi. Si osservi però che dovendo il poligono relativo al nodo 1, 6, 10, 9 risultare un rettangolo, lo sforzo nell'asta 10 sarà eguale e di senso opposto alla forza 1; inoltre, come si riconosce dall'equilibrio del nodo 7, 10, 11, lo sforzo nell'asta 7 deve avere per proiezione verticale la metà dello sforzo 10, ossia del carico 1. Ciò posto, se dal punto 5, si guida la parallela all'asta 6 e dal punto 4 la parallela all'asta 8 fino ad incontrare l'orizzontale pel punto di mezzo del carico 1 e da quel punto la parallela all'asta 7, risulta costruito il poligono relativo al nodo 5, 6, 7, 8, dopo di che si può continuare il diagramma senza difficoltà. Il metodo delle sezioni offre un'altra so-

luzione del quesito, potendosi determinare lo sforzo nel tirante 8 mediante una sezione attraverso alle tre aste 9, 11, 8.

162. — La fig. 92 a) è lo schema di una trave americana dello stesso tipo Fink, ma con sette montanti; la supporremo caricata ai nodi del con-

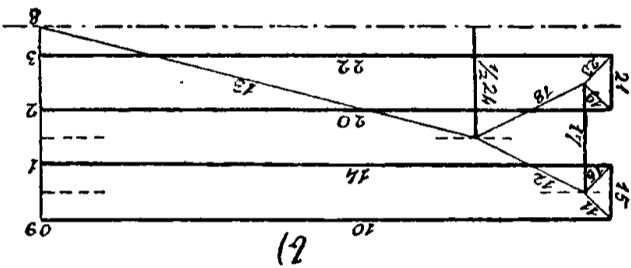
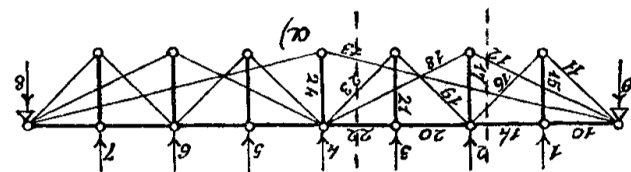


Fig. 92.

torno superiore. Per costruire il diagramma, anche per questa trave cominceremo ad osservare che la proiezione verticale dello sforzo nell'asta 11 è uguale a metà del carico 1, che lo sforzo nell'asta 12 deve avere per proiezione verticale metà dello sforzo nell'asta 17, che è quanto dire, un quarto

del carico 1, un quarto del carico 3 e metà del carico 2. Se i detti carichi sono uguali, come è supposto nella figura, la proiezione verticale dello sforzo 12 vale uno di essi. Se quindi nei punti di mezzo dei due primi carichi, fig. 92 b), si tirano delle orizzontali, e poi dal punto 8 la parallela all'asta 13 fino ad incontrare la seconda delle dette orizzontali, da quel punto la parallela 12 fino ad incontrare la prima orizzontale, da quel punto la parallela all'asta 11 e dal punto 9 la parallela all'asta 10, risulta costruito il poligono relativo al nodo 9, 10, 11, 12, 13, dopo di che è molto facile proseguire la costruzione del diagramma, di cui vedesi disegnata nella figura soltanto una metà, essendo simmetrica l'altra metà. Anche qui si sarebbe potuto determinare, col metodo delle sezioni, prima lo sforzo dell'asta 13 e poi quello dell'asta 12.

163. — La fig. 93 a) rappresenta una travatura reticolare (mensola) strettamente indeformabile, ma non triangolare, per la quale non è possibile costruire il diagramma, senza ripetere due volte in posizione distinta gli sforzi relativi alle aste diagonali. Tuttavia anche in questi casi conviene raggruppare tutti i poligoni relativi ai vari nodi, in un unico diagramma.

164. — Sulla costruzione del diagramma reciproco di una travatura reticolare caricata ai nodi vogliamo da ultimo notare che allorché la travatura presenta due correnti o contorni collegati da un sistema

di aste di parete a zig-zag, che vanno alternativamente da un contorno all'altro, come ad esempio nella semitravatura della fig. 90, nel costruire il diagramma, piuttosto che procedere da nodo a nodo, si può seguire quest'altra via un po' più spiccia. Dai vertici del poligono delle forze esterne si tirano ordinatamente delle parallele indefinite alle aste di contorno, e si costruisce poi la spezzata reciproca di quella formata dalle aste di parete della travatura, cioè una poligonale i cui lati siano ordinatamente paralleli alle aste suddette, ed i cui vertici cadano alternativamente sulle parallele alle aste dei due contorni.

165. — Abbiamo già veduto dei tipi speciali di travature reticolari, per le quali, con tutto che non fosse possibile iniziare colle norme

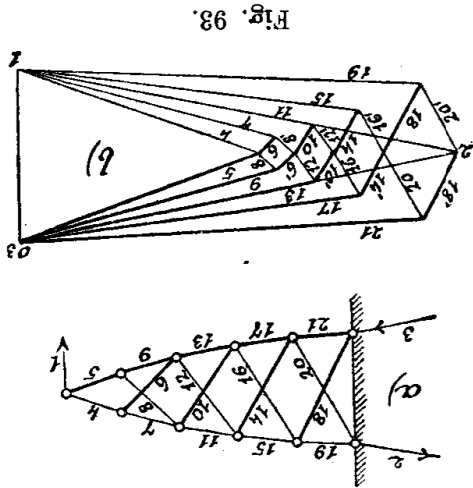


Fig. 93.

ordinarie la costruzione del diagramma Cremoniano, pure, sia dalla considerazione del poligono di equilibrio di qualche nodo speciale, sia col metodo delle sezioni, è stato possibile procedere alla determinazione degli sforzi interni nelle aste. Altri esempi elementari li offrono le travature rappresentate dalle fig. 94 e 95; in esse si può determinare da prima, col metodo delle sezioni, lo sforzo in una delle

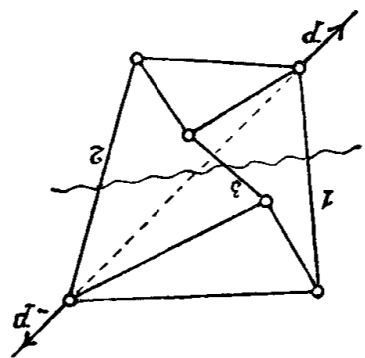


Fig. 94.

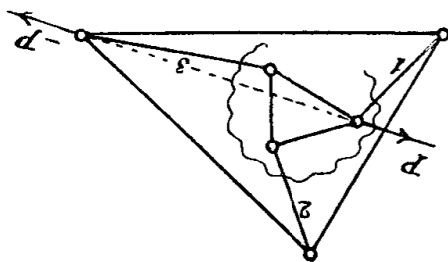


Fig. 95.

aste 1, 2, 3 (tagliando queste tre aste con una sezione, trasversale nella fig. 94, circolare nella fig. 95) e passare poi senza difficoltà alla determinazione degli sforzi nelle rimanenti aste.

Ma si presentano talvolta dei sistemi reticolari, come, ad esempio, quello rappresentato dalla fig. 96, per i quali né il metodo delle se-

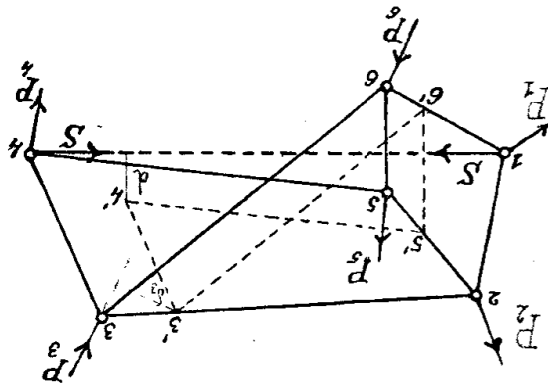


Fig. 96.

zioni, né condizioni speciali di equilibrio per qualche nodo vengono in aiuto per iniziare la determinazione degli sforzi nelle aste. In tali casi torna opportuno il seguente metodo generalissimo (1). Nel sistema reticolare rappresentato dalla fig. 96 si voglia determinare lo sforzo nell'asta 1-4. Simmagini tolta quest'asta e, per non alterare l'equilibrio del

sistema, si applichino ai nodi 1 e 4, che da essa erano collegati, due forze S eguali ed opposte, che potremo riguardare come forze esterne, equipollenti alle azioni che l'asta 1-4 esercitava sui nodi stessi, e che supporremo di trazione (se fossero invece di compres-

(1) Cfr. MÜLLER-BRESLAU, I. c.

sione, ciò sarebbe avvertito dal senso negativo che si troverebbe per S). Ciò posto, ricordando che ogni nodo è in equilibrio sotto l'azione della forza esterna eventualmente ad esso applicata, e degli sforzi interni lungo le aste concorrenti in quel nodo, la somma algebrica dei momenti di tali forze rispetto ad un punto qualunque del piano dev'essere nulla; e quindi, per tutta la travatura, la somma di tutte le somme relative ai vari nodi dev'essere parimenti nulla. Ora, se per due nodi collegati da un'asta si assumono i poli su di una parallela all'asta, nell'equazione finale dei momenti non figurerà lo sforzo in quell'asta, giacchè esso, rispetto a quei due poli, dà luogo a due momenti eguali e di opposto senso. Si ha così modo di eliminare nell'equazione finale gli sforzi incogniti di tutte le aste rimaste in posto, ed allora tale equazione non contiene più che una sola incognita: lo sforzo S. Nulla vieta di prendere due poli coincidenti con due nodi, nel caso della figura coi nodi 1, 2, assunto poi ad arbitrio il polo 6' sulla 1-6, si conducano da 6' la 6'5' || 6-5 e la 6'3' || 6-3; quindi da 5' la parallela indefinita alla 5-4 e da 3' la parallela indefinita alla 3-4, con che resta determinato l'ultimo polo 4'. Indicando ora con δ il braccio di leva di una qualunque delle forze P intorno al rispettivo centro dei momenti, e con d quello della forza incognita S applicata al nodo 4, si avrà

$$Sd + P_3\delta_3 + P_4\delta_4 - P_5\delta_5 - P_6\delta_6 = 0,$$

da cui

$$S = \frac{P_5\delta_5 + P_6\delta_6 - P_3\delta_3 - P_4\delta_4}{d} \quad (20)$$

Se il polo 4' cadesse sulla 1-4, si avrebbe nella (20) $d = 0$, ed allora se $\Sigma P\delta$ fosse diverso da zero risulterebbe $S = \infty$; la travatura non sarebbe pratica. Che se fosse simultaneamente $\Sigma P\delta = 0$, la travatura potrebbe restare in equilibrio per infiniti valori di S. Se, come caso speciale, fossero nulli tutti i P, cioè la travatura fosse del tutto scarica, si potrebbe, senza rompere l'equilibrio, generare infiniti regimi di sforzi interni, producendo sforzi artificiali nell'asta 1-4. Tuttavia non sarebbe impedita una piccola deformazione della travatura, essa cioè non sarebbe rigida; ciò emergerebbe più chiaramente dalle considerazioni del numero seguente.

166. — Alla stessa soluzione ed alle stesse conseguenze si giunge partendo dalle seguenti considerazioni cinematiche. Tolta l'asta 1-4,

la travatura diviene deformabile in guisa che, attribuito un piccolo spostamento ad un nodo, consentitò dai suoi legami, restano univocamente determinati gli spostamenti degli altri nodi. Così nel caso della fig. 96, conservando ad un'asta, per es. alla 1-2, la sua posizione iniziale, ed imprimendo al nodo 6 (libero di spostarsi su di un arco circolare di centro I) un piccolo spostamento nel senso delle rotazioni delle lancette di un orologio, anche il nodo 5 compirà nello stesso senso una rotazione elementare intorno al nodo 2, e perciò l'asta 5-6 compirà una rotazione elementare intorno al punto d'incontro delle aste 1-6 e 2-5, che è il relativo centro d'istantanea rotazione, o polo di rotazione, o cerniera ideale. Rotiamo questi spostamenti di 90° nel senso delle rotazioni delle lancette di un orologio; essi verranno allora a cadere sulle aste 1-6, 2-5 (cadrebbero invece sui loro prolungamenti se il senso degli spostamenti fosse stato l'opposto). Rappresentino 6.6', 5.5' gli spostamenti in questa nuova posizione: li chiameremo brevemente *spostamenti rotati*. Ora gli spostamenti dei nodi 5 e 6 devono essere proporzionali alle distanze di questi nodi dal polo di rotazione dell'asta 5-6, ne deriva che la congiungente 5'-6' è parallela all'asta 5-6. Quanto alla grandezza, questi spostamenti possono, per il nostro scopo, essere amplificati in un rapporto qualunque. Si prenda quindi un segmento arbitrario 6-6' a rappresentare lo spostamento rotato del nodo 6, si conduca poi 6'-5' parallela all'asta 6-5, con che si avrà lo spostamento rotato 5-5' del nodo 5. Passando ora all'asta 6-3, si osservi che il suo polo si troverà nel punto d'incontro di 1-6 con 2-3, e quindi conducendo 6' 3' parallela alla 6-3 si avrà lo spostamento rotato 3'-3' del nodo 3; e finalmente per lo stesso motivo, conducendo 3' 4' parallela all'asta 3-4, e la 5'-4' parallela all'asta 5-4, resterà determinato il punto 4', tale che 4-4' rappresenterà lo spostamento rotato del nodo 4.

Ora, per il principio dei lavori virtuali, la somma delle somme algebriche dei lavori virtuali compiuti dalle forze concorrenti in ciascun nodo (compresi le due forze rappresentanti l'azione dell'asta 1-4) in seguito ai detti spostamenti virtuali, dev'essere nulla. E se per un nodo qualunque n (fig. 97) forniamo a rotare di 90° in senso contrario a quello delle lancette di un orologio il segmento $n n'$, rappresentante lo spostamento rotato, noi avremo nel segmento $n n_0$ lo spostamento di quel nodo nella sua vera posizione, per modo che il lavoro virtuale prodotto da una forza qualunque T concorrente in quel nodo sarà dato da $T \cdot n n_0$, ma $n n_0 = n' n''$, quindi tale lavoro virtuale è anche misurato in gran-

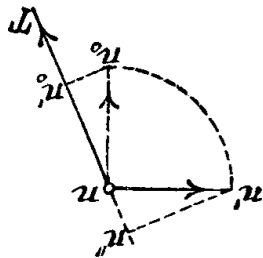


Fig. 97.

dezza e senso dal momento statico della forza T rispetto al punto n , e così ricadiamo nella (20).

Il caso di eccezione segnalato al numero precedente viene spiegato cinematicamente dal fatto che, qualora il punto $4'$ cadesse sulla $1-4$, lo spostamento del nodo 4 tenderebbe ad avvenire in direzione normale ad $1-4$, e questo non può essere impedito dall'asta $1-4$, cosicchè la travatura, con tutto che soddisfacente alla relazione $a = 2n - 3$, non sarebbe rigida.

167. Travature ad aste caricate. — Le ipotesi che si sono fatte in questa trattazione delle travature reticolari, che cioè le aste fossero collegate a cerniera senza attrito e che il peso proprio della travatura potesse concentrarsi ai nodi, non sono verificate nella pratica. Il più delle volte infatti i collegamenti delle varie aste sono rigidi, fatti cioè con chiodatura, e seppure sono a cerniera, si sviluppa certamente in esse un notevole attrito durante le deformazioni elastiche della travatura, il quale ha per effetto che le reazioni delle cerniere contro le aste non sono più dirette secondo i loro assi geometrici. Il peso delle aste è distribuito su tutta la loro lunghezza, e non certamente concentrato ai nodi. Inoltre, non sempre nella pratica gli assi delle aste concorrono esattamente nel centro del nodo in cui si riuniscono. Chiamansi *sforzi principali* quelli che si determinano colla teoria sovra esposta, e *sforzi secondari* quelli prodotti dalle cause ora accennate. Riservandoci di ritornare sulla questione degli sforzi secondari in altra parte del Corso (Parte IV), vogliamo qui soltanto mostrare che la trattazione delle travature reticolari con collegamenti a cerniera senza attrito e con aste caricate può farsi rigorosamente per mezzo di certi diagrammi dovuti al prof. Savio (1), la cui costruzione si basa sui numeri 132-135. Il problema trattato al n. 136 ne mostra già un esempio.

La fig. 98 (a) rappresenta lo schema di una capriata: ciascuno dei punti sostiene sulla sua lunghezza tre carichi concentrati, quello di mezzo è la somma di un carico concentrato eguale agli altri e della risultante del peso proprio del puntone; sul vertice della capriata insiste un altro carico concentrato; le altre aste sono sollecitate dal peso proprio rappresentato dalla risultante applicata al loro punto di mezzo. Costruita la retta delle forze (fig. 98 b), facciamoci a determinare le reazioni delle cerniere contro le varie aste: comin-

(1) SAVIOTTI C., *Le travature reticolari a membri caricati*. — Atti della R. Accademia dei Lincei, 1878.

chiamo a tale scopo a considerare le due aste ea ed ab collegate fra loro a cerniera in a ed articolate a cerniera in e b ad un sistema indeformabile. Alla cerniera a è applicata la reazione dell'appoggio, alle aste ea ed ab sono applicate delle forze di cui pel nostro scopo

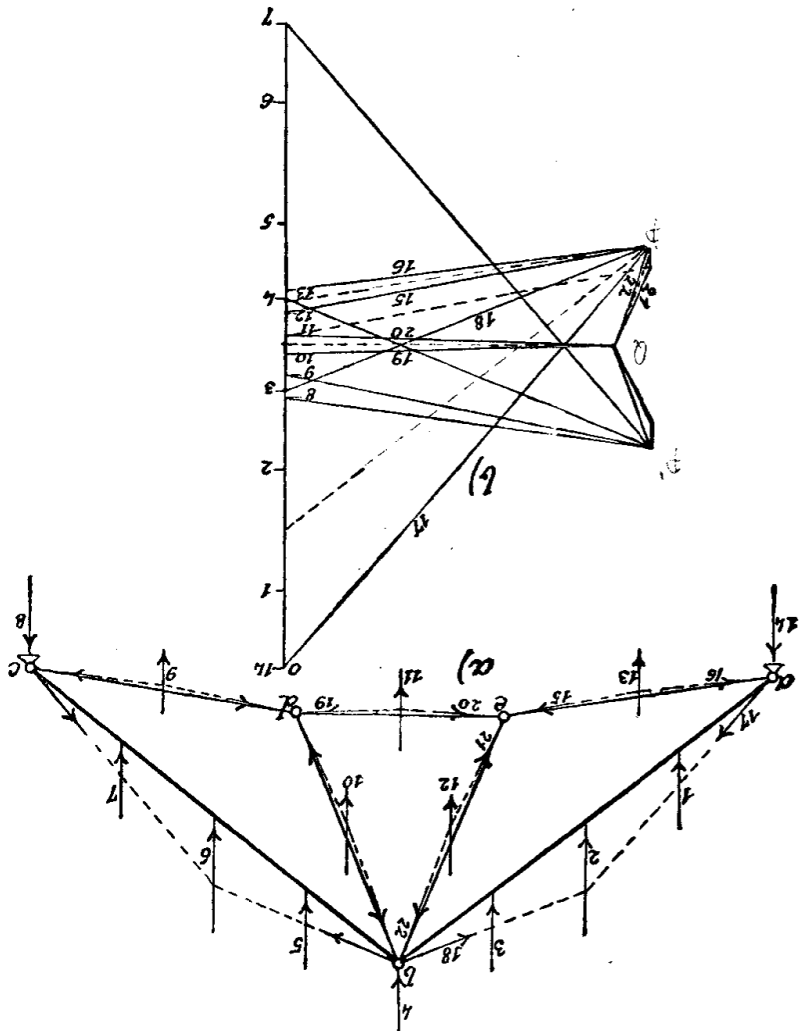


Fig. 98.

basta considerare la risultante; costruiamo (n. 133) il poligono funicolare che passa per tre punti e , a , b . Passando le risultanti delle forze, applicate alle due aste, per punti di mezzo delle aste stesse, si ottiene il polo relativo a tale poligono funicolare semplicemente col condurre per punti di mezzo dei segmenti 12, 13, 03 della retta delle forze, le parallele rispettivamente alle due aste ea ed ab (1)

(1) In generale, la parallela all'asta, condotta pel polo, come è facile dimostrare, divide il segmento equipollente alla risultante delle forze applicate a quell'asta nello stesso rapporto in cui la risultante stessa divide l'asta.

Trattato di statica (L. B. Moigno)

i segmenti 15, 16, 17, 18 sono equipollenti alle reazioni delle cerniere e , a , b contro le due aste ea ed ab .

Si passi ora a considerare le altre due aste de ed eb , articolate a cerniera fra loro in e e collegate a cerniera in d e b ad un sistema indeformabile; alla cerniera e è applicato uno sforzo eguale ed opposto alla reazione della cerniera stessa contro l'asta a , sforzo misurato dal segmento 15; alle aste d e ed eb sono applicate le risultanti del loro peso. Trasportato il segmento 15 in prosecuzione del peso 10, 11 dell'asta ed , ed il peso 11, 12 dell'asta eb in prosecuzione del segmento teste trasportato, si determina allo stesso modo il polo relativo al poligono funicolare che passa per le cerniere d , e , b ; i segmenti 19, 20, 21, 22 determinano le reazioni delle dette cerniere contro le aste de ed eb . Le reazioni delle cerniere contro le rimanenti aste sono simmetriche a quelle già determinate. In questa guisa restano trovate per ogni asta le reazioni delle cerniere, e quindi risultano note tutte le forze esterne sollecitanti ciascuna asta; del suo modo di resistere si tratterà nella Parte II di questo Corso.

168. — Il metodo spiegato nel numero precedente può essere applicato alla determinazione degli sforzi nelle aste di quelle travature reticolari nelle quali alcune sbarre siano sostituite esse stesse da travature reticolari secondarie. Così nella travatura (fig. 99 a) rappresentante una capriata Polonceanu semplice, nella quale i puntoni sono sostituiti da travi reticolari (travi armate), col diagramma (fig. 99 b) (imitato, per ragione di simmetria, soltanto alla metà sinistra della travatura) si viene dapprima a determinare gli sforzi nei tiranti e le reazioni delle cerniere a , b , c contro le travi reticolari, dopo di che si passa alla costruzione degli sforzi nelle aste delle travi suddette. Il diagramma reciproco di una tale travatura potrebbe anche essere costruito determinando dapprima, col metodo delle sezioni, le tensioni nei tiranti a , m , m , n .

169. — Prima di abbandonare questo tema delle travature reticolari sollecitate da carichi fissi faremo un'applicazione al calcolo delle cerniere destinate a sostenere le volte in costruzione. Rappresenti la fig. 100 a' una volta da ponte in costruzione colla sottoposta armatura nel momento in cui manca soltanto il concio di chiave. Cominciamo dal determinare le pressioni che i vari conci della parte sinistra della volta, a partire dal più alto, esercitano sul *manto* dell'armatura, le quali pressioni vengono poi trasmesse alla centina. Per far ciò si decomponga (fig. c) il peso del primo concio, il più alto, in una componente normale al giunto comune al primo e secondo concio,

ed in un'altra normale al manto dell'armatura nel punto di mezzo dell'intradosso del conio; questa seconda componente rappresenta la pressione trasmessa dal primo conio alla centina, qualora si pre-scinda dalle resistenze d'attrito, il che va a favore della stabilità. Si

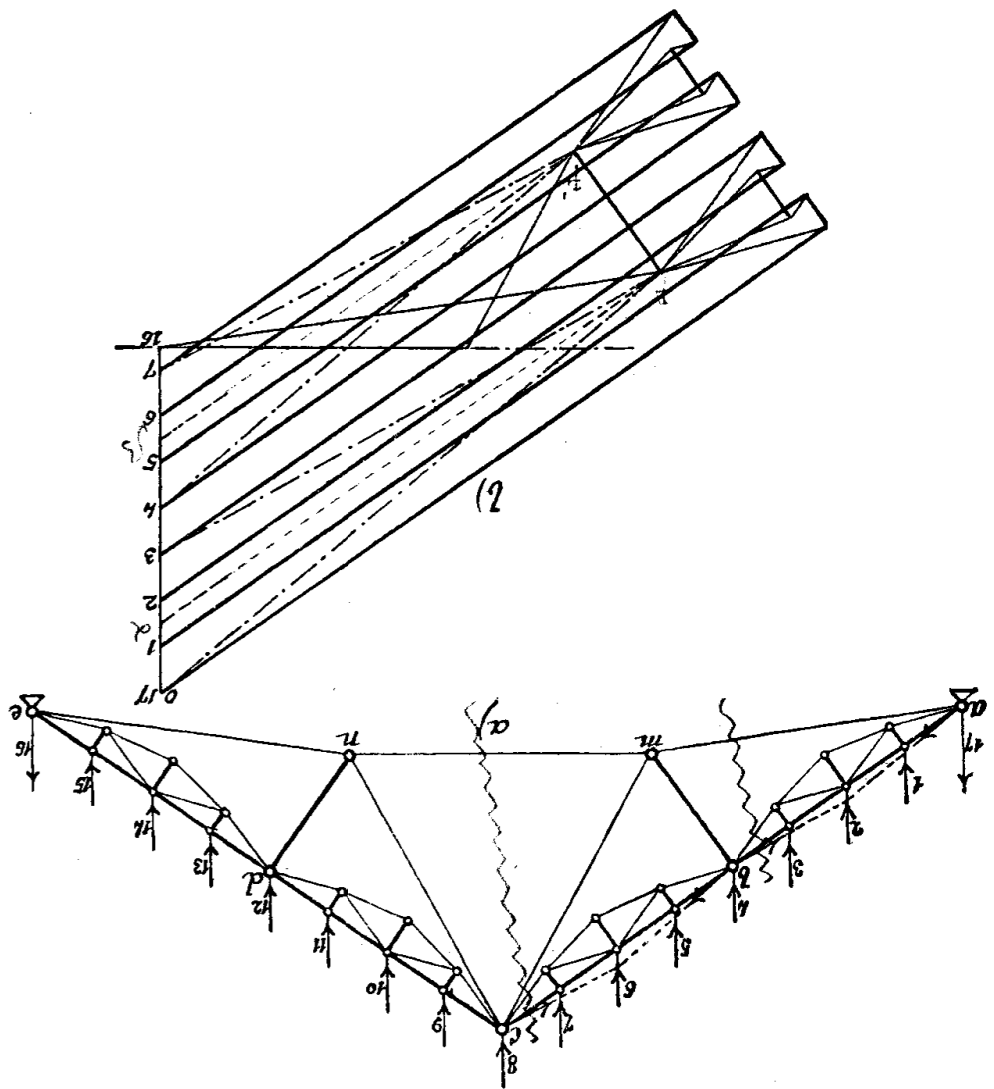
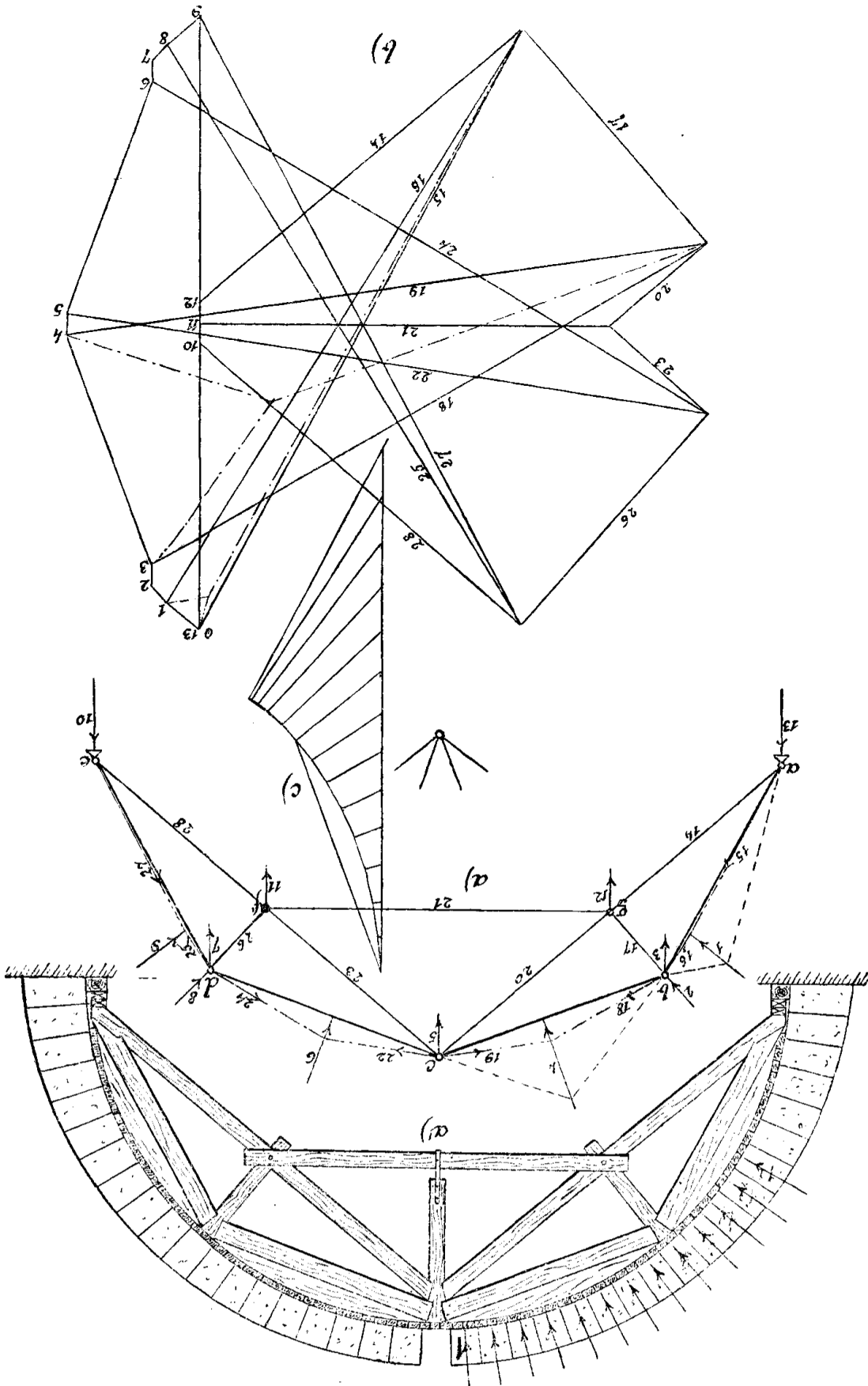


Fig. 99.

decompone allo stesso modo la risultante del peso del secondo conio e dell'azione trasmessagli dal primo in una normale al giunto che segue ed in una normale al manto dell'armatura nel punto di mezzo dell'intradosso del secondo conio; questa seconda componente rappresenta la pressione esercitata dal secondo conio contro la centina. Si prosegue allo stesso modo finché i conici trasmettono pressione alla centina.

Cio fatto, si disegni (fig. a) lo schema della centina; si applichi

Fig. 100.



all'asta $a b$ la risultante delle pressioni esercitate dal concio 10° fino al 13°; al nodo b si applichi la pressione trasmessa dal concio 9°; finalmente all'asta $b c$ la risultante delle pressioni esercitate dal concio 1° fino all'8°. Essendosi supposta la linea d'intradosso della volta un arco circolare, le forze di cui sopra s'è detto, concorrono tutte al centro di tale arco. La centina essendo simmetrica, all'asta $e d$, al nodo d , all'asta $d c$ sono applicate delle pressioni simmetriche a quelle poc'anzi determinate. Da ultimo si è supposto che ai nodi b, c, d, f, g siano applicati dei pesi fra loro eguali, a rappresentare il peso proprio della costruzione; la centina è appoggiata orizzontalmente in a ed e . Passiamo ora alla costruzione del diagramma degli sforzi (fig. b): consideriamo da prima le due aste $a b$ ed $a g$ articolate a cerniera fra loro in a , ed in b e g ad un sistema invariabile; alla cerniera a è applicata la reazione 13 dell'appoggio, all'asta $a b$ la forza 1, l'asta $a g$ è scarica. Colla costruzione della fig. 65 si determinano le reazioni 15 e 16 delle due cerniere a e b contro l'asta $a b$, come pure la tensione 14 nel tirante $a g$. Veniamo ora a considerare le due aste $b c$ e $b g$ articolate a cerniera fra loro in b ed in c e g ad un sistema invariabile; al nodo b è applicata la risultante dell'azione 16 trasmessa dall'asta $a b$, della forza 2 e del carico 3; all'asta $b c$ è applicata la forza 4, l'asta $b g$ è scarica. Sempre colla stessa costruzione si determinano le reazioni 18 e 19 delle cerniere b e c contro l'asta $b c$ e la tensione 17 nel tirante $b g$. In seguito si può costruire il poligono di equilibrio del nodo g e così risulta disegnato metà del diagramma degli sforzi; l'altra metà è simmetrica. Da questo diagramma si hanno dunque le tensioni nei vari tiranti della centina e si hanno inoltre le reazioni che vengono trasmesse a ciascun puntone del contorno superiore della centina dalle cerniere che trovansi ai suoi estremi.

§ 2. — Travature reticolari nello spazio (1).

170. Generazione delle travature strettamente indeformabili. — Tre nodi sono collegati da tre aste le quali formano un triangolo; per collegare ad esso invariabilmente un quarto nodo non giacente con i primi tre in un medesimo piano, sono necessarie e sufficienti tre aste, con che si ha un tetraedro, il quale è strettamente indeformabile. Per collegare ai precedenti ogni nodo ulteriore comunque situato nello spazio, sono ancora necessarie e sufficienti tre aste; quindi

(1) Cfr. FÖPPL, l. c.

Il numero totale a di aste è legato al numero totale n di nodi dalla relazione

$$(21) \quad a = 3(n - 3) + 3 = 3n - 6.$$

Anche qui, collo scambiare di posto qualche asta, possono aver luogo trasformazioni analoghe a quelle già notate per le travature nel piano. Ed invero, toltà un'asta di una travatura strettamente indeformabile, il sistema diviene deformabile in guisa che gli spostamenti dei vari nodi sono dipendenti fra loro, per modo che per ristabilire l'indeformabilità del sistema, basta aggiungere una nuova asta che colleghi due nodi qualunque, la cui distanza era divenuta variabile. In nessun nodo possono concorrere meno di tre aste: le aste concorrenti in un nodo non possono mai giacere tutte nello stesso piano. In molti nodi delle travature più usuali concorrono sei aste.

Anche nelle travature nello spazio possono distinguersi più parti, o corpi, già di per sé strettamente indeformabili, collegate poi fra loro invariabilmente. A collegare invariabilmente fra loro due parti occorrono e bastano 6 aste, destinate ad impedire le sei libertà di movimento di cui gode un sistema indeformabile nello spazio. Naturalmente, queste sei aste devono essere tutte efficaci, cioè così disposte da evitare i casi di eccezione, per cui una o più di esse siano impediti ad impedire i possibili movimenti relativi fra le due parti collegate.

171. Vincoli. — Come parte o corpo di una travatura nello spazio può essere riguardata la terra ferma, e così noi troviamo che il numero necessario e sufficiente di aste per collegare una travatura strettamente indeformabile alla terra ferma è di sei.

Se si costringe un nodo a restare su di una superficie, o (per piccolissimi spostamenti) sul piano tangente, ciò corrisponde ad una condizione semplice di appoggio; infatti, dei sei movimenti di cui è capace un sistema nello spazio, resta impedito soltanto uno. Quest'appoggio può essere realizzato o con un'asta abbastanza lunga, normale a quel piano tangente o con un appoggio scorrevole in tutte le direzioni giacenti in quello.

Se il nodo è obbligato a restare su di una linea, ciò corrisponde a due condizioni semplici di appoggio; infatti rimangono impediti soltanto due movimenti. Fissare completamente un nodo implica tre condizioni d'appoggio; restano infatti impediti tre movimenti.

Le condizioni di appoggio devono essere distribuite almeno su tre nodi: infatti, se si rendesse fisso un nodo (tre condizioni), per fissare la posizione un altro nodo basterebbero due condizioni, perchè la

distanza fra questo secondo nodo ed il primo è già invariabile, e tuttavia il sistema può ruotare intorno alla congiungente i due nodi, il che viene evitato con una sesta condizione imposta ad un terzo nodo. Naturalmente può raggiungersi l'inamovibilità del sistema in altri modi, fino ad imporre una sola condizione a ciascuno di sei nodi distinti, collegandoli ciascuno con un'asta alla terra.

Se le condizioni di appoggio sono in numero maggiore di sei, la travatura diviene staticamente indeterminata, a meno che si sopprima in essa un numero di aste eguale al maggior numero di condizioni di appoggio imposte. In generale indicando con a' (≤ 6) le condizioni di appoggio semplice si deve avere

$$(22) \quad a + 6 = 3n \quad a + a' = 3n.$$

172. — Tra le travature reticolari nello spazio sono massimamente interessanti quelle che costituiscono una superficie poliedrica semplice cemente connessa, a faccie triangolari. S'immagini una tale superficie poliedrica completa, cioè racchiudente un certo spazio finito: sia F il numero delle sue faccie triangolari, V il numero dei suoi vertici, s quello dei suoi spigoli. Appartenendo tale poliedro alla categoria dei poliedri Euleriani, sta la relazione

$$(23) \quad V + F = s + 2;$$

d'altra parte, se contiamo separatamente per ogni faccia triangolare i suoi tre spigoli di perimetro, poiché uno spigolo è comune a due faccie, in complesso gli spigoli resteranno contati tutti due volte, quindi si avrà

$$s = \frac{3F}{2},$$

con che la (23) diviene

$$s = 3V - 6,$$

cioè la travatura ha lo stretto numero di aste necessarie per l'indeformabilità. Ne questa viene a mancare se la superficie poliedrica si modifica di forma per modo che alcuni triangoli vengano a cadere in un medesimo piano, formando una travatura triangolare piana; purché i triangoli uscenti da un medesimo nodo non giacciano tutti nello stesso piano, altrimenti nello stesso piano giacerebbero anche tutti gli spigoli uscenti da quel nodo, ed esso non avrebbe allora la necessaria inamovibilità in direzione normale al piano suddetto. Un

prisma od un tronco di piramide, di cui le basi e le faccie laterali siano travature triangolari piane, da un esempio di tali travature strettamente indeformabili nello spazio.

173. — Si faccia passare per il diametro verticale (asse) di una sfera una serie di meridiani equidistanti e si tracci la corrispondente serie di paralleli pure equidistanti in modo da dividere la superficie sferica in quadrilateri curvilinei: assumiamo i punti d'intersezione di questi cerchi come nodi e le corde dei vari archetti circolari come aste, basterà allora aggiungere, per ogni faccia quadrilatera che così risulta, un'asta diagonale per avere una travatura strettamente indeformabile. Il numero dei meridiani e dei paralleli non dovrà però essere eccessivo, altrimenti le aste uscenti da un nodo, troppo poco si discosterebbero dal piano tangente alla superficie sferica in quel punto, e verrebbe perciò compromessa l'indeformabilità del sistema. Tagliamo ora la travatura in due parti mediante un piano normale all'asse ed immediatamente superiore ad un parallelo; noi potremo ad una di queste parti, l'inferiore, sostituire la terra ferma, purché a questa vengano collegate le aste sezionate. Potremo ancora fare un'altra sezione simile alla precedente, immediatamente al disopra di uno dei paralleli più vicini al polo superiore, e rimuovere tutte le aste al disopra, senza alterare l'indeformabilità della parte restante. Si ottiene così lo schema della *cupola reticolare Schwedler*, rappresentata dalla fig. 101, una delle più importanti e frequenti travature reticolari nello spazio, destinata a coprire ambienti di pianta poligonale o circolare.

Il *parallelo di gronda*, punteggiato nella figura, non sarebbe veramente necessario all'indeformabilità del sistema; tuttavia nella pratica lo si mette onde aumentare la rigidità dei punti d'appoggio, od anche per dispensarsi dal renderli tutti fissi. La troncatura della cupola al sommo offre l'opportunità di costruirvi sopra un lucernario, il quale però non entra a far parte della travatura reticolare propriamente detta.

Con analoghi generi si possono ottenere evidentemente cupole di forma ellissoidica, paraboloidica, tronco-piramidale.

174. — Riguardo alla ricerca degli sforzi nelle varie aste della travatura, prodotti dalle forze esterne applicate ai nodi, mentre nella Parte III di questo Corso s'indica il procedimento approssimato seguito generalmente nella pratica per tale calcolo, vogliamo qui limitarci, come studio fondamentale, a considerare l'effetto prodotto da una forza comunque diretta, insistente su di un nodo qualunque.

Supposto, ad esempio, che il nodo caricato sia uno di quelli del secondo parallelo (fig. 101), quello rappresentato con un punto nero, si comincerà dall'indagare quali aste restino influenzate da tale carico.

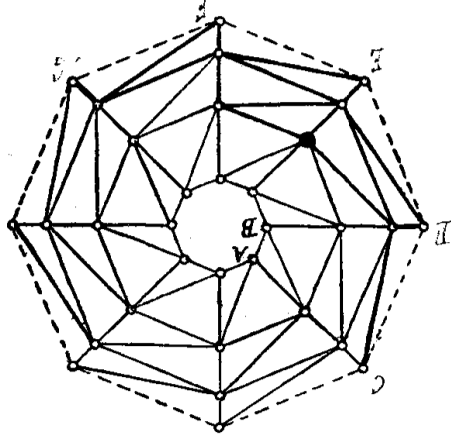
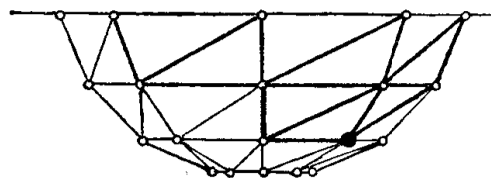


Fig. 101.

Considerando un nodo qualunque dell'anello di Incernario, per es. il nodo A, poiché esso è scarico, e poiché delle quattro aste concorrenti in quel nodo tre sono in un piano, si deduce immediatamente, per l'equilibrio del nodo, che lo sforzo nella quarta, cioè nella AB, dev'essere nullo. Per lo stesso motivo, lo sforzo è nullo in tutte le aste nell'anello di Incernario; ma allora anche lo sforzo delle rimanenti due aste (un'asta di meridiano e una diagonale) concorrenti in un nodo dell'anello di Incernario, deve essere pure nullo.

Passando ora ai nodi dei paralleli successivi e ripetendo le stesse considerazioni, si viene a concludere che rimangono influenzate dal carico soltanto le aste marcate più grosse nella figura.

Quanto poi alla determinazione effettiva degli sforzi, partendo dal nodo caricato e passando, con criterio, successivamente agli altri nodi ove concorrono aste influenzate, non si ha che ad effettuare ripetutamente la decomposizione di una forza nota in tre concorrenti in un punto della sua linea e non giacenti con essa in un medesimo piano (n. 94), oppure di una forza in due concorrenti in un punto della sua linea e giacenti con essa nello stesso piano.

175. — Se i diversi paralleli di una cupola Schwedler s'immaginano rotati uno rispetto al successivo di metà dell'intervallo esistente tra i meridiani, si ottiene l'altro schema di cupola reticolare rappresentato dalla fig. 102. È interessante di notare riguardo a quest'altro tipo di cupola reticolare, che se i paralleli sono costituiti da poligoni regolari di numero pari di lati, la travatura non è rigida, mentre lo è nel caso opposto. Ciò può dedursi da considerazioni statiche, ovvero anche da proprietà cinematiche. Supponiamo caricato, ad esempio, un nodo A dell'anello di Incernario: considerando un altro nodo D dello stesso anello, ma scarico, si osserverà che delle quattro aste

concorrenti in quel nodo, giacendo due nel piano orizzontale di In-

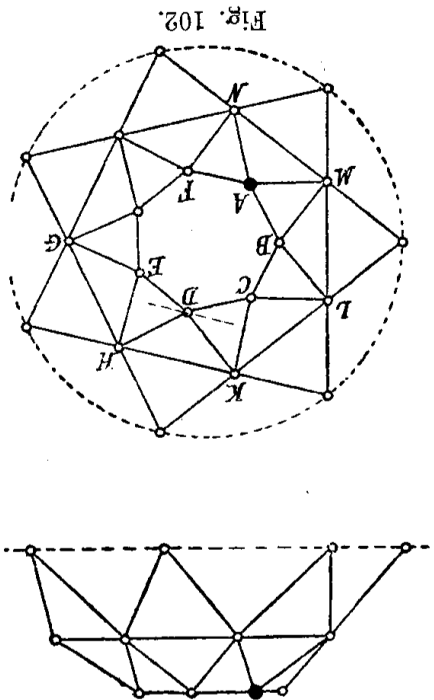
stori nelle prime due e la risultante degli sforzi nelle altre due devono, per l'equilibrio del nodo, avere per comune linea d'azione l'intersezione dei due piani, che, per la simmetria dello schema, coincide colla bisettrice esterna dell'angolo in D. Da ciò si deduce immediatamente che gli sforzi nelle aste CD e DE sono eguali, ma di opposto senso.

Ciò premesso, se il poligono di In-

cernario e quindi anche tutti gli altri paralleli fossero di numero pari di lati, le due aste AB, AF uscenti dal nodo caricato A, subirebbero anche esse gli stessi sforzi eguali e di senso opposto, e però la loro risultante avrebbe per linea d'azione la bisettrice esterna dell'angolo BAF. Ma

allora, giacendo tale risultante nello stesso piano delle due aste AM, AN, la componente della forza esterna, che risulta normale al piano MAN, non può essere equilibrata da sforzi finiti nelle aste: la travatura non è rigida. Se invece i paralleli sono costituiti da poligoni di numero dispari di lati, gli sforzi nelle due aste dell'anello di Incernario, uscenti dal nodo caricato A, risultano di egual senso, e però la loro risultante cade sulla bisettrice interna dell'angolo in A; e allora possibile l'equilibrio del nodo con valori finiti per tale risultante e per gli sforzi nelle aste AM ed AN: la travatura è rigida.

Ad eguali conclusioni si giunge con considerazioni cinematiche. S'immagini tolta un'asta dell'anello di Incernario, per esempio l'asta BC, e s'imprima al triangolo CKL una piccola rotazione, per esempio verso l'interno attorno all'asse KL. Il triangolo contiguo DHK, dovendo rimanere invariata la lunghezza dell'asta CD, compirà una piccola rotazione intorno all'asse HK, ma verso l'esterno. Il triangolo EGH compirà di nuovo la stessa piccola rotazione intorno a GH ma verso l'interno, e così di seguito alternativamente. Ora, se i paralleli hanno numero dispari di lati, come nel caso della figura, le rotazioni dei due triangoli CKL, BLM risultano ambedue verso l'interno, ed allora, immaginando rimessa a posto l'asta BC, questa colla sua lunghezza invariabile impedisce la rotazione di questi due



(4) CREMONA L., *Corso di Statica grafica*. — Milano, 1868-69 (in autografo).
 RITTER W., *Die Trägheitseigenschaften, geometrisch abgeleitet*. — Schweizerische Bauzeitung, 1888.

nella quale il segmento Σm_i è la misura lineare della somma dei momenti statici di tutte le forze, ossia rappresenta quella somma ridotta alla base b .
 Si abbia ora nello stesso piano π un secondo asse y e sia y_i la distanza del punto di applicazione della stessa forza p_i dall'asse y : al prodotto $p_i x_i y_i$ si dà il nome di *momento di secondo ordine* o *momento centrifugo* della forza p_i rispetto agli assi x, y . E se l'asse y

$$\Sigma p_i x_i = b \Sigma m_i,$$

176. — Sia dato un sistema di forze parallele p_i i cui punti di applicazione P_i giacenti in un medesimo piano π distino delle quantita x_i (valutate in direzione arbitraria) da un asse x giacente nello stesso piano π . Il prodotto $p_i x_i$ fu già chiamato (n. 50) *momento statico* o *momento di prim'ordine* della forza p_i rispetto all'asse x , e, disponendo le forze parallelamente all'asse x , vedemmo già (n. 55) come si possa, per mezzo di un poligono funicolare, trasformare graficamente quel prodotto nell'altro $b \Sigma m_i$ in modo da ottenere

§ 1. — Momenti centrifughi e momenti d'inerzia di un sistema di forze concentrate: ellissi d'inerzia (1).

MOMENTI DI SECONDO ORDINE

CAPITOLO VI.

triangoli e, per conseguenza, di tutti gli altri: la travatura è rigida. Nel caso opposto invece non potendo l'asta BC impedire una piccola rotazione di uno dei due triangoli limitrofi in un senso e dell'altro nel senso opposto, la travatura non risulterebbe rigida.
 Partendo anche per questa travatura dal nodo caricato A e passando poi successivamente agli altri, non sarà difficile, in grazia delle considerazioni già svolte a proposito dell'equilibrio dei vari nodi, di procedere alla determinazione effettiva degli sforzi nelle varie aste.