

CAPITOLO II. BARICENTRI

102. Nozioni generali. — Se supponiamo materializzati i punti di applicazione di un sistema di forze parallele, e che le forze siano proporzionali alle masse dei punti stessi, il centro di questo sistema di forze assume il nome di *baricentro* o *centro di gravità* dei punti dati. La ricerca del baricentro di un sistema di punti si riduce dunque alla ricerca del centro di un sistema di forze parallele.

La nozione del baricentro è indipendente dal numero dei punti e dalla grandezza delle forze, cosicché possiamo estenderla anche alle linee, alle superficie ed ai volumi, considerando queste figure come luoghi di punti. Le nostre considerazioni si limiteranno poi soltanto al caso di figure omogenee, e quindi potremo definire il baricentro di una linea, di una superficie, di un volume come il baricentro di tutti i punti costituenti quella linea, quella superficie o quel volume, sollecitati da forze parallele tutte eguali. Ne deriva che il baricentro di un segmento rettilineo coincide col suo punto di mezzo.

Il procedimento generale per determinare il baricentro di una figura qualunque è quello di decomporla in altre figure delle quali si sap- piano determinare i baricentri, e quindi cercare il baricentro di questi baricentri parziali, ai quali s'intendano applicate delle forze propor- zionali alle masse, ovvero anche alle estensioni (trattandosi di figure omogenee) delle parti in cui venne divisa la figura data. Più volte poi una figura risulterà composta di alcune figure positive e di altre negative, dovremo allora alle forze applicate ai baricentri parziali attribuire il segno che loro compete. Se in una superficie piana od in un solido di cui si cerca il baricentro è possibile condurre un sistema di corde parallele in modo che i loro baricentri o punti di mezzo siano situati sopra un piano o su di una retta (*piano* o *retta diametricale*), quel piano o quella retta conterrà il baricentro di tutta la figura. Se una figura qualunque ammette un piano, od un asse, ovvero un centro di simmetria, il baricentro cade rispettivamente sul detto piano, sull'asse o nel centro.

103. Baricentro di una linea. — Il baricentro di una poligonale si determina cercando il baricentro dei punti di mezzo dei vari lati, dopo aver applicato a questi punti forze proporzionali alle lunghezze

106. Baricentro di un parallelogrammo. — Si trova nel punto d'incontro delle diagonali e delle mediane (n. 102); coincide col baricentro dei quattro vertici supposti sollecitati da forze eguali.

107. Baricentro di un triangolo. — Si trova nel punto d'incontro delle tre mediane; coincide col baricentro dei tre vertici supposti sollecitati da forze eguali.

108. Baricentro di un quadrilatero. — Diviso il quadrilatero

MNPQ (fig. 43) in due triangoli

QMN, QNP colla diagonale QN,

il suo baricentro G deve dividere

la retta A_1A_2 che congiunge i ba-

ricentri dei due triangoli, e che ri-

sulta parallela all'altra diagonale,

in parti inversamente proporzionali

alle aree dei triangoli stessi, e sic-

come MR:RP, ovvero anche come

$A_1S : SA_2$, così basta portare il segmento A_1S a partire da A_2

in A_2G ; il punto G è il baricentro cercato.

109. Baricentro di un trapezio. — Il baricentro di un trapezio

MNPQ (fig. 44) deve trovarsi sulla mediana $G'G''$; inoltre se divi-

diamo il trapezio nei triangoli QMN, QNP di eguale altezza, e che

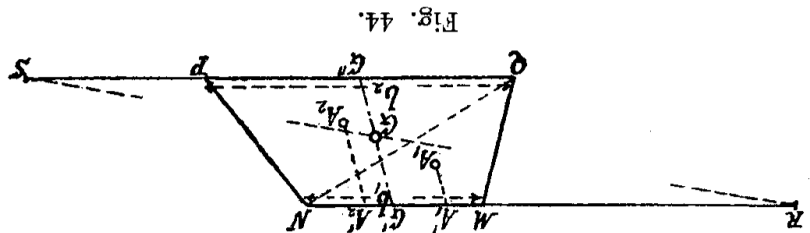


Fig. 44.

stanno perciò fra loro come le basi b_1 , b_2 del trapezio, e proiettiamo i baricentri dei triangoli ed il baricentro del trapezio parallelamente alla mediana su MN, si dovrà avere secondo la (8)

$$b_1 \cdot A_1A'_1 + b_2 \cdot A_2A'_2 = G'G''(b_1 + b_2),$$

ovvero, ponendo $G'G'' = m$:

$$b_1 \frac{1}{3} m + b_2 \frac{2}{3} m = G'G''(b_1 + b_2),$$

da cui

$$(13) \quad GG' = \frac{1}{3} m \frac{b_1 + 2b_2}{b_1 + b_2}.$$

Similmente, proiettando, sempre nella stessa direzione, A_1, A_2 e G sopra l'altra base QP , si trova

$$(14) \quad GG'' = \frac{1}{3} m \frac{b_2 + 2b_1}{b_1 + b_2};$$

dividendo la (13) per la (14) si ha finalmente

$$\frac{GG'}{GG''} = \frac{\frac{1}{2} b_1 + b_2}{\frac{1}{2} b_2 + b_1}.$$

Portando adunque la base b_2 in prolungamento della b_1 in M e

la b_1 in prolungamento della b_2 , in senso opposto, in P ; la RS incontra la mediana nel baricentro G .

Quando, per essere le basi del trapezio troppo grandi, i punti R ed S cadono fuori dei limiti del disegno, si applica con vantaggio la seguente altra costruzione.

Si trova il baricentro A_1 del triangolo QMN e lo si proietta sulla mediana parallelamente alla diagonale MP (fig. 45).

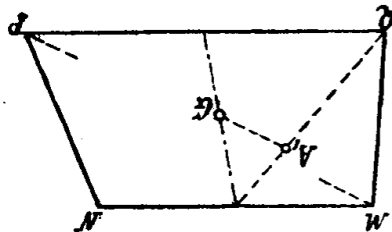


Fig. 45.

110. Baricentro di un poligono. — Il baricentro di un poligono si ottiene dividendolo in quadrangoli o triangoli, determinando i baricentri di queste figure e cercando poi il baricentro di questi baricentri parziali.

111. Baricentro di un settore circolare. — Si può riguardare

il settore circolare come risultante di settori elementari infinitesimi i quali, potendosi considerare come triangoli, hanno i loro baricentri sull'arco circolare, compreso entro il settore, che ha per centro il centro del settore e per raggio $\frac{2}{3}$ del raggio del circolo che limita il settore. Quindi il baricentro del settore coincide col baricentro dell'arco suddetto, e per determinarlo si sviluppi l'arco CB (fig. 46) in

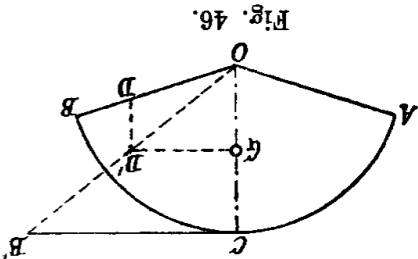


Fig. 46.

CB' sulla tangente in C, si divida il raggio OB in tre parti uguali, protetti il punto di divisione più vicino a B, parallelamente al raggio medio, su OB' in D', da D' si cali la normale su OC.

Il baricentro di un semicerchio dista dal centro di $\frac{3\pi}{4r}$, essendo r

il raggio del cerchio (n. 105).

112. Baricentro di un segmento circolare. — Si determina con-

siderando la figura come differenza fra

il settore OACB (fig. 47) ed il triangolo

OAB, le cui aree sono misurate pro-

porzionalmente da CB', sviluppo del-

l'arco CB, e da HK perpendicolare ad

OA. Applicando in una direzione qua-

lunque e nello stesso senso la misura

HK al baricentro A₁ del settore e la

misura CB' al baricentro A₂ del triangolo, e congiungendo gli estremi,

questa congiungente incontra il raggio medio nel baricentro G.

113. Baricentro di una porzione di corona circolare. — Il bari-

termina considerando la figura come differenza fra i due settori

OACB, OA'C'B' le cui aree stanno fra di loro come $\frac{OB^2}{OB'^2}$, ovvero

anche come $OB : OB' : \frac{OB}{OB'}$. Quindi, se prendiamo il raggio OB a

rappresentare l'area del grande settore, si determina il segmento

proporzionale al piccolo settore con-

ducendo la CB' e per C' la paral-

lela C'D, il segmento OD risulta

infatti eguale ad $OB' \cdot \frac{OB}{OB'}$. Appli-

cando ora in una direzione qualunque

e nello stesso senso la misura OB

al baricentro A₂ del piccolo settore

e la misura OD al baricentro A₁

del grande settore, la congiungente

degli estremi di questi segmenti incontra il raggio medio nel bari-

114. Baricentro delle figure ellittiche. — Poiché in due figure stanno in un rapporto costante, così i baricentri delle due figure sono affini le aree di due elementi superficiali corrispondenti qualunque

centro G cercato.

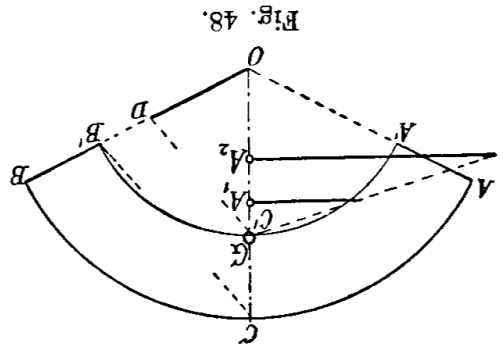


Fig. 48.

gli estremi di questi segmenti incontra il raggio medio nel bari-

punti corrispondenti. Utilizzando tale proprietà si può determinare il baricentro di una figura ellittica (un settore, un segmento...) deducendolo da quello di una figura circolare affine: che anzi si può stabilire l'affinità per modo che i due baricentri coincidano.

115. Baricentro di un semisegmento parabolico. — Dividendo il mezzo segmento in istrisce infinitesime parallele all'asse y (fig. 49), si deve avere per la (8)

$$\int_a^0 y dx \cdot \frac{2}{y} = G' \int_a^0 y dx$$

ed essendo $y^2 = px$

$$\frac{2}{p} \int_a^0 x dx = G' \int_a^0 x \frac{1}{2} dx;$$

integrando ed osservando che $pa = b^2$, si ottiene

$$(15) \quad G' = \frac{3}{8} b.$$

Similmente rispetto all'asse y si avrà

$$\int_a^0 y dx \cdot x = G'' \int_a^0 y dx,$$

ossia

$$\int_a^0 x \frac{1}{2} dx = G'' \int_a^0 x \frac{1}{2} dx;$$

integrando, si ottiene

$$(16) \quad G'' = \frac{3}{8} a.$$

Il baricentro di un intero segmento parabolico si trova evidentemente sulla mediana, e dista dalla corda di $\frac{2}{5}$ della freccia.

116. Baricentro di una figura piana a contorno irregolare. — Si divida la figura data in istrisce (fig. 50) con un sistema di corde parallele, abbastanza vicine, per modo che i lati di ogni striscia, che fanno parte del perimetro della figura, possano senza grave errore riguardarsi come rettilinei, ad eccezione nella nostra figura dell'ultima striscia, che si riguarda come un segmento parabolico. Si proceda in seguito alla riduzione delle aree delle singole strisce ad una data base, cioè alla ricerca di segmenti proporzionali alle dette aree.

117. — Le forze isolate o concentrate di grandezza finita, agenti secondo una linea retta, che hanno formato oggetto delle teorie svolte nel Capitolo I, sono in verità una concezione matematica, che non ha riscontro colle azioni reciproche che si sviluppano fra i corpi della natura, presentandosi queste sempre sotto forma di forze distribuite

CAPITOLÒ III. FORZE RIPARTITE

Applicando ora i detti segmenti, considerati come forze parallele, ai baricentri delle singole striscie, da determinarsi colle regole precedentemente svolte; e, dopo aver disposto tali forze in due direzioni distinte, collegandole con due poligoni funicolari, resta determinato dall'intersezione delle due risultanti il baricentro di tutta la figura. Nel nostro esempio le forze furono disposte prima verticalmente e composte con un poligono funicolare p relativo al polo P ; quindi furono dirette orizzontalmente e composte con un poligono funicolare l a lati normali ai raggi del fascio stesso.

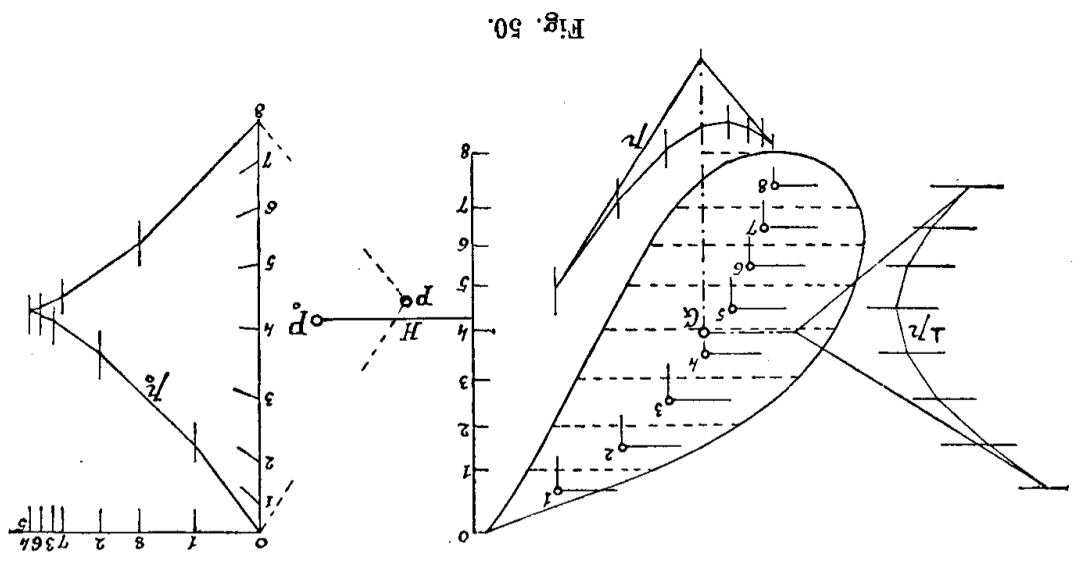


Fig. 50.

Questa operazione venne effettuata graficamente nella fig. 50, seguendo il procedimento descritto al n. 25 a). Per mezzo del poligono di moltiplicazione p_0 relativo al polo P_0 si ottennero così, prolungando i lati fino alla verticale 08, i segmenti proporzionali richiesti.

su determinate estensioni. La stessa teoria dei baricentri testè svolta, applicata all'azione della gravità sui corpi pesanti, riposa sul concetto di una forza ripartita su estensioni a tre dimensioni, volumi pesanti; ovvero su estensioni con una dimensione estremamente piccola rispetto alle altre due, superficie pesanti; od anche su estensioni con due dimensioni piccolissime rispetto alla terza, linee pesanti.

In taluni casi della pratica si hanno, è vero, esempi di forze finite distribuite su estensioni così piccole, che possono per lo studio dell'equilibrio dei sistemi, prescindendo dalle considerazioni di resistenza delle parti a contatto, assimilarsi senz'altro a forze concentrate. Così, ad esempio, nel caso di due sfere spinte una contro l'altra, e quando la deformazione del materiale di cui esse sono formate sia piccolissima, con tutto che il contatto avvenga non in un punto matematico ma attraverso una certa superficie, pur tuttavia questa è così limitata che l'azione mutua può praticamente riguardarsi come una forza isolata. Così pure il contatto fra due cilindri ad assi paralleli, compressi l'uno contro l'altro, avverrà in realtà, in causa della deformazione dei due corpi, secondo una certa superficie anziché lungo una generatrice matematica; tuttavia, se la deformazione è piccolissima, si può ritenere praticamente che quella forza sia distribuita su di una linea, la generatrice matematica di contatto. Nello stesso ordine di idee la pressione trasmessa da una ruota di un veicolo, stante la relativamente piccola larghezza del cerchione, può, in talune ricerche, riguardarsi come una forza isolata. Ma svariatissimi esempi si hanno in natura di forze ripartite su estensioni finite: l'azione della gravità su di un corpo; la pressione esercitata da un liquido o da un fluido contro la superficie di un corpo in esso immerso; il carico su di un solajo prodotto da un ammasso di materie pesanti incoerenti, ecc.

118. Forza ripartita normale ad una superficie piana. — Se una forza è distribuita con continuità su di una superficie, il rapporto Δq : ΔF della forza elementare Δq all'elemento di area ΔF su cui essa agisce dicesi l'intensità della forza ripartita in corrispondenza dell'elemento ΔF . Se poniamo $\Delta F = \alpha \cdot 1 \text{ m}^2$ e $\Delta q = \alpha \cdot q$, l'intensità viene anche rappresentata dal rapporto q : 1 m^2 e si dice che è di q kg. per metro quadrato di area, in quel punto dove è stato scelto l'elemento ΔF , cioè a dire, che se per un metro quadrato di superficie che avesse per centro l'elemento ΔF l'intensità rimanesse costante ed eguale a quella in ΔF , la forza agente su questo m^2 sarebbe di q kg. Se la superficie su cui agisce la forza è piana, come si verifica frequentemente nelle applicazioni, immaginiamo portata in una determinata scala delle forze la q come ordinata normale in

corrispondenza dell'elemento ΔF ; gli estremi di tutte le ordinate analoghe si trovano su di una superficie che ci rappresenta la legge di distribuzione della forza ripartita e si chiama *superficie di carico*. Il solido racchiuso fra la superficie influenzata, la superficie di carico e le ordinate di perimetro costituisce il *solido della forza ripartita*; il suo volume rappresenta l'ammontare della forza; il suo rapporto all'area influenzata chiamasi *l'intensità media*; la normale all'area influenzata, passante pel baricentro di tal solido, è la linea d'azione della risultante della forza ripartita; il suo punto d'incontro colla superficie influenzata chiamasi *centro di sollecitazione*. Nel caso speciale in cui la superficie di carico divenga un piano, il solido della forza ripartita diviene un prisma a basi, in generale, oblique; l'ammontare della forza ripartita è data in tal caso dal prodotto dell'area influenzata per lo *spigolo baricentrico* di questo prisma, cioè per l'ordinata che congiunge i baricentri delle due basi del prisma. Se il prisma è a basi parallele, si ha il caso di una *forza ripartita uniforme*: per essa l'intensità è costante in tutti i punti della superficie influenzata.

119. Forza ripartita normale ad una linea piana. — Supponiamo che la superficie influenzata sia cilindrica, avente per direttrice una linea ξ piana: le generatrici di questa superficie siano estremamente corte per modo da poter ritenere praticamente che la forza sia distribuita sulla linea ξ , od anche sia ξ la sezione mediana della superficie influenzata, e rispetto a tale sezione la forza sia distribuita simmetricamente, per modo da poter essere sostituita da una forza ripartita risultante giacente nel piano della ξ . L'intensità della forza ripartita in corrispondenza di un elemento $\Delta \xi$ della linea verrà rappresentata dal rapporto $\Delta p : \Delta \xi$, se Δp è la grandezza della forza applicata all'elemento $\Delta \xi$, ovvero dal rapporto $p : 1$ m., nel qual caso si dice che è di p kg. per metro corrente in quel punto della linea, con un significato analogo a quello già spiegato al n. precedente. Supposto che debba procedersi alla composizione grafica di questa forza ripartita, poiché essa risulta di una successione continua di forze elementari Δp , evidentemente il poligono delle forze ed il poligono

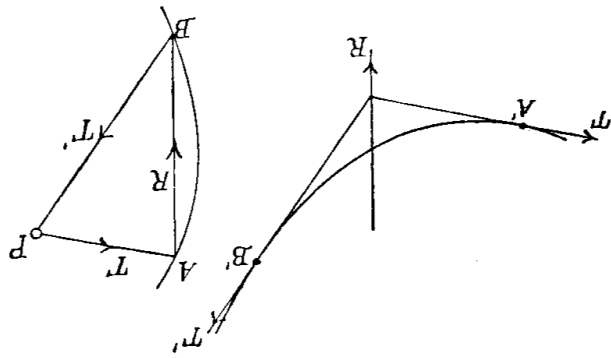


Fig. 51.

mentari Δp , evidentemente il poligono delle forze ed il poligono

funicolare diverranno linee curve senza angoli (fig. 51) e si chiamano: *la curva delle forze* e *la curva funicolare*, o semplicemente *la funicolare della forza*. Una corda AB della curva delle forze rappresenta il segmento equipollente alla risultante della forza ripartita, che ha per curva funicolare l'arco $A'B'$ limitato dalle tangenti T, T' corrispondenti ai raggi polari PA, PB ; la linea d'azione di questa risultante passa pel punto d'intersezione delle tangenti T, T' . Queste tangenti sono le linee d'azione delle tensioni della funicolare nei punti A, B , le quali sono misurate in grandezza e senso dai raggi PA, BP .

120. — Particolarmente interessante per la pratica è il caso di una forza ripartita emanante o convergente in un punto a distanza finita od infinita. Nel primo caso, e quando l'intensità della forza ripartita sia costante, la curva funicolare e la curva delle forze, se prendiamo il polo nel punto di concorso della forza ripartita, sono due cerchi concentrici (n. 100), o, scegliendo opportunamente la scala delle forze, un medesimo circolo. La tensione della funicolare è la stessa in tutti i punti, e per un punto qualunque del circolo funicolare, ha per segmento equipollente l'uno o l'altro (a seconda del senso della forza) dei due raggi che escono dal polo in direzione normale. Questo caso trova riscontro pratico in un anello elementare di un tubo circolare di spessore piccolissimo, disposto verticalmente, soggetto alla pressione interna od esterna di un gas o di un liquido: l'anello funziona da funicolare. La relazione qui riscontrata tra la curva delle forze e la curva funicolare è un caso speciale di relazioni più generali esistenti per le funicolari coniche (1).

121. — Se il punto di concorso va all'∞, cioè la forza ripartita ha direzione costante, p. es. verticale, la linea delle forze diviene una retta (fig. 52); la distanza polare H rappresenta la componente orizzontale della tensione in un punto qualunque della funicolare, o, come si chiama, *la tensione orizzontale della funicolare*.

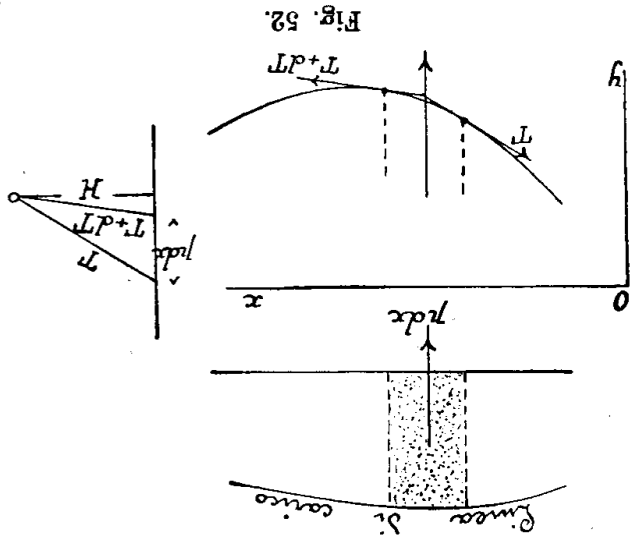


Fig. 52.

(1) Cfr. C. GURDI, *Lezioni di Statica grafica*. — Torino, 1887.

la quale è perciò costante. La linea, su cui normalmente agisce la forza ripartita, è in tal caso una orizzontale, e portando in corrispondenza dei punti medi dei vari suoi elementi e verticalmente le ordinate p , il luogo degli estremi è la *linea di carico*. Per un *carico ripartito uniformemente* la linea di carico è un'orizzontale.

È interessante trovare l'equazione differenziale della curva funicolare di un carico verticale comunque ripartito.

Riferendola agli assi coordinati x, y ed indicando con T la tensione della funicolare nel punto x, y abbiamo

$$d \left(T \frac{ds}{dx} \right) = 0 \quad d \left(T \frac{ds}{dy} \right) = -pd \quad ;$$

dalla prima ricaviamo

$$T \frac{ds}{dx} = \text{cost} = H,$$

e quindi la seconda diviene

$$d \left(H \frac{dy}{dx} \right) = -pd$$

ossia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{H} x \quad (17)$$

che è l'equazione cercata. Da essa immediatamente si deduce che la funicolare di un carico uniformemente distribuito ($p = \text{cost}$) è una parabola.

CAPITOLO IV. EGUILIBRIO DI SISTEMI VINCOLATI REAZIONI DEI VINCOLI

122. — In questo capitolo ci occuperemo della determinazione grafica delle reazioni dei vincoli in vari casi di corpi o sistemi rigidi vincolati. Supporremo da prima che le superficie a contatto non siano capaci di sviluppare alcuna resistenza d'attrito.

§ 1. — Vincoli senza attrito.

123. Corpo appoggiato ad un altro. — Cominciamo dal considerare un corpo C (fig. 53) appoggiato ad un altro C_1 , e sollecitato da forze contenute nel piano della figura, che rappresenta una sezione

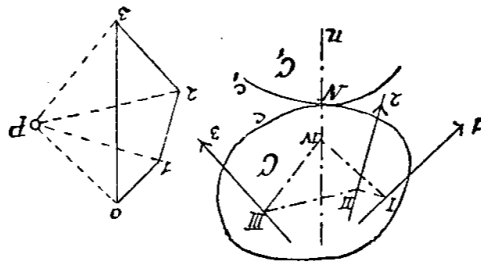


Fig. 53.

dei due corpi. Sia che i due corpi si appoggino nell'unico punto N , ovvero secondo una retta di cui N rappresenta la traccia, è evidente che, se si prescinde dalla resistenza d'attrito, affinché il corpo C rimanga in equilibrio, deve la risultante delle forze che lo sollecitano avere per

linea d'azione la normale comune n in N alle due linee c e c_1 ; inoltre il senso di questa risultante dev'esser tale da comprimere il corpo C contro C_1 . Costruito quindi il poligono delle forze, dovrà il segmento 03 , equipollente alla risultante, riuscire parallelo alla retta n , ed avere il senso sopraindicato; di più, costruito un poligono funicolare, esso deve chiudersi sulla retta n . La forza 30 , eguale ed opposta alla risultante delle forze sollecitanti il corpo C ed avente per linea d'azione la stessa n , rappresenta la reazione del corpo C_1 contro il corpo C . Aggiunta questa forza alle altre date, si può considerare il corpo C come libero nello spazio, indipendente cioè dal corpo C_1 .

124. Corpo ritenuto da un punto fisso. — Supponiamo ora che il corpo C (fig. 54) sia ritenuto da un punto fisso F e sia sollecitato da forze contenute nel piano della figura, che rappresenta una sezione

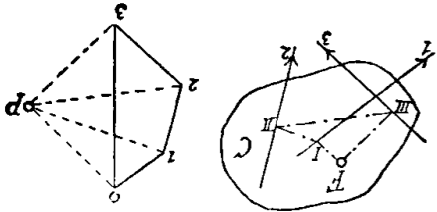


Fig. 54.

del corpo e che contiene il punto fisso. Affinchè il corpo sia in equilibrio, evidentemente è necessario e sufficiente che la risultante di tutte le forze passi per F , giacchè, qualunque essa sia quanto alla grandezza e senso, il punto fisso (che qui supporremo indefinitamente resistente) sarà sempre capace di reagire con una forza eguale ed opposta, ed il corpo rimarrà quindi in equilibrio. Graficamente si manifesterà l'equilibrio, se, costruito un poligono funicolare di cui il primo lato passi per F , vi passerà anche l'ultimo. Il segmento 03 rappresenta l'azione che il corpo C esercita sul punto fisso, il seg-

mento 3 0 la reazione di questo contro quello. Aggiunta questa forza a quelle date, si può considerare il corpo C come libero nello spazio.

125. Corpo appoggiato a due altri. — Affinchè un corpo C (fig. 55)

appoggiato a due altri C_1, C_2 in N ed N_1 , e sollecitato da forze contenute nel piano della figura, possa rimanere in equilibrio, è necessario che le forze date possano essere sostituite da due agenti secondo le normali n ed n_1 , e comprimenti il corpo C contro gli altri C_1 e C_2 . Costruita quindi la poligonale 0 1 2 3 delle forze originali da prima se il senso delle due forze 0 4, 4 3 parallele ad n, n_1 è tale da comprimere C contro C_1 e C_2 . Se ciò si verifica, aggiungiamo alle forze date le due 3 4, 4 0 aventi per linee d'azione le n_1 ed n e costruiamo un poligono funicolare; se esso risulta chiuso, il corpo C è in equilibrio, e le forze 3 4, 4 0 rappresentano le reazioni degli appoggi. O più semplicemente, se il punto F comune alle n, n_1 cade entro i limiti del disegno, costruendo un poligono funicolare che connetta le forze date e di cui il primo lato passi per F, vi deve passare anche l'ultimo. Aggiungendo alle forze date le reazioni 3 4, 4 0 degli appoggi, si può considerare il corpo C come libero. È chiaro che le condizioni di equilibrio del corpo C non mutano, se invece di supportarlo appoggiato ai corpi C_1, C_2 s'immagina che esso sia tenuto da un punto fisso F.

126. Corpo appoggiato ad un altro e ritenuto da un punto fisso. — Perché un corpo C (fig. 56) appoggiato ad un altro C_1 , ritenuto da un punto fisso F e sollecitato da forze contenute nel piano della figura, rimanga in equilibrio, è necessario e sufficiente che, sostituite le forze date con due componenti, una agente secondo la n , l'altra passante per F, la prima tenda a comprimere il corpo C contro C_1 . Si determinano tali componenti colla costruzione spiegata al n. 66 e riprodotta nella figura in cui 0 4 rappresenta l'azione del corpo C contro il punto fisso F, e 4 3 l'azione contro il corpo C_1 . Queste due forze, volte in senso opposto, rappresentano le reazioni degli appoggi,

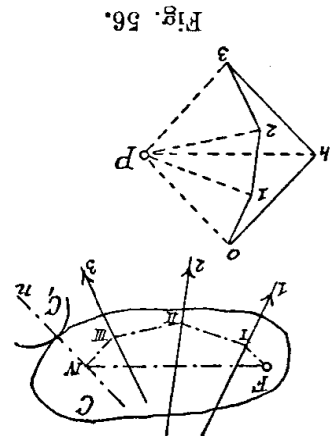


Fig. 56.

Fig. 55.

e aggiungendole alle forze date, si può considerare il corpo C come libero.

127. Corpo appoggiato a tre altri. — Sostituendo alle forze che sollecitano il corpo tre altre equivalenti, che abbiano per linee d'azione le normali comuni alle superficie d'appoggio (supposto sempre che le forze e le normali suddette giacciono in un medesimo piano) colla costruzione del n. 68, ovvero con quella del n. 67, se delle forze date si conosce la risultante, resterà a verificare se le tre forze così determinate tendono a comprimere il corpo dato contro i tre corpi d'appoggio. Le forze eguali ed opposte a quelle di cui ora si è parlato rappresentano le reazioni degli appoggi, ed aggiungendole alle forze che sollecitano il corpo dato, questo può essere considerato come libero. S'intende da sé poi che le normali alle superficie d'appoggio devono soddisfare alle condizioni già esposte al n. 67, affinché il problema della determinazione delle reazioni degli appoggi ammetta una soluzione unica e determinata. Evidentemente l'equilibrio del corpo dato non sarebbe turbato se si togliessero due dei corpi d'appoggio e si rendesse fisso il punto comune alle linee delle reazioni corrispondenti.

128. Corpo ritenuto da due punti fissi. — Un corpo ritenuto da due punti fissi contenuti nel piano delle forze è sempre in equilibrio; ma le reazioni dei punti fissi risultano staticamente indeterminate (n. 65).

Daremo ora qualche esempio pratico dei casi di equilibrio studiati.

129. — Una trave orizzontale A B (fig. 57) caricata di pesi contenuti nel suo piano medio (*piano delle forze*, coincidente col piano

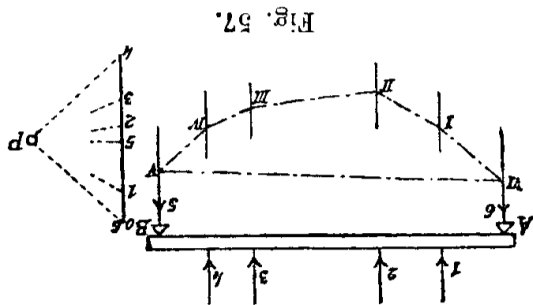


Fig. 57.

della figura) appoggia orizzontalmente agli estremi A e B; si domandano le reazioni degli appoggi. In tal caso le linee d'azione delle reazioni sono anch'esse verticali, e quindi l'equilibrio ha certamente luogo. Costruito un poligono funicolare, e condotto il lato di chiusura V, VI e dal polo il raggio parallelo P 5, restano determinate la reazione 4.5 dell'appoggio B, e quella 5.6 dell'appoggio A.

130. — Un'asta A B (fig. 58) termina con un occhio cilindrico nel quale entra un *perno* (che riterremo di diametro alcun poco minore)

solidale con un corpo fisso C_1 . Questo modo di attacco dell'asta AB al corpo C_1 chiamasi *cerniera* e rappresenta praticamente ciò che

abbiamo fin qui chiamato un punto fisso; infatti il perno, potendosi appoggiare contro l'occhio lungo una generatrice qualunque della superficie cilindrica, è atto a reagire in una direzione qualsiasi. Sia inoltre l'asta AB appoggiata in un punto B , e sollecitata da una forza I : si domandano le reazioni degli appoggi. Congiunto il punto S , comune alla normale alla superficie d'appoggio della trave in B , e alla forza data, col centro del perno, restano determinate le linee delle reazioni, di cui col triangolo delle forze si vengono poi a conoscere le gran-

dezze ed i sensi. Se il punto S cade fuori dei limiti del disegno, come pure se le forze sono più di una, vale la costruzione della fig. 59. In ambedue le figure, il punto o rappresenta la traccia della generatrice d'appoggio del perno contro l'occhio della cerniera.

131. — Le fig. 60 e 61 rappresentano una trave inclinata appoggiata in A contro una risega di un muro ed in B ad un'altra trave, e sollecitata da una o più forze. In questo esempio le superficie d'appoggio hanno una certa

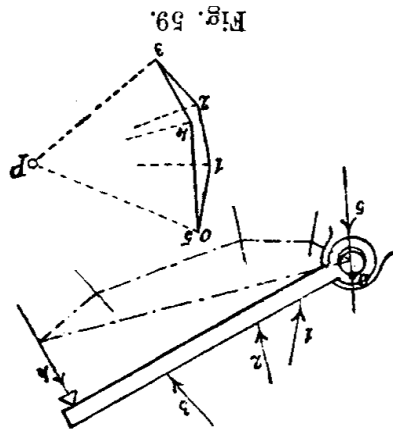


Fig. 59.

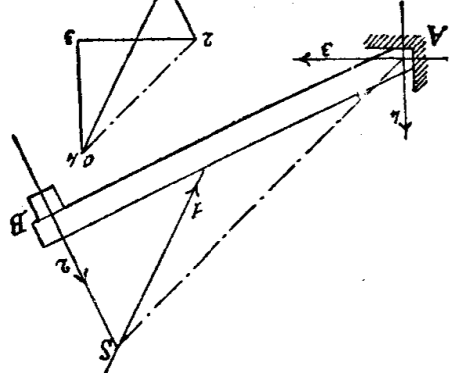


Fig. 60.

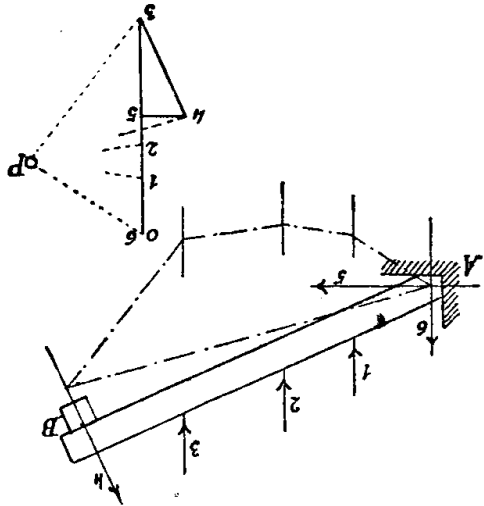


Fig. 61.

estensione (ciò che del resto si verifica in tutti i casi della pratica)

e quindi l'azione mutua che si trasmettono i corpi a contatto è una forza ripartita con legge staticamente indeterminata; tuttavia, con approssimazione più che sufficiente pel nostro scopo, possiamo supporre che quell'azione sia uniformemente distribuita, e quindi sostituire colla risultante applicata al centro della superficie d'appoggio; ciò non può produrre un errore apprezzabile, avuto riguardo alla piccola estensione della superficie di appoggio rispetto alla lunghezza della trave. Le figure mostrano chiaramente le note costruzioni per la determinazione delle reazioni.

132. — La fig. 62 rappresenta due aste A B, B C collegate tra loro a cerniera in B, ed articolate a cerniera in A e C con due corpi fissi, e sollecitate da forze; vogliamo determinare le reazioni delle tre cer-

niere. Osserviamo per questo che le reazioni delle cerniere A e B contro l'asta A B devono evidentemente fare equilibrio al sistema di forze sollecitanti quell'asta; similmente, che le reazioni delle cerniere B e C contro l'asta B C devono fare equilibrio alle forze sollecitanti l'asta B C; e finalmente che le azioni che si trasmettono le due aste attraverso la

cerniera comune B debbono essere eguali ed opposte, se la forza in B è applicata ad una delle due aste; che se poi questa forza è applicata ad un perno, il quale non sia solidale con alcuna delle due aste, allora devono essere uguali ed opposte le azioni che si trasmettono il perno e ciascuna delle due aste. Da tutto ciò si conclude che le linee d'azione delle reazioni, che noi cerchiamo, sono lati del poligono funicolare che connette le forze date, e che passa per le tre cerniere. Dunque il problema si risolve costruendo questo poligono funicolare.

Costruiamo un primo poligono funicolare di tentativo A I II III IV

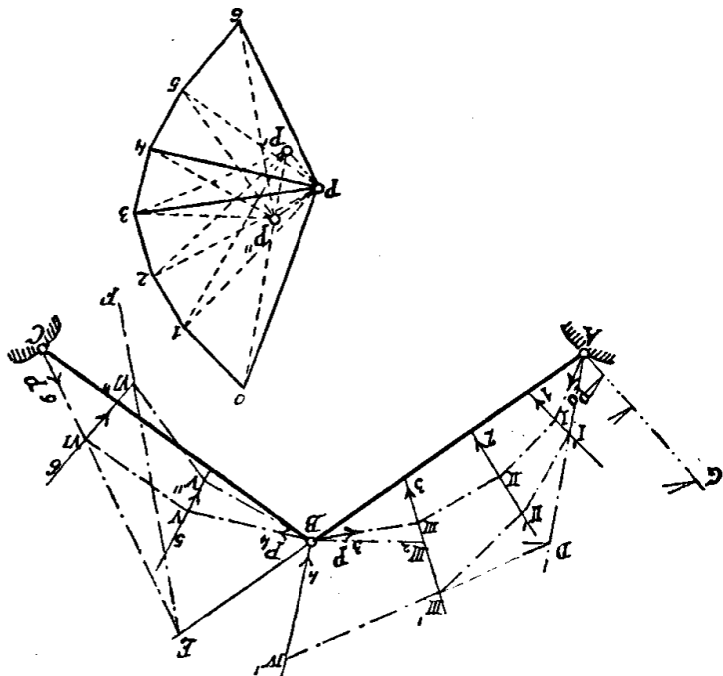


Fig. 62.

relativo al polo P' , facendo passare il primo lato per A : il lato III' IV' in generale non passerà per B , prolunghiamolo fino ad incontrare in D il primo lato, tiriamo BD e dal vertice B del poligono delle forze conduciamo il raggio parallelo, il quale incontra $P' O$ in P'' : a questo polo corrisponde un poligono funicolare che passa per A e per B . Proseguiamo la costruzione del poligono funicolare con questo secondo polo, l'ultimo lato VI'' F non passerà in generale per C ; prolunghiamolo fino ad incontrare in E la retta AB , congiungiamo E con C ; $C VI$ è l'ultimo lato del poligono funicolare risolvente. Se dall'estremo G della poligonale delle forze tiriamo il raggio parallelo al lato $C VI$ e da P'' la parallela alla retta AB , determiniamo in P il polo relativo. Il poligono funicolare risolvente può essere costruito sia servendosi del polo P , sia deducendolo dai poligoni di tentativo giovandosi delle rette AE ed AG (parallela a PP''), rette su cui s'intersecano i lati corrispondenti.

I segmenti $P O$, $6 P$ rappresentano in grandezza e senso le reazioni delle cerniere A e C . Quanto alle reazioni della cerniera B contro le due aste, vi ha da distinguere tre casi:

a) se il carico 4 è applicato all'asta AB , le suddette reazioni sono equipollenti a $P 4$, $4 P$ ed hanno per linea d'azione la $B V$;

b) se il carico 4 è applicato all'asta BC , le reazioni sono equipollenti a $P 3$, $3 P$ ed hanno per linea d'azione la $III B$;

c) se finalmente il carico 4 è applicato ad un perno, il quale non sia solidale con alcuna delle due aste, allora le reazioni del suddetto perno contro le due aste sono equipollenti a $3 P$ e $P 4$ ed hanno per linee d'azione la $B III$ e la $B V$.

Se le forze date sono concorrenti in un punto O a distanza finita o infinita, il quesito ora trattato, ossia il problema di costruire il poligono funicolare che passa per tre punti dati A, B, C , può essere risoluto anche osservando che la figura costituita da un poligono funicolare qualunque di tentativo e dalle rette $A' B'$, $B' C'$ (proiezioni delle AB, BC , fatte dal punto O sul poligono suddetto) e la figura costituita dal poligono funicolare risolvente e dalle rette AB, BC sono omologiche nel primo caso, affini nel secondo.

133. — La costruzione generale del n. 132 si semplifica notevolmente se le forze applicate alle aste si riducono ad una che può anche essere la risultante di più. Preso in tal caso (fig. 63) un punto I' della linea della forza I e congiuntolo con A e B , si guidino dai punti O ed I della poligonale delle forze i raggi paralleli, si ha così il polo P' relativo ad un poligono funicolare di tentativo passante per A e B . Dall'ultimo lato di questo poligono, il quale in generale non passerà

per C, si deduce nel modo noto l'ultimo lato C III del poligono ri-

solvente, e quindi resta de-terminato anche il penul-timo III B; le rette 3P, 2P, P'P, rispettivamente pa-rallele alle CIII, III B, BA, s'incrociano nel polo P rela-tivo al poligono risolvente, di cui si possono quindi tracciare anche il primo e il secondo lato.

La costruzione è ancora più semplice se la cer-niera B (fig. 64) è scarica.

134. — Se una delle due aste, p. es. l'asta BC, è scarica, le reazioni delle cerniere B e C contro di essa devono, per l'equilibrio dell'asta suddetta, essere uguali ed opposte; cioè l'ultimo lato del poligono risolvente deve essere BC. In tal caso si può risolvere il problema, o seguendo il metodo generale, ovvero anche decomponendo il sistema di forze applicate all'asta AB in due componenti, una avente per linea d'azione la BC, e l'altra passante per A, colla costruzione data al n. 66.

Le fig. 65 e 66 rappresentano casi particolari di quello ora trattato.

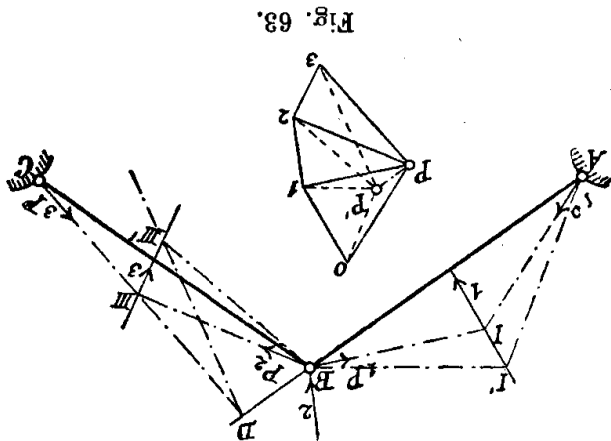


Fig. 63.

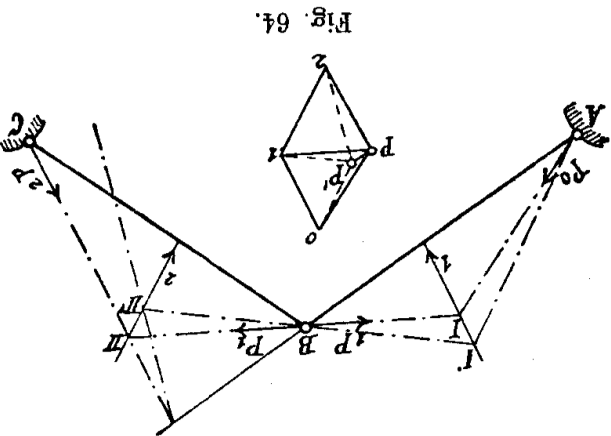


Fig. 64.

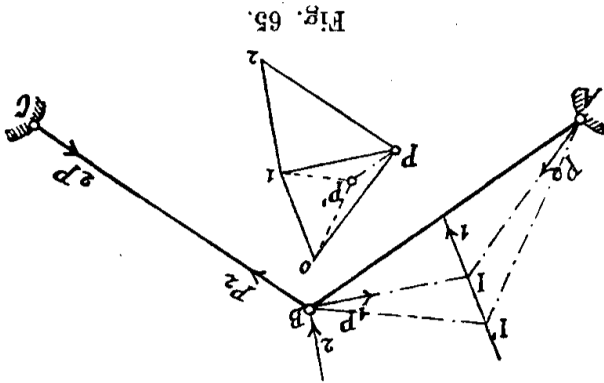


Fig. 65.

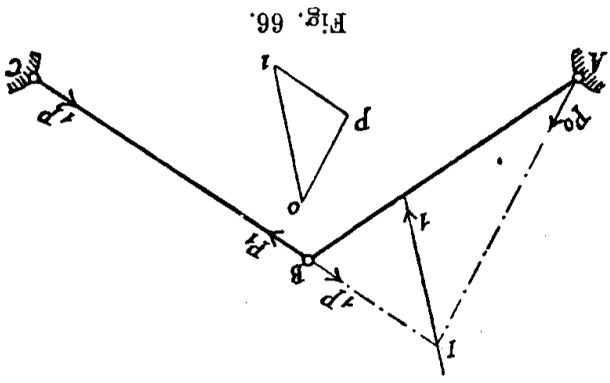


Fig. 66.

135. — Le fig. 67, 68, 69 sono applicazioni delle cose fin qui dette: nella fig. 67, AD rappresenta un trave destinato a sostenere una

rettoia pensile: esso è attaccato al muro mediante la cerniera A e sorretto dal tirante CB, che ad esso si collega mediante la cerniera B.

Il trave AD è caricato da più forze di cui la I rappresenta la risultante: la figura mostra chiaramente come si determinano le reazioni delle cerniere.

Analogamente si risolverebbe il problema se il trave AD fosse invece sorretto da un puntone.

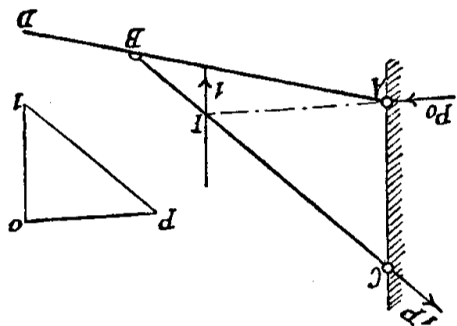


Fig. 67.

136. — La fig. 68 rappresenta lo schema di una *capriata*, di cui i

puntoni AB, BC sono sollecitati dalle forze 1 e 2, e la *catena* AC dalla forza 4 (forze che possiamo anche supporre risultanti di più forze date): le tre aste sono articolate fra di loro a cerniera, la ca-

prata è liberamente appoggiata orizzontalmente in C e vincolata in A. Co-

minciamo a connettere le forze date con un poligono funicolare relativo al polo P' allo scopo di de-

terminare le reazioni della *capriata*. Ciò fatto, costruiamo un nuovo poligono delle forze 0 1 2 3 4 5 disponendole nell'ordine col quale s'incontrano

girando attorno alla *capriata*, e dal poligono funicolare già descritto (se abbiamo avuto l'avvertenza di farlo passare, oltre che

per la cerniera A, anche per la cerniera B, e di far seguire alla forza *ab* la *bc*) deduciamo i lati AI, I II, II C del poligono risolvente, quindi il polo relativo P. Proiettando da questo gli altri due vertici 3 e 4, è possibile completare il poligono funicolare risolvente coi lati CIV, IVA, di cui l'ultimo per verifica deve passare per A. Dopo ciò, sono note completamente le reazioni P 0, I P delle cerniere A e B contro

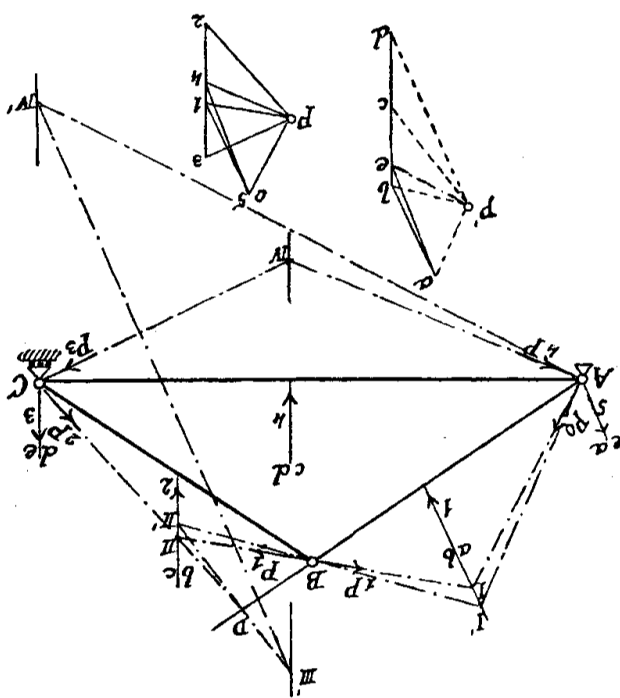


Fig. 68.

l'asta A B, le reazioni P 1, 2 P delle cerniere B e C contro l'asta B C, e finalmente le reazioni P 3, 4 P delle cerniere C ed A contro l'asta A C.

137. — La fig. 69 rappresenta

lo schema di una gru girevole, formata di tre aste articolate fra di loro a cerniera, appoggiata verticalmente ed orizzontalmente in A e verticalmente in B. Si sono determinate le reazioni delle tre cerniere e degli appoggi pro-dotte dal carico *ab* da sollevare. Tutte le forze agenti sulla colonna A B sono le *ca, ae, ed*

df, fb, bc, che, come si vede, sono in equilibrio.

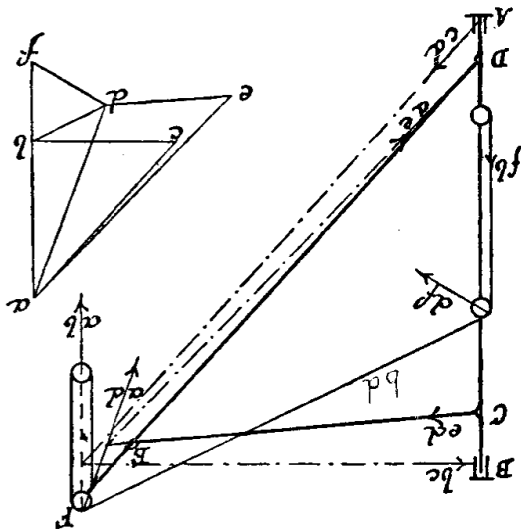


Fig. 69.

§ 2. — Vincoli con attrito.

138. — Sia C un corpo qualunque posato su di un piano *l* (fig. 70);

supponiamolo sollecitato da forze che ammettano una risultante R, il corpo sia stabile al rovesciamento, ossia il punto d'incontro X di R col piano *l* cada nell'interno dell'involuppo di quelle tangenti al contorno della superficie d'appoggio che non tagliano la detta superficie: si domanda la condizione perchè esso sia stabile anche rispetto allo scorrimento. Decomposta la R, nel punto X, in una componente $R \cos \alpha$ normale al piano d'appoggio ed in una $R \sin \alpha$ giacente nel detto piano, quest'ultima tende a far scorrere il corpo lungo il piano *l*. Tale movimento viene contrastato dalla resistenza d'attrito, la quale, ammesse le leggi di Morin, è indipendente dall'estensione della superficie di appoggio ed è proporzionale alla componente normale $R \cos \alpha$, talchè detto *f* il coefficiente di proporzionalità, chiamato *coefficiente d'attrito*, tale resistenza è misurata da $f R \cos \alpha$. Or bene, anche $R \sin \alpha < f R \cos \alpha$, cioè finchè $\text{tg } \alpha < f$, il corpo resterà in equilibrio. Sia φ il valore di α pel quale lo scorrimento sta per avvenire, si avrà allora $\text{tg } \varphi = f$, cioè: *il coefficiente d'attrito è misurato dalla tangente trigonometrica dell'angolo che la forza*

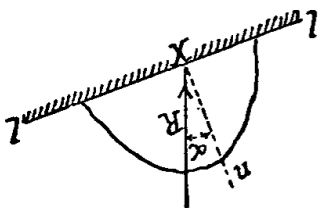


Fig. 70.

fa colla normale alla superficie d'appoggio nel caso dell'equilibrio limite. S'immagini il cono di rotazione che ha il vertice in X, per asse la normale n e per apertura 2φ , esso chiamasi il cono d'attrito: per la stabilità del corpo C allo scorrimento deve la risultante R cadere entro il cono d'attrito; si avrà l'equilibrio limite quando R coincida con una generatrice del cono suddetto.

139. — Supponiamo che il corpo sia sollecitato soltanto dalla gravità, e sia stabile rispetto al rovesciamento; poiché l'angolo che la linea del peso fa colla normale al piano d'appoggio è uguale all'angolo d'inclinazione di quest'ultimo all'orizzontale, così il corpo rimarrà in equilibrio stabile finchè tale angolo sarà inferiore a φ , si troverà all'equilibrio limite quando il piano sarà inclinato di φ .

140. — In ogni caso la reazione del piano, quando il corpo rimane in equilibrio, è una forza eguale ed opposta alla R; quindi un piano capace di sviluppare attrito può reagire secondo tutte le direzioni non esterne al cono d'attrito.

141. — Una cerniera, come si è già visto, rappresenta praticamente un punto fisso, perchè può reagire in qualsiasi direzione. Tenendo conto della resistenza d'attrito che si sviluppa fra la superficie del perno e quella dell'occhio della cerniera, la reazione potrà assumere rispetto alla normale comune alle dette superficie nel piano delle forze, in corrispondenza della generatrice di contatto, tutte quelle inclinazioni che risultano inferiori all'angolo d'attrito. Con centro nel centro del perno (fig. 71) e con raggio $r \sin \varphi$, dove r è il raggio del perno, si descriva un circolo, chiamato *circolo d'attrito*; è facile vedere che qualsiasi tangente a tale circolo risulta inclinata dell'angolo φ alla normale alla superficie del perno, nei punti in cui essa l'incontra. Quindi una cerniera, tenuto conto della resistenza d'attrito che in essa si sviluppa, può reagire, in un senso o nell'altro, secondo tutte le rette che distano dal centro del perno, non più di $r \sin \varphi$.

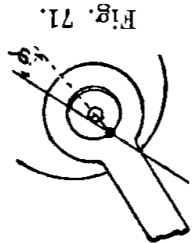


Fig. 71.

142. — Ciò premesso, andiamo a vedere come si modificano le condizioni di equilibrio e le conseguenti reazioni d'appoggio nei casi contemplati al paragrafo precedente.
 Nel caso considerato al n. 123 (fig. 53) si avrà equilibrio tutte le volte che la risultante delle forze sollecitanti il corpo C (avendo sempre tale senso da comprimere il corpo C contro il corpo C₁), cada entro il cono d'attrito che ha il vertice in N e per asse la normale n ,

overo, trattandosi di forze contenute nel piano della figura, entro l'angolo 2φ che ha il vertice in N e per bisettrice la n . La reazione sarà eguale ed opposta a tale risultante. L'angolo suddetto può chiarsi il campo di stabilità allo scorrimento per il corpo considerato.

143. — Nel caso contemplato al n. 124 (fig. 54), ritenendo che il punto fisso venga attuato mediante una cerniera, il corpo C resterà in equilibrio sempre quando la risultante delle forze che lo sollecitano passi ad una distanza dal centro del perno non maggiore di $r \sin \varphi$. La reazione della cerniera sarà eguale ed opposta alla risultante suddetta qualunque sia il suo senso.

144. — Nel caso considerato al n. 125, costruiti (fig. 72) i doppi angoli d'attrito (campi di stabilità per le reazioni dei corpi C_1 e C_2) che hanno i vertici in N ed N_1 , e per bisettrici le n ed n_1 , purchè la risultante delle forze sollecitanti il corpo C attraversi il quadrilatero $ABDE$ ed abbia tale senso da comprimere C contro C_1 e C_2 , il corpo rimane in equilibrio. Tale quadrilatero rappresenta dunque il campo di stabilità allo scorrimento per il corpo C . Le reazioni dei corpi C_1 e C_2 risultano staticamente indeterminate, eccettuati soltanto i casi di equilibrio limite, i quali hanno luogo quando la risultante suddetta ha in comune col quadrilatero soltanto il vertice A , ovvero il vertice D . Nel primo caso le reazioni hanno per linee NA ed N_1A ed il corpo C è in procinto di scorrere nel senso indicato dalla freccia; nel secondo caso le linee d'azione delle reazioni sono ND ed N_1D ed il corpo è sul punto di scorrere nel senso opposto.

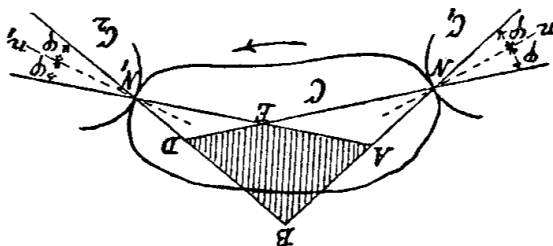


Fig. 72.

145. — Nel caso preso in esame al n. 126, se i corpi a contatto e la cerniera, realizzante il punto fisso, fossero rigidi, vi sarebbero infiniti casi di equilibrio, le reazioni d'appoggio risulterebbero staticamente indeterminate; mentre invece una deformazione, sia pur piccola, del corpo C , prodotta dalle forze da cui è sollecitato, la quale produca un piccolo scorrimento di esso rispetto ai corpi d'appoggio (corpo C_1 e perno della cerniera), rende le reazioni staticamente determinate. Così nel caso rappresentato dalla fig. 73, una deformazione del corpo C che produca uno scorrimento, sia pur piccolo, di esso ri-

spetto al corpo C_1 ed una, sia pur piccola, rotazione del corpo stesso

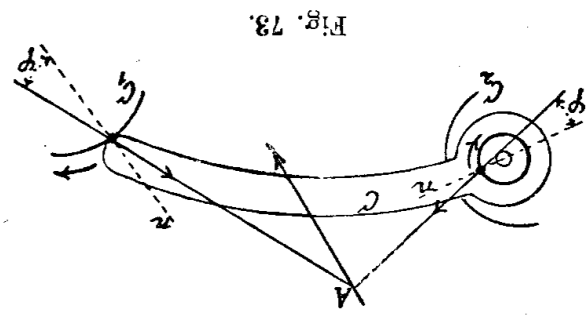


Fig. 73.

genziale di senso opposto a quello indicato dalla freccia.

146. — Analoghe considerazioni possono svilupparsi riguardo al

caso considerato al n. 127, quando si tenga conto della resistenza d'attrito fra i corpi a contatto.

147. — Due corpi C_1 e C_2 (fig. 74), sollecitati da forze nel piano

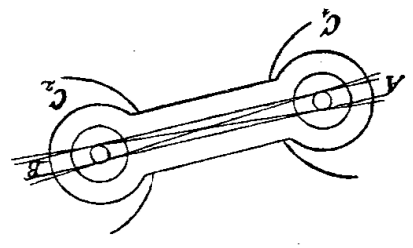


Fig. 74.

niere. Se si prescinde dal peso proprio dell'asta, le azioni che le due
cerniere esercitano contro l'asta devono
evidentemente essere due forze eguali ed
opposte rivolte una contro l'altra o in
senso opposto. Inoltre, se le cerniere fos-
sero prive d'attrito, la linea d'azione co-
mune di tali forze sarebbe staticamente
determinata, essa dovrebbe coincidere e-
videntemente colla congiungente i centri
delle due cerniere. Esistendo invece la resistenza d'attrito, la suddetta
linea risulta staticamente indeterminata, a meno che, per la deforma-
zione del sistema, avvenga una piccola rotazione dell'asta rispetto ai
corpi, nel qual caso la suddetta linea coinciderà con una delle quattro
tangenti comuni ai circoli d'attrito delle due cerniere, e questa tan-
gente resterà determinata dai sensi delle rotazioni.