b) Il poligono delle forze riesce chiuso ed il poligono funicolare aperto; in questo caso la risultante è una forza infinitamente piccola e lontana, che viene sostituita da una coppia;

c) Il poligono delle forze ed il poligono funicolare riescono chiusi; la risultante è nulla, il sistema è in equilibrio.

§ 3. — Momenti statici delle forze giacenti in un piano.

50. — Si chiama *momento* di una forza il prodotto della forza per una o più distanze; si dice *statico* o di *primo ordine*, quando è il prodotto della forza per una sola distanza. Ci occuperemo presentemente soltanto dei momenti di primo ordine, ed intenderemo per momento di una forza rispetto ad un punto (*centro dei momenti* o *polo*) il prodotto della forza per la distanza (*braccio di leva della forza*) del punto dalla sua linea d'azione. Assumeremo il momento come *positivo* o *negativo,* secondo che la forza tende a far ruotare, intorno al centro dei momenti, il piano determinato dalla forza e dal punto nel senso in cui vediamo ruotare le lancette di un orologio situato su quel piano, o nel senso opposto.

Da questa definizione scaturisce che il momento di una forza o di più forze parallele non varia comunque si sposti il centro dei momenti su di una parallela alla comune direzione delle forze; questa parallela prende in alcuni casi il nome di *asse dei momenti.* Essendo il momento di una forza il prodotto di una forza per una distanza, se si assume come unità di forza il chilogrammo e per unità di lunghezza il metro, si avrà per l'unità di momento il prodotto di 1^{kg} per 1^{m} che prende il nome di *chilogrammetro,* ed il momento verrà quindi espresso con un certo numero di chilogrammetri. Graficamente, il momento viene rappresentato da un rettangolo, di cui un lato rappresenta in grandezza e senso la forza, l'altro lato il braccio di leva. Questo rettangolo definisce completamente in grandezza e senso il momento, ed infatti se ne ottiene la grandezza, cioè il numero di chilogrammetri, leggendone un lato nella scala delle forze e l'altro nella scala delle lunghezze, e facendo il prodotto. Se ne deduce poi il senso positivo o negativo, secondo che esso rimane alla destra, ovvero alla sinistra di chi percorre il contorno nel senso individuato dalla forza.

Chiamasi *triangolo-momento* il triangolo che dal centro dei momenti proietta la forza; la sua area misura la metà del momento della forza.

51. — *Per un sistema qualunque di forze e per un centro qualunqu dei momenti, il momento della risultante è uguale alla somma algebrica dei momenti delle componenti:*

a) Se le forze hanno tutte la medesima linea d'azione, esse hanno tutte il medesimo braccio di leva, comune anche alla risultante, ed essendo in questo caso la risultante eguale alla somma algebrica delle componenti, anche il momento della risultante sarà eguale alla somma algebrica dei momenti delle componenti;

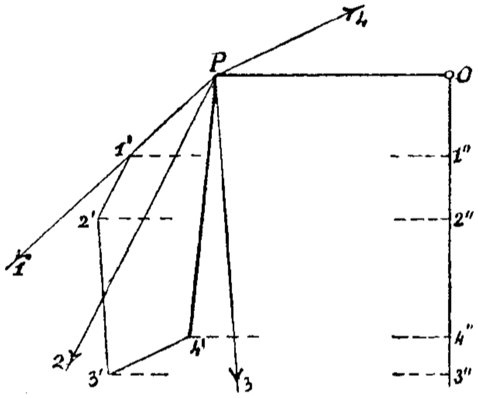

Fig. 25.

b) Se le forze sono concorrenti in un punto P (fig. 25), si congiunga P col centro O dei momenti, e immaginiamo trasportato in P il punto d'applicazione di ciascuna forza; il triangolo-momento di una forza qualunque ha allora per base P O e per altezza l'antiproiezione della forza stessa sulla direzione P O, di guisa che, costruita la poligonale delle forze coll'origine in P e proiettati i suoi vertici parallelamente a P O su di un asse per O, normale a P O, la somma algebrica dei momenti delle forze viene data da: $PO\,(0\,1'' + 1''\,2'' + 2''\,3'' + 3''\,4'')$, la quale è appunto uguale a $PO\,.\,0\,4''$, momento della risultante;

c) Se il punto di concorso è all'infinito, ossia se le forze sono parallele (fig. 26), connettiamole con un poligono funicolare, di cui prolungheremo i successivi lati fino ad incontrare l'asse dei momenti. Si ha allora

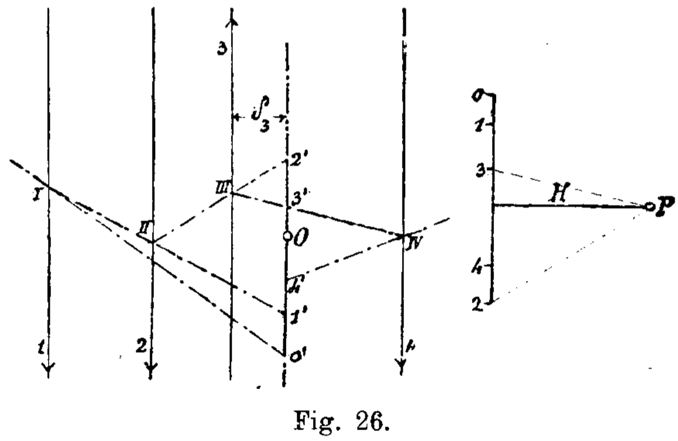

Fig. 26.

dalla figura, per una forza qualunque, per esempio la 3, indicando con H la distanza del polo P dalla retta delle forze e con δ_3 il braccio di leva della forza 3,

$$\overline{2'\,3'} = \overline{2,3}\;.\;\delta_3 : \mathrm{H}, \tag{5}$$

ossia i segmenti intercetti fra i lati successivi del poligono funicolare sull'asse dei momenti, sono proporzionali ai momenti delle forze, e quindi anche il segmento $0' 4'$ è proporzionale al momento della risultante. Ma

$$0' 4' = 0' 1' + 1' 2' + 2' 3' + 3' 4',$$

dunque, ecc.;

d) Finalmente, se le forze sono comunque disposte nel piano, la dimostrazione *b)* è valida per la risultante delle prime due forze, poi per la risultante di questa e della terza forza, e così di seguito; quindi il teorema è vero anche quando le forze sono comunque situate nel piano. In quest'ultimo caso, se colleghiamo le forze con un poligono funicolare e dal centro dei momenti conduciamo una parallela alla risultante, il prodotto del segmento intercetto su questa retta dai lati estremi del poligono funicolare, per la distanza del polo del poligono delle forze dal lato di chiusa, ci dà il momento della risultante e quindi anche, pel teorema dimostrato, la somma algebrica dei momenti delle componenti.

52. — Siamo ora in grado di dare una definizione completa della risultante di un sistema piano di forze, nei termini seguenti: *Il vettore risultante di più forze compiane vale la somma geometrica dei vettori componenti ed ha tale linea d'azione per cui il triangolo, che lo proietta da un punto qualunque del piano, è eguale alla somma algebrica dei triangoli che dallo stesso punto proiettano i vettori componenti.*

53. — Se il centro dei momenti viene preso in un punto qualunque della linea d'azione della risultante, il momento di quest'ultima è nullo, quindi la linea d'azione della risultante può anche definirsi come il luogo geometrico dei poli, rispetto ai quali la somma algebrica dei momenti delle forze date è nulla.

54. — Questo teorema, applicato al caso di due sole forze P e P_1, i cui bracci di leva, rispetto ad un punto della linea d'azione della loro risultante, siano δ e δ_1, conduce alla relazione $P\,\delta - P_1\,\delta_1 = 0$, dalla quale si deduce $\delta : \delta_1 = P_1 : P$, e questa esprime che *le distanze di un punto qualunque della linea della risultante dalle linee delle componenti stanno nel rapporto inverso delle componenti stesse.* Se le forze sono parallele, le δ, δ_1 sono le distanze della risultante dalle componenti e si ritrova così il teorema già altrimenti dimostrato al n. 48 e la giustezza della costruzione grafica della risultante. Inoltre per

le forze parallele la relazione sopra stabilita può essere espressa in modo più generale, dicendo che *la linea della risultante divide la congiungente due punti qualunque delle linee delle componenti in parti inversamente proporzionali alle forze stesse.*

55. — Quando si debbano eseguire delle operazioni grafiche sui momenti di più forze, occorre rappresentarli con segmenti. Se i momenti sono dati numericamente, si può a tale scopo adottare una scala dei momenti; ma se non si vuole introdurre questa terza scala oltre quelle delle forze e delle lunghezze, conviene ridurre i momenti ad avere un fattore comune, che dicesi *base di riduzione dei momenti*; le altre dimensioni che così si ottengono saranno proporzionali ai momenti e si dicono *le misure dei momenti ridotti alla data base.* Si può indifferentemente interpretare la base di riduzione come una forza, ovvero come una lunghezza; le *misure* saranno da riguardarsi rispettivamente come lunghezze, ovvero come forze. La *riduzione dei momenti ad una data base* consiste nel calcolare, ovvero nel costruire graficamente delle quarte proporzionali, od anche nel trasformare graficamente i rettangoli o triangoli-momenti in altri equivalenti aventi una dimensione comune, la base di riduzione; o finalmente nel decomporre ciascuna forza in due componenti, delle quali una passi pel centro dei momenti e l'altra agisca con un braccio di leva uguale alla base di riduzione.

Se le forze hanno tutte la medesima linea d'azione, le forze stesse sono eguali o proporzionali alle misure dei momenti ridotti, secondo che la base di riduzione è uguale o diversa dal comune braccio di leva.

Se le forze sono concorrenti in un punto P, le antiproiezioni delle forze sulla congiungente il punto P col polo O sono eguali o proporzionali alle misure dei momenti, secondochè si prenda la base di riduzione eguale o diversa dalla P O.

Se le forze sono parallele, connettendole con un poligono funicolare, si ottengono sull'asse dei momenti le misure dei momenti ridotti alla base H (fig. 26). Queste, come si rileva dalla (5), sono quarte proporzionali, e però quel poligono funicolare dicesi anche *poligono di moltiplicazione,* giacchè per esso i segmenti rappresentanti le forze vengono moltiplicati pei rapporti $\delta : H$.

Se le forze sono comunque disposte nel piano, facendo centro nel centro dei momenti e con raggio uguale alla base di riduzione, si descriva una circonferenza (fig. 27). Se una forza $A_1 P_1$ interseca la circonferenza, la sua antiproiezione sulla direzione del raggio O B, che va ad uno dei punti d'intersezione, rappresenta la misura richiesta. Infatti possiamo riguardare la forza $A_1 P_1$ come risultante delle due $A_1 A'$, $A' P_1$ aventi per linee d'azione, la prima, la tangente in B al circolo, la seconda la O B: essendo nullo il momento della seconda componente, il momento della $A_1 P_1$ è equivalente a quello della prima componente; ma essa agisce con un braccio di leva uguale alla base di riduzione, dunque il suo momento ridotto è misurato dalla forza stessa $A_1 A'$. Se una forza $A_2 P_2$ non interseca la circonferenza, da un punto P_2 della sua linea d'azione si tiri una tangente al circolo; la proiezione $A'' P_2$ della forza su questa tangente, fatta nella direzione della retta $O P_2$, rappresenta la misura richiesta: la dimostrazione è affatto simile alla precedente. Queste costruzioni possono anch'essere interpretate come una semplice trasformazione dei triangoli-momenti in altri equivalenti aventi per base od altezza la base di riduzione.

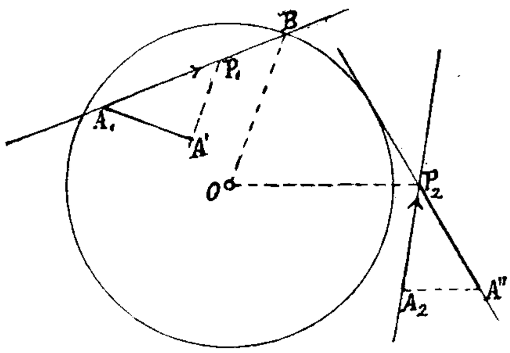

Fig. 27.

§ 4. — Forze infinitamente piccole e lontane nel piano.

56. — Sottraendosi, come è chiaro, le forze infinitamente piccole e lontane ad ogni operazione grafica, conviene, come già si è accennato, sostituirle con *coppie* di forze che ne rappresentano le componenti. Il momento di una forza infinitamente piccola e lontana deve essere eguale alla somma algebrica dei momenti delle forze della coppia che la sostituisce. Sia la coppia A P, $A_1 P_1$ (fig. 28) ed O il centro dei momenti, il momento della forza A P è positivo e misurato dall'area del parallelogrammo A P B C, quello della forza $A_1 P_1$ è negativo e misurato dall'area del parallelogrammo $A_1 P_1 C B$: la somma algebrica di queste due aree è l'area del parallelogrammo $A P A_1 P_1$, la quale misura il momento della coppia. Esso dunque è indipendente dalla posizione del polo ed è uguale al prodotto di una delle forze componenti la coppia per la distanza fra le due forze, che chiamasi *braccio della coppia*: questo momento coincide con quello di una delle

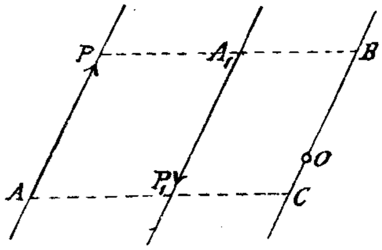

Fig. 28.

due forze rispetto ad un punto qualunque della linea dell'altra. Che il momento di una coppia sia costante rispetto a qualsivoglia punto del piano è in armonia col concetto della forza infinitamente piccola e lontana, il cui braccio di leva non subisce variazione per qualunque spostamento finito del centro dei momenti.

Il momento di una coppia è positivo o negativo, secondochè le due forze tendono a far ruotare il piano nel senso in cui ruotano le lancette di un orologio, ovvero nel senso opposto.

57. — Consideriamo una coppia qualunque $\overline{0\,1}$; $\overline{1,2}$ (fig. 29) avente per linee d'azione 1 e 2: componiamo le due forze con un poligono funicolare arbitrario A I II B: il risultato della composizione è un'altra coppia 0 P, P 2, avente per linee d'azione A I, B II, il cui momento è dello stesso senso di quello della coppia data. Inoltre, detti λ e λ_1 i bracci di leva delle due coppie, si ha dalla figura

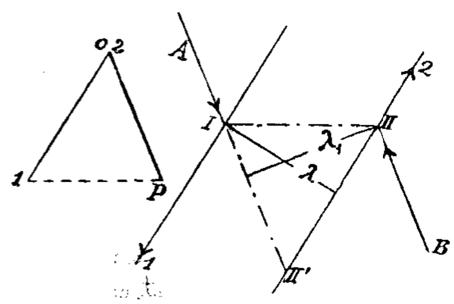

Fig. 29.

$$\frac{\mathrm{I\,II'}}{\mathrm{II\,II'}} = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \frac{0\,\mathrm{P}}{0\,1}$$

quindi

$$0\,1 \,.\, \lambda = 0\,\mathrm{P} \,.\, \lambda_1,$$

ossia i momenti delle due coppie sono anche eguali in grandezza.

Da ciò si conclude che una coppia può comunque essere trasportata nel proprio piano ed alterata nei suoi elementi (forza e braccio), purchè si conservi invariato in grandezza e senso il suo momento. Ne segue che il parallelogrammo o rettangolo momento di tutte le coppie equivalenti è di area costante.

58. — *La risultante di* n *coppie è una coppia il cui momento è eguale alla somma algebrica dei momenti delle coppie componenti.* Sostituiamo, in virtù del n. precedente, ad $n-1$ delle coppie date, altre equivalenti, aventi in comune colla n-esima il braccio e le linee d'azione delle forze; è evidente allora che tutte queste coppie danno origine ad una coppia unica il cui momento eguaglia la somma algebrica dei momenti di tutte le coppie.

Anche questo teorema è in armonia col concetto delle forze infinitamente piccole e lontane.

59. — *La composizione di una coppia con una forza ha per effetto di trasportare la forza parallelamente a sè stessa di tanto che il momento della forza trasportata rispetto ad un punto qualunque della sua linea primitiva è uguale in grandezza e senso al momento della coppia.*

Sia A P (fig. 30) la forza: riduciamo la coppia data ad avere le sue forze componenti eguali in grandezza alla forza A P, e poi trasportiamola nel piano per modo che una delle sue forze componenti venga a giacere sulla linea della forza A P, ed abbia senso opposto di questa. La forza data e la coppia costituiscono allora il sistema delle tre forze A P, A P′, A_1 P_1, delle quali, distruggendosi le due prime, non rimane che l'ultima, la quale soddisfa evidentemente all'enunciato teorema.

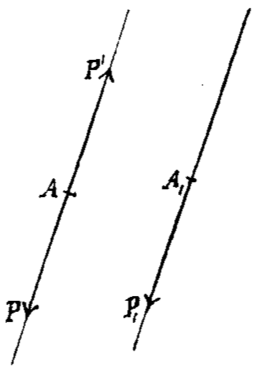

Fig. 30.

60. — *Dal trasporto di una forza parallelamente a se stessa nasce una coppia, il cui momento è eguale in grandezza e senso al momento della forza, nella primitiva sua posizione, rispetto ad un punto qualunque della sua nuova linea.*

Sia la forza A_1 P_1 (fig. 30), la quale viene trasportata in A P; immaginiamo al punto A applicata un'altra forza A P′ eguale ed opposta alla A P; la forza A_1 P_1 è equivalente al sistema delle tre forze A_1 P_1, A P, A P′, giacchè le due ultime si fanno equilibrio, ovvero al complesso della forza A P e della coppia A P′, A_1 P_1 la quale soddisfa all'enunciato teorema.

61. — Dalla teoria dei momenti statici deduciamo che la somma algebrica dei momenti delle forze, nei tre casi che si possono presentare (n. 49) nella composizione delle forze comunque disposte nel piano, si comporta come segue:

a) Il sistema ammette una risultante di grandezza finita, situata a distanza finita; in tal caso la somma algebrica dei momenti delle forze varia da punto a punto nel piano, restando però costante per tutti i punti situati su di una medesima parallela alla linea della risultante: in particolare è nulla per i punti di detta linea;

b) Il sistema ammette una risultante infinitamente piccola e lontana; in questo caso la somma algebrica dei momenti delle forze è costante per qualsivoglia centro dei momenti;

c) Il sistema è in equilibrio; in tal caso la somma algebrica dei momenti delle forze è nulla rispetto a qualsivoglia punto del piano, perchè è nulla la risultante, od anche perchè il primo ed ultimo lato del poligono funicolare coincidono. Dunque la chiusura del poligono lato di chiusa I II e per P il raggio parallelo, il quale incontrerà in 1 la parallela condotta per 2 alla linea d'azione 1,2 data. Risultano così determinati in grandezza e senso i segmenti $\overline{0\,1}$; $\overline{1,2}$ equipollenti alle componenti; condotta poi per I la parallela al lato 0 1 del poligono delle forze, resta determinata anche la linea d'azione della prima componente.

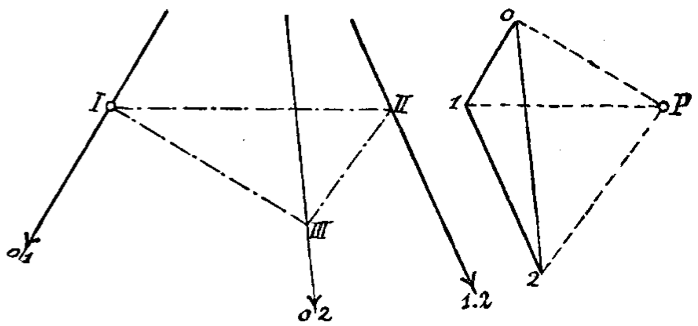

Fig. 32.

65. — Si conoscono le linee delle due componenti e sono parallele alla forza data. Anche qui si può risolvere il problema costruendo un poligono funicolare, come si è fatto nell'esempio precedente, o più semplicemente si porti la forza data sopra la linea di una delle componenti e la si proietti da un punto P (fig. 33) della linea dell'altra componente: dal punto di incontro III di uno dei raggi proiettanti colla linea della forza data si conduca la parallela all'altro raggio proiettante; restano così determinate le grandezze e sensi 0 1; $\overline{1,2}$ delle due componenti. Ed infatti conducendo il raggio P 1, è facile vedere che P 1 III è il poligono funicolare relativo al polo P.

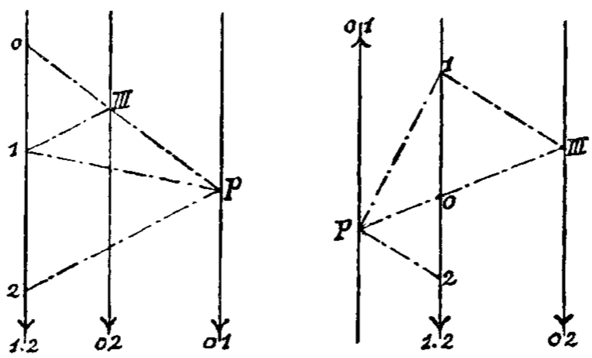

Fig. 33.

Spesse volte nelle applicazioni si presenta il problema di decomporre una forza in due altre, delle quali non si conosce che un punto di ciascuna delle loro linee d'azione. Questo problema è staticamente indeterminato, giacchè qualunque punto della linea della forza data congiunto coi punti noti delle linee delle componenti, dà due linee secondo le quali è possibile decomporre la forza data.

66. — Molte volte nel problema del n. 63 la forza da decomporre è la risultante incognita di più forze date. Così, si voglia decomporre la risultante delle forze 1, 2, 3 (fig. 34) in due componenti, essendo data la linea d'azione 2' di una di esse ed un punto I' della linea d'azione dell'altra. Costruito un poligono funicolare, conducendone il

primo lato per I′, si tiri il lato di chiusa I′ II′ e dal polo il raggio parallelo P 1′, il quale incontra in 1′ la parallela $\overline{3,1'}$ alla linea d'azione 2′; si tiri 0 1′ e per I′ la parallela, e così il problema è risoluto.

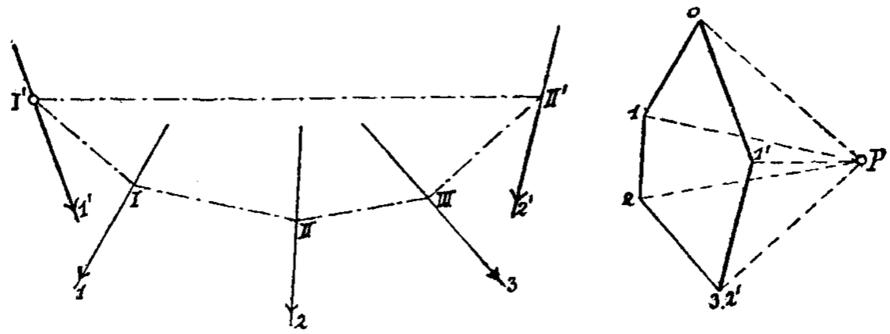

Fig. 34.

Basta infatti osservare che, mutato il senso alle due componenti testè determinate, si deve avere un sistema in equilibrio, pel quale cioè sì il poligono delle forze che il poligono funicolare devono risultare chiusi.

67. Decomposizione di una forza in tre. — Risolviamo ora il problema della decomposizione di una forza in tre componenti, di cui siano date le linee d'azione. Questo problema ammette una soluzione unica e determinata, e le componenti hanno tutte e tre un valore finito, quando le linee delle componenti insieme alla linea della forza data formano un quadrilatero. Infatti, se le linee delle componenti concorressero in un punto, e questo fosse fuori della linea della forza data, il problema non ammetterebbe soluzione, dovendo la risultante di più forze concorrenti passare per il punto di concorso; se poi il punto di concorso appartenesse alla linea della forza da decomporre, il problema sarebbe indeterminato. Inoltre, se la linea della forza da decomporre passasse per uno dei vertici del triangolo formato dalle linee delle componenti, ossia pel punto comune a due di esse, il valore della terza componente riuscirebbe nullo. Non rimane adunque che il caso in cui le linee delle componenti e della forza da decomporre formino un quadrilatero; ed allora (fig. 35) si con-

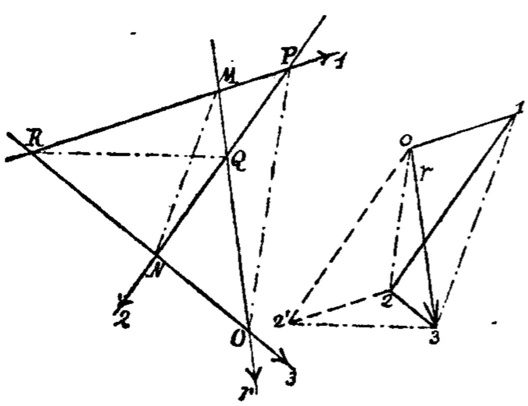

Fig. 35.

giunga il punto M comune alla linea r della forza data e ad una delle componenti, per es. la 1, col punto N comune alle linee delle altre due componenti; si decomponga da prima la r secondo la 1 e la M N e quest'ultima poi secondo la 2 e la 3. Si sarebbe potuto cominciare a decomporre la r nella 3 e nella O P, e quindi questa nelle 1 e 2: si sarebbe ottenuto lo stesso risultato, come apparisce chiaro dalla considerazione dei due quadrangoli completi 0123, MPNO. Finalmente si sarebbe anche potuto cominciare a decomporre la r nella 2 e nella Q R e poi quest'ultima nelle 1 e 3: la considerazione dei due quadrangoli completi Q P R O, 0 2′ 2 3 porta a concludere che anche in questo caso la soluzione è identica.

68. — La decomposizione di una forza in tre si effettua in sostanza decomponendo da prima la forza data in due, di una delle quali si conosce la linea d'azione e dell'altra un punto (punto comune alla seconda e terza componente) e decomponendo in secondo luogo questa ultima in altre due. Se quindi in luogo di una forza unica è dato un sistema di più forze, e viene richiesto di sostituirlo con altre tre forze, di cui sono date le linee d'azione x, y, z, si cominci a sostituire, colla costruzione del n. 66, il sistema dato con due forze, una avente per linea d'azione per es. la z, e l'altra passante pel punto xy; scompongasi poi quest'ultima secondo x ed y: si ottengono così le grandezze ed i sensi delle tre componenti.

69. — Specialmente quando interessi conoscere soltanto una delle tre componenti in cui va decomposta una forza, si può applicare con vantaggio il teorema dei momenti (n. 51), ponendo il centro dei momenti nel punto comune alle linee delle due componenti, che non interessa determinare, purchè esso non vada all'infinito. Infatti per tale particolare scelta del centro dei momenti, si deve avere evidentemente l'eguaglianza fra il momento della forza da decomporre e quello della componente richiesta, e quindi riesce molto facile a determinare quest'ultima o analiticamente o graficamente. Questo metodo è dovuto al prof. Aug. Ritter.

Se uno o tutti e tre i lati del triangolo formato dalle linee delle componenti tendono a divenire infinitesimi, finita restando la distanza dei suoi vertici dalla forza da decomporre, due o tutte e tre le componenti tendono a divenire infinite, tendendo a divenire infinitesimi i rispettivi bracci di leva.