# CAPITOLO I.

## PRELIMINARI
## COMPOSIZIONE E DECOMPOSIZIONE DELLE FORZE
## MOMENTI STATICI

### § 1. — Preliminari.

**28.** — La Statica grafica tratta, per via geometrica, dei problemi che direttamente o indirettamente si riportano alla composizione, decomposizione ed equilibrio delle forze. Vediamo innanzi tutto come una forza possa essere rappresentata graficamente: ciò avviene per mezzo dei seguenti elementi: 1° *la linea d'azione*, cioè la retta indefinita secondo cui essa agisce; 2° *la grandezza*: un segmento di tale retta, il cui rapporto all'unità lineare, scelta a rappresentare l'unità di forza, eguagli il rapporto della forza alla sua unità; 3° *il senso* d'azione, definito dall'ordine di successione in cui vengono lette due lettere situate agli estremi del detto segmento, od anche da una freccia apposta sul segmento stesso. Per talune ricerche poi, di cui si tratterà in altre parti di questo Corso, si distingue ancora un quarto elemento, ed è il *punto di applicazione* della forza, cioè il punto materiale cui s'intende applicata.

Il segmento che definisce la forza in grandezza, senso e linea d'azione, e che può immaginarsi generato da un punto che va dall'origine al termine del medesimo, assume talvolta il nome di *vettore della forza*, dal latino *vehere*, percorrere.

Un segmento parallelo al vettore d'una forza ed avente la stessa grandezza e lo stesso senso dicesi brevemente *equipollente* a quello, e reciprocamente.

**29.** — Si chiama *risultante* di un dato sistema di forze una forza unica il cui effetto, sul sistema rigido a cui quelle sono applicate, sia equivalente all'effetto complessivo delle forze date; queste, in relazione alla risultante, diconsi *forze componenti*. L'operazione della ricerca della forza risultante, date le forze componenti, chiamasi *composizione delle forze*; l'operazione inversa, data cioè la risultante cercare le componenti, dicesi *decomposizione delle forze*. Se la risultante è nulla, il sistema dicesi *in equilibrio*.

**30.** — La risultante di un sistema di forze aventi tutte la stessa linea d'azione eguaglia in grandezza e senso la somma algebrica delle forze componenti, ed ha la stessa loro linea d'azione; ciò è ammesso come evidente. Tale risultante vien quindi data graficamente in *grandezza* e *senso* dalla somma dei segmenti dai quali le forze date sono rappresentate. Se su di una retta, avente la comune direzione delle forze, a partire da un'origine, successivamente, e con riguardo al senso, si portano segmenti equipollenti alle forze date, il segmento, che va dall'origine del primo segmento al termine dell'ultimo, è equipollente alla risultante.

Se nell'effettuare questa somma l'origine del primo segmento coincide col termine dell'ultimo, le forze sono in equilibrio. Come caso particolare, due forze le quali non differiscano che per il senso, si fanno equilibrio; questa, come si vedrà in seguito, è l'unica condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di due forze. Ciò posto, in un sistema di $n$ forze in equilibrio, la risultante di $n-1$ di esse, dovendo fare equilibrio all'$n$-esima, non deve differire da questa che nel senso, in altri termini: *In un sistema di forze in equilibrio, una componente qualunque, volta in senso contrario, rappresenta la risultante di tutte le altre.*

**31.** — Il punto d'applicazione di una forza, quando si prescinda dall'azione che essa esercita nell'interno del corpo cui è applicata può essere trasportato lungo la sua linea d'azione senza che se ne alteri l'effetto. Ed infatti sia $l$ una retta materiale rigida (fig. 19), linea d'azione di una forza A P, di cui sia A il punto di applicazione, il segmento A P la grandezza, ed il senso sia quello individuato dalla freccia; applichiamo al punto A un'altra forza A $P_1$ eguale in grandezza ed avente la stessa linea d'azione, ma senso opposto della A P, e finalmente ad un altro punto qualunque A′ della $l$ immaginiamo applicata una terza forza A′ P′, avente la linea d'azione, la grandezza ed il senso della A P. Le due forze aggiunte facendosi equilibrio, potremo sostituire impunemente alla forza data il complesso delle tre forze A P, A $P_1$, A′ P′; ma anche le due forze A P, A $P_1$ si fanno equilibrio, quindi potremo pure alla forza data sostituire la forza A′ P′ senza alterarne l'effetto, con che il punto d'applicazione A risulta trasportato in A′.

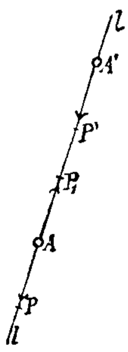


Fig. 19.

## § 2. — Composizione delle forze nel piano.

### Forze concorrenti a distanza finita.

32. — Siano 1, 2 (fig. 20) due forze le cui linee d'azione s'incontrano in 0; trasportiamole sulle proprie linee ad avere per origine comune il punto 0, quindi costruiamo il parallelogrammo $0\ 1'\ 2''\ 2'$; la diagonale $0\ 2''$, per il noto *teorema del parallelogrammo delle forze*, definisce in linea d'azione, grandezza e senso (da 0 verso $2''$) la risultante delle due forze date. Questa diagonale coincide col terzo lato del triangolo $0\ 1'\ 2''$, di cui il lato $1'\ 2''$, portato in prosecuzione della componente $0\ 1'$, è *equipollente* all'altra forza data, cosicchè può anche dirsi: *la risultante di due forze concorrenti passa per il loro punto di concorso, ed è data in grandezza e senso dal segmento che va dall'origine al termine di una bilatera, i cui lati sono equipollenti alle componenti date.* — Se oltre alle componenti 1 e 2 vi fosse una terza forza, la cui linea passasse ancora per il punto 0, si potrebbe colla stessa regola comporre la risultante delle prime due con questa terza, e si otterrebbe evidentemente la risultante di tutte e tre le forze date, e così di seguito, se nel punto 0 concorressero altre forze.

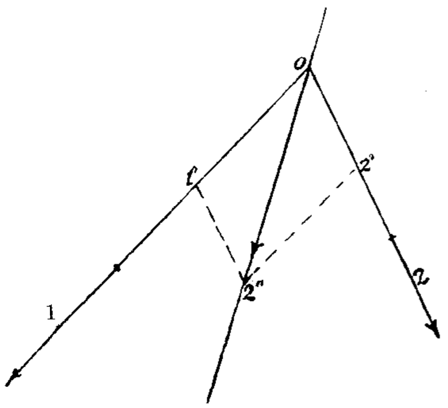

Fig. 20.

Laonde: *La risultante di più forze concorrenti passa pel punto comune alle linee delle componenti, ed è data in grandezza e senso dal lato di chiusa,* cioè dal segmento che va dall'origine al termine, *di una poligonale, i cui lati sono equipollenti alle forze date.* Il detto *lato di chiusa* assume anche il nome di *somma geometrica* delle forze date. Il teorema ora enunciato può anche esprimersi in questi altri termini: *Il vettore risultante di più forze concorrenti è dato dalla somma geometrica dei vettori componenti.*

Se in luogo di assumere come origine della poligonale il punto di concorso 0 delle componenti, si prende un altro punto qualunque del piano, il lato di chiusa rimane sempre equipollente alla risultante, e se ne ottiene la linea d'azione conducendo pel punto 0 la parallela al detto lato di chiusa.

**33.** — *La risultante di più forze date è indipendente dall'ordine col quale si fa la composizione.* Infatti l'invertire l'ordine di composizione di due forze consecutive non altera evidentemente il lato di chiusa della poligonale, e, ripetendo più volte tale scambio convenientemente, si arriva a variare come si vuole l'ordine di composizione delle forze date.

**34.** — Tutte le poligonali aventi la medesima origine e lo stesso termine rappresentano altrettanti sistemi di forze equivalenti. Come caso speciale, una poligonale avente la medesima origine e lo stesso termine di un'altra ed iscritta in essa, rappresenta un sistema equivalente; ma di più i suoi lati sono equipollenti alle risultanti parziali di altrettanti gruppi di forze dell'altro sistema; quindi, se si dividono più forze in gruppi comunque formati e di essi gruppi si trovano le risultanti, la risultante del sistema dato coincide colla risultante di queste risultanti parziali.

**35.** — L'equilibrio di un sistema di forze concorrenti è espresso graficamente dal chiudersi della poligonale, ossia: *la risultante di più forze concorrenti è nulla quando esse sono equipollenti ai lati di un poligono chiuso.* Quindi se tra più forze date ve ne sono alcune equipollenti ai lati di un poligono chiuso, queste possono omettersi nella composizione, senza che si alteri per ciò la risultante cercata.

**36.** — Poichè la risultante di due forze concorrenti passa pel punto comune alle componenti, e poichè per ridurre il sistema in equilibrio basta aggiungere una forza eguale, ma di senso opposto, alla risultante, si hanno come condizioni necessarie e sufficienti perchè tre forze in un piano siano in equilibrio, *che esse siano equipollenti ai lati di un triangolo e che le loro linee passino per un punto.*

**37.** — La somma algebrica delle proiezioni dei lati di un poligono piano, chiuso, fatte in una direzione arbitraria sopra una retta pure di direzione arbitraria contenuta nel suo piano, è nulla; dal che si deduce anche, rovesciando il senso di un lato, che la proiezione del lato di chiusa di una poligonale è eguale alla somma delle proiezioni dei suoi lati. È poi evidente che le proiezioni di due segmenti equipollenti sono equipollenti fra loro, possiamo quindi concludere: *In un sistema piano di forze concorrenti, la proiezione della risultante su di una retta arbitraria contenuta nel piano eguaglia la somma delle proiezioni delle forze componenti, e se il sistema è in equilibrio, la somma delle proiezioni delle forze date è nulla.*

Viceversa, se è nulla la somma delle proiezioni delle forze date sopra due assi di proiezione non paralleli contenuti nel piano delle forze, la poligonale delle forze è necessariamente chiusa; concludiamo quindi che la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un sistema piano di forze concorrenti può anche esprimersi dicendo che *la somma delle proiezioni delle forze date sopra ciascuna di due direzioni non parallele sia nulla*. Tanto questa condizione come quella espressa al n. 35 possono essere indifferentemente assunte a definire l'equilibrio di un sistema di forze concorrenti, giacenti in un piano.

### Forze comunque situate in un piano.

**38.** — Date più forze comunque situate in un piano, si potrebbe determinarne la risultante con una composizione successiva, costruendo cioè colla regola del parallelogrammo o del triangolo delle forze la risultante delle prime due, quindi componendo colla stessa regola questa risultante parziale colla terza forza, e così di seguito sino a comporre l'ultima forza colla risultante parziale di tutte le precedenti. Si otterrebbe così evidentemente la risultante totale del dato sistema di forze; ma la costruzione seguente è preferibile per più motivi.

**39. Poligono funicolare.** — Si costruisca a parte (fig. 21) la *poligonale delle forze*, avente i suoi lati equipollenti alle forze date;

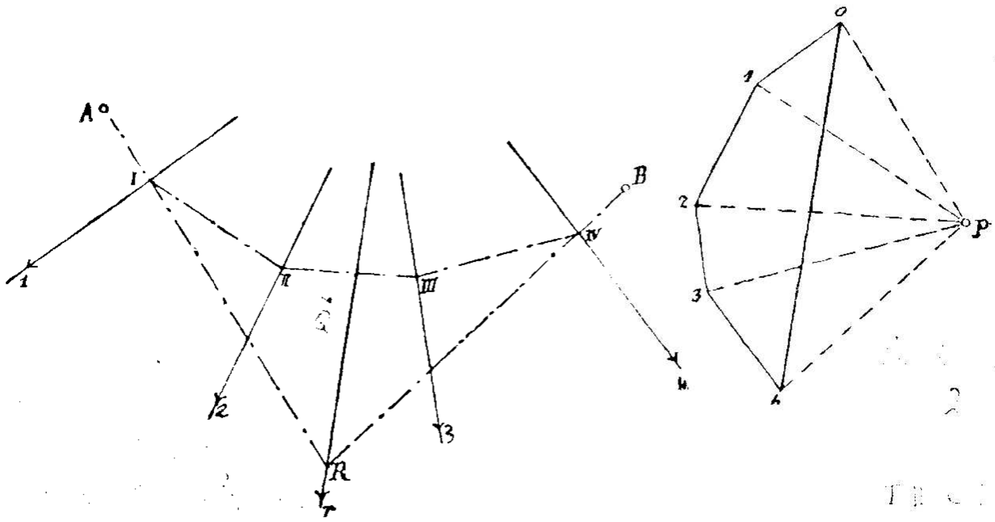


Fig. 21.

avremo ancora nel suo lato di chiusa 0 4 il segmento equipollente alla risultante, manca solo di determinarne la linea d'azione. A questo scopo si proiettino i vertici del poligono delle forze da un polo P qualunque, purchè non giacente su di alcuno dei suoi lati, e si costruisca un secondo poligono I II III IV, i cui lati siano ordinatamente paralleli ai raggi del fascio proiettante P, ed i cui vertici cadano ordinatamente sulle linee d'azione delle forze date (la scelta di un vertice, p. es. del primo, è arbitraria); il punto R, comune ai lati estremi, appartiene alla linea della risultante. Infatti, per la costruzione eseguita, il dato sistema di forze può essere sostituito (n. 32) dall'altro

$$\begin{array}{llllll} \text{grandezza e senso} & 0\,P, & \underbrace{P\,1,\ 1\,P,} & \underbrace{P\,2,\ 2\,P,} & \underbrace{P\,3,\ 3\,P,} & P\,4 \\ \text{linee d'azione} & A\,I, & I,\ II & II,\ III, & III,\ IV, & IV\,B. \end{array}$$

Ma tutte le forze intermedie di questo sistema si distruggono, giacchè a due a due non differiscono che per il senso, dunque il dato sistema di forze può essere sostituito dalle sole due forze 0 P, P 4 aventi per linee d'azione i lati estremi del poligono A I ... B, e quindi il punto R comune a queste due linee è un punto della linea della risultante. Condotta dunque per R una parallela al lato di chiusa 0 4, essa rappresenta la linea d'azione della risultante, la quale resta così definita in tutti i suoi elementi.

A I II ... B chiamasi *poligono funicolare*, perchè se lo s'immagina materializzato in una fune flessibile ed inestensibile, ai punti I, II, III, IV della quale siano applicate le forze date, e di cui gli estremi A, B siano raccomandati a due punti fissi, poichè ciascun lato della fune risulta ai suoi estremi sollecitato da due forze eguali ed opposte (componenti delle forze date) che tendono a stirarlo, essa rimane evidentemente in equilibrio. Quando per altro alcuni o tutti i lati del poligono funicolare risultino compressi, piuttosto che tesi, la fune non potrebbe più servire di nesso rigido fra le forze date; in quei tratti che risultano compressi la fune dovrebbe essere sostituita da barre indeformabili; in tal caso la denominazione di poligono funicolare non è più a proposito. Per tale motivo vennero anche proposte altre denominazioni come quelle di *poligono d'equilibrio, poligono di connessione*; ma la denominazione di poligono funicolare è quella ancora più in uso per tutti i casi. Nella teoria delle volte e degli archi, dove tutti i lati del poligono sono compressi, esso assume il nome di *poligono delle pressioni.*

**40.** — Se, come caso speciale, si assume il polo P nell'origine della poligonale delle forze (fig. 22), il primo raggio proiettante si annulla, il secondo e l'ultimo coincidono coi segmenti equipollenti rispettivamente alla prima forza ed alla risultante totale, tutti gli altri sono equipollenti alle risultanti successive. Nel poligono funicolare il primo lato manca, il secondo coincide colla linea d'azione della prima forza, gli altri rappresentano le linee d'azione delle risultanti successive, l'ultimo coincide colla linea d'azione della risultante totale. Questo poligono funicolare speciale chiamasi *poligono delle successive risultanti*; in molti casi, quando la giacitura delle linee d'azione lo permette, esso torna opportuno più di un poligono funicolare qualunque.

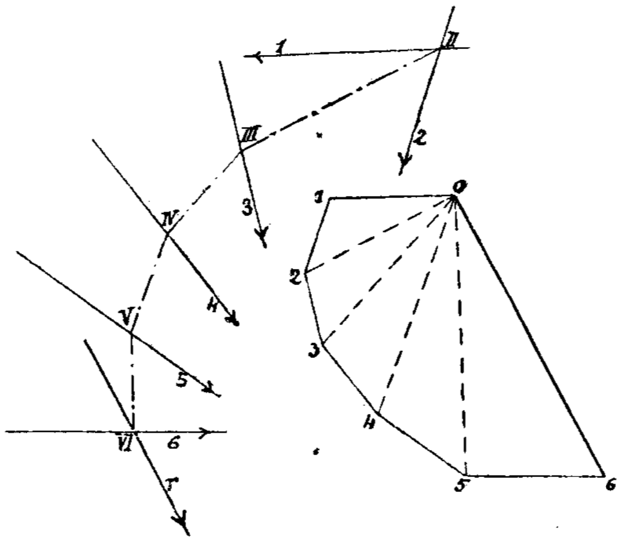

Fig. 22.

**41.** — Il poligono funicolare serve anche a fornire la linea d'azione della risultante di un gruppo qualunque di forze consecutive del sistema. Questa risultante parziale, di cui si ha la grandezza ed il senso dal poligono delle forze nel segmento che unisce l'origine della prima forza formante il gruppo col termine dell'ultima, deve evidentemente passare pel punto d'incontro di quei due lati del poligono funicolare che sono estremi rispetto al gruppo considerato.

**42.** — La composizione delle forze comunque situate in un piano si fa adunque mediante due figure: il poligono delle forze ed il poligono funicolare. Siccome la risultante del dato sistema di forze, come pure di un gruppo qualunque di esse, non può essere che unica, qualunque sia la scelta del polo P di proiezione e del vertice I del poligono funicolare, così ne deduciamo che deformandosi il poligono funicolare col variare il polo P ed il vertice I, il punto comune a due suoi lati qualisivogliano genera una retta, che è la linea d'azione della risultante di quel gruppo di forze per le quali i due lati in discorso sono lati estremi, ed in particolare che il punto comune ai lati estremi di tutto il poligono funicolare genera la linea d'azione della risultante totale del sistema.

**43.** — *La risultante di un dato sistema di forze è indipendente dall'ordine col quale si fa la composizione.* Anche qui, come si è fatto per le forze concorrenti, basterà dimostrare il teorema per lo scambio di due forze consecutive. Ora tale scambio non altera evidentemente il lato di chiusa della poligonale delle forze, e neppure la linea d'azione della risultante, giacchè del poligono funicolare resta mutato soltanto il lato che è intermedio alle forze scambiate, invariata restando la loro risultante.

**44.** — Dalle cose dette si ricava anche che se si divide un sistema qualunque di forze in più gruppi e di questi si trovano le risultanti, la risultante di queste risultanti parziali coincide colla risultante del sistema dato.

**45.** — *I lati corrispondenti di due poligoni funicolari connettenti un medesimo sistema di forze, s'incontrano su di una retta parallela alla congiungente i poli di proiezione.* Consideriamo (fig. 23) i due poligoni funicolari I ... IV, I′ ... IV′ relativi ai poli P e P′, connettenti il medesimo sistema di forze 1, 2, 3, 4; tiriamo la congiungente PP′ e la retta OM congiungente i punti d'incontro delle prime due coppie di lati corrispondenti. Dalla considerazione dei due quadrangoli completi I I′ M O; 0 1 P′ P, che hanno cinque coppie di lati paralleli, si deduce che O M è parallela a PP′; analogamente dalla considerazione dei due quadrangoli completi II II′ N M; 1,2 P′ P si deduce che anche M N è parallela a P P′, dal che si conclude che i tre punti O, M, N si trovano su di una retta parallela alla P P′. Proseguendo collo stesso ragionamento si viene a dimostrare la verità dell'enunciato teorema.

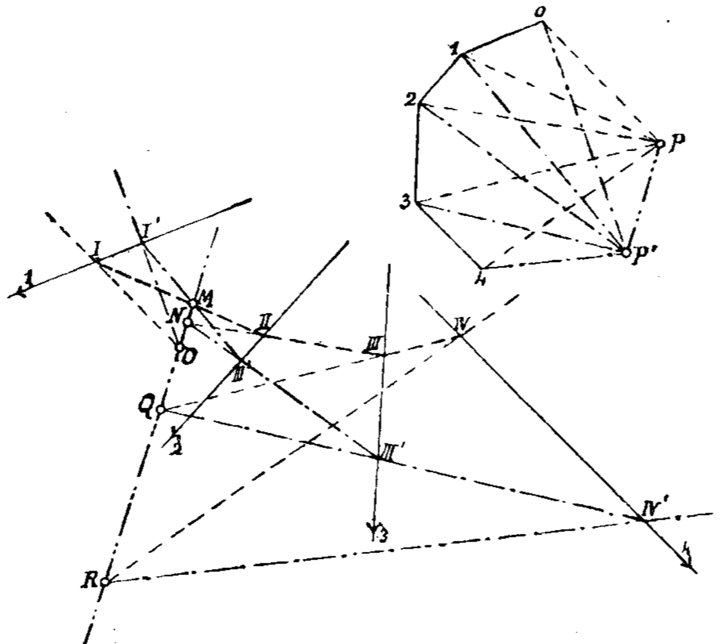

Fig. 23.

Quest'interessante teorema può anche essere dimostrato meccanicamente nel seguente modo :

Un gruppo qualunque di forze consecutive, p. es. 1, 2; 2, 3, può essere sostituito sia dalle due forze 1 P, P 3 aventi per linee d'azione I II, III IV, sia dalle due forze 1 P′, P′ 3 aventi per linee d'azione I′ II′, III′ IV′; dimodochè le quattro forze 1 P, P 3, 3 P′, P′ 1 sono in equilibrio, e quindi la risultante delle due forze P′ 1, 1 P cioè la P′ P, la cui linea d'azione deve passare per M, deve fare equilibrio alla risultante delle due forze P 3, 3 P′, la cui linea d'azione deve passare per Q: dunque la M Q deve risultare parallela alla P P′.

Questo teorema viene frequentemente utilizzato nelle applicazioni della Statica grafica.

Da quanto si è detto si può anche dedurre che se al dato sistema di forze si aggiungono le due P 0, 4 P′, aventi per linee d'azione I.O, IV′ R, la retta su cui s'incontrano le coppie corrispondenti dei lati dei due poligoni funicolari, non è altro che la linea d'azione della risultante totale P P′ del sistema.

**46. Risultante infinitamente piccola e lontana.** — Se il termine della poligonale delle forze viene a coincidere coll'origine, ossia se le forze date sono equipollenti ai lati di un poligono chiuso, qualunque sia il polo P, i raggi estremi risultano sovrapposti, e quindi il primo e l'ultimo lato del poligono funicolare risultano paralleli o coincidenti. Supponiamo da prima che risultino paralleli, in tal caso la risultante è di grandezza infinitamente piccola ed ha per linea d'azione la retta all'infinito del piano; da ciò il nome di *risultante infinitamente piccola e lontana.*

Essa può essere evidentemente sostituita dalle due forze eguali e di senso opposto che agiscono secondo i lati estremi (paralleli) del poligono funicolare, alle quali si dà il nome di *coppia*: si dice in tal caso che il sistema di forze si riduce ad una coppia. Ma poichè è arbitraria la scelta del polo P, così si conclude che il dato sistema si può ridurre in infiniti modi ad una coppia, od in altri termini che una coppia può essere sostituita da infinite altre equivalenti. Prenderemo in seguito ad esaminare più particolarmente queste forze infinitamente piccole e lontane.

**47. Risultante nulla.** — Se finalmente, oltre a riuscire chiuso il poligono delle forze, i lati estremi di un qualunque poligono funicolare coincidono, ciò significa che il dato sistema di forze è riducibile a due sole forze (agenti secondo i lati estremi del poligono funicolare), le quali non solo hanno la stessa grandezza e senso opposto, ma anche la stessa linea d'azione, e quindi si fanno equilibrio. In tal caso la risultante è *nulla*, ovvero il sistema è *in equilibrio.*

**48. Forze parallele.** — Quando le linee d'azione delle forze sono tutte parallele, la loro risultante deve avere anch'essa la stessa direzione, ed infatti questo non è che un caso speciale delle forze concorrenti in un punto; peraltro, siccome il punto di concorso è in tal caso a distanza infinita, non siamo in grado di determinare la linea della risultante, come è stato fatto al n. 32. In questo caso la poligonale si riduce ad una retta, e quindi la risultante è in grandezza e senso eguale alla somma algebrica delle componenti; se ne ottiene poi la linea d'azione costruendo un poligono funicolare.

Che se però le forze da comporre sono soltanto due P, $P_1$ (fig. 24), la linea della risultante resta determinata più semplicemente come segue. Si porti sulla linea di P il segmento A B equipollente a $P_1$, e sulla linea di $P_1$ il segmento CD equipollente a P: i lati B C e D A del quadrilatero A B C D (il cui perimetro viene percorso nello stesso senso delle due forze) determinano il punto O, che appartiene alla linea della risultante. Infatti, condotta la B E parallela ad A D, onde risulta D E equipollente a $P_1$, si potrà considerare O C D E come il poligono delle forze e B O E come il corrispondente poligono funicolare.

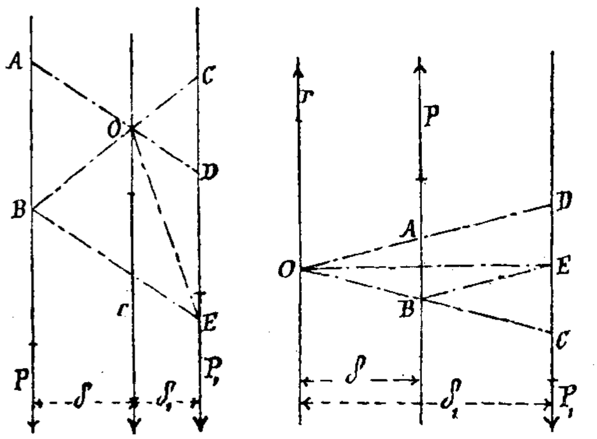

Fig. 24.

Se le componenti sono dello stesso senso, la risultante cade fra esse; se sono di senso opposto, la risultante cade fuori, dalla parte della componente maggiore, di cui ha lo stesso senso; in ambedue i casi poi si ha dalla figura

$$\boxed{\frac{\delta}{\delta_1} = \frac{P_1}{P}}$$

ossia le distanze della risultante dalle componenti stanno nel rapporto inverso delle componenti stesse.

**49.** — Nella composizione di più forze comunque disposte nel piano, si possono dunque presentare tre casi:

*a)* Il poligono delle forze riesce aperto; in tal caso il sistema ammette una risultante di grandezza finita, la cui linea d'azione giace a distanza finita;

*b)* Il poligono delle forze riesce chiuso ed il poligono funicolare aperto; in questo caso la risultante è una forza infinitamente piccola e lontana, che viene sostituita da una coppia;

*c)* Il poligono delle forze ed il poligono funicolare riescono chiusi; la risultante è nulla, il sistema è in equilibrio.

## § 3. — Momenti statici delle forze giacenti in un piano.

**50.** — Si chiama *momento* di una forza il prodotto della forza per una o più distanze; si dice *statico* o di *primo ordine*, quando è il prodotto della forza per una sola distanza. Ci occuperemo presentemente soltanto dei momenti di primo ordine, ed intenderemo per momento di una forza rispetto ad un punto (*centro dei momenti* o *polo*) il prodotto della forza per la distanza (*braccio di leva della forza*) del punto dalla sua linea d'azione. Assumeremo il momento come *positivo* o *negativo,* secondo che la forza tende a far ruotare, intorno al centro dei momenti, il piano determinato dalla forza e dal punto nel senso in cui vediamo ruotare le lancette di un orologio situato su quel piano, o nel senso opposto.

Da questa definizione scaturisce che il momento di una forza o di più forze parallele non varia comunque si sposti il centro dei momenti su di una parallela alla comune direzione delle forze; questa parallela prende in alcuni casi il nome di *asse dei momenti.* Essendo il momento di una forza il prodotto di una forza per una distanza, se si assume come unità di forza il chilogrammo e per unità di lunghezza il metro, si avrà per l'unità di momento il prodotto di $1^{kg}$ per $1^{m}$ che prende il nome di *chilogrammetro,* ed il momento verrà quindi espresso con un certo numero di chilogrammetri. Graficamente, il momento viene rappresentato da un rettangolo, di cui un lato rappresenta in grandezza e senso la forza, l'altro lato il braccio di leva. Questo rettangolo definisce completamente in grandezza e senso il momento, ed infatti se ne ottiene la grandezza, cioè il numero di chilogrammetri, leggendone un lato nella scala delle forze e l'altro nella scala delle lunghezze, e facendo il prodotto. Se ne deduce poi il senso positivo o negativo, secondo che esso rimane alla destra, ovvero alla sinistra di chi percorre il contorno nel senso individuato dalla forza.

Chiamasi *triangolo-momento* il triangolo che dal centro dei momenti proietta la forza; la sua area misura la metà del momento della forza.