

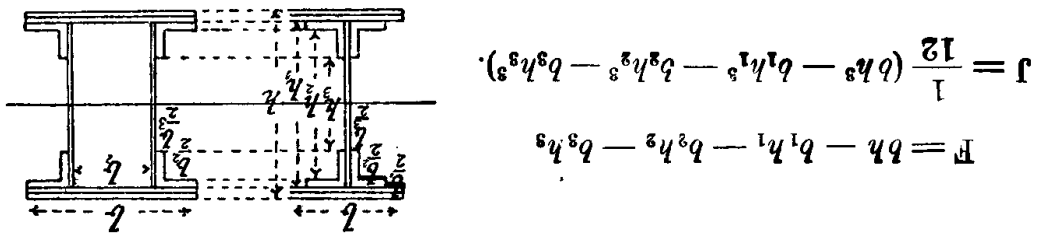
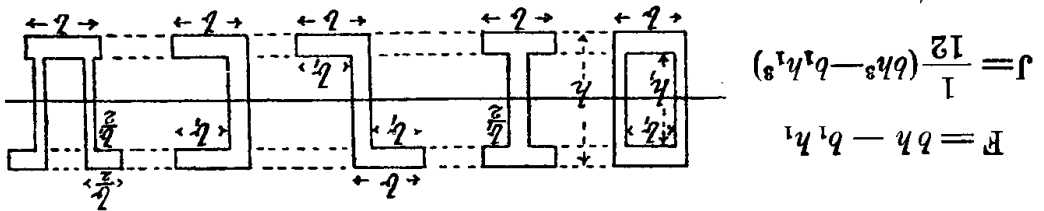
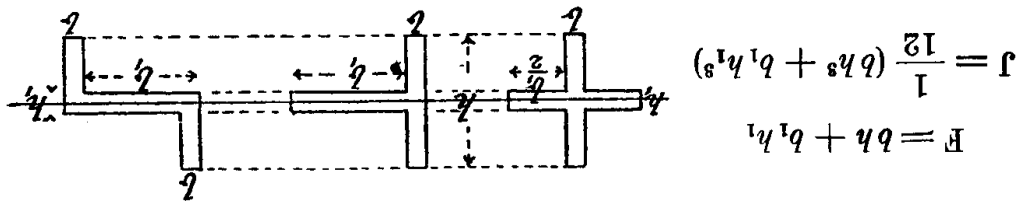
## APPENDICE

### Ricerche analitiche sui momenti d'inerzia.

215. — A complemento della teoria testè svolta sui momenti d'inerzia, aggiungeremo alcune ricerche analitiche, che tornano opportune per le sezioni dei solidi, che più frequentemente occorre di considerare nella scienza delle costruzioni, per le quali in molti casi il calcolo numerico viene preferito al calcolo grafico.

Così, sono di uso corrente le seguenti espressioni analitiche del momento d'inerzia rispetto all'asse orizzontale baricentrico per le sezioni qui appresso rappresentate.

Queste espressioni si basano essenzialmente su quelle del momento d'inerzia del rettangolo rispetto ad una mediana, ovvero alla base, le quali, se  $b$  ed  $h$  ne rappresentano la base e l'altezza, sono rispettivamente  $\frac{1}{12}bh^3$  ed  $\frac{1}{3}bh^3$ . Si noti inoltre che il momento d'inerzia di una figura rispetto ad un asse contenuto nel suo piano non viene alterato, se essa si sposta parallelamente all'asse.



Per le sezioni che seguono, si calcoli prima la distanza  $y'$  del baricentro dal lembo superiore, eguagliando il momento statico di tutta la figura, rispetto al detto asse, alla somma dei momenti statici delle singole parti in cui viene scomposta. In seguito si calcoli il momento d'inertia rispetto alla stessa retta, e finalmente se ne deduca quello relativo all'asse parallelo baricentrico

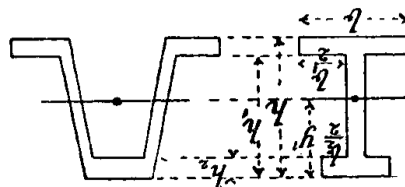


Fig. 133.

$$F = bh - b_1h_1 + b_2h_2$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{bh^2 - b_1h_1^2 + b_2h_2^2}{bh - b_1h_1 + b_2h_2}$$

$$J = \frac{1}{3} (bh^3 - b_1h_1^3 + b_2h_2^3) - Fy'^2$$

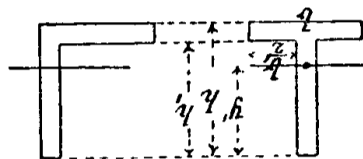


Fig. 134.

$$F = bh - b_1h_1$$

$$y' = \frac{1}{2} \frac{bh^2 - b_1h_1^2}{bh - b_1h_1}$$

e come caso speciale:

$$J = \frac{1}{3} (bh^3 - b_1h_1^3) - Fy'^2$$

216. — Il momento d'inertia  $J$  rispetto ad un asse baricentrico  $n$  di una figura composta di due  $F_1, F_2$ , i cui momenti d'inertia rispetto ai loro assi baricentrici paralleli ad  $n$ , distanti da esso rispettivamente di  $x_1$  ed  $x_2$ , siano  $J_1, J_2$ , è dato da

$$(41) \quad J = J_1 + J_2 + F_1x_1^2 + F_2x_2^2;$$

indicando con  $h = x_1 + x_2$  la distanza fra gli assi baricentrici delle figure componenti, ed avendosi  $x_1 : x_2 = F_2 : F_1$ , la (41) può anche scriversi

$$(42) \quad J = J_1 + J_2 + \frac{F_1F_2}{F_1 + F_2} h^2,$$

la quale non richiede, per il calcolo di  $J$ , la conoscenza della posizione dell'asse  $n$ .

217. — Se il contorno della sezione è irregolare (fig. 135), si calcola  $\bar{y}$  per mezzo di una delle formole approssimate che servono al calcolo di un integrale definito; preferibilmente colla formola di Simpson (1)

$$\int_{x_n}^{x_0} f(x) dx = \frac{x_n - x_0}{3n} [f(x_0) + f(x_n) + 4\{f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})\} + 2\{f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})\}]$$

nella quale  $n$  è pari, ed  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  sono le ascisse corrispondenti alle ordinate  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$  della curva  $y = f(x)$ .

Questa formola dà

l'integrale coll'approssimazione con cui le porzioni successive di curva che riuniscono gli estremi di tre ordinate consecutive possono essere sostituite da archi di parabole aventi l'asse parallelo all'asse  $y$ .

Per applicare questa formola al calcolo di  $\bar{y}$  rispetto all'asse baricentrico  $n$  parallelo all'asse  $y$ , si divide la lunghezza  $h$  in un numero pari di parti  $a$  eguali. Si ha allora l'area della figura dalla formola

$$F = \int_0^h y dx = \frac{a}{3} [y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})].$$

L'ascissa  $\bar{x}$  del baricentro è data dalla

$$\bar{x} = \frac{1}{F} \int_0^h xy dx$$

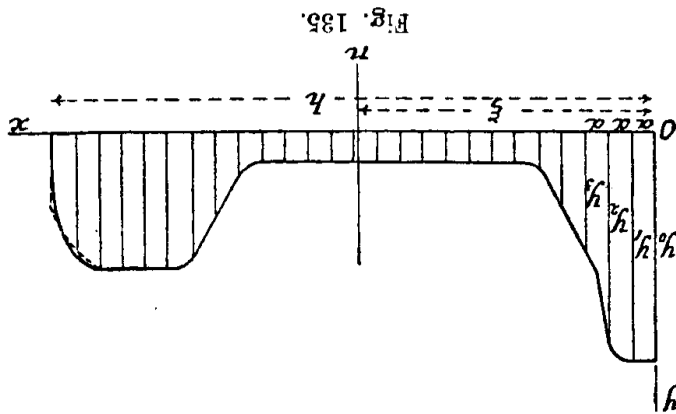
nella quale, posto  $xy = f(x)$ , si ha

per  $x = 0, a, 2a, \dots, na$  ,  
 $xy = 0, ay_1, 2ay_2, \dots, n ay_n$  ,

quindi:

$$\bar{x} = \frac{a^2}{3F} [ny_n + 4\{y_1 + 3y_3 + \dots + (n-1)y_{n-1}\} + 2\{2y_2 + 4y_4 + \dots + (n-2)y_{n-2}\}].$$

(1) Cfr. GRASHOF F., *Theorie der Elasticität und Festigkeit*. — Berlin, 1878.   
 GURD, *Scienza delle costruzioni*, Parte I.



Indicando inoltre con  $J_y$  il momento d'inerzia rispetto all'asse  $y$  si ha

$$J_y = \int_0^n x^2 y dx,$$

e, posto  $x^2 y = f(x)$ , risulta

$$\begin{matrix} \text{per} & x = 0 & , & a & , & 2a & , & \dots & , & na & , \\ & x^2 y = 0 & , & a^2 y_1 & , & 2^2 a^2 y_2 & , & \dots & , & n^2 a^2 y_n & , \end{matrix}$$

e quindi

$$J_y = \frac{a^3}{3} [n^2 y_n + 4 y_1 + 3^2 y_2 + \dots + (n-1)^2 y_{n-1}] + 2 \{ 2^2 y_2 + 4^2 y_4 + \dots + (n-2)^2 y_{n-2} \}.$$

Finalmente il momento d'inerzia  $J_n$  rispetto all'asse baricentrico  $n$  è dato dalla

$$J_n = J_y - F \bar{z}^2.$$

La fig. 135 rappresenta la metà d'una sezione di rotata; il momento d'inerzia di tutta la sezione è naturalmente il doppio di quello determinato. Affinchè la formula di Simpson sia razionalmente impiegata, è necessario, secondo quanto è stato detto circa il suo grado d'approssimazione, che il contorno della figura non presenti alcuna tangente parallela all'asse  $y$ ; per tale motivo nella fig. 135 si modifichò leggermente in corrispondenza delle ultime ordinate di destra il contorno della sezione di rotata, senza alterarne sensibilmente l'area.

218. — La ricerca analitica degli assi principali d'inerzia e dei relativi momenti può essere eseguita nel modo che segue:  
Siano  $xy$  (fig. 136) due assi ortogonali incrociatisi in un punto qualunque  $O$  della sezione, rotiamoli intorno ad  $O$  di un angolo  $\alpha$ , in modo da portarli nella posizione  $u, v$ . Siano  $J_x, J_y, J_{xy}$  rispettivamente i momenti d'inerzia ed il momento centrifugo rispetto ai primi assi, intendendo che le distanze degli elementi superficiali dagli assi siano valutate normalmente; le quantità ana-

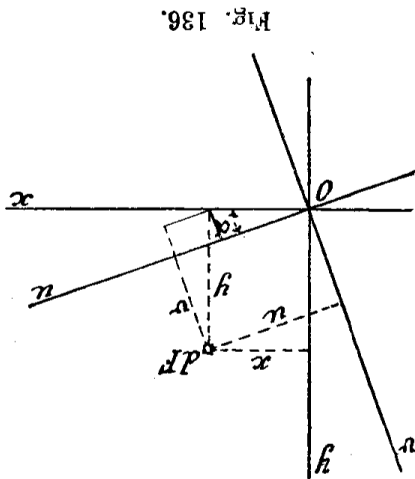


Fig. 136.

loghe per i nuovi assi saranno legate a quelle dalle seguenti relazioni

$$J_u = \int v^2 dF = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dF = \cos^2 \alpha \int y^2 dF + \sin^2 \alpha \int x^2 dF - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dF$$

ossia

$$(43) \quad J_u = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha$$

ed analogamente

$$(44) \quad J_v = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha$$

La somma di queste due espressioni conferma il teorema già dimostrato al numero 195.  $J_x + J_y = J_u + J_v = J_x + J_y$ .  
 Si ha inoltre

$$J_{uv} = \int uv dF = \int (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dF,$$

ossia:

$$(45) \quad J_{uv} = \frac{1}{2} (J_x - J_y) \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha.$$

Per  $\alpha = 45^\circ$  le (43), (44) e (45) divengono

$$J_u = \frac{1}{2} (J_x + J_y) - J_{xy},$$

$$J_v = \frac{1}{2} (J_x + J_y) + J_{xy},$$

$$J_{uv} = \frac{1}{2} (J_x - J_y).$$

Se sono noti  $J_x$ ,  $J_y$  e  $J_{xy}$ , ovvero  $J_u$ ,  $J_v$ , la prima, ovvero la seconda di queste equazioni serve a ricavare il momento centrifugo  $J_{xy}$ .

*Assi e momenti principali d'inerzia.* — Derivando la (43) rispetto ad  $\alpha$  ed eguagliando a zero si ottiene, tenendo presente la (45),

$$\frac{dJ_u}{d\alpha} = (J_y - J_x) \sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha J_{xy} = -2J_{uv} = 0.$$

Si ritrova cioè la proprietà che il momento centrifugo è nullo rispetto agli assi principali d'inerzia, e si determina la posizione di questi ultimi colla

$$(46) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{J_x - J_y}{2J_{xy}}$$

la quale fornisce due valori,  $\alpha_0 + \alpha_0$  e  $90^\circ + \alpha_0$ , che fissano la posizione degli assi principali d'inerzia. Quanto alle espressioni dei momenti massimo e minimo, in virtù delle relazioni

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \text{cos}^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

la (43) può trasformarsi come segue

$$J_u = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{1}{2}(J_x - J_y) \cos 2\alpha - \text{sen} 2\alpha J_{xy}$$

dalla quale, per gli assi principali, sostituendo a  $J_x - J_y$  l'espressione fornita dalla (46), si deduce

$$(47) \quad J_a = \frac{1}{2}(J_x + J_y) - \frac{J_{xy}}{\text{sen} 2\alpha_0}$$

ed analogamente

$$(48) \quad J_b = \frac{1}{2}(J_x + J_y) + \frac{J_{xy}}{\text{sen} 2\alpha_0}$$

e poichè

$$\frac{J_{xy}}{\text{sen} 2\alpha_0} = -\frac{J_x - J_y}{2 \cos 2\alpha_0} = -\frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + \text{tg}^2 2\alpha_0 (J_x - J_y)^2}$$

si ha anche

$$(49) \quad J_a \left\{ \begin{aligned} J_b \\ J_a \end{aligned} \right. = \frac{1}{2}(J_x + J_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4 J_{xy}^2}$$

Se  $J_x = J_y = J$ , la (46), supposto  $J_{xy}$  diverso da zero, fornisce  $\alpha = 45^\circ$  e le (47) e (48) divengono

$$(50) \quad \left\{ \begin{aligned} J_a &= J - J_{xy} \\ J_b &= J + J_{xy} \end{aligned} \right.$$

questo caso si verifica, ad esempio, per la sezione di un cantonale a lati uguali.

Per il calcolo del momento centrifugo  $J_{xy}$  si osservi che se  $x_0, y_0$  sono assi normali baricentrici per una data figura di area  $F$ , ed  $x, y$  assi rispettivamente paralleli a quelli,  $\xi$  ed  $\eta$  le coordinate dell'origine dei primi rispetto ai secondi, si ha

$$J_{xy} = \int (x_0 + \xi)(y_0 + \eta) dF = \int x_0 y_0 dF + \xi \int y_0 dF + \eta \int x_0 dF + \xi \eta \int dF,$$

$$(51) \quad J_{xy} = J_{x_0y_0} + \xi \eta F;$$

da cui il teorema che: il momento centrifugo di un'area piana rispetto a due assi ortogonali qualunque è uguale a quello relativo agli assi paralleli baricentrici, aumentato del prodotto dell'area della figura per le coordinate del baricentro.

Se  $x_0y_0$  sono assi principali d'inertia, la (51) si riduce alla

$$J_{xy} = \xi \eta F,$$

la quale permette di calcolare molto rapidamente il momento centrifugo per quelle figure, le quali, come di frequente si verifica, possono essere scomposte in rettangoli coi lati paralleli agli assi dati.

219. *Esempio.* — Momenti principali centrali d'inertia del cantonale dei profili normali, avente le dimensioni  $\frac{80 \times 120}{10}$  rappresentato nella scala di  $\frac{1}{4}$  dalla fig. 137

$$F = 12 + 7 = \text{cm}^2 19.$$

Distanza del baricentro dalla orizzontale baricentrica dell'ala orizzontale

$$\frac{12 \times 5,5}{19} = \text{cm} 3,47$$

Id. dalla verticale baricentrica dell'ala verticale

$$\frac{8 \times 3,5}{19} = \text{cm} 1,47$$

$$J_x = \frac{1}{12} (1 \times 12^3 + 7 \times 12^3) - 19 \times 3,97^2 = \text{cm}^4 278,9,$$

$$J_y = \frac{1}{12} (11 \times 1^3 + 1 \times 8^3) - 19 \times 1,97^2 = \text{cm}^4 100,6,$$

$$J_{xy} = -1,47 \times 2,03 \times 12 - 2,53 \times 3,47 \times 7 = -97,3,$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \times 97,3}{278,9 - 100,6} = 1,0913,$$

$$J_a \left\{ \begin{aligned} &= \frac{278,9 + 100,6}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{178,3^2 + 4 \times 97,3^2} = \left\{ \begin{aligned} &321,8 \\ &57,8 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right.$$

$$r_a = \sqrt{\frac{J_a}{F}} = \sqrt{\frac{321,8}{19}} = \text{cm} 4,12,$$

$$r_b = \sqrt{\frac{J_b}{F}} = \sqrt{\frac{57,8}{19}} = \text{cm} 1,74.$$

