

Capitolo quinto

Elementi di teoria del fluage

1. Funzione fluage e coefficiente di fluage .

Per *viscosità* (fluage in francese, creep in in inglese) in teoria delle strutture si intende la proprietà dei materiali di deformarsi nel tempo pur essendo costante il tensore della tensione. La definizione è quindi relativa ad un volume elementare nel senso noto, e quindi al legame costitutivo $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{D}$. Gli studi sulla viscosità rimontano all'americano Faber (1914); al Freyssinet (1926), che ne fu indotto in occasione del progetto del ponte di Plougastel, alle foci dell'Elorn, presso Brest; e soprattutto all'inglese G.S. Withney (1932). Classiche anche le esperienze del georgiano Aroutiounian, all'università di Tiflis, e di L'Hermitte, all'Institut du Batiment et des Travaux Publics.

Gli studi sono limitati ai regimi monoassiali; le esperienze sono prevalentemente limitate al rilievo della $\epsilon(t)$ sotto σ costante, o nei tempi susseguenti allo scarico (fondamentali i risultati di G. Dreux ed M. Gorisse sul "recupero" delle deformazioni viscosi, il cosiddetto "retour du fluage", dal '76 al '79, presso il laboratorio di Saint-Rémy - lès -Chevreuse). Per il conglomerato, i tempi sono contati in genere dalla data di maturazione, convenzionalmente a 28 giorni dal getto. Se τ è la data in cui comincia ad agire la σ_c , costante nel tempo, si pone (fig. 39)

$$\epsilon(t) = \sigma_c J(\tau, t) . \quad (498)$$

La (498) postula la linearità nei riguardi della σ .

Le dimensioni di $J(\tau, t)$ sono $[\sigma^{-1}]$.

All'atto dell'azione di σ_c si ha

$$\epsilon = \epsilon(\tau) = \frac{\sigma_c}{E(\tau)} \quad (499)$$

ove $E(\tau)$ è il modulo di Young alla data del carico; $E(\tau)$ è crescente

con il tempo, su un asintoto $E = E(\infty)$. Distinguendo la (499), deformazione iniziale (detta impropriamente *deformazione elastica istantanea*), dalla rimanente (*deformazione totale differita*), si ha

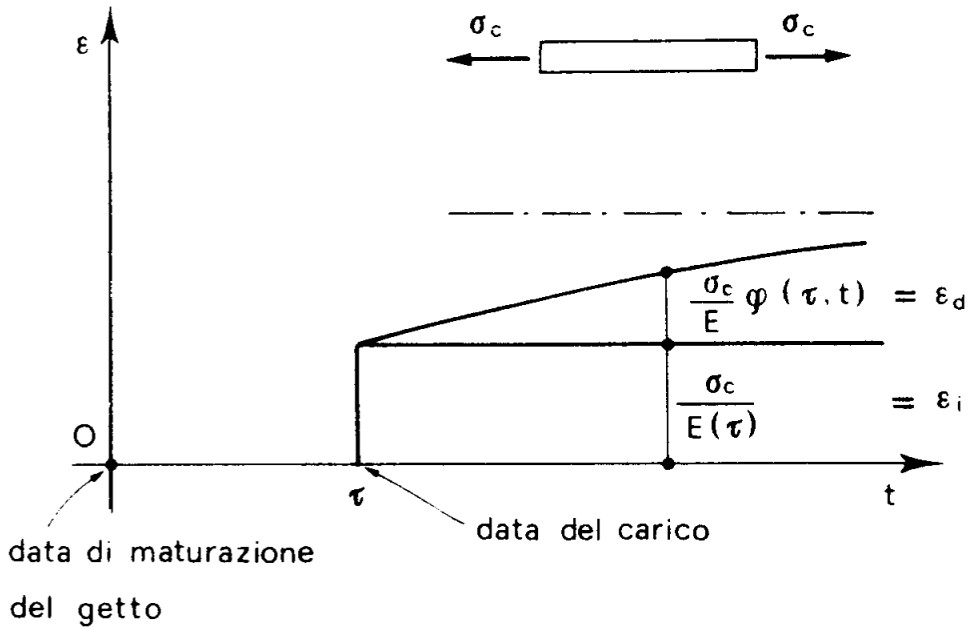


Figura 39

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \epsilon_i(\tau) + \epsilon_d(\tau, t) = \\ &= \frac{\sigma_c}{E(\tau)} + \frac{\sigma_c}{E} \varphi(\tau, t); \end{aligned} \quad (500)$$

il modulo E è un modulo elastico di riferimento, in genere $E(\infty)$, che

si introduce per rendere φ adimensionale. E' quindi

$$J(\tau, t) = \frac{1}{E(\tau)} + \frac{1}{E} \varphi(\tau, t); \quad (501)$$

La J è la *funzione fluage*, la φ è il *coefficiente di fluage*.

La (498) implica non solo la linearità, ma anche l'identità del comportamento in assoluto tra i due casi della trazione e della compressione.

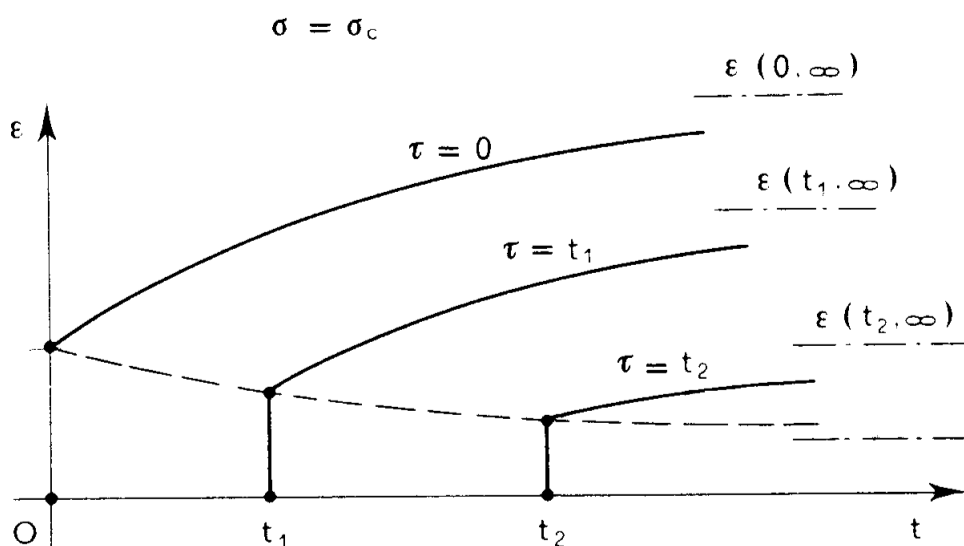


Figura 40

Nella fig. 40 si osservano le curve $\epsilon(t)$ per σ_c costante che agisca alla data $\tau = 0$, o alle date $\tau = t_1$, e $\tau = t_2$. Si osserva che la $\epsilon_i(\tau)$ varia, dal valore $\frac{\sigma_c}{E_0}$ al valore asintotico $\frac{\sigma_c}{E_\infty}$; la $\epsilon_d(\tau, t)$, e cioè la $\varphi(\tau, t)$, è crescente con t , con un asintoto $\epsilon_d(\tau, \infty)$, e decrescente con τ . E cioè il comportamento differito è tanto più vivace quanto più τ è prossima alla data di maturazione, e tende comunque a spegnersi con il tempo.

Si osservi che dalla (500) risulta ovviamente

$$\varphi(\tau, \tau) = 0. \quad (502)$$

2. Il caso dello scarico.

La linearità della (498) permette di sovrapporre gli effetti; e cioè, se una σ_{c1} agisce dalla data $\tau = t_1$, ed una σ_{c2} dalla data $\tau = t_2$, ambedue costanti in $[\tau, \infty]$, può scriversi, per i due casi indipendenti,

$$\begin{aligned}\epsilon_1(t) &= \sigma_{c1} J(t_1, t), & t \in [t_1, \infty] \\ \epsilon_2(t) &= \sigma_{c2} J(t_2, t), & t \in [t_2, \infty],\end{aligned}$$

e quindi, poiché la $J(t_1, t)$ non è variata dalla presenza di σ_{c2} , né la $J(t_2, t)$ per la presenza di σ_{c1} , può scriversi

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \epsilon_1(t) & \text{se } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \epsilon(t) &= \epsilon_1(t) + \epsilon_2(t) & \text{se } t_2 \leq t \leq \infty.\end{aligned}\tag{503}$$

Si faccia il caso (fig. 41) di una σ_c che agisca dalla data t_c alla data t_s ; è come se la σ_c agisse da t_c ad ∞ , e la $-\sigma_c$ da t_s ad ∞ . La (503) permette di scrivere

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \frac{\sigma_c}{E(t_c)} + \frac{\sigma_c}{E} \varphi(t_c, t) & \text{se } t_c < t < t_s \\ \epsilon(t) &= \frac{\sigma_c}{E(t_c)} + \frac{\sigma_c}{E} \varphi(t_c, t) - \\ & - \frac{\sigma_c}{E(t_s)} - \frac{\sigma_c}{E} \varphi(t_s, t) & \text{se } t > t_s.\end{aligned}$$

In $t = t_s$ la $\epsilon(t)$ passa quindi dal valore

$$\frac{\sigma_c}{E(t_c)} + \frac{\sigma_c}{E} \varphi(t_c, t_s)$$

al valore

$$\frac{\sigma_c}{E(t_c)} + \frac{\sigma_c}{E} \varphi(t_c, t_s) - \frac{\sigma_c}{E(t_s)},$$

con un salto in discesa pari a $-\frac{\sigma_c}{E(t_s)}$.

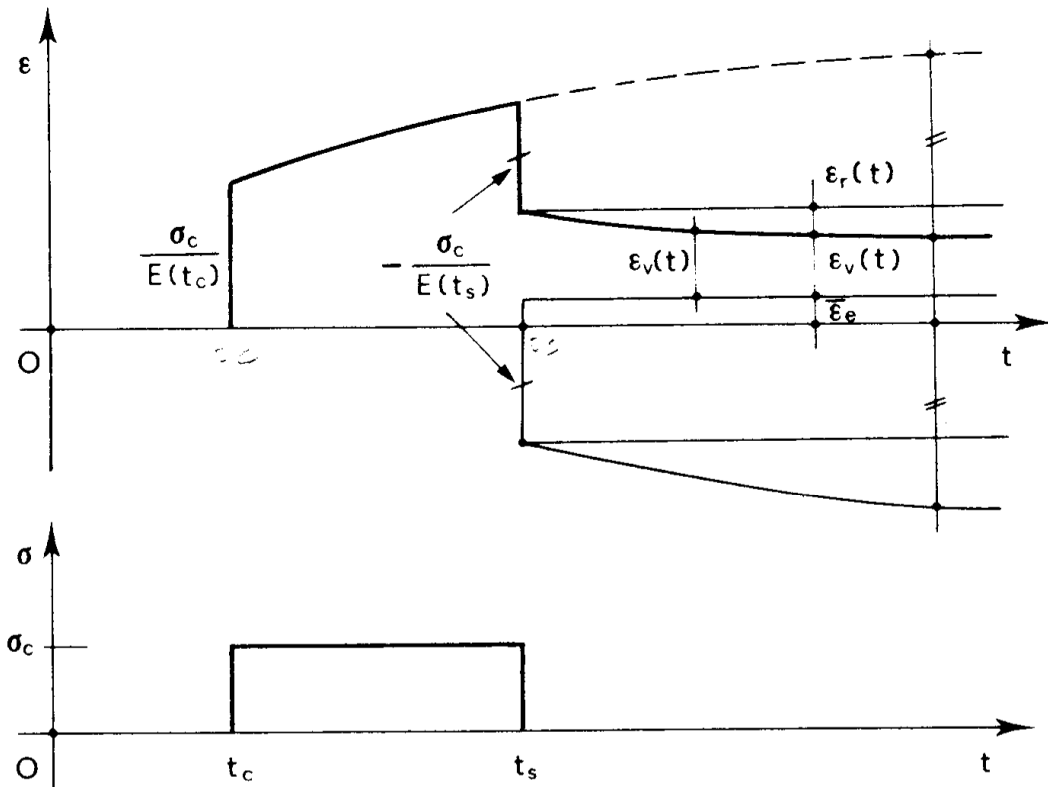


Figura 41

In $t \in [t_s, \infty]$ è

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma_c}{E(t_c)} - \frac{\sigma_c}{E(t_s)} + \frac{\sigma_c}{E} [\varphi(t_c, t) - \varphi(t_s, t)].$$

(504)

La parte costante

$$\bar{\epsilon}_e = \frac{\sigma_c}{E(t_c)} - \frac{\sigma_c}{E(t_s)} \quad (505)$$

è la *deformazione elastica residua*, dovuta alla variazione del modulo di Young, e cioè quella che non è restituita nell'attimo dello scarico.

La parte rimanente

$$\epsilon_v(t) = \frac{\sigma_c}{E} [\varphi(t_c, t) - \varphi(t_s, t)] \quad (506)$$

è quindi la deformazione residua depurata da quella (505) di natura elastica, e cioè la *deformazione viscosa residua*, dovuta appunto al comportamento "nuovo", per così dire, del materiale, nuovo rispetto al comportamento elastico ordinario. La (506) decresce nel tempo, ma non si annulla, coricandosi sull'asintoto $\epsilon_v = \epsilon_v(\infty)$. Il *recupero*, cioè, della deformazione viscosa formatasi nell'intervallo $[t_c, t_s]$ non è totale, ma è fornito da

$$\begin{aligned} \epsilon_r(t) &= \epsilon_v(t) - \epsilon_v(t_s) = \\ &= \frac{\sigma_c}{E} [\varphi(t_c, t) - \varphi(t_s, t) - \varphi(t_c, t_s)] . \end{aligned} \quad (507)$$

La $\epsilon_r(t)$ è nulla in $t = t_s$, negativa per $t > t_s$.

Nella fig. 42 è riportato, per σ_c costante da $t = t_c$ a $t = \infty$, il diagramma delle

$$\epsilon(\bar{t}) = \frac{\sigma_c}{E(\bar{t})} ; \quad (508)$$

e cioè della parte di $\epsilon(\bar{t})$ che può chiamarsi *elastica*, nel senso che è quella restituita alla data \bar{t} dell'eventuale scarico. Si può rilevare così il diagramma

$$\bar{\epsilon}_e(\bar{t}) = \frac{\sigma_c}{E(t_c)} - \frac{\sigma_c}{E(\bar{t})} \quad (509)$$

della ϵ *permanente di carattere elastico*, e cioè di quella parte di ϵ_t di natura elastica che rimarrebbe presente alla data \bar{t} dell'eventuale scarico, senza più variare da tale data fino a $t = \infty$. La terza parte, $\epsilon_v(\bar{t})$, è la ϵ *permanente di natura non elastica* — definita perciò con altro nome, e cioè *viscosa* — che rimarrebbe presente alla data dell'eventuale scarico, decrescendo però, senza peraltro annullarsi, nel tempo.

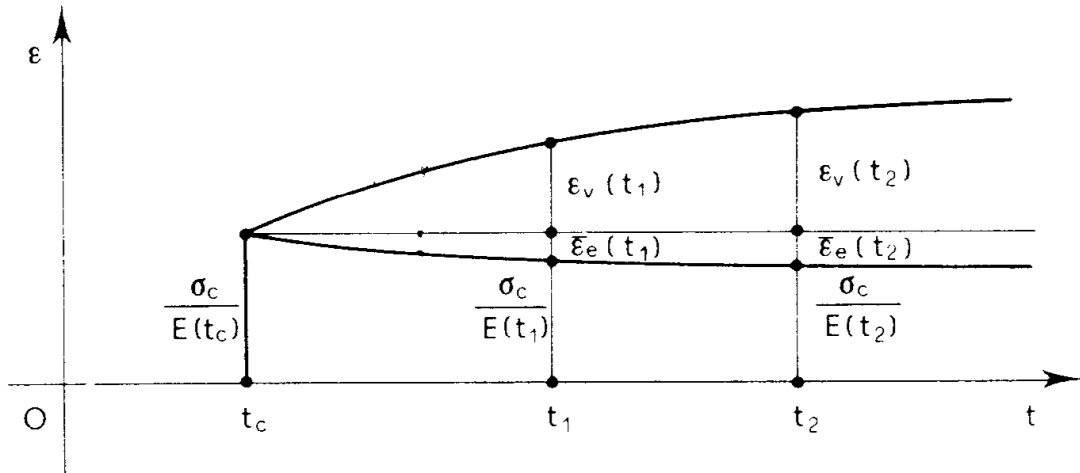


Figura 42

Mentre quindi la $\bar{\epsilon}_e(\bar{t})$ è in tutto rigore permanente, la $\epsilon_v(\bar{t})$ lo è impropriamente, appunto perché permane all'atto dello scarico, ma poi svanisce, sia pure parzialmente, nel tempo. La parte di $\epsilon_v(\bar{t})$ che si vanifica nel tempo è la $\epsilon_r(\bar{t}, t)$, e cioè quella che si è definita come *recupero* della deformazione viscosa.

E' naturale che, se σ_c è costante fino a $t = \infty$, la $\epsilon_r(t)$ non ha ragione di essere considerata, e la distinzione tra le tre parti di $\epsilon(t)$ è del tutto accademica.

La $\epsilon_v(\bar{t})$ è fornita dalla (506), ove compare \bar{t} al posto di t e di t_s

$$\epsilon_v(\bar{t}) = \frac{\sigma_c}{E} \varphi(t_c, \bar{t}), \quad (510)$$

mentre la $\epsilon_r(\bar{t}, t)$ è fornita dalla (507)

$$\epsilon_r(\bar{t}, t) = \frac{\sigma_c}{E} [\varphi(t_c, t) - \varphi(\bar{t}, t) - \varphi(t_c, \bar{t})]. \quad (511)$$

La funzione φ regola tutto il fatto viscoso, e solo quello.

3. Il caso di una tensione variabile in modo qualsiasi nel tempo.

a) La linearità della (498) permette anche di ottenere la $\epsilon(t)$ per effetto di una $\sigma(t)$ che, applicata alla data t_c con valore σ_c (fig. 43a)

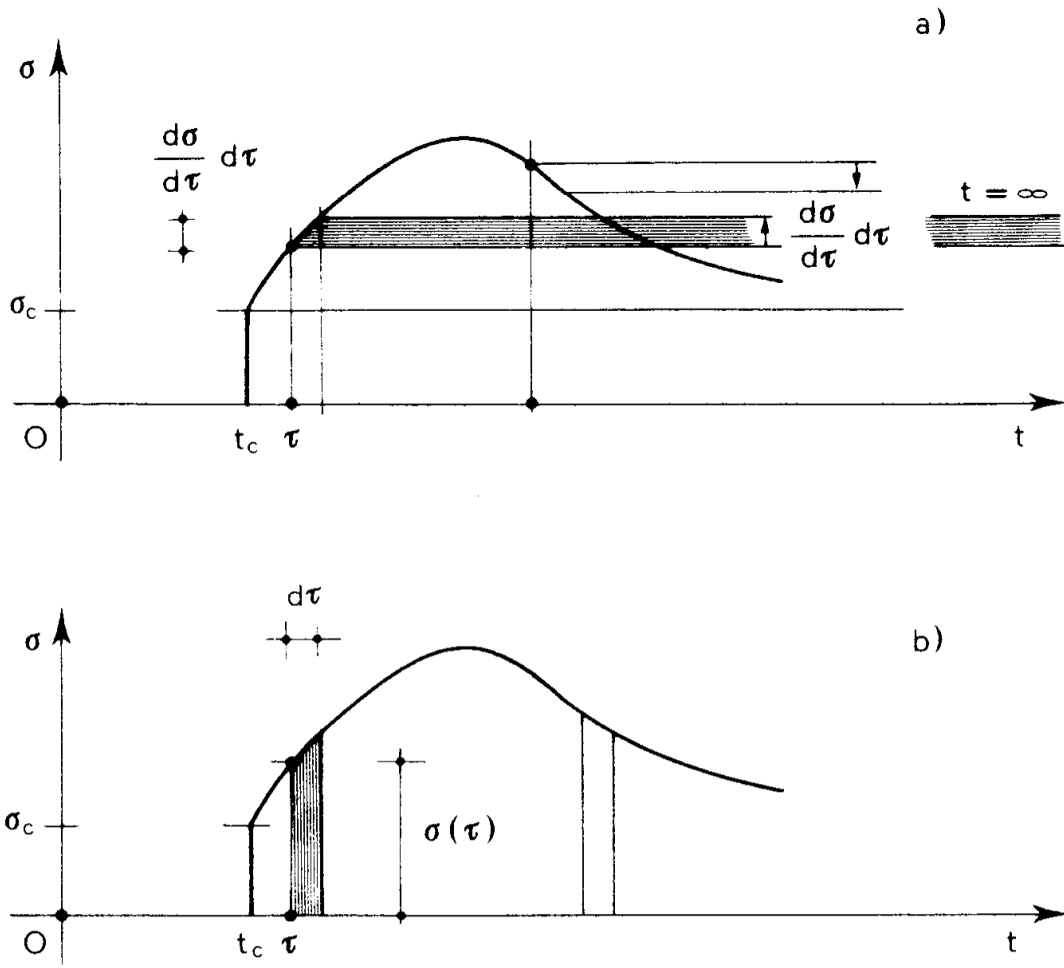


Figura 43

varia poi nel tempo, con una legge $\sigma(t)$ derivabile, da $t = t_c$ a $t = \infty$. Si può infatti sovrapporre l'effetto di una σ_c costante in $t \in [t_c, \infty]$, a quello delle successive

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{dt} dt$$

agenti ciascuna da $t = \tau$ a $t = \infty$. Si ha così

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \frac{\sigma_c}{E(t_c)} + \frac{\sigma_c}{E} \varphi(t_c, t) + \\ &+ \int_{t_c}^t \frac{1}{E(\tau)} \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau + \frac{1}{E} \int_{t_c}^t \frac{d\sigma}{d\tau} \varphi(\tau, t) d\tau \end{aligned} \quad (512)$$

che può scindersi nelle due parti, di carattere elastico e viscoso:

$$\epsilon_e(t) = \frac{\sigma_c}{E(t_c)} + \int_{t_c}^t \frac{1}{E(\tau)} \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (513)$$

$$\epsilon_v(t) = \frac{\sigma_c}{E} \varphi(t_c, t) + \frac{1}{E} \int_{t_c}^t \frac{d\sigma}{d\tau} \varphi(\tau, t) d\tau.$$

b) Dalla (498) si trae

$$\epsilon(t) = \sigma_c J(t_c, t) + \int_{t_c}^t \frac{d\sigma}{d\tau} J(\tau, t) d\tau.$$

D'altro canto può scriversi

$$\int_{t_c}^t \frac{d\sigma}{d\tau} J(\tau, t) d\tau = [\sigma J(\tau, t)]_{t_c}^t - \int_{t_c}^t \sigma(\tau) \frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \sigma_c J(t_c, t) + \sigma(t) J(t, t) - \sigma_c J(t_c, t) - \\ &- \int_{t_c}^t \sigma(\tau) \frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau; \end{aligned}$$

per le (501) e (502) si ha poi

$$J(t, t) = \frac{1}{E(t)} + \frac{1}{E} \varphi(t, t) = \frac{1}{E(t)},$$

da cui

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} - \int_{t_c}^t \sigma(\tau) \frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau. \quad (515)$$

La (515) è analoga alla (512), rispetto ad essa ha il difetto di non separare la parte elastica dalla viscosa, ma il pregio di contenere nel secondo addendo tutta la parte permanente. Se infatti $\sigma(t)$ si annulla, il recupero elastico è proprio pari a $\frac{\sigma(t)}{E(t)}$.

Se $\frac{dE}{dt} = 0$, le (512) e (515) si scrivono

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \frac{\sigma_c}{E} + \frac{\sigma_c}{E} \varphi(t_c, t) + \frac{1}{E} \sigma(t) - \frac{\sigma_c}{E} + \\ &+ \frac{1}{E} \int_{t_c}^t \frac{d\sigma}{d\tau} \varphi(\tau, t) d\tau = \\ &= \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \sigma_c \varphi(t_c, t) + \int_{t_c}^t \frac{d\sigma}{d\tau} \varphi(\tau, t) d\tau \right] \end{aligned} \quad (516)$$

$$\epsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) - \int_{t_c}^t \sigma(\tau) \frac{\partial \varphi(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau \right]. \quad (517)$$

Le (516) e (517), ottenibili l'una dall'altra con integrazione per parti, mostrano come, per E costante (e dunque eliminando la deformazione permanente di natura elastica) la deformazione differita, tutta viscosa, è regolata dal coefficiente φ di fluage.

4. Nucleo ereditario e funzione ricordo.

Alla (517) può pervenirsi con metodo deduttivo, considerando come dato di partenza non più una tensione agente con valore costante da $t = \tau$ a $t = \infty$, ma una tensione σ che agisce al tempo τ per un intervallo elementare di tempo $d\tau$ (*impulso di tensione*). Così la $\epsilon(t)$ non si ottiene più sommando i contributi da τ a t delle $d\sigma(\tau)$ agenti con tutto il loro valore da τ a t , ma sommando i contributi da t_c a t delle $\sigma(\tau)$ agenti per l'intervallo elementare $d\tau$ al tempo τ . Naturalmente la deformazione residua generata dall'impulso $\sigma d\tau$ non è sperimentalmente determinabile, ma essa può trarsi dalla $\varphi(\tau, t)$; dalla (504) infatti si trae, per $t_c = \tau, t_s = \tau + d\tau$,

$$\epsilon(t) = \sigma(\tau) \left[\frac{1}{E(\tau)} - \frac{1}{E(\tau + d\tau)} \right] + \frac{\sigma(\tau)}{E} \left[\varphi(\tau, t) - \varphi(\tau + d\tau, t) \right]$$

ed effettuando il limite rispetto a τ

$$\frac{d\epsilon(t)}{d\tau} d\tau = -\sigma(\tau) d\tau \left[\frac{d}{d\tau} \frac{1}{E(\tau)} + \frac{1}{E} \frac{\partial \varphi(\tau, t)}{\partial \tau} \right]. \quad (518)$$

L'impulso $\sigma(\tau) d\tau$ genera quindi un *ricordo*

$$d\epsilon(\tau, t) = \sigma(\tau) d\tau \frac{\Psi(\tau, t)}{E} \quad (519)$$

ove

$$\Psi(\tau, t) = -\frac{d}{d\tau} \frac{E}{E(\tau)} - \frac{\partial \varphi(\tau, t)}{\partial \tau}. \quad (520)$$

La funzione $\Psi(\tau, t)$ è il *nucleo ereditario* ed ha dimensioni $[t^{-1}]$.

La $\Psi(\tau, t)$ tien conto di ogni fatto ereditario; la parte $-\frac{d}{d\tau} \frac{E}{E(\tau)}$ riguarda la variazione del modulo elastico, la parte $-\frac{\partial \varphi(\tau, t)}{\partial \tau}$ riguarda il ricordo viscoso propriamente detto. Ciò è coerente con il fatto che la funzione φ regola tutto il fatto viscoso, e solo quello.

La funzione

$$\psi(\tau, t) = -\frac{\partial \varphi(\tau, t)}{\partial \tau}, \quad (521)$$

che tiene conto del fatto viscoso, si chiama *nucleo viscoso*, ed ha pur essa dimensione $[t^{-1}]$. Si può così scrivere

$$\Psi(\tau, t) = -\frac{d}{d\tau} \frac{E}{E(\tau)} + \psi(\tau, t). \quad (522)$$

Dalla (501) trae

$$\frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau} = \frac{d}{d\tau} \frac{1}{E(\tau)} + \frac{1}{E} \frac{\partial \varphi(\tau, t)}{\partial \tau}$$

e cioè (521)

$$\frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau} = \frac{1}{E} \left[\frac{d}{d\tau} \frac{E}{E(\tau)} - \psi(\tau, t) \right];$$

per la (522) si può quindi scrivere

$$\Psi(\tau, t) = -E \frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau} \quad (523)$$

Riassumendo, si ha

$$(501) \quad J(\tau, t) = \frac{1}{E(\tau)} + \frac{1}{E} \varphi(\tau, t)$$

$$(522) \quad \Psi(\tau, t) = -\frac{d}{d\tau} \frac{E}{E(\tau)} + \psi(\tau, t)$$

$$\psi(\tau, t) = - \frac{\partial \varphi(\tau, t)}{\partial \tau}$$

$$\Psi(\tau, t) = -E \frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau} .$$

Si ha poi

$$[J] = [\sigma^{-1}]$$

$$[\varphi] = [1]$$

$$[\Psi] = [t^{-1}]$$

$$[\psi] = [t^{-1}] .$$

Si ricordi che la φ regola tutta e solo la deformazione viscosa; altrettanto accade per la ψ . Sperimentalmente si determinano la $E(t)$ e la $J(\tau, t)$, e quindi la $\varphi(\tau, t)$; da esse si traggono per derivazione $\psi(\tau, t)$ e $\Psi(\tau, t)$. Assiomaticamente, invece, si postula la $\psi(\tau, t)$, e si traggono per integrazione $\varphi(\tau, t)$ ed $J(\tau, t)$.

5. Il nucleo di Withney.

Dalle sue esperienze, già citate, G.S. Withney ha proposto un nucleo viscoso

$$\psi(\tau, t) = \alpha e^{-\beta \tau}, \quad (524)$$

ove α e β hanno dimensioni $[t^{-1}]$; in genere $\beta = 1 \text{ anno}^{-1}$, ed α varia da 1 a 3 anni^{-1} . La funzione ψ è quindi, per Withney, indipendente da t ; e cioè un impulso di tensione $\sigma d\tau$ (fig. 44) genera una deformazione viscosa (519)

$$d\epsilon_v(\tau, t) = \sigma(\tau) d\tau \frac{\alpha}{E} e^{-\beta \tau} \quad (525)$$

che non varia nei tempi successivi, e cioè indelebile; G. Krall amava

dire che il conglomerato ha una memoria di acciaio. Non c'è quindi recupero, e ciò costituisce una critica piuttosto seria al nucleo di Withney.

La (525) diminuisce all'aumentare di τ , e tende a zero per $\tau \rightarrow \infty$ (fig. 44); e cioè l'attività viscosa del conglomerato è tanto più forte quanto più il conglomerato è giovane, ed è nulla per i conglomerati anziani. La memoria quindi è di ferro, ma la reattività subisce la stessa sorte degli umani. Anche ciò è criticato, poiché pare che invece

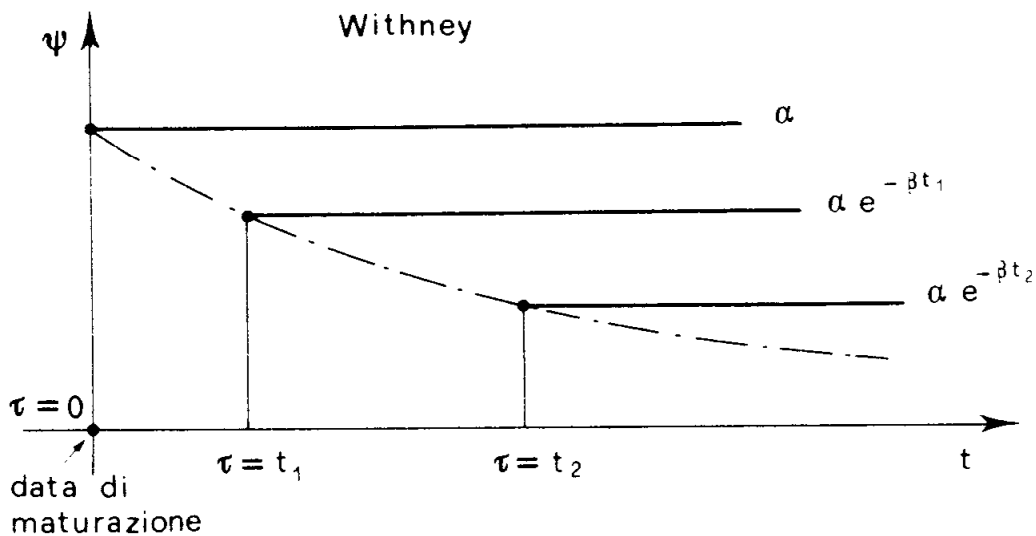


Figura 44

la reattività viscosa tenda asintoticamente, con il trascorrere delle stagioni, non a zero, ma ad un valore finito e misurabile. Il ponte di Sandö a Stoccolma (record della luce, 264 m., nel 1943) presenta ancora deformazioni di natura viscosa. Se una σ_c costante è applicata dalla data t_c , si ha (519), trascurando la variazione di E ,

$$\begin{aligned}
 \epsilon(t) &= \frac{\sigma_c}{E} + \frac{\sigma_c}{E} \int_{t_c}^t \psi(\tau, t) d\tau = \\
 &= \frac{\sigma_c}{E} + \frac{\sigma_c}{E} \alpha \int_{t_c}^t e^{-\beta\tau} d\tau = \\
 &= \frac{\sigma_c}{E} + \frac{\sigma_c}{E} \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t}). \tag{526}
 \end{aligned}$$

Se si trascura la variazione di E , il nucleo ereditario coincide con il nucleo viscoso. In genere ciò è lecito; infatti il modulo E si stabilizza molto rapidamente, e dopo tre - quattro mesi può reputarsi indipendente dal tempo. Conviene invece tener conto della variazione di E se il carico agisce in epoca molto prossima alla data di maturazione, come succede nel caso del precompresso.

Nella fig. 45 sono disegnati diagrammi e grafici della $\epsilon(t)$, totale, in rapporto alla $\epsilon_e = \frac{\sigma_c}{E}$ nel caso di una σ_c costante nel tempo, e che intervenga alle varie date t_c ; essi sono calcolati dalla (526), per $\alpha = 3 \text{ anni}^{-1}$ e $\beta = 1 \text{ anno}^{-1}$.

Il coefficiente α è tanto più alto quanto più asciutto è l'ambiente di maturazione.

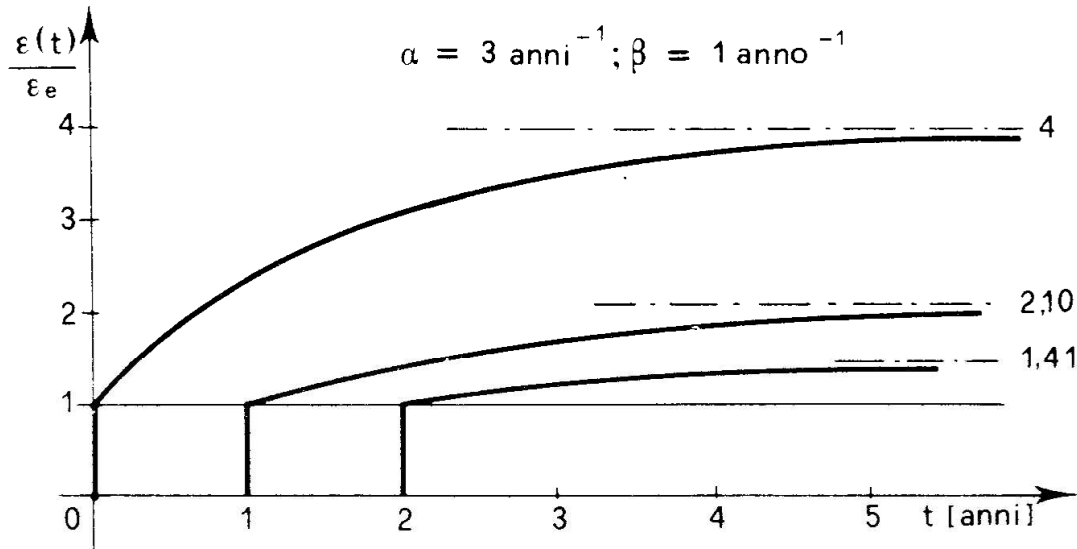
Il nucleo di Withney, pur criticabile, permette che gli sviluppi matematici siano tollerabilmente agevoli, ed in definitiva è quello adottato in tutti i problemi di calcolo strutturale; con esso G. Krall ha realizzato le sue opere di incomparabile nitore statico-estetico, ai limiti - ed oltre - della normativa allora vigente. Si tenga anche conto che nuclei più sofisticati, oltre a risultare inutilizzabili appena si vada un po' oltre il modesto schema della trave appoggiata, trovano il loro limite nella difficoltà di determinare sperimentalmente i coefficienti viscosi, e nell'impossibilità di conoscerli in tempo utile durante la realizzazione dell'opera.

La norma italiana (D.M. 26/3/'80), al punto 2.1.7 (tit. viscosità) recita:

“In mancanza di sperimentazione diretta, per il coefficiente finale di viscosità $\varphi(t_\infty, t_0)$ di un conglomerato sottoposto ad una tensione al più uguale a $0,3 R_{bkj}$ al tempo $t_0 = j$ di messa in carico, si ammetteranno i seguenti valori

t_0	$\alpha \leq 20 \text{ cm}$	$\alpha \geq 60 \text{ cm}$	
3 ÷ 7 giorni	2,7	2,1	atmosfera con umidità relativa di circa 75%
8 ÷ 60 ”	2,2	1,9	
> 60	1,4	1,7	
3 ÷ 7 giorni	3,8	2,9	atmosfera con umidità relativa di circa 55%
8 ÷ 60	3	2,5	
> 60 ”	1,7	2	

In queste tabelle α è la “dimensione fittizia” $2A_c/u$, ove A_c è “l’area della sezione del conglomerato”, u “il perimetro della sezione di conglomerato a contatto con l’atmosfera”; per α da 20 a 60 cm



$t \backslash t_c$	0	1	2	3	4
0	1				
0,5	2,18				
1	2,90	1			
1,5	3,33	1,43			
2	3,59	1,70	1		
2,5	3,75	1,86	1,16		
3	3,85	1,95	1,26	1	
3,5	3,91	2,01	1,32	1,06	
4	3,94	2,05	1,35	1,09	1
4,5	3,97	2,07	1,37	1,12	1,02
5	3,98	2,08	1,39	1,13	1,03
∞	4	2,10	1,41	1,15	1,05

Figura 45

“si interpolerà linearmente”. Poiché t_0 è pari anche a 3 giorni, la data t_0 deve intendersi, come nelle pagine precedenti, a partire dalla data di maturazione. Il coefficiente finale $\varphi(t_\infty, t_0)$ è probabilmente il rapporto $\epsilon(\infty)/\epsilon_e$ della fig. 45. Se ciò è vero, si ha un sostanziale accordo con i coefficienti $\alpha = 1, 2, 3$ del Withney.

6. Il nucleo di Aroutiounian.

Aroutiounian propone la seguente funzione fluage:

$$J(\tau, t) = \frac{1}{E(\tau)} + \frac{1}{E} \left(C + \frac{A}{\tau} \right) (1 - e^{-\beta(t-\tau)}) \quad (527)$$

e quindi il seguente coefficiente di fluage:

$$\varphi(\tau, t) = \left(C + \frac{A}{\tau} \right) (1 - e^{-\beta(t-\tau)}) . \quad (528)$$

La (523)

$$\Psi(\tau, t) = -E \frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau}$$

fornisce quindi

$$\begin{aligned} \Psi(\tau, t) &= -\frac{d}{d\tau} \frac{E}{E(\tau)} + \frac{A}{\tau^2} (1 - e^{-\beta(t-\tau)}) + \\ &+ \left(C + \frac{A}{\tau} \right) \beta e^{-\beta(t-\tau)} = \\ &= -\frac{d}{d\tau} \frac{E}{E(\tau)} + \frac{A}{\tau^2} + \left(\beta C + \beta \frac{A}{\tau} - \frac{A}{\tau^2} \right) e^{-\beta(t-\tau)} \end{aligned}$$

e, per la (522) ,

$$\psi(\tau, t) = \frac{A}{\tau^2} + \left(\beta C + \beta \frac{A}{\tau} - \frac{A}{\tau^2} \right) e^{-\beta(t-\tau)}. \quad (529)$$

Le dimensioni delle costanti β , A , C sono

$$[\beta] = [t^{-1}]$$

$$[A] = [t]$$

$$[C] = [1].$$

La (529) è del tipo

$$\psi(\tau, t) = g(\tau) + h(\tau) \cdot k(t), \quad (530)$$

con

$$g(\tau) = \frac{A}{\tau^2}$$

$$h(\tau) = \left(\beta C + \beta \frac{A}{\tau} - \frac{A}{\tau^2} \right) e^{\beta\tau} \quad (531)$$

$$k(t) = e^{-\beta t},$$

la forma (530) risulta molto utile per le applicazioni.

La (529) può anche porsi nella forma

$$\psi(\tau, t) = g(\tau) + f(\tau) \cdot r(t - \tau) \quad (532)$$

con

$$f(\tau) = \beta C + \beta \frac{A}{\tau} - \frac{A}{\tau^2} \quad (533)$$

$$r(t - \tau) = e^{-\beta(t-\tau)};$$

anche la (532) è molto utile per le applicazioni. Occorre tener pre-

sente che nella (527), contrariamente a quanto si fa in genere, l'origine dei tempi è la data di getto; le formule precedenti valgono quindi per $t \geq t_m$, ove t_m è la data di maturazione.

Nella fig. 46 sono riportati i valori del ricordo $\psi(\tau, t)$ per più

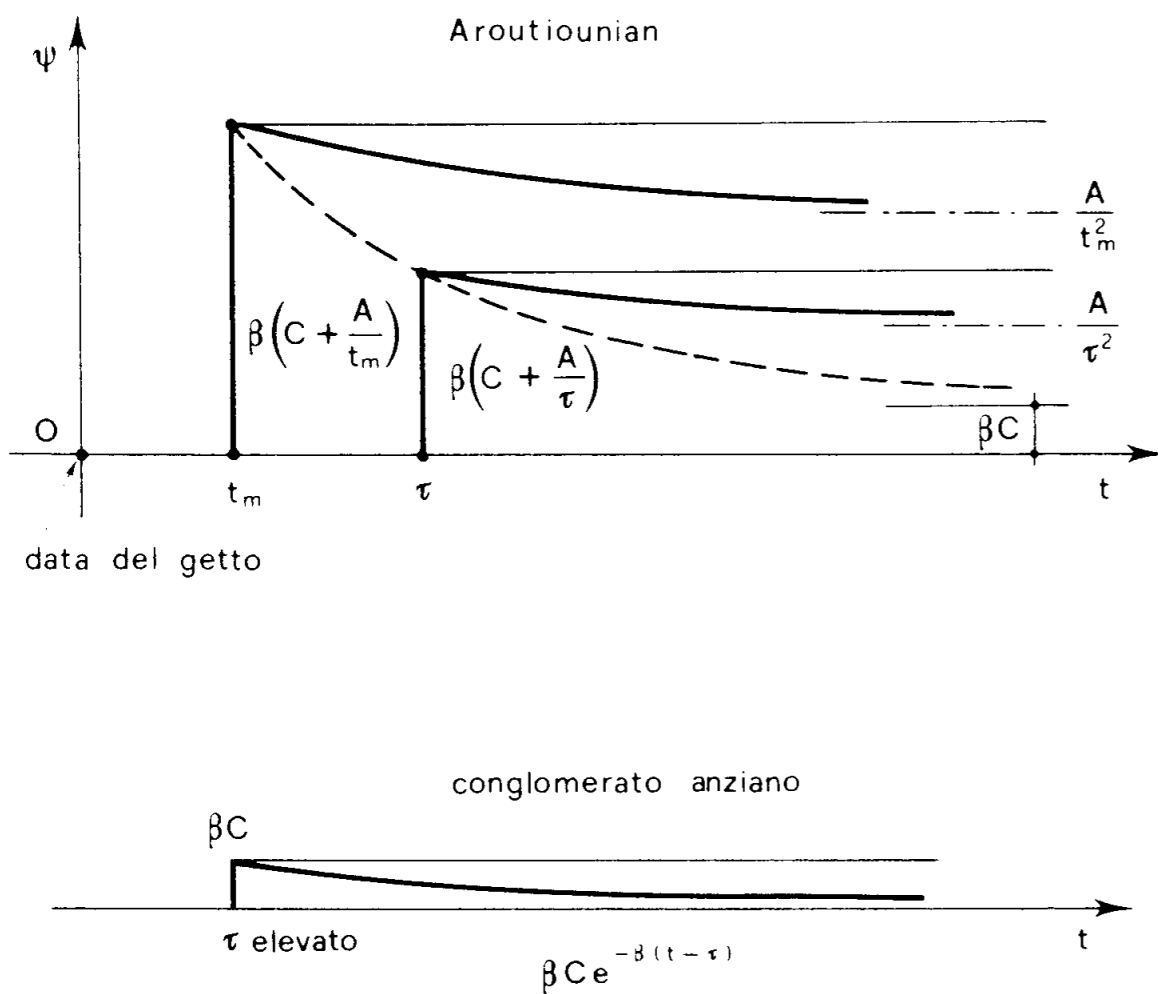


Figura 46

valori di τ . Assegnata τ , data di azione dell'impulso di tensione $\sigma d\tau$, si ha

$$t = \tau, \quad r(t - \tau) = 1 \quad (534)$$

$$\psi = g(\tau) + f(\tau) = \beta C + \beta \frac{A}{\tau}$$

$$t \rightarrow \infty, \quad r(t - \tau) \rightarrow 0$$

$$\psi \rightarrow g(\tau) = \frac{A}{\tau^2} . \quad (535)$$

Quindi l'impronta viscosa non è indelebile, come nel caso di Withney, ma decresce dal valore (534) al valore (535), con una diminuzione data, asintoticamente, da

$$\beta C + \beta \frac{A}{\tau} - \frac{A}{\tau^2} . \quad (536)$$

Per $\tau \rightarrow \infty$, e cioè quando l'impulso agisce sul conglomerato ormai anziano, il valore iniziale del ricordo è βC , e quello asintotico è nullo. Si ha cioè (529)

$$\psi(\tau, t) = \beta C \cdot e^{-\beta(t-\tau)} . \quad (537)$$

La funzione (537) è un nucleo cosiddetto "del ciclo chiuso", e coincide con il nucleo ereditario dell'acciaio. Per l'acciaio infatti l'impronta viscosa è indipendente dall'epoca in cui l'impulso di tensione agisce, e tende a svanire nel tempo. L'acciaio cioè, contrariamente al conglomerato, ha debole memoria, e sensibilità indipendente dalla sua età. E' il valore di C che regola il comportamento dei conglomerati anziani; se $C = 0$, il conglomerato anziano risulta inerte.

7. Il nucleo di Rüsç e Jungwirth.

Nel Model Code CEB-FIP 1978 si propone la funzione fluage

$$J(\tau, t) = \frac{1}{E(\tau)} + \frac{1}{E} [A(\tau) + l(t - \tau) + m(t) - m(\tau)] \quad (538)$$

e quindi il coefficiente di fluage

$$\varphi(\tau, t) = A(\tau) + l(t - \tau) + m(t) - m(\tau) .$$

Le (521) e (522) forniscono

$$\Psi(\tau, t) = -\frac{d}{d\tau} \frac{E}{E(\tau)} - \left[\frac{dA}{d\tau} + \frac{\partial l(t-\tau)}{\partial \tau} - \frac{dm}{d\tau} \right],$$

e quindi

$$\psi(\tau, t) = g(\tau) + r(t-\tau). \quad (539)$$

La (539) è analoga alla (532); ponendo

$$r(t-\tau) = -D(1 - e^{-\beta(t-\tau)}) \quad (540)$$

la funzione $r(t-\tau)$ risulta nulla in $t=\tau$, e pari a $-D$ in $t=\infty$. In tal caso $g(\tau)$ è l'impronta iniziale provocata dall'impulso di tensione, ed $r(t-\tau)$ il recupero. Questo recupero è invariante rispetto a τ (fig. 47). Quindi il valore di $g(\tau)$ per $\tau \rightarrow \infty$ non può essere minore di D . Ponendo, alla Withney,

$$g(\tau) = A e^{-\beta\tau} + D(1 - e^{-\beta\tau}) \quad (541)$$

si ha che l'impronta iniziale è pari ad A per $\tau=0$, a D per $\tau=\infty$. Il comportamento è così analogo a quello che si trae dal nucleo di Aroutiounian, nel senso che, per conglomerati anziani, il nucleo può porsi nella forma (540) (541)

$$\psi(\tau, t) = D e^{-\beta(t-\tau)}, \quad (542)$$

identica alla (537). Si noti però che mentre il recupero dell'impronta nel caso di Rüschi dipende solo da $t-\tau$ — e quindi è rappresentato sempre dallo stesso diagramma, traslato — nel caso di Aroutiounian invece (536) il recupero dell'impronta diminuisce all'aumentare della data d'impulso.

Si noti che la (539) può scriversi nella forma seguente:

$$\psi(\tau, t) = g(\tau) - D + D e^{-\beta t} e^{\beta\tau}$$

e cioè nell'aspetto (530) particolarizzato però, per essere $h(\tau)$ e $k(t)$ l'una inversa dell'altra. Riassumendo, le posizioni (540) e (541)

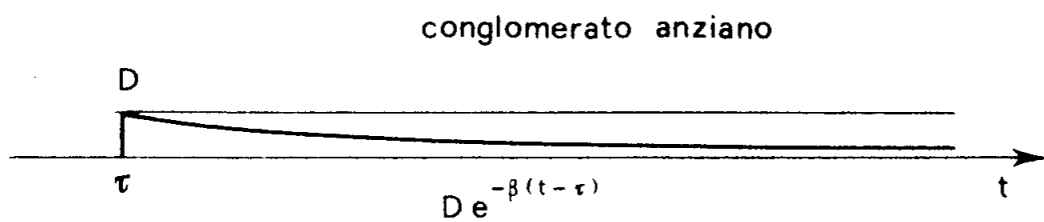
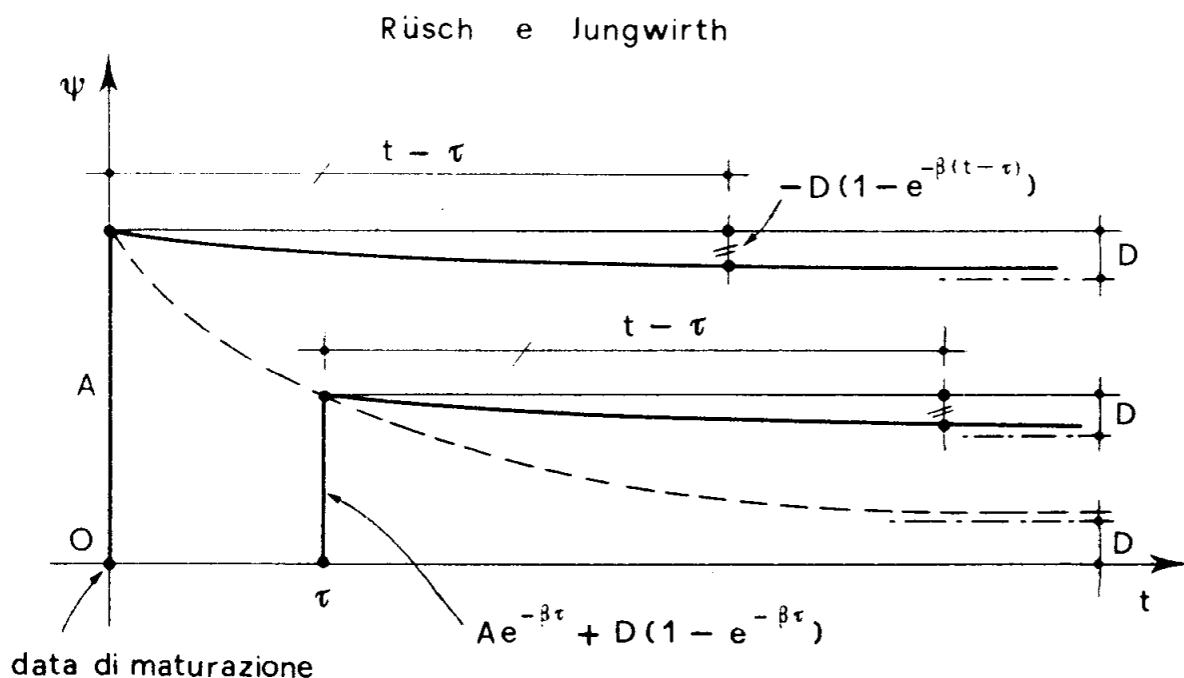


Figura 47

permettono di scrivere

$$\psi(\tau, t) = A e^{-\beta\tau} + D(1 - e^{-\beta\tau}) - \quad (543)$$

$$- D(1 - e^{-\beta(t-\tau)});$$

le tre costanti β , A , D hanno le seguenti dimensioni fisiche:

$$[\beta] = [t^{-1}]$$

$$[A] = [t^{-1}]$$

$$[D] = [t^{-1}].$$

I primi due termini della (543) rappresentano l'impronta iniziale, il terzo termine è il recupero dell'impronta. La costante D caratterizza il recupero; se essa è nulla, si ricade ($A = \alpha$) nel nucleo di Withney.

8. Il nucleo di Withney modificato.

Si modifichi il nucleo viscoso di Withney (524) come segue:

$$\psi(\tau, t) = (\alpha e^{-\beta\tau} + \alpha') [1 - k(1 - e^{-\beta'(t-\tau)})]. \quad (544)$$

L'impronta viscosa iniziale è ($t = \tau$)

$$\bar{\psi}(\tau) = \alpha e^{-\beta\tau} + \alpha' \quad (545)$$

per $\tau \rightarrow \infty$ essa tende al valore

$$\bar{\psi}_{\infty} = \alpha', \quad (546)$$

indipendente da τ , e non nulla.

Il recupero dell'impronta è

$$k \bar{\psi}(\tau) [1 - e^{-\beta'(t-\tau)}] \quad (547)$$

nullo in $t = \tau$, e pari a

$$k \bar{\psi}(\tau) \quad (548)$$

per $t = \infty$

Il recupero è perciò esponenziale, e diminuisce all'aumentare di τ , così come accade nel nucleo di Aroutiounian.

Per $\tau \rightarrow \infty$ è

$$\psi(\tau, t) = \alpha' [1 - k(1 - e^{-\beta'(t-\tau)})] , \quad (549)$$

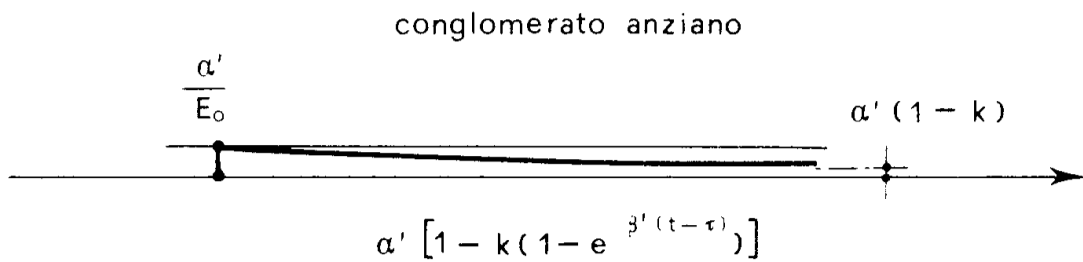
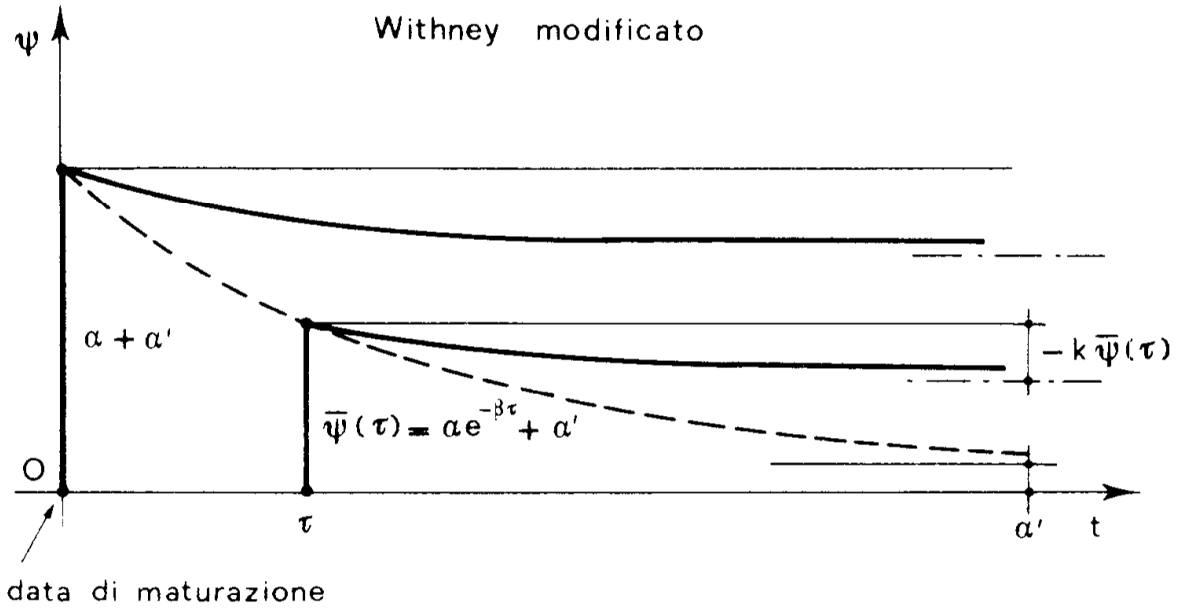


Figura 48

pari ad α' in $t = \tau$, e ad $\alpha'(1 - k)$ per $t = \infty$. La (549) è il nucleo di un conglomerato anziano, indipendente da τ , e con valore asintotico finito (fig. 48).

Il fattore k regola il recupero. Se $k = 0$, è

$$\psi(\tau, t) = \alpha e^{-\beta\tau} + \alpha',$$

funzione della sola τ , che per $\alpha' = 0$ coincide con la (524). Se $k = 1$, è invece

$$\psi(\tau, t) = (\alpha e^{-\beta\tau} + \alpha') e^{-\beta'(t-\tau)},$$

ed il valore asintotico (548) è pari a $-\bar{\psi}(\tau)$; il recupero dell'impronta è quindi totale.

La (544) può scriversi come segue:

$$\begin{aligned} \psi(\tau, t) = & (\alpha e^{-\beta\tau} + \alpha') (1 - k) + \\ & + k (\alpha e^{-\beta\tau} + \alpha') e^{-\beta't} e^{\beta'\tau} \end{aligned}$$

e quindi

$$\psi(\tau, t) = g(\tau) + h(\tau) \cdot k(t) \quad (550)$$

ove

$$g(\tau) = (\alpha e^{-\beta\tau} + \alpha') (1 - k) \quad (551)$$

$$h(\tau) = k (\alpha e^{-\beta\tau} + \alpha') e^{\beta'\tau}$$

$$k(t) = e^{-\beta't}.$$

La (544) può quindi porsi sotto l'aspetto (530). Può anche scriversi

$$\psi(\tau, t) = g(\tau) + f(\tau) \cdot r(t - \tau) \quad (552)$$

ove

$$f(\tau) = k(\alpha e^{-\beta\tau} + \alpha') \tag{553}$$

$$r(t - \tau) = e^{-\beta'(t-\tau)},$$

e cioè la (544) può porsi sotto l'aspetto (532).

Naturalmente la (544) è utile soprattutto come modello per lo studio degli effetti dei vari fattori, attraverso la variazione delle cinque costanti $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ e k ; infatti le leggi sono tutte di carattere esponenziale.

9. Gli effetti del fluage a deformazione imposta.

Finora si è esaminato il caso del provino in regime monoassiale, sotto una tensione $\sigma(t)$ assegnata. Si consideri adesso un provino, in regime monoassiale, ma al quale sia imposta la legge temporale della ϵ ; in particolare, una ϵ_c al tempo t_c , che varia poi nel tempo con una legge temporale derivabile

$$\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < t_c \\ \epsilon_c g(t) & \text{se } t \geq t_c \end{cases} \tag{554}$$

con la condizione

$$g(t_c) = 1. \tag{555}$$

La $\epsilon(t)$ genera una $\sigma(t)$ tale che

$$\sigma(t_c) = E(t_c) \cdot \epsilon_c = \sigma_c ; \tag{556}$$

la (519) conduce a scrivere

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t)} + \frac{1}{E} \int_{t_c}^t \sigma(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau. \tag{557}$$

Ponendo

$$\sigma(t) = \sigma_c h(t) \quad (558)$$

ove

$$h(t_c) = 1 \quad (559)$$

la (557) si scrive

$$h(t) + \frac{E(t)}{E} \int_{t_c}^t h(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau = \frac{E(t)}{E(t_c)} g(t), \quad (560)$$

che è una *equazione integrale di Volterra* nella funzione incognita $h(t)$.

Se il nucleo è alla Withney, e si pone $E = \text{cost}$, la (560) si scrive

$$h(t) + \alpha \int_{t_c}^t h(\tau) e^{-\beta\tau} d\tau = g(t). \quad (561)$$

Derivando rispetto a t la (561) porge

$$\frac{dh}{dt} + \alpha h(t) e^{-\beta t} = \frac{dg}{dt}, \quad (562)$$

equazione differenziale lineare del primo ordine nella funzione $h(t)$.

Se la $\epsilon(t)$ è costante, e cioè $g(t) = 1$, la (562) si scrive

$$\frac{dh}{dt} = -\alpha e^{-\beta t} h(t); \quad (563)$$

da questa si trae

$$\frac{dh}{h} = -\alpha e^{-\beta t} dt,$$

ed integrando

$$\ln h = \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t} + k$$

$$h = e^{\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t} + k} = C e^{\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t}} \quad (564)$$

Per la (559) si ha

$$1 = C e^{\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}}$$

da cui

$$C = e^{-\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} ;$$

la (564) si scrive quindi come segue

$$h = e^{-\frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t})} \quad (565)$$

E' quindi, per $\epsilon_c = \text{cost}$,

$$\sigma(t) = \sigma_c e^{-\frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t})} \quad (566)$$

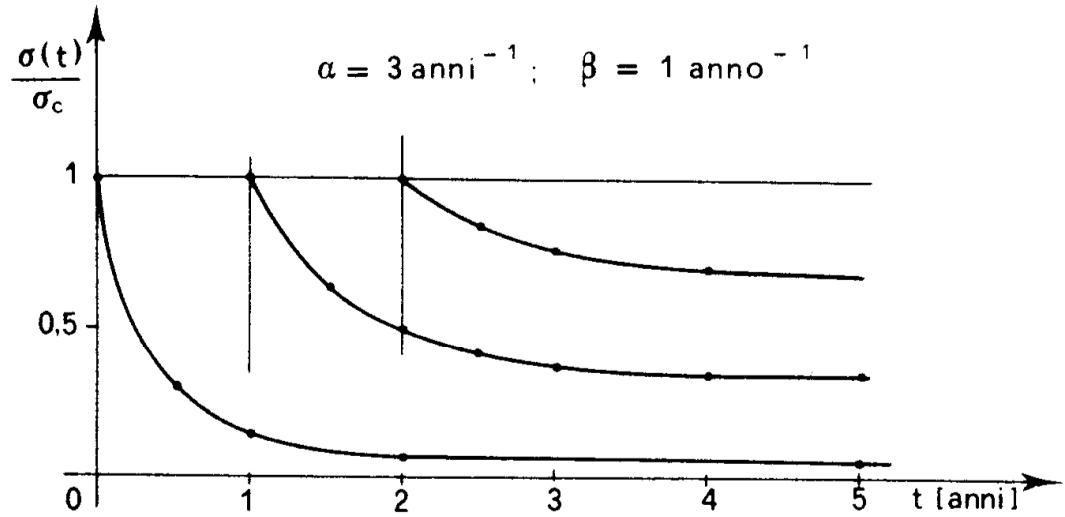
Per $t = t_c$ è $\sigma = \sigma_c$; per $t = \infty$ è

$$\sigma_\infty = \sigma_c e^{-\frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} ; \quad (567)$$

se poi $t_c = 0$, è

$$\sigma_{o\infty} = \sigma_c e^{-\frac{\alpha}{\beta}} . \quad (568)$$

Nella fig. 49 sono riportati i diagrammi della (566) per $\alpha = 3 \text{ anni}^{-1}$ e $\beta = 1 \text{ anno}^{-1}$.



$t \backslash t_c$	0	1	2
0	1		
0,5	0,307		
1	0,150	1	
1,5	0,097	0,648	
2	0,075	0,498	1
2,5	0,064	0,424	0,852
3	0,058	0,385	0,773
3,5	0,054	0,363	0,729
4	0,053	0,350	0,704
4,5	0,051	0,343	0,689
5	0,051	0,338	0,680
∞	0,050	0,332	0,666

Figura 49

Per $\alpha = 1, 2, 3 \text{ anni}^{-1}$ si hanno i seguenti valori di $\sigma_{0\infty} / \sigma_c$.

α	$\sigma_{0\infty} / \sigma_c$	
1	0,368	
2	0,135	(569)
3	0,050	

La tensione derivante da una ϵ_c costante imposta (e cioè da una distorsione $\bar{\epsilon} = \epsilon_c$) decresce quindi rapidamente nel tempo; in un caso estremo ($\alpha = 3 \text{ anni}^{-1}$, $t_c = 0$, $t = \infty$) essa si riduce ad $1/20$, e cioè praticamente si annulla.

Dal confronto tra i diagrammi delle fig. 45 (σ costante) e 49 (ϵ costante) si osserva innanzitutto la dualità del comportamento; ma più importante è constatare che la velocità del fenomeno è molto più forte nel secondo caso che nel primo. Dopo un anno, la ϵ (a σ costante) è aumentata del 290%, la σ (ad ϵ costante) è diminuita dell'850%. Ciò dimostra che per determinare sperimentalmente il valore di α è più conveniente operare a deformazione costante che a tensione costante.

10. Il primo teorema della viscosità lineare.

La relazione (519)

$$d\epsilon(\tau, t) = \frac{\sigma(\tau)}{E} \Psi(\tau, t) d\tau \quad (570)$$

è stata ottenuta considerando regimi di tensione monoassiali. Essa può anche scriversi come segue

$$d\epsilon(\tau, t) = \epsilon_e(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau, \quad (571)$$

avendo indicato con ϵ_e la deformazione elastica corrispondente a $\sigma(\tau)$ ed al modulo E di riferimento. La (571) può estendersi ai regimi di tensione triassiali, se il materiale è linearmente elastico ed isotropo, scrivendo

$$d\mathbf{D}(\tau, t) = \mathbf{D}_e(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau \quad (572)$$

ove \mathbf{D} è il tensore della deformazione, e \mathbf{D}_e il tensore della deformazione elastica corrispondente al tensore delle tensioni $\mathbf{T}(\tau)$, e ad un tensore elastico \mathbf{E} di riferimento.

Siano poi valide le altre ipotesi a sostegno del principio di sovrapposizione degli effetti classico, e cioè

a) vincoli lisci e bilaterali;

b) trascurabilità delle derivate prime degli spostamenti:

$$\frac{\partial s_h}{\partial x_k} \ll 1 \quad \forall h, k ;$$

c) assenza di forze assiali.

Sotto le ipotesi a, b, c , un insieme di forze F_i che agisca dal tempo τ al tempo $\tau + d\tau$ (*impulso di forza*) provoca in tale intervallo le stesse σ , quale che sia l'eventuale altro insieme di forze F_j che agisse anch'esso sulla struttura; e quindi le stesse ϵ_{oe} , e la stessa impronta viscosa. E' questo il *principio di sovrapposizione degli effetti differiti*, basato sulla linearità del nucleo, e cioè sulla indipendenza della $\Psi(\tau, t)$ della (572) dalle tensioni. Esso permette di studiare separatamente gli effetti di più cause deformanti.

Si faccia, in più, l'ipotesi che tensore elastico \mathbf{E} e nucleo Ψ siano indipendenti dal punto, e cioè che la struttura sia *a viscosità omogenea*. Se la struttura è isostatica, la viscosità non altera i valori delle tensioni. Ma ciò è vero anche se la struttura è iperstatica. Ed infatti le deformazioni viscosse generate dalle forze $F_i(\tau) d\tau$ sono, per l'indipendenza di \mathbf{E} e di $\Psi(\tau, t)$ dal punto, uguali a quelle elastiche, a meno di un fattore; e ciò sia alla data τ che al generico tempo $t > \tau$. Ne deriva che anche gli spostamenti viscosi sono uguali, a meno di un fattore, a quelli elastici provocati dalle $F_i(\tau)$; quindi rispettano la congruenza, e perciò non alterano i valori delle iperstatiche.

Si può quindi enunciare il primo teorema della viscosità lineare: "Se una struttura è omogenea anche sotto il profilo viscoso, e se sono validi i presupposti del principio di sovrapposizione classico, ad un insieme di forze $F_i(t)$ si associano le reazioni iperstatiche, e quindi le tensioni, calcolabili in fase elastica sotto le $F_i(t)$ ". La viscosità quindi non altera lo stato tensionale generato da forze applicate. Ciò cade in difetto se le ipotesi a, b, c non sono verificate, e se il materiale non è omogeneo. A tale riguardo, la cedibilità elastica dei vincoli equivale ad una disomogeneità viscosa. L'esempio della fig. 50 è chiarificatore. La trave AB è incastrata, con incastro elasticamente cedevole in B :

$$\varphi_B(t) = -c_B \pi_B(t);$$

nell'intervallo dt susseguente a t la rotazione viscosa dell'estremità B della trave non è accompagnata dalla stessa rotazione viscosa nel vincolo; in più, può dirsi che la rotazione viscosa dell'estremo

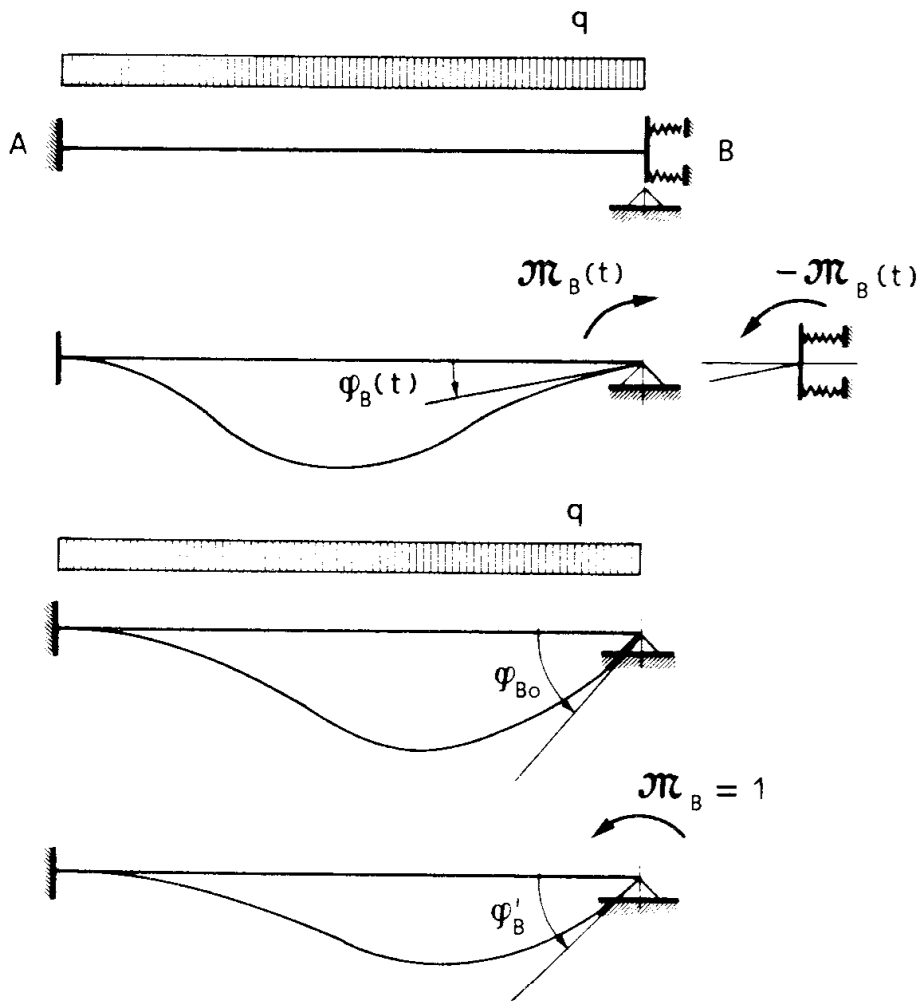


Figura 50

B è dello stesso segno di quella elastica generata dalle q , e cioè positiva per qualsiasi impulso $q d\tau$ precedente t . Quindi in ogni intervallo dt si genera una variazione $d\pi_B$ negativa, e il regime tensionale tende a quello che sarebbe generato dal carico q sulla trave con incastro perfetto. Il valore in fase elastica π_{B0} di π_B è dato

dall'equazione di congruenza

$$\varphi_{B_0} + \mathfrak{M}_{B_0} \varphi'_B = - \mathfrak{M}_{B_0} c_B \quad (573)$$

da cui

$$\mathfrak{M}_{B_0} = - \frac{\varphi_{B_0}}{\varphi'_B + c_B} . \quad (574)$$

Se si adotta un nucleo alla Withney (524) nel tempo $d\tau$ l'uguaglianza delle variazioni di φ_B calcolate sulla trave e sul vincolo porta a scrivere

$$\begin{aligned} & \varphi_{B_0} \alpha e^{-\beta\tau} d\tau + \mathfrak{M}_B(\tau) \varphi'_B \alpha e^{-\beta\tau} d\tau + \\ & + \frac{d\mathfrak{M}_B}{d\tau} d\tau \varphi'_B = - \frac{d\mathfrak{M}_B}{d\tau} d\tau c_B \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{d\mathfrak{M}_B}{d\tau} (\varphi'_B + c_B) + \mathfrak{M}_B(\tau) \varphi'_B \alpha e^{-\beta\tau} = - \varphi_{B_0} \alpha e^{-\beta\tau} \quad (575)$$

e ancora (574)

$$\frac{d\mathfrak{M}_B}{d\tau} + \mathfrak{M}_B(\tau) \frac{\varphi'_B}{\varphi'_B + c_B} \alpha e^{-\beta\tau} = \mathfrak{M}_{B_0} \alpha e^{-\beta\tau} . \quad (575)$$

L'integrale generale dell'omogenea associata alla (575) è

$$\mathfrak{M} = C e^{\frac{\varphi'_B}{\varphi'_B + c_B} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t}}$$

mentre un integrale particolare è

$$\pi = \pi_{Bo} \frac{\varphi'_B + c_B}{\varphi'_B} .$$

Quindi l'integrale (575) è

$$\pi(t) = C e^{-\frac{\varphi'_B}{\varphi'_B + c_B} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t}} + \pi_{Bo} \frac{\varphi'_B + c_B}{\varphi'_B} .$$

La condizione

$$\pi(t_c) = \pi_{Bo}$$

porta a definire C :

$$C = -\pi_{Bo} \frac{c_B}{\varphi'_B} e^{-\frac{\varphi'_B}{\varphi'_B + c_B} \frac{\alpha}{\beta} e^{-\beta t_c}} ,$$

e quindi

$$\pi(t) = \pi_{Bo} \left[\frac{\varphi'_B + c_B}{\varphi'_B} - \frac{c_B}{\varphi'_B} e^{-\frac{\varphi'_B}{\varphi'_B + c_B} \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t})} \right] .$$

Si ha, per $t_c = 0$ e $t = \infty$,

$$\pi_{o\infty} = \pi_{Bo} \left[\frac{\varphi'_B + c_B}{\varphi'_B} - \frac{c_B}{\varphi'_B} e^{-\frac{\varphi'_B}{\varphi'_B + c_B} \frac{\alpha}{\beta}} \right] . \quad (576)$$

Per $c_B = 0$ è $\pi_{o\infty} = \pi_{Bo} = -\frac{\varphi_{Bo}}{\varphi'_B}$, e cioè il momento in fase

elastica per trave incastrata, cioè come ci si attende dal primo teorema. Per $\alpha = 0$ è $\mathfrak{M}_{o\infty} = \mathfrak{M}_{Bo}$, cioè il momento in fase elastica per la trave reale.

Per $\alpha \rightarrow \infty$, $\mathfrak{M}_{o\infty} \rightarrow \mathfrak{M}_{Bo} \frac{\varphi'_B + c_B}{\varphi'_B} = -\frac{\varphi_{Bo}}{\varphi'_B}$, e cioè ancora il momento elastico d'incastro perfetto.

11. Il secondo teorema della viscosità lineare.

Su una struttura iperstatica agiscono le distorsioni genericamente indicate con

$$\mu(s, t) = \mu^\circ(s) \cdot g(t), \quad (577)$$

ove

$$g(t_c) = 1.$$

Alla data t_c sono presenti le distorsioni $\mu^\circ(s)$, cui nel sistema principale si accompagnano gli spostamenti s_μ° e, in corrispondenza dei vincoli soppressi, gli spostamenti $s_{j\mu}^\circ$. Le reazioni iperstatiche X_j° sono fornite dal sistema

$$C x^\circ = -s_{j\mu}^\circ, \quad (578)$$

ove C è la matrice delle cedibilità; gli spostamenti generati dalle X_j° siano chiamati s_x° , sicché gli spostamenti totali sono dati da

$$s^\circ = s_\mu^\circ + s_x^\circ$$

Naturalmente è $s_{j\mu}^\circ + s_{jx}^\circ = 0$, per ogni j .

Nell'intervallo $t_c, t_c + dt$, sulla struttura isostatica si hanno gli spostamenti $s_\mu^\circ \frac{dg}{dt} dt$ per effetto della variazione $\mu^\circ(s) \frac{dg}{dt} dt$ della distorsione, gli spostamenti $s_x^\circ \Psi(t_c, t_c + dt) dt$ inelastici, e gli spostamenti elastici dovuti alle variazioni dX_j . Chiamando ds_μ e ds_p i

primi due, essi risultano proporzionali agli s_μ ed agli s_x , e quindi si può scrivere

$$ds_\mu = k_\mu s_\mu^\circ$$

$$ds_p = k_p s_x^\circ .$$

Le dX_j sono fornite dal sistema

$$C dx = -k_\mu s_{j\mu}^\circ - k_p s_{jx}^\circ .$$

Gli spostamenti $s_{j\mu}^\circ$ ed s_{jx}° sono uguali e contrari, e quindi

$$C dx = -(k_\mu - k_p) s_{j\mu}^\circ . \quad (579)$$

Dal confronto con la (578) si trae che le dX_j sono proporzionali alle X_j° , e quindi gli spostamenti elastici ds_e da esse provocati sono proporzionali agli s_x° . Può porsi cioè

$$dX_j = (k_\mu - k_p) X_j \quad (580)$$

$$ds_e = (k_\mu - k_p) s_x^\circ .$$

Si ha quindi, in ogni punto,

$$\begin{aligned} ds &= k_\mu s_\mu^\circ + k_p s_x^\circ + (k_\mu - k_p) s_x^\circ = \\ &= k_\mu (s_\mu^\circ + s_x^\circ) = k_\mu s^\circ = s^\circ \frac{dg}{dt} dt . \end{aligned}$$

Nell'intervallo $t_c, t_c + dt$ sorgono quindi le variazioni dX_j propor-

zionali alle X_j^0 , mentre le variazioni ds degli spostamenti sono quelle che si avrebbero se la viscosità non esistesse. Ripetendo il ragionamento per gli intervalli successivi, si può enunciare il secondo teorema della viscosità lineare: “Se una struttura è omogenea anche sotto l’aspetto viscoso, e se sono validi i presupposti del principio di sovrapposizione degli effetti, ad un insieme di distorsioni si associano, alla data t , gli spostamenti calcolabili in fase elastica per i valori delle distorsioni al tempo t ”. In particolare, se le distorsioni sono costanti gli spostamenti restano invariati nel tempo. Per la (580) si può porre, se vale la (577),

$$X_j(t) = X_j^0 \cdot h(t), \quad (581)$$

ove

$$h(t_c) = 1.$$

Quanto detto per le distorsioni vale anche per i cedimenti vincolari anelastici.

12. Gli spostamenti dovuti alle forze, le tensioni dovute alle distorsioni.

Siano valide le ipotesi a sostegno dei due teoremi della viscosità lineare. Sulla struttura agiscono, a partire da $t = t_c$, le forze

$$F_i(t) = F_i \cdot g(t),$$

ove

$$g(t_c) = 1.$$

Per il primo teorema, anche le reazioni variano con la legge $g(t)$:

$$X_j(t) = X_j \cdot g(t).$$

Le deformazioni elastiche sono quelle collegate con le forze F_i ; se alle forze F_i , e dipendentemente dal tensore elastico E di riferi-

mento, si collegano gli spostamenti s_e , e se la legge di variazione temporale di E è

$$E(t) = e(t) \cdot E,$$

gli spostamenti elastici sono

$$s_e \frac{g(t)}{e(t)}$$

e gli spostamenti (519) sono

$$s(t) = s_e \frac{g(t)}{e(t)} + s_e \int_{t_c}^t g(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau. \quad (582)$$

Nel caso di Withney, e per $E = \text{cost}$ si ha

$$s(t) = s_e \left[g(t) + \alpha \int_{t_c}^t g(\tau) e^{-\beta\tau} d\tau \right]. \quad (583)$$

Agisca invece un insieme di distorsioni (577)

$$\mu(s, t) = \mu^\circ(s) \cdot g(t), \quad (584)$$

ove

$$g(t_c) = 1.$$

Siano s_μ° gli spostamenti generati sulla struttura isostatica dalle distorsioni μ° (indipendenti da E) ed X_j° le reazioni iperstatiche calcolabili in fase elastica. Si può porre (581)

$$X_j(t) = X_j^\circ \cdot h(t). \quad (585)$$

Gli spostamenti $s_{jx}(t)$ sono d'altra parte forniti da

$$s_{jx}(t) = -s_{j\mu}(t) = -s_{j\mu}^{\circ} \cdot g(t) = s_{jx}^{\circ} \cdot g(t).$$

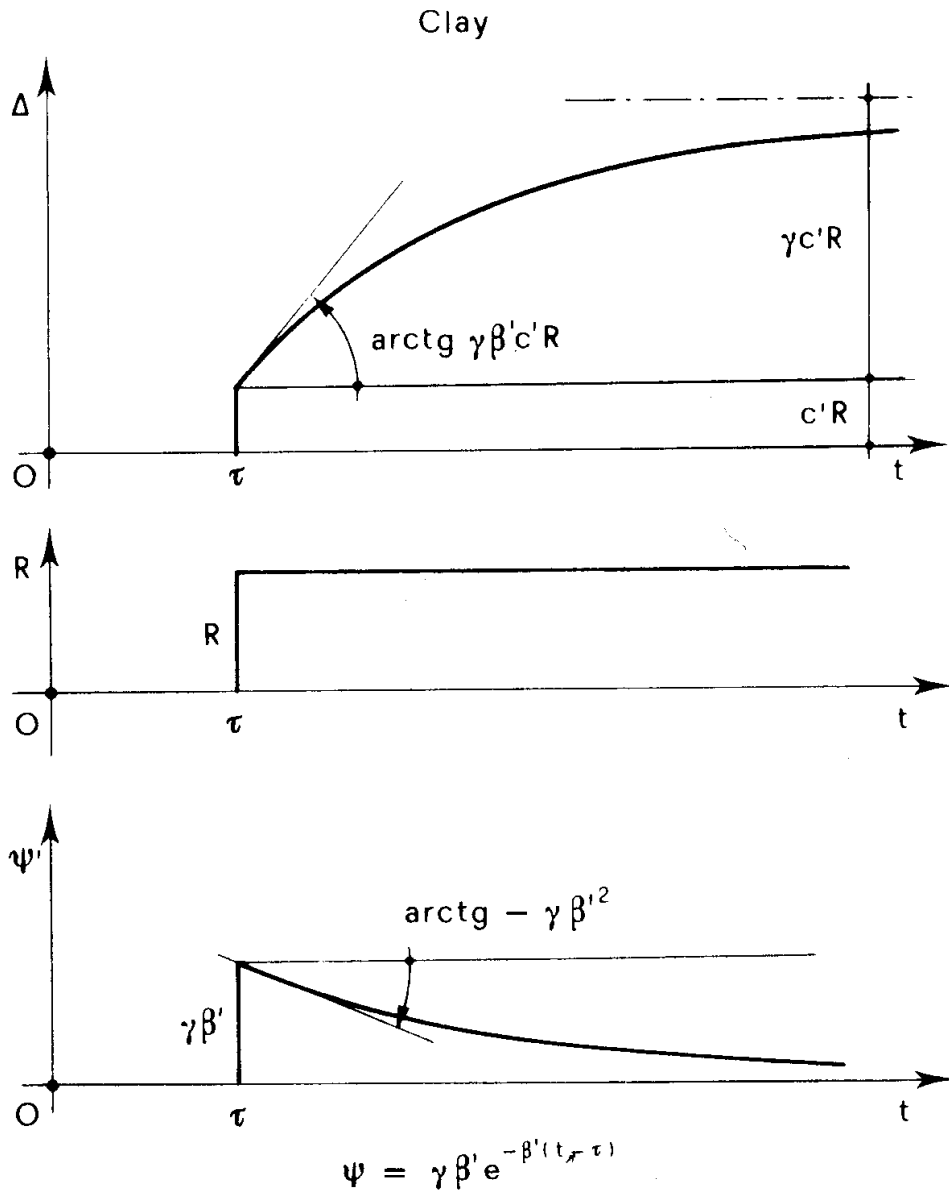


Figura 51

La (582) quindi si scrive

$$s_{jx}^{\circ} \cdot g(t) = s_{jx}^{\circ} \frac{h(t)}{e(t)} + s_{jx}^{\circ} \int_{t_c}^t h(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau$$

da cui

$$h(t) + e(t) \int_{t_c}^t h(\tau) \Psi(\tau, t) d\tau = e(t) \cdot g(t), \quad (586)$$

equazione di Volterra identica alla (560). Nel caso di Withney, e per E costante, la (586) si scrive

$$h(t) + \alpha \int_{t_c}^t h(\tau) e^{-\beta\tau} d\tau = g(t), \quad (587)$$

identica alla (561). Quindi vale, per lo studio della $h(t)$, tutto quanto detto al paragrafo 9; in particolare, i diagrammi della fig. 49 rappresentano il rapporto $\frac{X_j(t)}{X_j^0}$

$$\frac{X_j(t)}{X_j^0} = e^{-\frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t_c} - e^{-\beta t})} \quad (588)$$

tra il valore della generica reazione al tempo t , e quello calcolabile sotto le μ^0 in fase elastica, per μ_0 costante.

13. Il cedimento delle fondazioni .

Il caso (588), riportato nella fig. 49, è relativo ad una distorsione costante nel tempo; tali sono per esempio i cedimenti che si verificano al disarmo (o prima), e le distorsioni correttive impresse mediante martinetti. Naturalmente l'effetto viscoso, tanto cospicuo da poter addirittura quasi annullare lo stato di coazione, è gradito nel primo caso, e deprecato nel secondo.

Nel caso dei cedimenti al disarmo, conviene anticipare quest'ultimo quanto possibile, compatibilmente con la resistenza del conglomerato; appare cioè poco intelligente una prescrizione troppo ritardatrice del disarmo, quale spesso si incontra nelle norme, o peggio in alcuni anziani, troppo anziani professionisti direttori di cantiere.

Va anche detto, però, che ciò vale solo se si prevedono inevitabili cedimenti; che occorre far di tutto per evitarli, e, se ciò è impossibile, per valutarli sia pure di massima. Così pure, non va perso di vista che, se è vero che il quadro tensionale da cedimento praticamente si può anche verificare nel tempo, è anche vero che inizialmente tale quadro è quello elastico; l'anticipazione del disarmo deve quindi essere accompagnata da un ben calcolato ritardo nell'applicazione dei carichi della sovrastruttura e dei carichi accidentali, almeno di quelli di servizio. Si deve anche tener presente che i carichi accidentali naturali – neve, vento, sismo, variazioni termiche – entrano necessariamente in gioco all'atto del disarmo, almeno in linea di ipotesi; e, d'altro canto, che nei riguardi delle condizioni di carico iniziali può essere tollerato un grado di sicurezza minore di quello che si esige durante la vita della struttura, o per lo meno di quello che si vuole una volta aperto l'esercizio. Nel caso delle distorsioni *correttive* il discorso è duale, nel senso che conviene siano protratte quanto più è possibile; se si può, si provvede alla possibilità della "ricarica", ma è sempre pericoloso ricorrere troppo a quella che gli antichi maestri chiamavano, con fine ironia, la "chirurgia delle strutture".

Se poi le distorsioni impresse sono usate a scopo di disarmo, come si praticava negli archi quando non erano ancora in atto le moderne tecniche di montaggio per conci – vedi ad esempio il già citato ponte di Plougastel – occorre distinguere ovviamente tra il caso in cui le distorsioni sono anche correttive, ed il contrario. Negli archi, una distorsione in chiave vale anche a compensare gli effetti dell'accorciamento assiale, e quindi è benefica; vale la pena, in questo caso, ritardare il disarmo. Ciò sempre che non si temano anche cedimenti. Già basta quanto detto per rendersi conto del grosso gioco della viscosità, del conseguente moltiplicarsi dei calcoli necessari, e del ruolo della probabilità in relazione alle combinazioni possibili di carichi accidentali e distorsioni; a ciò si aggiunga la pratica impossibilità di ottenere tempestivamente informazioni sulle costanti viscosse. Ne deriva un giustificato scetticismo su tutte le finzze di certa normativa e di certi "cultori" della normativa, ed un'ombra diffusa sulla reologia; norme e studi buoni a fornire motivi a posteriori, ma ben meno utili a chi deve risolvere in tempo reale i problemi del costruire. Come si è già detto, le tecniche moderne riducono di molto il pericolo del cedimento al disarmo. Resta, molto insidioso, il pericolo del cedimento protratto, caratteristico dei terreni argillosi; purtroppo su questi cedimenti la viscosità agisce in modo molto meno drastico.

La sorprendente analogia delle argille con l'acciaio, già incontrata nello studio della curva intrinseca (materiali alla Tresca), si conferma nell'ambito viscoso; il nucleo ereditario dell'argilla è infatti "del ciclo

chiuso", e cioè dipende dalla differenza $t - \tau$. Se una forza R costante è applicata alla data τ , si ha

$$\Delta(t) = c'R + \gamma c'R [1 - e^{-\beta'(t-\tau)}] ; \quad (589)$$

il cedimento è cioè inizialmente pari a $c'R$, e tende asintoticamente al valore $c'(1 + \gamma)R$ per $t \rightarrow \infty$ (fig. 51). La funzione fluage coincide quindi con il coefficiente di fluage, e si può scrivere

$$\varphi' = \gamma [1 - e^{-\beta'(t-\tau)}] , \quad (590)$$

ove $[\gamma] = [1]$.

La (521) quindi porta a scrivere l'espressione del nucleo viscoso, che coincide con il nucleo ereditario, essendo nulla la variazione della costante elastica c' :

$$\psi' = \gamma \beta' e^{-\beta'(t-\tau)} , \quad (591)$$

che coincide con la (573).

Alla data t_c del disarmo la reazione del vincolo su argilla ha il valore calcolabile in fase elastica

$$R_e = - \frac{s_0}{c + c'} \quad (592)$$

ove c e c' sono le cedibilità elastiche della trave e del terreno (fig. 52). Nella (592) s_0 è lo spostamento provocato dalle forze applicate in corrispondenza del vincolo; la reazione è positiva se diretta verso il basso.

Nei tempi $t > t_c$ il vincolo cede ulteriormente, e la reazione diminuisce in valore assoluto:

$$R(t) = R_e g(t) ;$$

ove

$$g(t_c) = 1 .$$

Per la (583), lo spostamento del punto vincolato, considerato appartenente alla trave, è

$$s(t) = s_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\beta} (e^{-\beta t} - e^{-\beta t_c}) \right] + c R_e \left[g(t) + \alpha \int_{t_c}^t g(\tau) e^{-\beta \tau} d\tau \right];$$

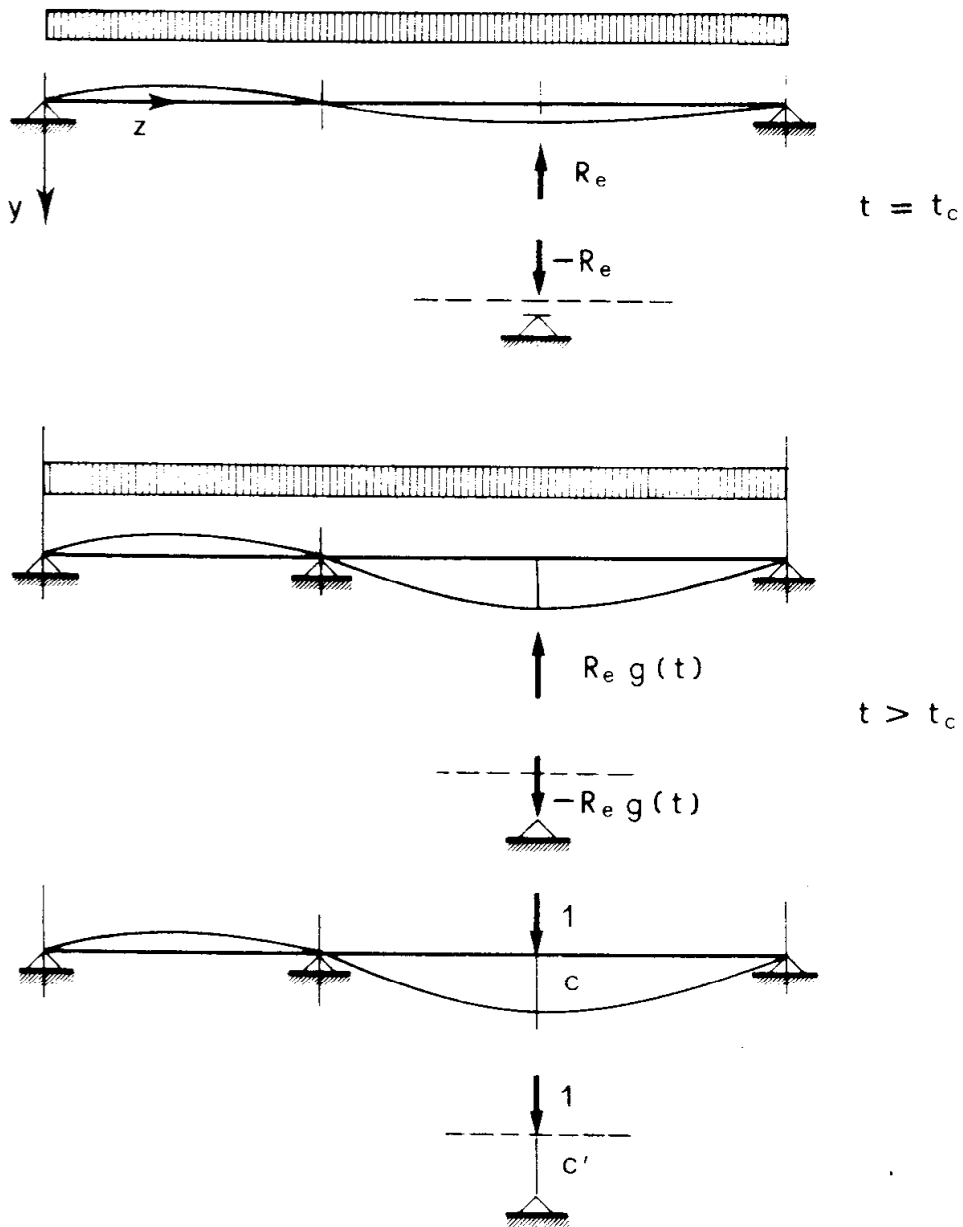


Figura 52