

## Capitolo secondo

### Analisi modale statica

#### 1. La cosiddetta instabilità di prima specie.

Si chiamano forze *assiali* applicate quelle per cui il lavoro  $L^*$  non contiene termini del primo ordine nelle coordinate lagrangiane. Quindi  $L^*$ , se si vuole tenerne conto – e si vedrà quanto ciò sia necessario – si presenta sotto l'aspetto

$$L^* = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c} , \quad (159)$$

ove  $\mathbf{B}$  è simmetrica, e dipende dalle forze assiali presenti sulla struttura. Si osserverà che se  $\mathbf{B}$  è definita positiva le forze assiali hanno carattere instabilizzante, nel senso che da sole possono rendere instabile la configurazione indeformata, ed in presenza di forze trasversali ne incrementano gli spostamenti.

E' quindi

$$P = -\frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c} \quad (160)$$

e l'energia potenziale totale, invece che nella forma (138), si presenta come segue

$$E_t = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c} . \quad (161)$$

ove  $\lambda$  è il moltiplicatore delle forze. Le condizioni di stazionarietà  $\frac{\partial E_t}{\partial \varphi_i} = 0$  si traducono nel sistema

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{c} = 0 , \quad (162)$$

e cioè ancora

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{c} = 0, \quad (163)$$

ove

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K}. \quad (164)$$

Il sistema (163) è identico al sistema (89), ma  $\tilde{\mathbf{K}}$  non è in genere simmetrica. Si dimostra però che se  $\tilde{\mathbf{K}}$  è simmetrizzabile, e cioè prodotto di una matrice simmetrica per un'altra simmetria e definita positiva (o negativa), le radici della *equazione secolare*

$$\det (\tilde{\mathbf{K}} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (165)$$

sono  $n$  radici reali positive (o negative); di tale esistenza, del resto, sarà data dimostrazione più innanzi.

Alle radici  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  della (165), e cioè agli *autovalori* della (165), corrispondono le soluzioni  $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n$  del sistema (162), e cioè gli *autovettori*; se  $\lambda_i$  è radice semplice,  $\mathbf{e}_i$  è definito a meno di una costante; se  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  coincidono, l'autovettore corrispondente è definito a meno di due costanti, come nella (93).

Se  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  sono due autovalori distinti,  $\mathbf{e}_i$  ed  $\mathbf{e}_j$  sono ortogonali. Infatti dalla (162) si ha

$$\mathbf{K} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{B} \mathbf{e}_i$$

$$\mathbf{K} \mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{B} \mathbf{e}_j$$

da cui

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{K} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i \quad (166)$$

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{K} \mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{B} \mathbf{e}_j ;$$

trasponendo la seconda, per la simmetria di  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{B}$  si ha

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{K} \mathbf{e}_i = \lambda_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i$$

e sottraendo dalla prima delle (166)

$$(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{e}_j^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i = 0$$

da cui

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i = 0 \quad (167)$$

e ancora, per la prima delle (166),

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{K} \mathbf{e}_i = 0, \quad (168)$$

*q.e.d.*.

Se  $\lambda_i$  e  $\lambda_j$  coincidono, le due costanti degli autovalori corrispondenti possono essere scelte in due coppie distinte tali da fornire due autovettori ortogonali tra loro e, per quanto detto prima, ortogonali a tutti i rimanenti.

I  $\lambda_i$  sono i *moltiplicatori critici* del dato insieme di forze assiali, gli  $\mathbf{e}_i$  le corrispondenti deformate di sbandamento, e cioè gli *n modi di sbandamento*. Essi, normalizzati, costituiscono una base ortonormale. Ad ogni insieme di forze assiali corrisponde una *matrice riduttiva*  $\mathbf{B}$ , una base ortonormale  $\mathbf{E}$ , ed un insieme  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  di autovalori; per essi vale la relazione (95)

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{E} = \mathbf{E} \Lambda \quad (169)$$

oppure

$$\mathbf{K} \mathbf{E} = \mathbf{B} \mathbf{E} \Lambda. \quad (170)$$

E' questo, indirettamente, un modo più generale di ricerca di una base ortonormale, di cui il procedimento illustrato nel par. 1.8 è il caso particolare per  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$

## 2. L'uso preventivo di una base ortonormale.

Se si parte da una base  $\mathbf{E}$  ortonormale si ha

$$P = -\frac{\lambda}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c} = -\frac{\lambda}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{E}^T \mathbf{B} \mathbf{E} \mathbf{x}$$

e cioè

$$P = -\lambda \mathbf{x}^T \mathbf{B}' \mathbf{x} \quad (171)$$

dove

$$\mathbf{B}' = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{B} \mathbf{E} . \quad (172)$$

E' perciò (132)

$$E_t = \epsilon \sum_1^n (x^i)^2 - \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{B}' \mathbf{x}$$

e cioè

$$E_t = \epsilon \mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{B}' \mathbf{x} ; \quad (173)$$

le condizioni  $\frac{\partial E_t}{\partial x^i}$  forniscono il sistema

$$\mathbf{B}' \mathbf{x} - \frac{\epsilon}{\lambda} \mathbf{x} = 0 . \quad (174)$$

La  $\mathbf{B}'$ , ottenuta attraverso la (172), è simmetrica; ed infatti

$$(\mathbf{E}^T \mathbf{B} \mathbf{E})^T = \mathbf{E}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{B} \mathbf{E} .$$

Quindi il (174) è del tipo (89), e ad esso si collega l'equazione secolare

$$\det \left( \mathbf{B}' - \frac{\epsilon}{\lambda} \mathbf{I} \right) = 0 \quad (175)$$

del tipo (89). Essendo  $\mathbf{B}'$  simmetrica, la (175) presenta  $n$  radici reali, positive se  $\mathbf{B}'$  è definita positiva; si ha conferma così dell'esistenza di  $n$  radici reali della (165). La (175) fornisce i moltiplicatori critici come inversi degli autovalori. Le soluzioni  $x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n$  del sistema (174) forniscono le deformate di sbandamento  $e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n$  attraverso le relazioni

$$e_i = E' x_i. \quad (176)$$

I modi  $e_i$  costituiscono, a loro volta, una base  $E$  che può essere normalizzata nel modo noto. Il vantaggio di operare sulla (175), rispetto alla (165), è quello di trattare con una matrice  $\mathbf{B}'$  simmetrica.

### 3. La contemporanea presenza di carichi assiali e trasversali.

La base  $E$  così determinata può essere usata, come una qualsiasi altra base ortonormale, per il calcolo in presenza di sole forze trasversali; ignorando quindi le forze assiali da cui  $E$  ha tratto origine. L'uso della  $E$  è però indispensabile se le forze trasversali agiscono in presenza delle forze assiali cui  $E$  è collegata.

Si ha in tal caso

$$E_t = \frac{1}{2} (c^T \mathbf{K} c - \lambda c^T \mathbf{B} c) - c^T f; \quad (177)$$

le condizioni di stazionarietà  $\frac{\partial E_t}{\partial c_i}$  portano al sistema

$$\mathbf{K} c - \lambda \mathbf{B} c = f. \quad (178)$$

Ponendo

$$c = \sum_i x^i e_i$$

il (178) si scrive

$$\sum_i x^i (\mathbf{K} e_i - \lambda \mathbf{B} e_i) = f$$

e, per (162) ,

$$\sum_i x^i (\lambda_i \mathbf{B} \mathbf{e}_i - \lambda \mathbf{B} \mathbf{e}_i) = \mathbf{f} .$$

Premoltiplicando per  $\mathbf{e}_j^T$  si ha

$$\sum_i x^i (\lambda_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i - \lambda \mathbf{e}_j^T \mathbf{B} \mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_j^T \mathbf{f}$$

e, per le (167), e (130) ,

$$x^j (\lambda_j - \lambda) \mathbf{e}_j^T \mathbf{B} \mathbf{e}_j = q_j . \quad (179)$$

Poiché la base è normalizzata, si può scrivere

$$\frac{1}{2} \mathbf{e}_j^T \mathbf{K} \mathbf{e}_j = \epsilon$$

e, per la (166) ,

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{B} \mathbf{e}_j = \frac{2\epsilon}{\lambda_j} . \quad (180)$$

Quindi la (179) si traduce (130) in

$$x^i (\lambda_i - \lambda) \frac{2\epsilon}{\lambda_i} = q_i$$

da cui

$$x^i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} \frac{q_i}{2\epsilon} . \quad (181)$$

La (181) è identica alla (134), ove ci si riferisca alla stessa base, e cioè all'insieme dei modi collegati con le forze assiali presenti sulla struttura.

La (181) si scrive

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\epsilon} \Lambda^* \mathbf{q} \quad (182)$$

ove

$$\Lambda^* = \begin{vmatrix} \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\lambda_n}{\lambda_n - \lambda} \end{vmatrix} \quad (183)$$

e quindi la matrice colonna delle coordinate lagrangiane è

$$\mathbf{c} = \mathbf{E} \mathbf{x} = \frac{\mathbf{E}}{2\epsilon} \Lambda^* \mathbf{q} . \quad (184)$$

Il numero  $\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda}$  è il *coefficiente amplificativo* del modo  $i$ -esimo, e diviene  $\infty$  per  $\lambda = \lambda_i$ . Naturalmente, la trattazione è svolta nell'ipotesi di piccoli spostamenti, e quindi è valida solo se il valore di  $\lambda$  è tale da rispettare questa ipotesi.  $\Lambda^*$  è la *matrice di amplificazione*.

La situazione che si è esaminata — carichi assiali e carichi trasversali coesistenti — è quella che in realtà interessa, ogni qualvolta si presenta un problema di instabilità euleriana, o di prima specie; questa va trattata assegnando delle forze trasversali o delle eccentricità fittizie, a simulazione delle inevitabili imperfezioni, e imponendo una limitazione agli spostamenti. Per il fatto stesso che esiste tale limitazione, è da ritenersi valida l'ipotesi di piccoli spostamenti, limitata però all'aspetto geometrico della questione; quindi linearità delle relazioni, ma introduzione del prodotto del moltiplicatore  $\lambda$  delle forze per termini dello spostamento. In sintesi, si può parlare di “*situazioni semilineari*”. L'analisi fatta prende nome di *analisi modale statica*, per distinguerla dall'analisi modale dinamica, ad essa analiticamente analoga, e che si tratterà nel seguito.

La (181), così come la (134), permette di asserire che la configurazione connessa con il modo  $i$ -esimo è, a meno di  $\frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} \frac{1}{2\epsilon}$ ,

la linea d'influenza della coordinata controvariante  $x_i$ . A parità

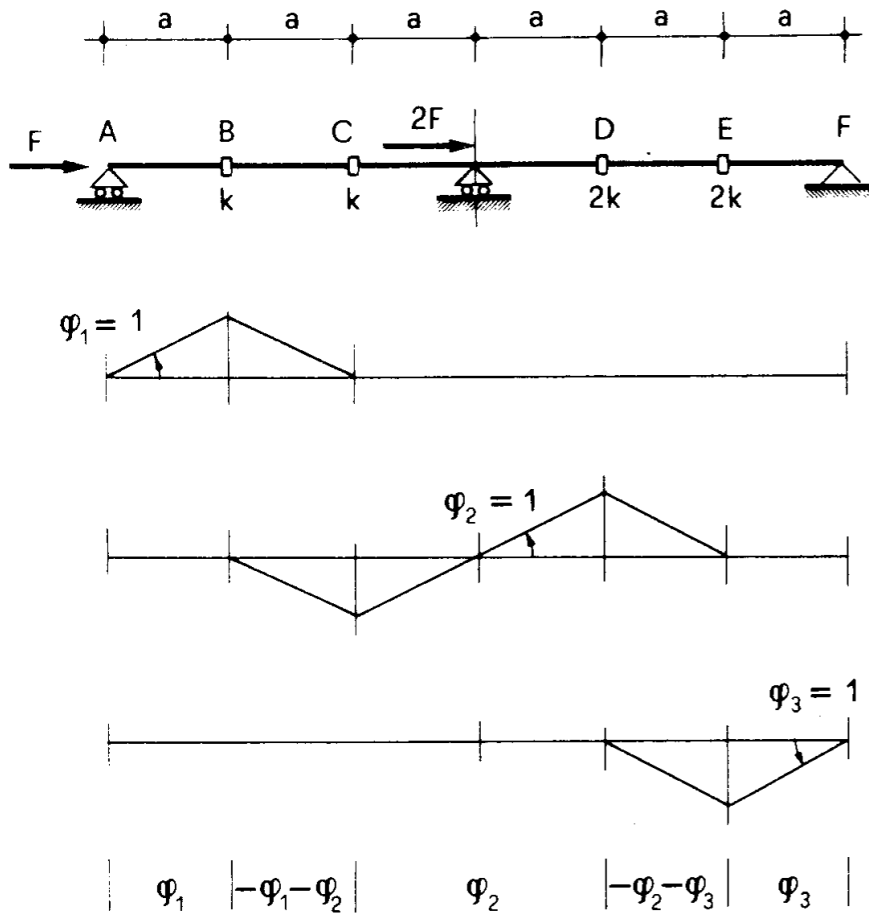


Figura 12

di carico assiale, vale integralmente il principio di sovrapposizione, e quindi la teoria delle linee d'influenza.

#### 4. Alcuni esempi .

a) La trave della fig. 3 sia soggetta ai carichi assiali che appaiono nella fig. 12. Risulta (159)

$$L^* = \frac{3Fa}{2} (\varphi_{CD}^2 + \varphi_{DE}^2 + \varphi_{EF}^2) + \frac{Fa}{2} (\varphi_{AB}^2 + \varphi_{BC}^2 + \varphi_{CD}^2) .$$



D'altro canto è

$$\varphi_{AB} = \varphi_1 ; \quad \varphi_{BC} = -\varphi_1 - \varphi_2 ; \quad \varphi_{CD} = \varphi_2$$

$$\varphi_{DE} = -\varphi_2 - \varphi_3 ; \quad \varphi_{EF} = \varphi_3 ,$$

e quindi

$$L^* = \frac{Fa}{2} (2\varphi_1^2 + 8\varphi_2^2 + 6\varphi_3^2 + 2\varphi_1\varphi_2 + 6\varphi_2\varphi_3)$$

da cui

$$P = -\frac{\lambda}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c}$$

ove

$$\mathbf{B} = Fa \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} . \quad (185)$$

La matrice  $\mathbf{K}$  è fornita dalla (140)

$$\mathbf{K} = k \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 15 & 8 \\ 0 & 8 & 10 \end{vmatrix} ,$$

e perciò (164)

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{K} = \frac{k}{Fa} \begin{vmatrix} 0,5417 & -0,0833 & 0,0417 \\ -0,0833 & 0,1666 & -0,0833 \\ 0,0417 & -0,0833 & 0,2083 \end{vmatrix} .$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 15 & 8 \\ 0 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \\
 & = \frac{k}{Fa} \begin{vmatrix} 2,3750 & 1,2500 & -0,2500 \\ 0,2500 & 1,5 & 0,5000 \\ -0,1250 & 0,5834 & 1,4166 \end{vmatrix} \quad (186)
 \end{aligned}$$

La (165)

$$\det(\tilde{\mathbf{K}} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

presenta le soluzioni

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 0,746 \frac{k}{Fa} \\
 \lambda_2 &= 1,897 \frac{k}{Fa} \\
 \lambda_3 &= 2,648 \frac{k}{Fa}
 \end{aligned} \quad (187)$$

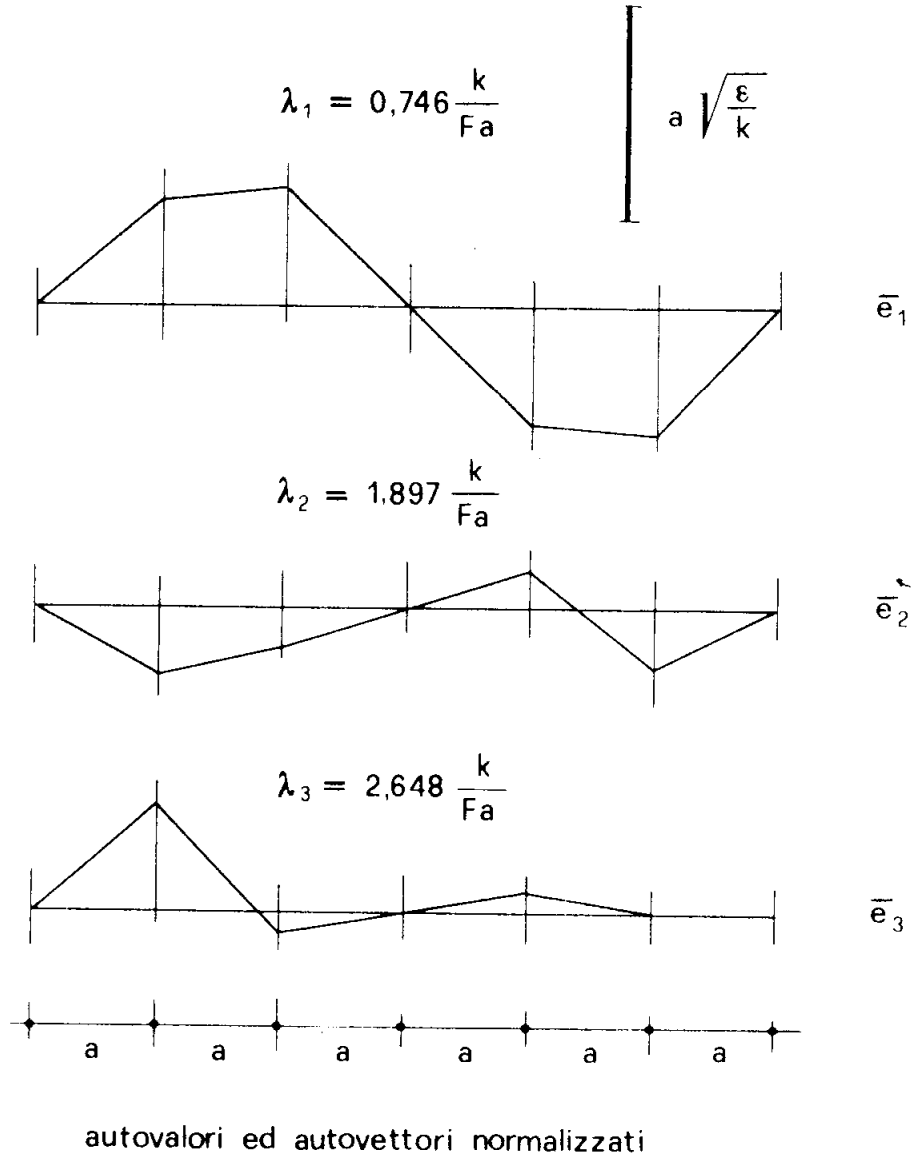
ed il sistema (163)

$$(\tilde{\mathbf{K}} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{c} = 0$$

è corrispondentemente soddisfatto dalle tre soluzioni normalizzate

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0,53215 & -0,29343 & 0,51729 \\ -0,57373 & 0,16809 & 0,11302 \\ 0,59888 & 0,28038 & 0,00121 \end{vmatrix} \quad (188)$$

Le tre configurazioni definite dalle tre colonne della (188) sono i modi di sbandamento sotto i tre moltiplicatori critici (187); essi sono riportati, in forma normalizzata, nella fig. 13.



*Figura 13*

Un carico trasversale  $q$  uniformemente distribuito agisca (fig. 14) sulla campata di sinistra. Utilizzando la base ortonormale (188) si ha

$$q = qa^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \begin{pmatrix} -1,1059 \\ 0,4615 \\ -0,4043 \end{pmatrix}; \quad (189)$$

le  $q_i$  sono, a meno di  $q$ , le aree delle tre deformate della fig. 13 limitate alla prima campata.

Si ha quindi (135)

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\epsilon} \mathbf{q} = \frac{qa^2}{\sqrt{\epsilon k}} \begin{vmatrix} -0,5530 \\ 0,2308 \\ -0,2022 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{E}\mathbf{x} = \frac{qa^2}{k} \begin{vmatrix} -0,466 \\ 0,333 \\ -0,266 \end{vmatrix}, \quad (190)$$

che coincidono con i valori (145).

Se assieme ai carichi  $q$  agiscono le forze assiali della fig. 12, con  $\lambda = 0,5 \frac{k}{Fa}$ , si ha (183)

$$\Lambda^* = \begin{vmatrix} 3,03 & 0 & 0 \\ 0 & 1,36 & 0 \\ 0 & 0 & 1,23 \end{vmatrix}$$

e quindi

$$\mathbf{x} = \frac{qa^2}{\sqrt{\epsilon k}} \begin{vmatrix} -1,6756 \\ 0,3139 \\ -0,2487 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{q} = \frac{qa^2}{k} \begin{vmatrix} -1,1124 \\ 0,9860 \\ -0,9158 \end{vmatrix}. \quad (191)$$

Nella fig. 14 sono disegnate le deformate corrispondenti alle (190) ed alle (191).

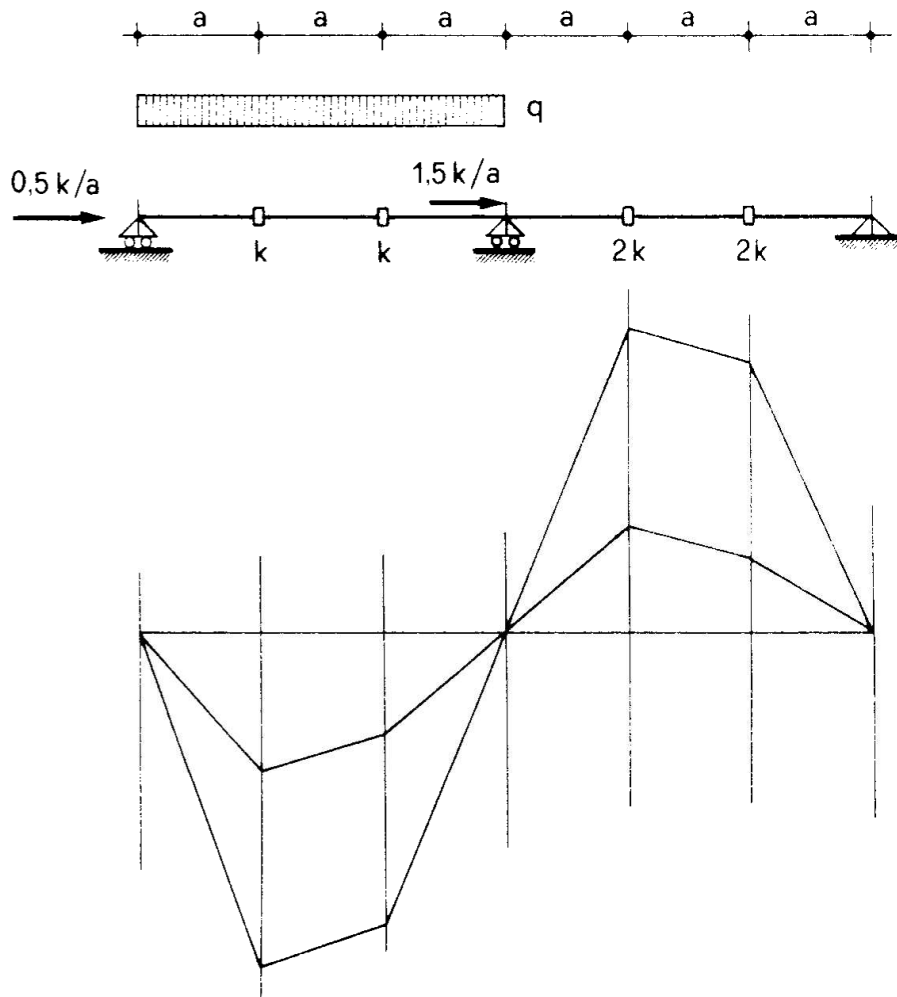


Figura 14

b) L'arco della fig. 9 è soggetto ad un carico  $g$  uniformemente distribuito su tutta la luce (fig. 15). Come già detto, le aree delle deformate corrispondenti alle due configurazioni della base naturale sono nulle. Se si considera infatti una di esse, per esempio la prima (fig. 9), si riconosce che questa non è altro che la linea d'influenza del momento flettente nella sezione  $B$  (o  $C$ ) per l'arco a tre cerniere  $ACD$  (o  $ABD$ ), ove  $D$  è una cerniera al suolo. L'asse è parabolico, e quindi il poligono funicolare di un carico uniforme esteso su tutta la luce e passante per  $ACD$  coincide con l'asse dell'arco; se ne trae che  $M_C$  è nullo, e poiché  $M_c$  è anche dato dal prodotto del carico uniforme per l'area sottostante, questa è nulla.

Per il carico suddetto quindi  $\mathbf{q} = 0$ , e quindi,  $P^{(1)} = 0$ ; esso è un carico assiale. Per determinarne gli autovalori occorre fornire il lavoro  $L^*$  del secondo ordine nelle due coordinate lagrangiane. Converrà, a ciò fare, assumere come coordinate lagrangiane gli angoli di rotazione dei due tratti estremi,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ ; tutto resta inalterato nelle formule da (152) a (158), se si pone  $v_1 = -\varphi_1 \frac{l}{4}$ ,  $v_2 = \varphi_2 \frac{l}{4}$ . Se un'asta rigida  $HK$  ruota di  $\varphi$  intorno ad  $H$ , le componenti dello spostamento di  $K$  sono

$$\begin{aligned} v &= -r \operatorname{sen}(\alpha + \varphi) + r \operatorname{sen} \alpha = \\ &= -r \cos \alpha \operatorname{sen} \varphi - r \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi + r \operatorname{sen} \alpha = \\ &= -a \operatorname{sen} \varphi + b(1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= r \cos(\alpha + \varphi) - r \cos \alpha = \\ &= -r \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi + r \cos \alpha \cos \varphi - r \cos \alpha = \\ &= -b \operatorname{sen} \varphi - a(1 - \cos \varphi). \end{aligned}$$

Fermandosi ai termini in  $\varphi^2$  nello sviluppo in serie di potenze, si ha ( $a > 0$ ,  $b > 0$ )

$$v = -a\varphi + b \frac{\varphi^2}{2} \quad (192)$$

$$w = -b\varphi - a \frac{\varphi^2}{2}. \quad (193)$$

Ciò premesso, si considera in una prima fase l'arco incastrato in  $A$ , e si calcolano (fig. 15) le  $v$  del secondo ordine, l'area del diagramma, ed i valori in  $E$  delle componenti del secondo ordine dello spostamento. Si ha, ponendo  $a = \frac{l}{4}$ ,

$$v_B^* = \frac{1}{2} \frac{3}{4} f \varphi_1^2 = \frac{3}{8} f \varphi_1^2$$

$$v_C^* = \frac{1}{2} \frac{f}{4} (-2\varphi_1 + \varphi_2)^2 = \frac{f}{8} (4\varphi_1^2 + \varphi_2^2 - 4\varphi_1 \varphi_2)$$

$$v_D^* = -\frac{1}{2} \frac{f}{4} (\varphi_1 - 2\varphi_2)^2 = -\frac{f}{8} (\varphi_1^2 + 4\varphi_2^2 - 4\varphi_1 \varphi_2)$$

$$v_E^* = -\frac{1}{2} \frac{3}{4} f \varphi_2^2 = -\frac{3}{8} f \varphi_2^2 .$$

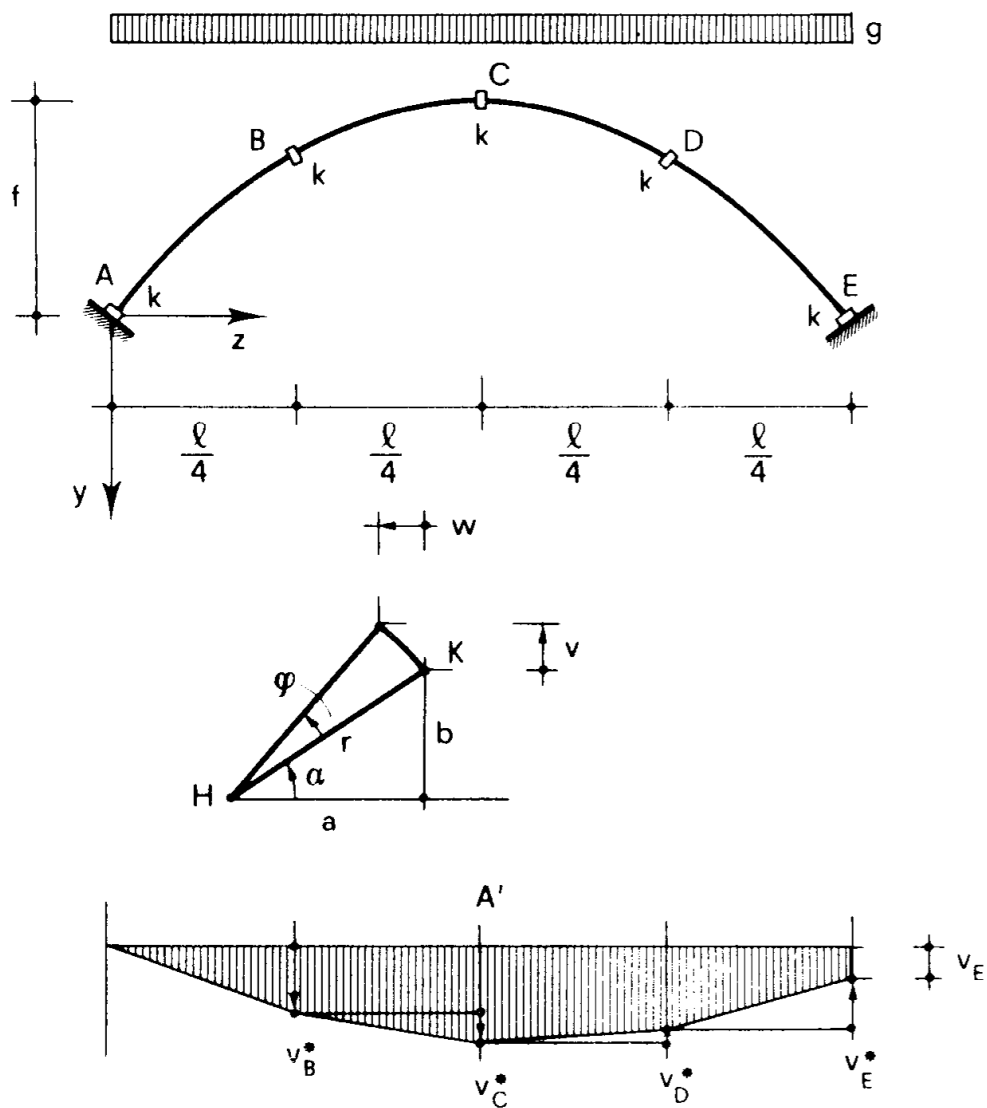


Figura 15

I suddetti valori sono le componenti verticali del secondo ordine degli spostamenti dell'estremo di destra della generica asta, considerando l'estremo di sinistra fisso. L'area  $A'$  è quindi fornita da

$$A' = v_B^* \left( \frac{a}{2} + 3a \right) + v_C^* \left( \frac{a}{2} + 2a \right) + v_D^* \left( \frac{a}{2} + a \right) + v_E^* \frac{a}{2}$$

e cioè

$$\begin{aligned} A' &= fa \left( \frac{19}{8} \varphi_1^2 - \frac{5}{8} \varphi_2^2 - \frac{1}{2} \varphi_1 \varphi_2 \right) = \\ &= \frac{fl}{16} (9,5 \varphi_1^2 - 2,5 \varphi_2^2 - 2 \varphi_1 \varphi_2). \end{aligned} \quad (194)$$

E' poi

$$\begin{aligned} v_E &= \Sigma v_i^* = f \left( \frac{3}{4} \varphi_1^2 - \frac{3}{4} \varphi_2^2 \right) = \\ &= \frac{f}{16} (12 \varphi_1^2 - 12 \varphi_2^2) \end{aligned} \quad (195)$$

$$\begin{aligned} w_E &= - \frac{1}{2} a [\varphi_1^2 + (-2\varphi_1 + \varphi_2)^2 + (\varphi_1 - 2\varphi_2)^2 + \varphi_2^2] = \\ &= - \frac{a}{2} (6\varphi_1^2 + 6\varphi_2^2 - 8\varphi_1\varphi_2) = \\ &= - \frac{l}{16} (12\varphi_1^2 + 12\varphi_2^2 - 16\varphi_1\varphi_2). \end{aligned} \quad (196)$$

Per ricondurre al rispetto del vincolo in  $E$  si adotti una deformata *qualsiasi*; per essa il principio dei lavori virtuali permette di scrivere (fig. 16)

$$gA'' + \frac{gl}{2} v_E + \frac{gl^2}{8f} w_E = 0$$



da cui

$$A'' = -\frac{l}{2} v_E - \frac{l^2}{8f} w_E,$$

e cioè

$$A'' = -\frac{fl}{16} (6\varphi_1^2 - 6\varphi_2^2) + \frac{l^3}{16f} (1,5\varphi_1^2 + 1,5\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2).$$

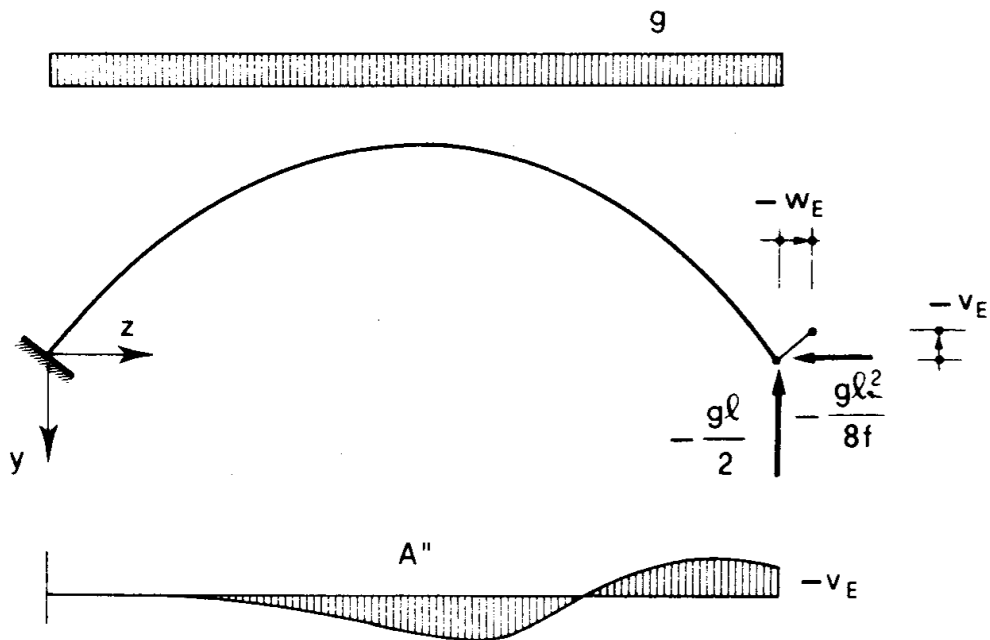


Figura 16

L'area totale è quindi [(194) e (197)]

$$A = \frac{fl}{16} (3,5\varphi_1^2 + 3,5\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2) + \frac{l^3}{16f} (1,5\varphi_1^2 + 1,5\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2).$$

(198)

Si può quindi scrivere

$$E_t = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c}$$

dove (152)

$$\mathbf{K} = \frac{k}{16} \begin{vmatrix} 320 & -240 \\ -240 & 320 \end{vmatrix} \quad (199)$$

e

$$\mathbf{B} = \frac{g}{16} \begin{vmatrix} 7fl + 3 \frac{l^3}{f} & -2fl - 2 \frac{l^3}{f} \\ -2fl - 2 \frac{l^3}{f} & 7fl + 3 \frac{l^3}{f} \end{vmatrix} \quad (200)$$

Si utilizza la base ortonormale (154)

$$\mathbf{E} = 4 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0,0423 & 0,1118 \\ -0,0423 & -0,1118 \end{vmatrix} \quad (201)$$

Risulta (172)

$$\mathbf{B}' = g \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} \left(0,0161 fl + 0,0089 \frac{l^3}{f}\right) & 0 \\ 0 & \left(0,0625 fl + 0,0125 \frac{l^3}{f}\right) \end{vmatrix} \quad (202)$$

Il sistema (174)

$$\mathbf{B}'\mathbf{x} - \frac{\epsilon}{\lambda}\mathbf{x} = 0 \quad (203)$$

presenta soluzioni non nulle se

$$\det(\mathbf{B}' - \lambda\mathbf{I}) = 0 ; \quad (204)$$

questa equazione ha le due radici ovvie

$$\lambda_1 = \frac{k}{gl^2} \frac{1}{0,0625 \frac{f}{l} + 0,0125 \frac{l}{f}} \quad (205)$$

$$\lambda_2 = \frac{k}{gl^2} \frac{1}{0,0161 \frac{f}{l} + 0,0089 \frac{l}{f}} .$$

Corrispondentemente le soluzioni del (203) sono

$$\lambda_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\lambda_2 \rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} .$$

Queste soluzioni, normalizzate, sono rispettivamente la seconda e la prima colonna della (201):

$$\mathbf{e}_1 = 4 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0,1118 \\ 0,1118 \end{vmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = 4 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0,0423 \\ -0,0423 \end{vmatrix} \quad (206)$$

e sono disegnate nella fig. 10. La prima è antisimmetrica, la seconda simmetrica.

Il denominatore di  $\lambda_1$  e di  $\lambda_2$  si presenta sotto l'aspetto

$$a \frac{f}{l} + b \frac{l}{f} = ax + \frac{b}{x}$$

$$\lambda_1 g = \alpha_1 \frac{k}{\ell^2}$$

$$\lambda_2 g = \alpha_2 \frac{k}{\ell^2}$$

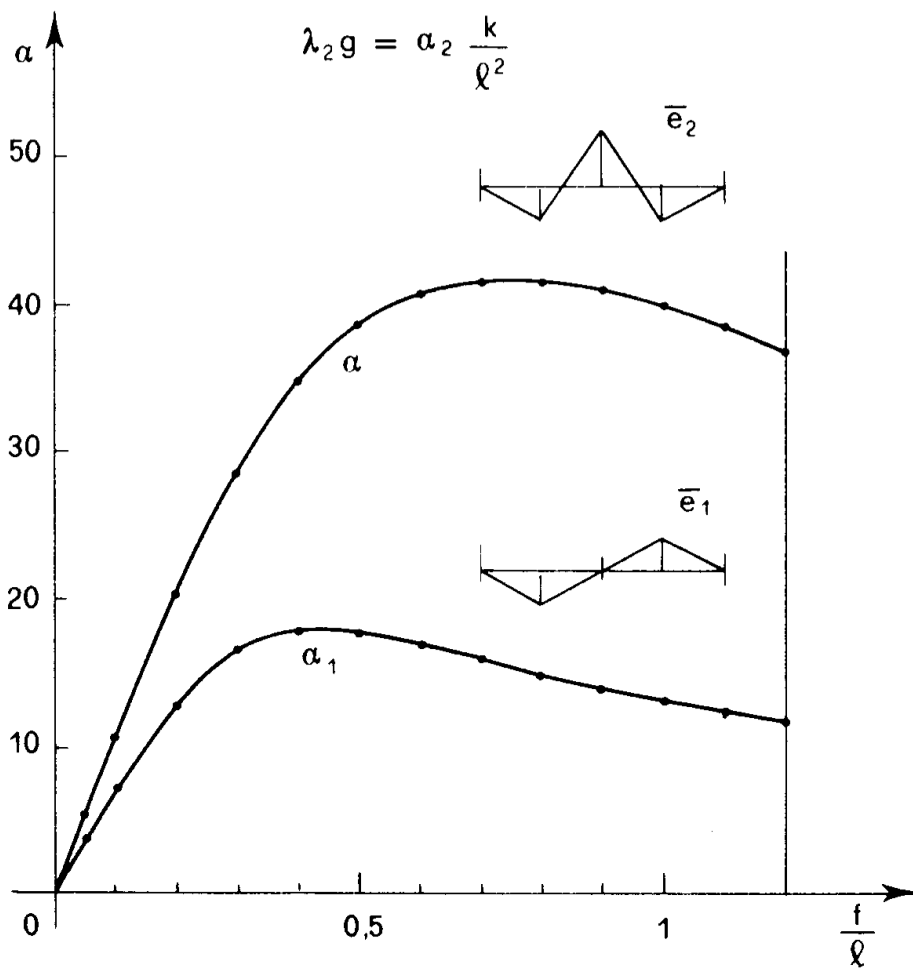


Figura 17

che presenta estremo per

$$a - \frac{b}{x^2} = 0$$

e cioè per

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Quindi  $\lambda_1$  è max per  $\frac{f}{l} = 0,447$ , e  $\lambda_2$  per  $\frac{f}{l} = 0,743$ .

Nella tabella sono riportati i valori  $\lambda_1 g$  e  $\lambda_2 g$  per vari valori del ribassamento, e nella fig. 17 il relativo diagramma; i valori di  $\lambda_1 g$  e  $\lambda_2 g$  sono posti sotto la forma

$$\lambda_1 g = \alpha_1 \frac{k}{l^2} \tag{207}$$

$$\lambda_2 g = \alpha_2 \frac{k}{l^2}$$

$f/l$	$\alpha_1$	$\alpha_2$
0,05	3,95	5,59
0,10	7,62	11,03
0,20	13,33	20,96
0,30	16,55	28,99
0,40	17,78	34,86
0,50	17,78	38,68
0,60	17,14	40,83
0,70	16,23	41,69
0,80	15,24	41,66
0,90	14,26	41,02
1,00	13,34	40
1,10	12,48	38,76
1,20	11,71	37,40

A scopo di controllo, si ponga, per un arco incastrato di sezione costante,

$$\frac{5EI}{l} = k ;$$

la prima delle (207) si scrive

$$\lambda_1 g = \alpha_1 \frac{5EI}{l^3} = \alpha \frac{EI}{l^3} . \quad (208)$$

Nella tabella seguente si raffrontano i coefficienti  $\alpha = 5\alpha_1$  del modello con quelli di S. Timoshenko (Theory of elastic stability) :

$f/l$	$5\alpha_1$	$\alpha$
0,10	38,1	60,7
0,20	66,6	101
0,30	82,7	115
0,40	88,9	111
0,50	88,9	97,4
0,60	85,7	83,8
0,70	81,1	71
0,80	76,2	59,1
0,90	71,3	50
1	66,2	43,7 .

Si consideri la stessa condizione di carico della fig. 11, in presenza di un peso proprio (fig. 18)

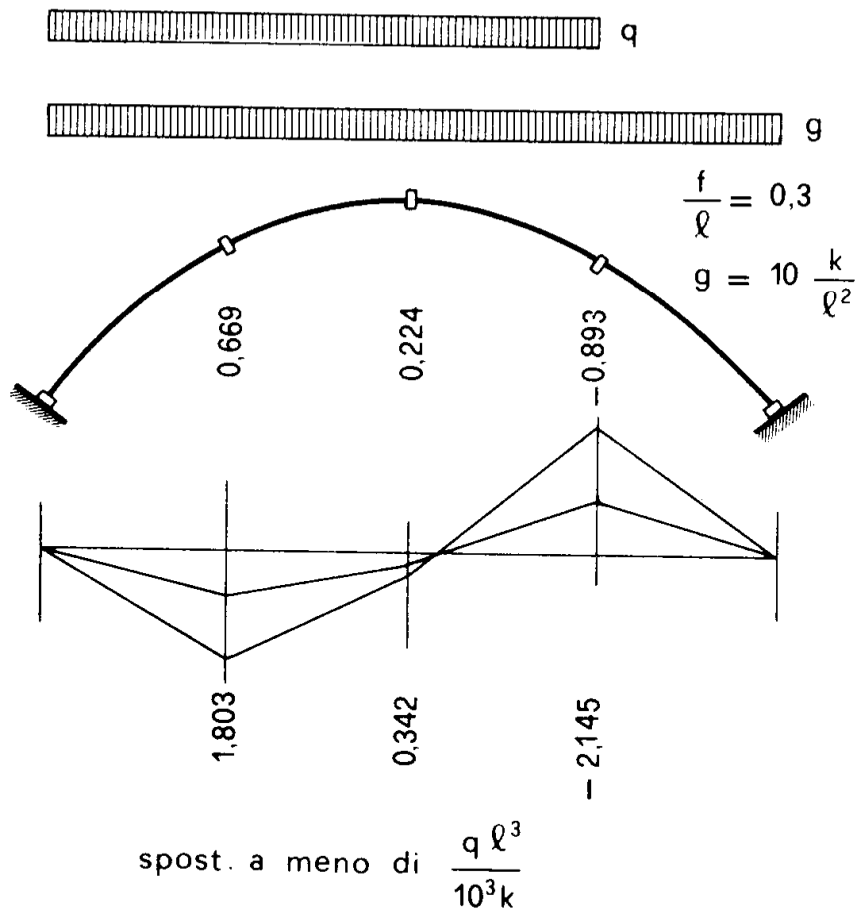
$$g = 10 \frac{k}{l^2} . \quad (209)$$

La base ortonormale dei modi di sbandamento è (206)

$$E = 4 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0,1118 & 0,0423 \\ -0,1118 & -0,0423 \end{vmatrix} ; \quad (210)$$

per

$$\frac{f}{l} = 0,3 \quad (211)$$

*Figura 18*

le  $\lambda$  corrispondenti alla prima ed alla seconda colonna delle (210) sono

$$\lambda_1 = 16,55 \frac{k}{g l^2} \quad (212)$$

$$\lambda_2 = 28,99 \frac{k}{g l^2} .$$

Si ha perciò

$$\Lambda^* = \begin{vmatrix} 2,527 & 0 \\ 0 & 1,527 \end{vmatrix}. \quad (213)$$

Le  $q_i$  nella base (210) sono (156)

$$\mathbf{q} = ql^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} 10^{-3} \begin{vmatrix} -13,975 \\ -5,287 \end{vmatrix}, \quad (214)$$

e quindi

$$\mathbf{x} = ql^2 \frac{1}{\sqrt{\epsilon k}} 10^{-3} \begin{vmatrix} 17,657 \\ -4,037 \end{vmatrix} \quad (215)$$

$$\mathbf{c} = \frac{ql^2}{k} 10^{-3} \begin{vmatrix} -7,2132 \\ -8,5792 \end{vmatrix}. \quad (216)$$

La deformata, assieme a quella (158) in assenza di  $g$ , è riportata nella fig. 18.

Occorre dire che la deformata (216) è stata calcolata trascurando il contributo del secondo ordine che il carico  $q$  offre all'energia potenziale.