Capitolo primo

Spazi delle configurazioni

1. Lo spazio delle configurazioni.

Si chiamerà *sistema olonomo* una struttura la cui configurazione è definita dai valori di n parametri (*coordinate lagrangiane*), ove n è un numero finito. Le coordinate lagrangiane $\varphi_i (i = 1, 2 \ldots n)$ sono quindi indipendenti, e comunque variabili, ciascuna in un suo opportuno intervallo.

Assegnato il sistema olonomo, esiste una corrispondenza biunivoca tra le configurazioni $\bar{c}$ e le *n-ple* $\varphi_1 \; \varphi_2 \; \ldots \; \varphi_n$; una qualsiasi configurazione definisce la *n-pla* delle φ_i, e viceversa. Può quindi scriversi, simbolicamente,

$$\bar{c} = \{\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n\} \tag{1}$$

ove le due parentesi indicano *l'insieme* ordinato delle φ_i.

E' immediato osservare che le $\bar{c}$ costituiscono uno *spazio vettoriale* E_n, poiché

1) è definita l'operazione binaria $\bar{c}_1 + \bar{c}_2 = \bar{c}$ seguente

$$\begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{n2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} + \varphi_{12} \\ \varphi_{21} + \varphi_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_{n1} + \varphi_{n2} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

2) vale la legge associativa

$$\bar{c}_1 + (\bar{c}_2 + \bar{c}_3) = (\bar{c}_1 + \bar{c}_2) + \bar{c}_3 \; ; \tag{3}$$

3) esiste l'elemento neutro

$$\bar{u} = 0 = \begin{Bmatrix} \varphi_1 = 0 \\ \varphi_2 = 0 \\ \vdots \\ \varphi_n = 0 \end{Bmatrix} \tag{4}$$

tale che

$$\bar{c} + \bar{u} = \bar{u} + \bar{c} = \bar{c} \; ; \tag{5}$$

4) per ogni $\bar{c}$ esiste *l'opposto* $-\bar{c}$ tale che

$$\bar{c} + (-\bar{c}) = 0 \; ;$$

5) vale la proprietà commutativa

$$\bar{c}_1 + \bar{c}_2 = \bar{c}_2 + \bar{c}_1 \; ; \tag{6}$$

6) è definita l'operazione *esterna* $\bar{c}x$, con x reale, così come segue (simbolicamente, vale la proprietà commutativa)

$$x \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{Bmatrix} x = \begin{Bmatrix} x\varphi_1 \\ x\varphi_2 \\ \vdots \\ x\varphi_n \end{Bmatrix} \; ; \tag{7}$$

essa gode delle proprietà

$$(\bar{c}_1 + \bar{c}_2)\,x = \bar{c}_1 x + \bar{c}_2 x \tag{8}$$

$$\bar{c}\,(x_1 + x_2) = \bar{c}x_1 + \bar{c}x_2 \tag{9}$$

$$\bar{c}xy = (\bar{c}x)\,y \; . \tag{10}$$

Lo spazio E_n si chiama *spazio delle configurazioni;* ogni configurazione $\bar{c}$ è un vettore di tale spazio. Esso coincide con lo spazio delle *n-ple* di reali.

2. Le basi nello spazio delle configurazioni .

Un insieme di m configurazioni $\bar{c}_1\ \bar{c}_2\ \ldots\ \bar{c}_m$ è *linearmente indipendente* se

$$x^i \bar{c}_i = 0 \rightarrow x^i = 0 \qquad \forall i \qquad (i = 1, 2, \ldots m)\,. \tag{11}$$

Per $m = n$ la condizione (11) si scrive

$$x_1 \begin{array}{c} \bar{c}_1 \\ \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \\ \vdots \\ \varphi_{n1} \end{Bmatrix} \end{array} + x_2 \begin{array}{c} \bar{c}_2 \\ \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \\ \vdots \\ \varphi_{n2} \end{Bmatrix} \end{array} + \ldots + x_n \begin{array}{c} \bar{c}_n \\ \begin{Bmatrix} \varphi_{1n} \\ \varphi_{2n} \\ \vdots \\ \varphi_{nn} \end{Bmatrix} \end{array} = 0$$

e cioè

$$\begin{aligned} x_1 \varphi_{11} + x_2 \varphi_{12} + \ldots\ldots + x_n \varphi_{1n} &= 0 \\ x_1 \varphi_{21} + x_2 \varphi_{22} + \ldots\ldots + x_n \varphi_{2n} &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 \varphi_{n1} + x_2 \varphi_{n2} + \ldots\ldots + x_n \varphi_{nn} &= 0\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Il (12) è un sistema algebrico di n equazioni nelle n incognite $x_1\ x_2 \ldots$ $\ldots\ x_n$, che in forma matriciale si scrive

$$\mathbf{E\,x} = 0 \tag{13}$$

dove

$$\mathbf{E} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} . \tag{14}$$

Il (13) ha soluzione non banale se e solo se det $\mathbf{E} = 0$; quindi la condizione (11) è soddisfatta se e solo se

$$\det \mathbf{E} \neq 0 . \tag{15}$$

Tutte le *n-ple* di configurazioni che soddisfano la (15) sono perciò linearmente indipendenti; di esse è possibile costruirne infinite, tra cui $\mathbf{E} = \mathbf{I}$ (ennupla naturale).

Si ricordi che, se n vettori sono lin. ind., nessuno di essi può essere nullo; se infatti fosse $\bar{c}_i = 0$, si avrebbe

$$0 \cdot \bar{c}_1 + 0 \cdot \bar{c}_2 + \dots + x^i \bar{c}_i + \dots + 0 \cdot \bar{c}_n = 0$$

e la (11) sarebbe soddisfatta pur essendo $x^i \neq 0$.

Ciò si osserva anche dalla (15), che non può essere soddisfatta se una colonna è nulla.

Si ricorda pure che, se n vettori sono lin. ind., lo sono anche m di essi, per $m < n$; se infatti fosse

$$x^1 \bar{c}_1 + x^2 \bar{c}_2 + \dots + x^m \bar{c}_m = 0$$

con qualche $x^i \neq 0$, lo sarebbe pure la (11).

Se n è il massimo numero di possibili vettori linearmente indipendenti, n è la *dimensione* dello spazio, ed una qualsiasi *n-pla* di vettori lin. ind. è una *base*.

Il *teorema fondamentale* stabilisce che se

$$\bar{e}_1 \; \bar{e}_2 \dots \bar{e}_n$$

è una base, qualsiasi vettore $\bar{c}$ può essere espresso, e in un solo modo, come combinazione lineare dei vettori $\bar{e}_i$ della base; e viceversa. Si può cioè scrivere

$$\begin{aligned} &\bar{e}_1\ \bar{e}_2\ \ldots .\ \bar{e}_n \qquad \text{base} \\ &\exists !\ \{x^i\}\ :\ \bar{c} = x^i\, \bar{e}_i\ , \qquad \forall\ \bar{c} \in E_n\ . \end{aligned} \tag{16}$$

Nel caso in esame una *n-pla* qualsiasi di vettori lin. ind., e cioè soddisfacenti la (15), è base, poiché, dato un qualsiasi vettore $\bar{c}$, il sistema

$$\mathbf{E\,x} = \mathbf{c}\ , \tag{17}$$

e cioè

$$\begin{aligned} &\varphi_{11}\, x_1 + \varphi_{12}\, x_2 + \ \ldots . \ + \varphi_{1n}\, x_n = \varphi_1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\varphi_{n1}\, x_1 + \varphi_{n2}\, x_2 + \ \ldots . \ + \varphi_{nn}\, x_n = \varphi_n\ , \end{aligned} \tag{18}$$

ha soluzione definita.
Si può anche dire quindi che n è la dimensione dello spazio delle configurazioni E_n, e ciò giustifica il pedice.

Si osservi che nella (17) si è indicato con $\mathbf{c}$ la matrice colonna, anche vettore colonna, formato dalle coordinate lagrangiane di $\bar{c}$; si chiama invece $\mathbf{x}$ il vettore colonna delle x^i, e cioè delle *componenti controvarianti* di $\bar{c}$ nella base $\{\bar{e}_i\}$ o, come spesso si dice, nella *base* $\mathbf{E}$. Più precisamente, $\mathbf{E}$ è la *matrice della base*. Si osservi che mentre $\mathbf{c}$ è intrinseca, come $\bar{c}$, $\mathbf{x}$ varia con la base.

Se

$$\mathbf{c} = \lambda^h\ \mathbf{c}_h\ , \tag{19}$$

dalla (17)

$$\mathbf{c} = \lambda^h\ \mathbf{c}_h = \mathbf{E\,x}$$

si trae

$$\mathbf{c} = \lambda^h\ \mathbf{E}\ \mathbf{x}_h = \mathbf{E}\ \lambda^h\ \mathbf{x}_h$$

da cui

$$\mathbf{x} = \lambda^h \, \mathbf{x}_h \; ; \tag{20}$$

può dirsi quindi che se un vettore è combinazione lineare di h vettori secondo le costanti λ^h, la sua componente j-esima è combinazione lineare delle componenti j-esime degli h vettori componenti, secondo le stesse costanti λ^h.

3. Cambiamento di base.

Si passi dalla base $\mathbf{E}$ alla base $\mathbf{E}'$. Sia

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}\mathbf{A} \; . \tag{21}$$

L'espressione di $\mathbf{A}$ si trae dalla (21) premoltiplicando per $\mathbf{E}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{E}^{-1} \, \mathbf{E}' \; ; \tag{22}$$

la $\mathbf{A}$ è la *matrice del cambiamento di base,* e si scrive pure

$$\mathbf{E} \overset{\mathbf{A}}{\to} \mathbf{E}' \; . \tag{23}$$

Dalla (17) si trae

$$\mathbf{c} = \mathbf{E}\,\mathbf{x} = \mathbf{E}'\,\mathbf{x}'$$

e, per la (21),

$$\mathbf{E}\,\mathbf{x} = \mathbf{E}\,\mathbf{A}\,\mathbf{x}'$$

da cui

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}' \tag{24}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}^{-1} \, \mathbf{x} \; . \tag{25}$$

La (25) è la formula di variazione delle componenti del vettore al variare della base. Poiché la matrice $\mathbf{A}$ compare attraverso la sua inversa, si giustifica il prefisso "contro" nel termine "componenti controvarianti".

Dalla (21) si trae

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'\mathbf{A}^{-1} \; ; \tag{26}$$

se quindi **A** é la matrice del passaggio $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$, la matrice $\mathbf{A}'$ del passaggio inverso $\mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ è

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1} \; . \tag{27}$$

Una matrice **T** di dimensioni $n \times n$ instaura una corrispondenza lineare tra vettori (*omografia vettoriale*) definita da

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_t = \mathbf{T}\mathbf{x} \; . \tag{28}$$

La trasformazione (28) è intrinseca; quindi, se cambia la base, **T** deve cambiare in modo che allo stesso **c** corrisponda lo stesso $\mathbf{c}_t$. Si ha perciò

$$\mathbf{x}'_t = \mathbf{T}'\mathbf{x}'$$

da cui

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_t = \mathbf{T}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{T}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

e quindi, paragonando con la (28),

$$\mathbf{A}\mathbf{T}'\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{T} \tag{29}$$

e ancora

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{A} \; . \tag{30}$$

La (30) è la formula di variazione della matrice **T** al variare della base; una matrice **T**, abbinata a tale legge, rientra nella più generale definizione di "*tensore controvariante*".

sua inversa, si giustifica il prefisso "contro" nel termine "componenti controvarianti".

Dalla (21) si trae

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'\mathbf{A}^{-1} \; ; \tag{26}$$

se quindi $\mathbf{A}$ é la matrice del passaggio $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$, la matrice $\mathbf{A}'$ del passaggio inverso $\mathbf{E}' \to \mathbf{E}$ è

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}^{-1} \; . \tag{27}$$

Una matrice $\mathbf{T}$ di dimensioni $n \times n$ instaura una corrispondenza lineare tra vettori (*omografia vettoriale*) definita da

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x}_t = \mathbf{T}\mathbf{x} \; . \tag{28}$$

La trasformazione (28) è intrinseca; quindi, se cambia la base, $\mathbf{T}$ deve cambiare in modo che allo stesso $\mathbf{c}$ corrisponda lo stesso $\mathbf{c}_t$. Si ha perciò

$$\mathbf{x}'_t = \mathbf{T}'\mathbf{x}'$$

da cui

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}_t = \mathbf{T}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{A}\mathbf{T}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$$

e quindi, paragonando con la (28),

$$\mathbf{A}\mathbf{T}'\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{T} \tag{29}$$

e ancora

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{A} \; . \tag{30}$$

La (30) è la formula di variazione della matrice $\mathbf{T}$ al variare della base; una matrice $\mathbf{T}$, abbinata a tale legge, rientra nella più generale definizione di "*tensore controvariante*".

4. Strutturazione di uno spazio vettoriale.

a) Uno spazio vettoriale si struttura definendo una operazione interna a valori in R, chiamata *prodotto scalare*, e indicata come segue

$$\bar{c}_i \cdot \bar{c}_j \to r . \tag{31}$$

L'operazione deve soddisfare i seguenti requisiti

$$1) \quad \bar{c}_i \cdot \bar{c}_j = \bar{c}_j \cdot \bar{c}_i \tag{32}$$

vale cioè la proprietà commutativa;

$$2) \quad x\,(\bar{c}_i \cdot \bar{c}_j) = x\,\bar{c}_i \cdot \bar{c}_j = \bar{c}_i \cdot x\,\bar{c}_j$$

$$3) \quad \bar{c}_i \cdot (\bar{c}_j + \bar{c}_h) = \bar{c}_i \cdot \bar{c}_j + \bar{c}_i \cdot \bar{c}_h$$

$$4) \quad \bar{c}_i \cdot \bar{c}_j = 0 \qquad \forall\, \bar{c}_j \in E_n \iff \bar{c}_i = 0 . \tag{33}$$

Due vettori sono *ortogonali* se il loro prodotto scalare è nullo:

$$\bar{c}_i \perp \bar{c}_j \longleftrightarrow \bar{c}_i \cdot \bar{c}_j = 0 .$$

b) Lo scalare $\mathbf{x}_i^T\ \mathbf{x}_j$, collegato a due vettori $\bar{c}_i$ e $\bar{c}_j$, non è un prodotto scalare; infatti passando dalla base $\mathbf{E}$ alla base $\mathbf{E}'$ lo scalare diviene (25).

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i'^T\ \mathbf{x}_j' &= (\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{x}_i)^T\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{x}_j = \\ &= \mathbf{x}_i^T\,(\mathbf{A}^{-1})^T\,\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{x}_j \end{aligned} \tag{34}$$

che è diverso da $\mathbf{x}_i^T$ x perché in genere $(\mathbf{A}^{-1})^T\ \mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{I}$. Proprietà invece del prodotto scalare, implicito nella definizione, è che esso sia *intrinseco*.

Si consideri invece lo scalare

$$\mathbf{x}_i^T\ \mathbf{S}\,\mathbf{x}_j\ ; \tag{35}$$

passando da **E** ad **E'** esso diviene

$$\mathbf{x}_i'^T \ \mathbf{S}' \ \mathbf{x}_j' \tag{36}$$

e cioè

$$\mathbf{x}_i^T (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{S}' \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x}_j \ ,$$

che coincide con il (34) se

$$\mathbf{S} = (\mathbf{A}^{-1})^T \ S' A^{-1} \tag{37}$$

oppure

$$\mathbf{S}' = \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \ . \tag{38}$$

Se la matrice **S** varia con la legge (38), il prodotto (35) è un prodotto scalare :

$$\begin{aligned} \bar{c}_i \cdot \bar{c}_j &= \mathbf{x}_i^T \ \mathbf{S} \ \mathbf{x}_j \\ \mathbf{S}' &= \mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A} \ . \end{aligned} \tag{39}$$

S rientra nella definizione di "*tensore covariante*".

5. Il tensore metrico .

Assegnata una base **E**, può scriversi (16)

$$\begin{aligned} \bar{c}_h &= x_h^i \ \bar{e}_i \\ \bar{c}_k &= x_k^i \ \bar{e}_i \end{aligned}$$

e quindi

$$\bar{c}_h \cdot \bar{c}_k = x_h^i \ \bar{e}_i \cdot x_k^j \ \bar{e}_j = x_h^i \ x_k^j \ \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j \ . \tag{40}$$

Si definisce *tensore metrico* **G** associato alla base **E** la matrice degli n^2 prodotti scalari

$$g_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j \; ; \tag{41}$$

quindi la (40) si scrive

$$\bar{c}_h \cdot \bar{c}_k = x_h^i \, x_k^j \, g_{ij} \, . \tag{42}$$

La **G** è quadrata simmetrica, per la proprietà commutativa (32) del prodotto scalare. La (42) si esprime anche, in notazione matriciale, come segue:

$$\bar{c}_h \cdot \bar{c}_k = \mathbf{x}_h^T \, \mathbf{G} \, \mathbf{x}_k \; , \tag{43}$$

e in dettaglio

$$\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots\cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots\cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \; \begin{vmatrix} x_1^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{vmatrix} \tag{44}$$

$$|x_1^h \ldots x_n^h| = |\mathbf{x}^{h\,T} \mathbf{g}^1 \; \ldots\ldots \; \mathbf{x}^{hT} \mathbf{g}^n| = \mathbf{x}^{hT} \mathbf{g}^i \, x_i^k \; .$$

Poiché il prodotto scalare è intrinseco, deve valere la (39); il tensore metrico varia quindi al variare della base secondo la legge

$$\mathbf{G}' = \mathbf{A}^T \, \mathbf{G} \, \mathbf{A} \; . \tag{45}$$

La forma (35) è quindi la forma generale del prodotto scalare, ed **S** coincide con il tensore metrico. Quest'ultimo, attraverso la (43) e (45), definisce il prodotto scalare di una qualsiasi coppia di vettori.

Il prodotto scalare (e quindi gli elementi g_{ij} di **G**) può avere dimensioni fisica, così come le coordinate lagrangiane; per esempio, il prodotto scalare può essere un'energia, ed una coordinata lagrangiana può essere uno spostamento. Le componenti x^i sono invece numeri puri.

La matrice G è regolare. Dato infatti un qualsiasi vettore $\bar{c}_k$, si ha (42)

$$\bar{e}_h \cdot \bar{c}_k = g_{h1} x_k^1 + \ldots + g_{hn} x_k^n \,. \tag{46}$$

Ciò perché, considerando la $\bar{e}_h$ come un vettore qualsiasi, le sue componenti nella base E sono date da

$$x_h^i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq h \\ 1 & \text{se } i = h \,. \end{cases} \tag{47}$$

La (47) si scrive anche

$$x_h^i = \delta_h^i \,,$$

ove

$$\delta_h^i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq h \\ 1 & \text{se } i = h \end{cases} \tag{48}$$

è il ben noto *simbolo di Kronecker.* Quindi nella (42) devono considerarsi solo i termini per cui $i = h$, e cioè

$$\bar{e}_h \cdot \bar{c}_k = x_k^j \, g_{hj} \,, \tag{49}$$

che è appunto la (46).

Se det $\mathbf{G} = 0$, il sistema

$$\bar{e}_h \cdot \bar{c}_k = 0 \qquad (h = 1, 2 \ldots n) \,, \tag{50}$$

di n equazioni algebriche lineari omogenee nelle n incognite $x_k^1 \ldots$ $\ldots x_k^n$, avrebbe soluzione non banale, e cioè esisterebbe un vettore $\bar{c}_k \neq 0$ ortogonale a tutti i vettori della base. Ciò importerebbe

$$\bar{c}_k \cdot \bar{c}_j = x_j^h \, \bar{e}_h \cdot \bar{c}_k = 0$$

per qualsiasi vettore $\bar{c}_j$, e ciò è assurdo se $\bar{c}_k \neq 0$ (proprietà 4 del paragrafo 4 a). Quindi deve essere

$$\det \mathbf{G} \neq 0 \,. \qquad (51)$$

Si osservi che, mentre la proprietà 4 del par. 4a dice che non può esistere un vettore $\neq 0$ ortogonale a tutti i vettori dello spazio, si è ora dimostrato che non può esistere un vettore $\neq 0$ ortogonale a tutti i vettori di una base. La (51) permette di definire le *componenti covarianti* di un vettore; esse si distinguono dalle controvarianti per avere l'indice a deponente. Si pone quindi, per esse,

$$x_i = \bar{c} \cdot \bar{c}_i \qquad (i = 1, 2 \ldots n) \,. \qquad (52)$$

Per la (16) si ha

$$x_i = x^j \, \bar{c}_j \cdot \bar{c}_i$$

e cioè

$$x_i = g_{ij} \, x^j \,. \qquad (53)$$

In notazione matriciale la (53) si scrive

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\,\mathbf{x} \qquad (54)$$

ove con la tilde è indicato il vettore colonna delle componenti covarianti. Dalla (54) si trae poi

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}^{-1}\,\tilde{\mathbf{x}} \,. \qquad (55)$$

Passando dalla base $\mathbf{E}$ alla $\mathbf{E}' = \mathbf{E}\mathbf{A}$ (21) si ha

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{G}\,\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x}'$$

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{G}'\mathbf{x}' = \mathbf{A}^T \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x}'$$

e quindi

$$\tilde{\mathbf{x}}' = \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{x}} . \tag{56}$$

Poiché si passa da $\tilde{\mathbf{x}}'$ ad $\mathbf{x}'$ attraverso la $\mathbf{A}$, invece che attraverso la $\mathbf{A}^{-1}$, come succede per le $\mathbf{x}$ (25), si giustifica l'aggettivo "covarianti".

Dalla (43)

$$\bar{c}_h \cdot \bar{c}_k = \mathbf{x}_h^T \mathbf{G} \mathbf{x}_k$$

e (54)

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{G} \mathbf{x}$$

si trae

$$\bar{c}_h \cdot \bar{c}_k = \mathbf{x}_h^T \tilde{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{x}}_h^T \mathbf{G}^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k . \tag{57}$$

Il prodotto scalare $\bar{c} \cdot \bar{c}$ di un vettore per se stesso è una forma quadratica nelle componenti controvarianti di $\bar{c}$, che prende nome di *forma quadratica fondamentale* dello spazio E_n:

$$\bar{c} \cdot \bar{c} = \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} \tag{58}$$

e, in esteso,

$$\bar{c} \cdot \bar{c} = g_{11} x_1^2 + \ldots . + 2 g_{12} x_1 x_2 + \ldots . \tag{59}$$

6. Spazi euclidei .

Lo spazio E_n è *euclideo* se

$$\bar{c} \cdot \bar{c} > 0 \qquad \forall\, \bar{c} \neq 0 \in E_n . \tag{60}$$

La (60) si scrive pure

$$\mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} > 0 \qquad \forall\, \mathbf{x} , \tag{61}$$

e ciò significa che la matrice **G** è *definita positiva;* in particolare, i termini della diagonale principale sono diversi da zero e positivi, e

$$\det \mathbf{G} > 0 \,. \tag{62}$$

In uno spazio euclideo ad ogni vettore $\bar{c}$ è collegato il numero reale

$$|\bar{c}| = \sqrt{\bar{c} \cdot \bar{c}} \tag{63}$$

detto *norma* di $\bar{c}$.

Si dimostrano le due proprietà

a) dati due vettori $\bar{c}_h$ e $\bar{c}_k$, il modulo del prodotto scalare è minore o uguale del prodotto delle norme.

$$\bar{c}_h \cdot \bar{c}_k \leqslant |\bar{c}_h| \, |\bar{c}_k| \tag{64}$$

(disuguaglianza di Schwarz);

b) dati due vettori $\bar{c}_h$ e $\bar{c}_k$, la norma della loro somma è minore o uguale della somma delle norme:

$$|\bar{c}_h + \bar{c}_k| \leqslant |\bar{c}_h| + |\bar{c}_k| \tag{65}$$

(proprietà triangolare, o di Minkowski).

In generale, un insieme di vettori $\bar{c}_1 \; \bar{c}_2 \; . \; . \; . \; \bar{c}_m$ diversi da zero è *ortonormale* se

$$\bar{c}_i \cdot \bar{c}_j = \epsilon \;\; \delta_i^j \qquad \forall \, i, j = 1, 2, \ldots m \tag{66}$$

dove δ_i^j è il simbolo di Kronecker (48), ed ϵ è *l'unità avente la dimensione fisica del prodotto scalare.*

Tali vettori sono linearmente indipendenti; se infatti è

$$k^i \, \bar{c}_i = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots m$$

è pure

$$k^i \, \bar{c}_i \cdot \bar{c}_j = 0 \qquad \forall j \in \{1, 2 \ldots m\}$$

e quindi

$$k^j \bar{c}_j \cdot \bar{c}_i = 0$$

da cui

$$k^j = 0 .$$

Quindi, se $m = n$ l'insieme dei $\bar{c}_i$ è una base: una qualsiasi *n-pla* di vettori ortonormali costituisce una *base ortonormale*. Naturalmente ciò è vero anche se gli n vettori sono soltanto ortogonali; in tal caso si è in presenza di una *base ortogonale*.

In uno spazio E_n euclideo, il tensore metrico connesso con una base ortogonale è una matrice diagonale, ad elementi tutti maggiori di zero. Quello connesso con una base ortonormale coincide con la matrice identica:

$$\mathbf{G} = \epsilon \, \mathbf{I} . \tag{67}$$

In una base ortonormale è quindi

$$\bar{c} \cdot \bar{c} = \epsilon \left[(x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots . + (x^n)^2 \right] \tag{68}$$

e la norma è

$$| \bar{c} | = \sqrt{\epsilon \sum_1^n (x^i)^2} . \tag{69}$$

Così pure, il prodotto scalare si esprime come segue:

$$\bar{c}_h \cdot \bar{c}_k = \epsilon \, \mathbf{x}_h^T \, \mathbf{x}_k . \tag{70}$$

Il passaggio tra basi ortonormali è retto da *matrici ortogonali* ($\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$). E infatti

(45) $$\mathbf{G}' = \mathbf{A}^T \mathbf{G} \, \mathbf{A}$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{A}^T \mathbf{I} \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T . \tag{71}$$

Dalla (71) trae

$$\frac{1}{\det \mathbf{A}} = \det \mathbf{A} \,,$$

da cui

$$\det \mathbf{A} = \pm 1 \,. \tag{72}$$

7. Il procedimento di Schmidt.

L'esistenza di basi ortogonali in uno spazio euclideo è assicurata dal procedimento costruttivo di Schmidt. Si parte da una base qualsiasi

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \dots & \varphi_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n1} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = |\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_n| \,; \tag{73}$$

si richiede soltanto che sia $\det \mathbf{B} \neq 0$ (15).

Si pone poi

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \bar{b}_1 \\ \bar{e}_2 &= \bar{b}_2 + \lambda_2^1 \, \bar{e}_1 \,. \end{aligned} \tag{74}$$

La condizione $\bar{e}_1 \perp \bar{e}_2$ si scrive

$$\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = \bar{b}_2 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_2^1 \, \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 0$$

da cui

$$\lambda_2^1 = - \frac{\bar{b}_2 \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \,, \tag{75}$$

e quindi $\bar{e}_2$ è definita, poiché $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 \neq 0$ (in particolare, nel caso in esame, $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 > 0$).

Si pone poi

$$\bar{e}_3 = \bar{b}_3 + \lambda_3^1 \bar{e}_1 + \lambda_3^2 \bar{e}_2 \ . \tag{76}$$

Le due condizioni

$$\begin{aligned} \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 &= 0 \\ \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{77}$$

consentono di scrivere

$$\bar{b}_3 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_3^1 \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_3^2 \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = 0$$

$$\bar{b}_3 \cdot \bar{e}_2 + \lambda_3^1 \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 + \lambda_3^2 \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 0$$

e, poiché $\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = 0$,

$$\bar{b}_3 \cdot \bar{e}_1 + \lambda_3^1 \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 0$$

$$\bar{b}_3 \cdot \bar{e}_2 + \lambda_3^2 \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 0$$

da cui

$$\begin{aligned} \lambda_3^1 &= -\frac{\bar{b}_3 \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \\ \lambda_3^2 &= -\frac{\bar{b}_3 \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2} \ . \end{aligned} \tag{78}$$

La $\bar{e}_3$ è quindi anch'essa definita.
Iterando può porsi

$$\bar{e}_i = \bar{b}_i + \lambda_i^h \bar{e}_h \tag{79}$$

per $h = 1, 2 \ldots i - 1$, ed $i = 1, 2 \ldots n$.

Il coefficiente λ_i^h è fornito da

$$\lambda_i^h = -\frac{\bar{b}_i \cdot \bar{e}_h}{\bar{e}_h \cdot \bar{e}_h} \quad . \tag{80}$$

Il procedimento vale anche per gli spazi *pseudo euclidei*, e cioè per gli spazi strutturati come al par. 4, senza l'obbligo della (60); occorre però verificare che il denominatore della (80) sia comunque $\neq 0$.

Ottenuta una *n-pla* ortogonale, essa è costituita da vettori linearmente indipendenti, come già fatto osservare, e cioè è una base. Il generico vettore si normalizza con la condizione

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = \epsilon \; . \tag{81}$$

Se perciò $\bar{e}_i$ è il vettore generico, ed

$$\bar{e}_i^{\,*} = k_i \, \bar{e}_i$$

il normalizzato, la (81) si scrive

$$k_i^2 \, \bar{e}_i \cdot \bar{e}_i = \epsilon$$

da cui

$$k_i = \sqrt{\frac{\epsilon}{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i}} \quad . \tag{83}$$

8. Il procedimento di diagonalizzazione .

Il prodotto scalare (43) può sempre esprimersi in funzione di $\mathbf{c}_h$ e $\mathbf{c}_k$; infatti nella *base naturale*

$$\mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{e}_n = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{vmatrix} \tag{84}$$

le x_h ed x_k coincidono, a meno delle dimensioni fisiche, con c_h e c_k. Si può porre così

$$\bar{c}_h \cdot \bar{c}_k = \frac{1}{2} \mathbf{c}_h^T \mathbf{K} \mathbf{c}_k \tag{85}$$

ove $\frac{\mathbf{K}}{2}$ è, a meno delle dimensioni fisiche, il tensore metrico nella base naturale. Si trae facilmente che, nella base $\mathbf{E}$, è (vedi (104)

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{K} \mathbf{E} . \tag{86}$$

Generalmente, data una struttura e definite le sue variabili lagrangiane, si calcola innanzitutto $\mathbf{K}$, e poi $\mathbf{G}$ attraverso la $\mathbf{E}$.

La matrice $\mathbf{K}$ è simmetrica; poiché infatti il prodotto scalare è commutativo, è

$$\mathbf{c}_h^T \mathbf{K} \mathbf{c}_k = \mathbf{c}_k^T \mathbf{K} \mathbf{c}_h ; \tag{87}$$

d'altro canto il prodotto scalare è un numero, e quindi

$$\mathbf{c}_h^T \mathbf{K} \mathbf{c}_k = (\mathbf{c}_h^T \mathbf{K} \mathbf{c}_k)^T = \mathbf{c}_k^T \mathbf{K}^T \mathbf{c}_h ; \tag{88}$$

dal confronto tra le (87) e (88) si trae

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^T .$$

Si consideri il sistema nelle φ_i

$$\begin{array}{cccc}
(k_{11} - \lambda)\varphi_1 + & k_{12}\varphi_2 & + \ldots + & k_{1n}\varphi_n = 0 \\
k_{21}\varphi_1 + & (k_{22} - \lambda)\varphi_2 & + \ldots + & k_{2n}\varphi_n = 0 \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
k_{n1}\varphi_1 + & k_{n2}\varphi_2 & + & + (k_{nn} - \lambda)\varphi_n = 0
\end{array}$$

e cioè

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I})\, \mathbf{e} = 0 \; . \tag{89}$$

Questo ammette soluzione e non banale, definita a meno – almeno – di una costante, se e solo se

$$\det (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \; . \tag{90}$$

La simmetria di $\mathbf{K}$ implica l'esistenza di n radici reali della (88): $\lambda_1, \lambda_2, \ldots . \lambda_n$

Se λ_i e λ_j sono due radici distinte, è

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{I})\, \mathbf{e}_i &= 0 \\ (\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{I})\, \mathbf{e}_j &= 0 \; . \end{aligned} \tag{91}$$

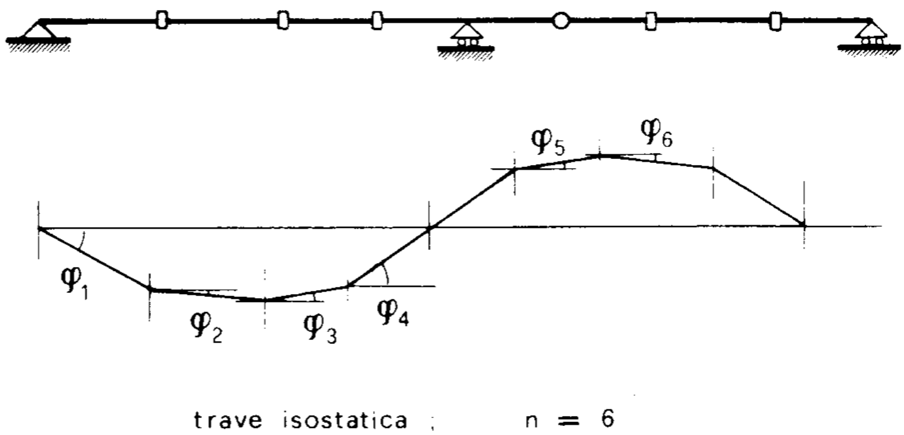


Figura 1

Il prodotto scalare $\overline{e}_i \cdot \overline{e}_j$ è

$$2\, \overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = \mathbf{e}_i^T \mathbf{K} \mathbf{e}_j$$

e, per le (91) ,

$$2 \overline{e}_i \cdot \overline{e}_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = \lambda_i \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j \; . \tag{92}$$

E' quindi

$$(\lambda_i - \lambda_j)\, \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = 0 \, .$$

Poiché $\lambda_i - \lambda_j \neq 0$, è $\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = 0$, e cioè (92) $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0$.

Se λ_i e λ_j sono coincidenti, sotto $\lambda_i = \lambda_j$ il sistema (85) ammette una soluzione definita a meno di due costanti, poiché la matrice $\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{I}$ è di rango $n - 2$:

$$k k' \bar{e}' + k'' \bar{e}'' \, . \qquad (93)$$

Ponendo

$$\bar{e}_i = k_{i1}\, \bar{e}' + k_{i2}\, \bar{e}''$$

$$\bar{e}_j = k_{j1}\, \bar{e}' + k_{j2}\, \bar{e}''$$

la condizione

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = 0 \qquad (94)$$

si scrive

$$k_{i1}\, k_{j1}\, \bar{e}' \cdot \bar{e}' + k_{i1}\, k_{j2}\, \bar{e}' \cdot \bar{e}'' +$$

$$+ \; k_{i2}\, k_{j1}\, \bar{e}' \cdot \bar{e}'' + k_{i2}\, k_{j2}\, \bar{e}'' \cdot \bar{e}'' = 0 \; ;$$

fissati, per esempio, k_{i1} e k_{i2}, si ha

$$k_{j1}\, (k_{i1}\, \bar{e}' \cdot \bar{e}' + k_{i2}\, \bar{e}' \cdot \bar{e}'') +$$

$$+ k_{j2}\, (k_{i1} \bar{e}' \cdot \bar{e}'' + k_{i2}\, \bar{e}'' \cdot \bar{e}'') = 0$$

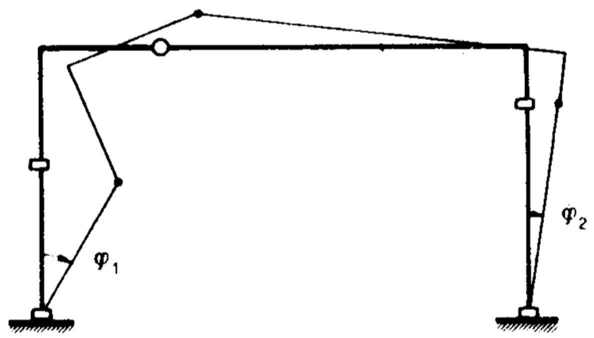
da cui, fissato k_{j1}, si ottiene k_{j2}. Ai due valori λ_i e λ_j coincidenti corrispondono quindi tre libertà di scelta delle costanti, se si vogliono due vettori $\overline{e}_i$ ed $\overline{e}_j$ ortogonali.

La (89) si può anche scrivere come segue

$$\mathbf{K}\mathbf{E} = \mathbf{E}\Lambda \tag{95}$$

ove Λ è una matrice diagonale:

$$\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \ldots\ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{vmatrix} . \tag{96}$$



portale 2 volte iperstatico ; n = 2

Figura 2

Infatti può scriversi

$$\mathbf{E}\Lambda = \begin{vmatrix} \lambda_1 \varphi_{11} & \ldots\ldots & \lambda_n \varphi_{1n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \lambda_1 \varphi_{n1} & \ldots\ldots & \lambda_n \varphi_{nn} \end{vmatrix} = |\lambda_1 \mathbf{e}^1 \ldots\ldots \lambda_n \mathbf{e}^n|, \tag{97}$$

mentre la colonna i-esima del prodotto $\mathbf{KE}$ è fornita da $\mathbf{K}\mathbf{e}^i$. Dall'uguaglianza

$$\mathbf{K}\mathbf{e}^i = \lambda_i \mathbf{e}^i \tag{98}$$

che può anche scriversi

$$\mathbf{K}\mathbf{e}^i = \lambda_i \mathbf{I}\mathbf{e}^i \tag{99}$$

si trae

$$(\mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{I})\, \mathbf{e}^i = 0$$

e cioè la (89).

Il prodotto scalare (85), nella base $\mathbf{E}$, si esprime come

$$\bar{c}_h \cdot \bar{c}_k = \mathbf{x}_h^T \mathbf{G} \mathbf{x}_k \; ; \tag{100}$$

dalla (17) si trae

$$\mathbf{x} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{c} \tag{101}$$

e quindi

$$\bar{c}_h \cdot \bar{c}_k = \mathbf{c}_h^T (\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{G} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{c}_k \; . \tag{102}$$

Confrontando con la (85) si trae

$$2(\mathbf{E}^{-1})^T \mathbf{G} \mathbf{E}^{-1} = \mathbf{K} \tag{103}$$

da cui

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{K} \mathbf{E} \; . \tag{104}$$

Poiché la base $\mathbf{E}$ è ortogonale, $\mathbf{G}$ è una matrice diagonale, e la forma quadratica

$$\mathbf{x}^T \, \mathbf{G} \, \mathbf{x}$$

si presenta in aspetto canonico, cioè priva dei termini rettangolari. Di qui il nome del procedimento.

Se, in più, la base **E** è normalizzata, è $\mathbf{G} = \epsilon \, \mathbf{I}$.

9. Gli spazi - energia.

Date due configurazioni di una struttura, $\bar{c}_i$ e $\bar{c}_j$, *l'energia mutua di deformazione* L_{ij} è il lavoro delle forze reattive nella configurazione $\bar{c}_i$ per effetto dei corrispondenti spostamenti nella configurazione $\bar{c}_j$. Ad ogni coppia $\bar{c}_i \; \bar{c}_j$ corrispondono in genere una L_{ij} ed una L_{ji} diverse. Se però valgono le ipotesi a fondamento *del principio di sovrapposizione degli effetti,* e cioè

a) elasticità lineare ;

b) piccoli spostamenti ($\dfrac{\partial s_i}{\partial x_j} \ll 1 \,, \quad \forall \, i, j = 1, 2, 3)$,

c) vincoli lisci e bilaterali ,

può dirsi che

$$L_{ij} = L_{ji} \,. \tag{105}$$

Ed infatti, imprimendo prima $\bar{c}_i$ e poi $\bar{c}_j$ è

$$L' = L_i + L_j' + L_{ij} \;,$$

ed imprimendo prima $\bar{c}_j$ e poi $\bar{c}_i$ è

$$L'' = L_j + L_i' + L_{ji} \,.$$

Per a) e c) il sistema è conservativo, e quindi, poiché la configurazione finale è la stessa. $L' = L''$. Per la b) poi si ha $L_i' = L_i$, $L_j' = L_j$; se ne trae che vale la (105). La dimostrazione è analoga a quella del principio di Betti, anzi non esige, rispetto a questo, l'ipotesi di forze di tipo trasversale. La (105), poi, può riguardarsi come la versione, in energia di deformazione, del principio di Volterra.

La (105) è la (32); è immediato verificare che valgono anche le altre tre proprietà dei prodotti scalari. Quindi l'energia mutua L_{ij} può essere assunta come prodotto scalare degli spazi delle configurazioni. Converrà però assumere come prodotto scalare la metà di L_{ij}:

$$\bar{c}_i \cdot \bar{c}_j = \frac{1}{2} L_{ij} . \tag{106}$$

In tal modo il prodotto $\bar{c}_i \cdot \bar{c}_i$ è l'energia di deformazione connessa con $\bar{c}_i$:

$$\bar{c}_i \cdot \bar{c}_i = \frac{1}{2} L_{ii} = L_i ; \tag{107}$$

tale prodotto è sempre maggiore di zero, e quindi (60) lo spazio delle configurazioni si struttura come spazio euclideo. Esso si chiama allora *spazio energia*. La norma di una configurazione $\bar{c}$ è perciò (63)

$$|\bar{c}| = \sqrt{L} . \tag{108}$$

Per le proprietà a) e b) L_{ij} è una forma quadratica delle coordinate lagrangiane di $\bar{c}_i$ e $\bar{c}_j$, e cioè

$$\bar{c}_i \cdot \bar{c}_j = \frac{1}{2} L_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{c}_i^T \mathbf{K} \mathbf{c}_j \tag{109}$$

e, in esteso ,

$$\bar{c}_i \cdot \bar{c}_j = \frac{1}{2} k_{hk} \varphi_i^h \varphi_j^k . \tag{110}$$

L'energia di deformazione è

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} \tag{111}$$

o anche

$$L = \frac{1}{2} k_{11} \varphi_1^2 + \ldots\ldots + k_{12} \varphi_1 \varphi_2 + \ldots . \qquad (112)$$

La matrice **K** si chiama *matrice lagrangiana delle rigidità*, ed è intrinseca. Essa è simmetrica e definita positiva.

Dalla (112) si trae che alla configurazione.

$$\varphi_h = \delta_h^i \qquad (h = 1, 2 \ldots n), \qquad (113)$$

e cioè alla configurazione caratterizzata dalla sola $\varphi_i \neq 0$, e pari ad 1, è connessa l'energia di deformazione

$$L = \frac{1}{2} k_{ii} , \qquad (114)$$

e quindi k_{ii} è il doppio dell'energia di deformazione connessa con la (113). Così pure alla configurazione caratterizzata dalle sole φ_i e φ_j diverse da zero, e pari ad 1, si associa l'energia di deformazione

$$L = \frac{1}{2} k_{ii} + \frac{1}{2} k_{jj} + k_{ij} , \qquad (115)$$

da cui si trae che k_{ij} è l'energia mutua connessa con le due configurazioni $\varphi_i = 1$ e $\varphi_j = 1$.

Dalla (65) si trae

$$\sqrt{L_{i+j}} \leqslant \sqrt{L_i} + \sqrt{L_j}$$

$$L_{i+j} \leqslant L_i + L_j + 2\sqrt{L_i L_j}$$

D'altro canto è

$$L_{i+j} = L_i + L_j + L_{ij} ;$$

se ne trae la disequazione

$$L_{ij} \leqslant 2\sqrt{L_i L_j}\ . \tag{116}$$

Poiché poi $L_i + L_j + L_{ij} > 0$, la (116) si completa in

$$-(L_i + L_j) < L_{ij} \leqslant 2\sqrt{L_i L_j}\ . \tag{117}$$

In una base generica **E** il prodotto scalare $\frac{1}{2} L_{ij}$ può esprimersi in funzione delle componenti controvarianti, come già detto nel par. 8:

$$\frac{1}{2} L_{ij} = \mathbf{x}_i^T \mathbf{G} \mathbf{x}_j \tag{118}$$

ove **G**, tensore metrico collegato ad **E**, è (104)

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{K} \mathbf{E}\ . \tag{119}$$

Il tensore **G** varia con la base con legge di covarianza (102)

$$\mathbf{G}' = \mathbf{A}^T \mathbf{G} \mathbf{A}\ . \tag{120}$$

L'energia elastica, in funzione delle componenti controvarianti, è

$$L = \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x}\ . \tag{121}$$

Se la base **E** è *ortonormale*, $\mathbf{G} = \epsilon\, \mathbf{I}$ e quindi

$$\frac{1}{2} L_{ij} = \epsilon\, \mathbf{x}_i^T\, \mathbf{x}_j \tag{122}$$

$$L = \epsilon\, \mathbf{x}^T\, \mathbf{x} \tag{123}$$

e, in esteso,

$$L = \epsilon \sum_{1}^{n} (x^i)^2 \,. \tag{124}$$

Se la base è ortonormale, le componenti covarianti coincidono con le controvarianti, salvo la dimensione fisica (54):

$$\widetilde{\mathbf{x}} = \epsilon\, \mathbf{x} \,; \tag{125}$$

si parlerà quindi genericamente di "componenti", intendendo che èsse sono le controvarianti, e cioè dei numeri puri.

In presenza di forze *trasversali* applicate è, per definizione di forze trasversali,

$$L^* = \mathbf{f}^T \mathbf{c} \,; \tag{126}$$

L^* è il lavoro svolto dalle forze, considerate agenti in tutto il loro valore fin dall'inizio del movimento che porta dalla configurazione indeformata alla $\bar{c}$, le cui coordinate lagrangiane sono ubicate nella matrice colonna **c**. La matrice colonna **f** ospita le cosiddette *componenti lagrangiane* delle forze. La (126) è in forma intrinseca; L^* può esprimersi in funzione delle componenti controvarianti del vettore configurazione utilizzando la (17)

$$L^* = \mathbf{f}^T \mathbf{E}\, \mathbf{x} \,,$$

e cioè

$$L^* = \mathbf{q}^T \mathbf{x} \tag{127}$$

ove

$$\mathbf{q} = \begin{vmatrix} q_1 \\ \cdot \\ \vdots \\ q_n \end{vmatrix} \tag{128}$$

è la matrice colonna delle *componenti delle forze nella base* **E**. Esse sono covarianti; infatti

$$\mathbf{q}'^T \mathbf{x}' = \mathbf{q}^T \mathbf{x}$$

e, per la (25) ,

$$\mathbf{q}'^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{q}^T \mathbf{x}$$

da cui

$$\mathbf{q}' = \mathbf{A}^T \mathbf{q} \, . \tag{129}$$

Si può porre quindi, dalla (127) ,

$$\mathbf{q} = \mathbf{E}^T \mathbf{f} \, ; \tag{130}$$

mentre le $f_1 \, f_2 \, \ldots \, f_n$ di **f** hanno dimensioni fisiche tali che $f_i \, \varphi_i$ sia un lavoro (Fl), le $q_1 q_2 \, \ldots \, q_n$ di **q** hanno comunque dimensione di lavoro.

Le componenti $q_1 q_2 \, \ldots \, q_n$ saranno chiamate *componenti delle forze.*

L'energia potenziale P delle forze applicate è quindi, se esse sono di tipo gravitazionale,

$$P = -\,\mathbf{f}^T \mathbf{c} = -\,\mathbf{f}^T \mathbf{E} \mathbf{x} = -\,\mathbf{q}^T \mathbf{x} \, . \tag{131}$$

In una base **E** ortonormale l'energia potenziale totale è quindi (124)

$$E_t = \epsilon \sum_1^n (x^i)^2 - \sum_1^n q_i x^i \, , \tag{132}$$

e la condizione di stazionarietà si esprime come segue:

$$\frac{\partial E_t}{\partial x^i} = 2 \, \epsilon x^i - q_i = 0 \tag{133}$$

da cui

$$x^i = \frac{q_i}{2\epsilon} \ . \tag{134}$$

Quindi

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\epsilon}\,\mathbf{q} = \frac{1}{2\epsilon}\,\mathbf{E}^T\,\mathbf{f}\,. \tag{135}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{E}\,\mathbf{x} = \frac{1}{2\epsilon}\,\mathbf{E}\,\mathbf{q} = \frac{1}{2\epsilon}\,\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{f}\,. \tag{136}$$

Dalla (127)

$$L^* = q^T x = \sum_1^n q_i\, x^i$$

si trae che per

$$x^i = \delta_i^h$$

è $L^* = q_h$; e cioè la componente q_h nella base $\mathbf{E}$ può essere calcolata direttamente, come lavoro delle forze per gli spostamenti connessi con la configurazione di base $\mathbf{e}_h$.

Si osservi pure che la matrice $\mathbf{K}$ serve soltanto a definire la base $\mathbf{E}$ ortonormale, attraverso il prodotto scalare $\frac{1}{2}\,\mathbf{c}_i^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{c}_j$. Una volta ottenuta $\mathbf{E}$, le formule (130), (135) e (136)

(130) $\qquad \mathbf{q} = \mathbf{E}^T\,\mathbf{f}$

(135) $\qquad \mathbf{x} = \dfrac{1}{2\epsilon}\,\mathbf{q}$

(136) $\qquad \mathbf{c} = \mathbf{E}\,\mathbf{x}$

portano alla soluzione.

Poiché la base è ortonormale, può scriversi (104)

$$\epsilon \mathbf{I} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{K} \mathbf{E}$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}^T \mathbf{K} = \epsilon \mathbf{E}^{-1}$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{K} = \epsilon \mathbf{I}$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{E} \mathbf{E}^T = \epsilon \mathbf{K}^{-1} .$$

La (136) quindi porge

$$\mathbf{c} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \tag{137}$$

La (137) deriva dalla relazione matriciale

$$E_t = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} - \mathbf{f}^T \mathbf{c} , \tag{138}$$

che si traduce, scrivendo le n condizioni di stazionarietà $\dfrac{\partial E_t}{\partial \varphi_i} = 0$, nel sistema

$$\mathbf{K} \mathbf{c} = \mathbf{f} . \tag{139}$$

Le (138) e (139) rappresentano la maniera ordinaria di operare sui sistemi lagrangiani. Operando invece su basi ortonormali, il sistema (139) si disaccoppia, e si perviene così alla (133) e (134).

10. Alcuni esempi.

a) La trave della fig. 3 ha tre parametri di libertà, e come coordinate lagrangiane si assumono le rotazioni dei tratti rigidi 1, 3, 5.
Risulta (114) (115)

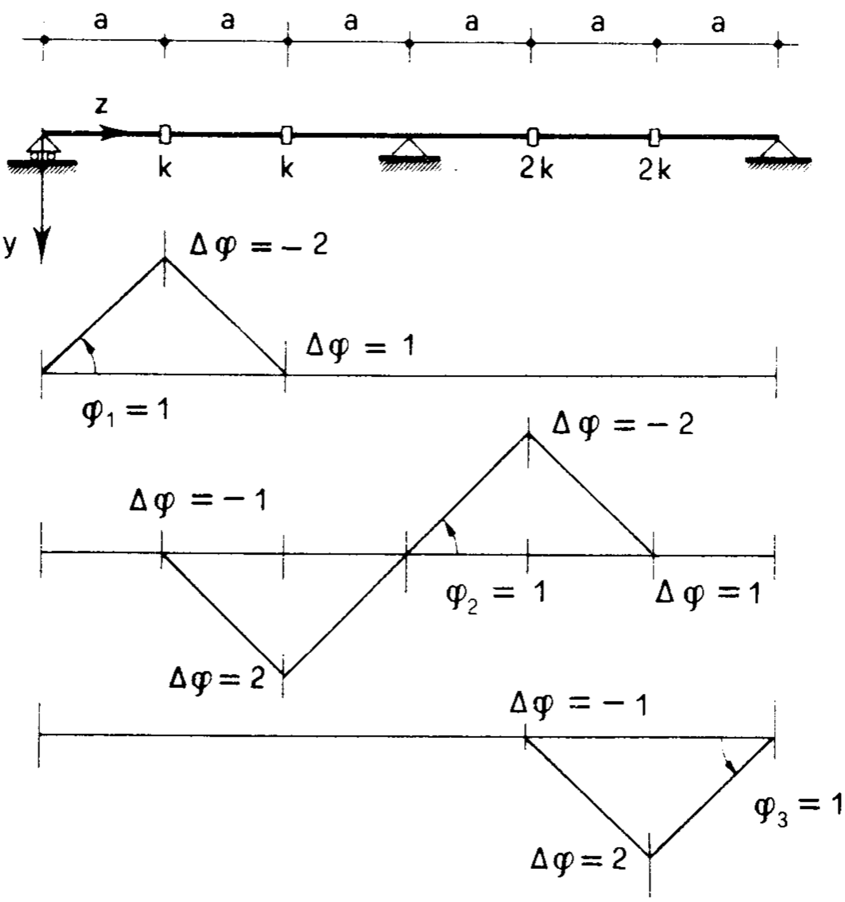


Figura 3

$$k_{11} = k \cdot 4 + k \cdot 1 = 5\,k$$

$$k_{22} = k \cdot 1 + k \cdot 4 + 2k \cdot 4 + 2k \cdot 1 = 15\,k$$

$$k_{33} = 2k \cdot 1 + 2k \cdot 4 = 10\,k$$

$$k_{12} = 2k \cdot 1 + k \cdot 2 = 4\,k$$

$$k_{13} = \qquad = 0$$

$$k_{23} = 4k \cdot 1 + 2k \cdot 2 = 8\,k$$

e quindi

$$\mathbf{K} = k \begin{vmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 15 & 8 \\ 0 & 8 & 10 \end{vmatrix} . \tag{140}$$

Assumendo come base **B** di partenza la *base naturale,* e cioè le tre configurazioni della fig. 3, il procedimento di Schmidt porta ad una base ortogonale come segue:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad ;$$

$$\lambda_2^1 = -\frac{\bar{b}_2 \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} = -\frac{\mathbf{b}_2^T \mathbf{K} \mathbf{e}_1/2}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{K} \mathbf{e}_1/2} = -\frac{2k}{2,5\,k} = -0,8$$

e quindi

$$\mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} - 0,8 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0,8 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad ;$$

$$\lambda_3^1 = -\frac{\bar{b}_3 \cdot \bar{e}_1}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} = -\frac{\mathbf{b}_3^T \mathbf{k} \mathbf{e}_1/2}{\mathbf{e}_1^T \mathbf{k} \mathbf{e}_1/2} = 0$$

$$\lambda_3^2 = -\frac{\bar{b}_3 \cdot \bar{e}_2}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2} = -\frac{\mathbf{b}_3^T \mathbf{k} \mathbf{e}_2/2}{\mathbf{e}_2^T \mathbf{k} \mathbf{e}_2/2} - \frac{4\,k}{5,9\,k} = -0,678$$

e quindi

$$\mathbf{e}_3 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} - 0{,}678 \begin{vmatrix} -0{,}8 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0{,}542 \\ -0{,}678 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Normalizzando si ottiene (83)

$$k_1 = \left(\frac{\epsilon}{\bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\epsilon}{2{,}5\,k} \right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}632 \left(\frac{\epsilon}{k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$k_2 = \left(\frac{\epsilon}{\bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\epsilon}{5{,}9\,k} \right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}411 \left(\frac{\epsilon}{k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$k_3 = \left(\frac{\epsilon}{\bar{e}_3 \cdot \bar{e}_3} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\epsilon}{2{,}288\,k} \right)^{\frac{1}{2}} = 0{,}661 \left(\frac{\epsilon}{k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi la base ortonormale è (fig. 4)

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0{,}632 & -0{,}329 & 0{,}358 \\ 0 & 0{,}411 & -0{,}448 \\ 0 & 0 & 0{,}661 \end{vmatrix} . \qquad (141)$$

L'energia elastica L è [(112) e (140)]

$$L = k\,(2{,}5\,\varphi_1^2 + 7{,}5\,\varphi_2^2 + 5\,\varphi_3^2 + 4\,\varphi_1\,\varphi_2 + 8\,\varphi_2\,\varphi_3)\ ; \qquad (142)$$

si verifica che, per i valori di φ delle tre colonne della (141), risulta $L = \epsilon$.

Nella base (141) il tensore metrico è (119)

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2}\,\mathbf{E}^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{E}$$

e cioè, per essere la base ortonormale (67),

$$\mathbf{E}^T \mathbf{K} \mathbf{E} = 2\epsilon \mathbf{I} \, ;$$

questa uguaglianza è verificata.

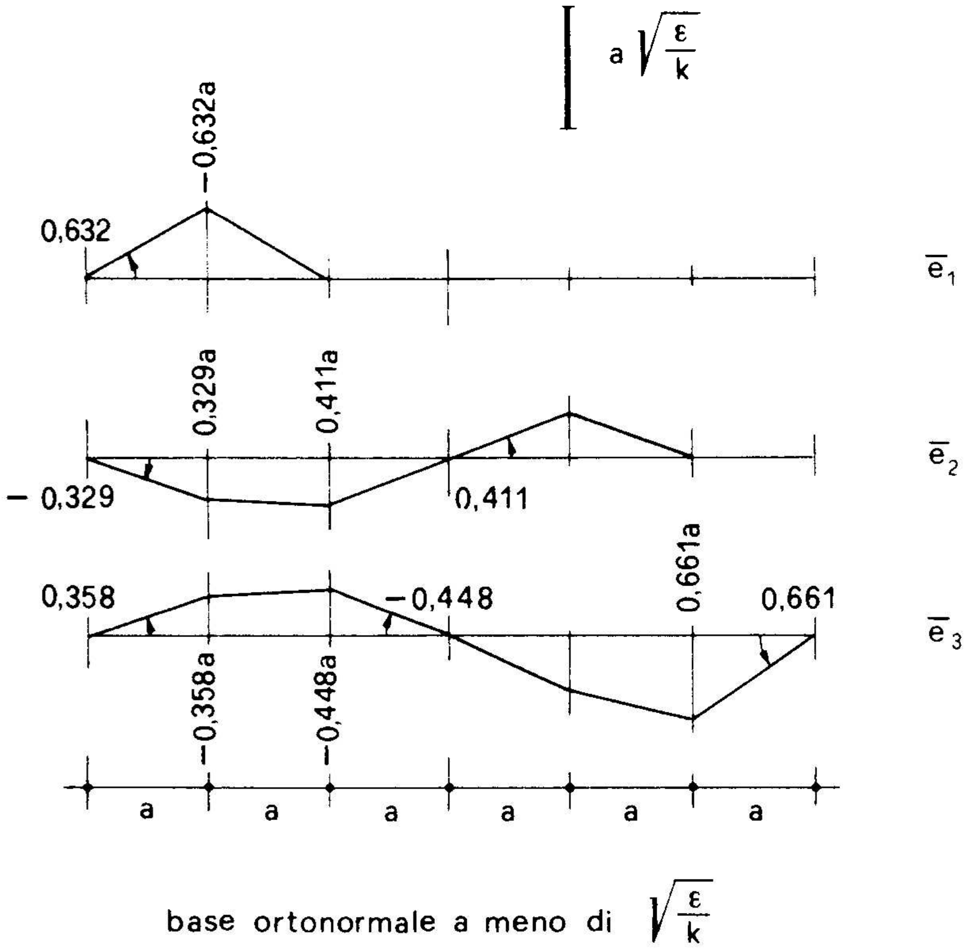


Figura 4

Se agisce (fig. 5) un carico q uniformemente distribuito sulla prima campata, è

$$f_1 = - \frac{2a \cdot a}{2} \, q = - q a^2$$

$$f_2 = \frac{2a \cdot a}{2} q = q a^2 \qquad \mathbf{f} = q a^2 \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$f_3 = 0$$

e quindi

$$\mathbf{q} = \mathbf{E}^T \mathbf{f} = q a^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} -0{,}632 \\ 0{,}740 \\ -0{,}806 \end{vmatrix} . \tag{142}$$

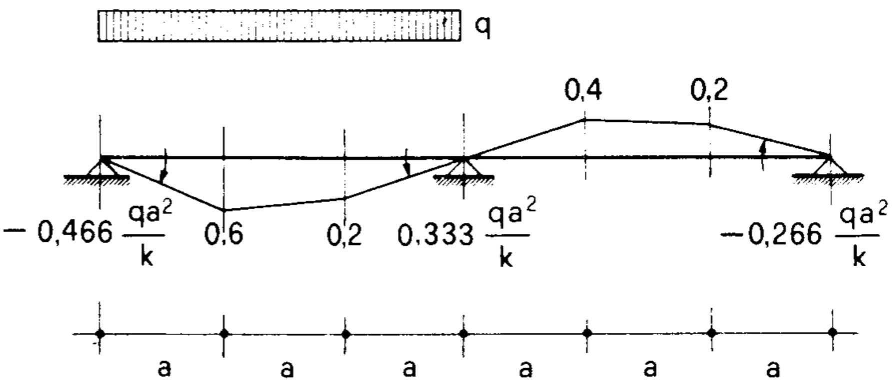


Figura 5

Si verifica che le q_i possono ottenersi direttamente considerando i lavori di q per effetto degli spostamenti connessi con le configurazioni di base (fig. 4):

$$q_1 = -\frac{1}{2} 2a \cdot 0{,}632\, a \sqrt{\frac{\epsilon}{k}}\, q = -0{,}632\, qa^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}}$$

$$q_2 = q \frac{2a}{2} (0{,}329a + 0{,}411\, a) \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} = 0{,}740\, qa^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \tag{143}$$

$$q_3 = q \frac{2a}{2} (-0{,}358a - 0{,}448a) \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} = -0{,}806\, qa^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}}$$

Le k hanno dimensioni di coppia, e cioè di lavoro; le q_i hanno perciò anch'esse dimensioni di lavoro.

Le (135) forniscono

$$\mathrm{x} = \frac{qa^2}{\sqrt{\epsilon k}} \begin{vmatrix} -0{,}316 \\ 0{,}370 \\ -0{,}403 \end{vmatrix} . \tag{144}$$

e le (136)

$$\mathrm{c} = \mathrm{E}\mathrm{x} = \frac{qa^2}{k} \begin{vmatrix} -0{,}466 \\ 0{,}333 \\ -0{,}266 \end{vmatrix} . \tag{145}$$

Nella stessa fig. 5 è disegnata la deformata. Si verifica che il lavoro eseguito dalle forze è

$$L_a = \frac{q}{2} \frac{2a}{2} \left(0{,}466 \frac{qa^3}{k} + 0{,}333 \frac{qa^3}{k}\right) = 0{,}4 \frac{q^2 a^4}{k} ,$$

e l'energia di deformazione è

$$L = \frac{1}{2} \Sigma_i k_i \Delta\varphi_i^2 = 0{,}4 \frac{q^2 a^4}{k} .$$

Si osservi che le (134) permettono di interpretare le deformate costituenti la base ortonormale (fig. 4) come linee d'influenza delle componenti controvarianti; sotto un qualsiasi insieme di forze F_j, la x^i si ottiene calcolando il lavoro delle F_j per gli spostamenti della e_i, e dividendolo per 2ϵ :

$$x_i = \frac{\Sigma_j F_j v_{ij}}{2\epsilon} . \tag{146}$$

b) Il telaio della fig. 6 è soggetto soltanto a forze orizzontali in corrispondenza dei traversi (sismo). La configurazione è perciò definita dai valori dei tre spostamenti (orizzontali) v_1 v_2 v_3 dei suddetti traversi.

Le rigidità k_{ij} si ottengono studiando preventivamente le tre deformate della base naturale; le reazioni sui traversi causate dai cedimenti $v_1 = 1$, oppure $v_2 = 1$, oppure $v_3 = 1$ sono state ottenute da programma, ma possono calcolarsi anche con tre distribuzioni alla Cross su telaio a nodi fissi. I loro valori sono riportati nella fig. 6.

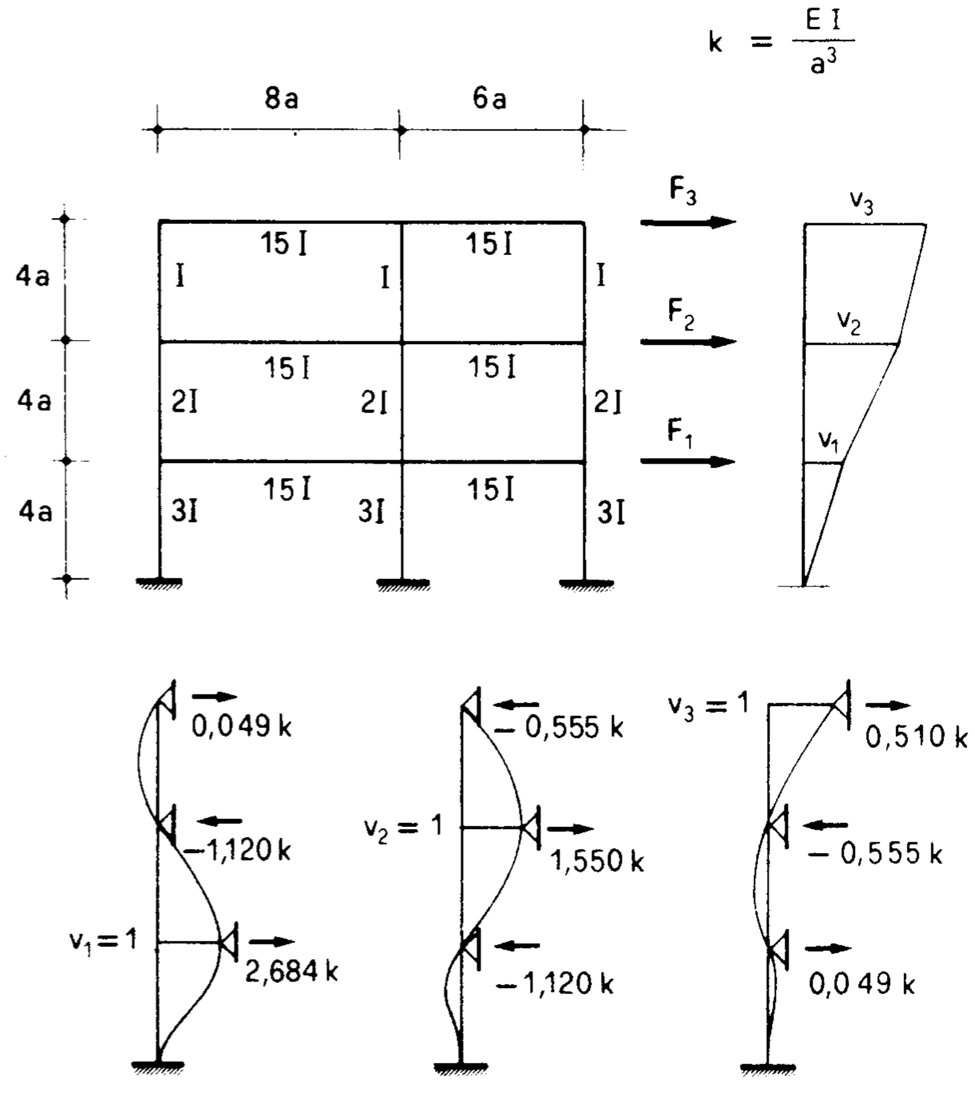


Figura 6

Si ha così

$$k_{11} = 2{,}684\,k$$

$$k_{22} = 1{,}555\,k$$

$$k_{33} = \quad 0{,}510\,k$$

$$k_{12} = -\,1{,}120\,k$$

$$k_{13} = \quad 0{,}049\,k$$

$$k_{23} = -\,0{,}555\,k$$

e quindi

$$\mathbf{K} = k \begin{vmatrix} 2{,}684 & -\,1{,}120 & 0{,}049 \\ -\,1{,}120 & 1{,}555 & -\,0{,}555 \\ 0{,}049 & -\,0{,}555 & 0{,}510 \end{vmatrix} . \qquad (147)$$

Poiché

$$k = \frac{EI}{a^3} \quad ,$$

le dimensioni di k_{ij} sono, come quelle di k, pari ad $[FL^{-1}]$.

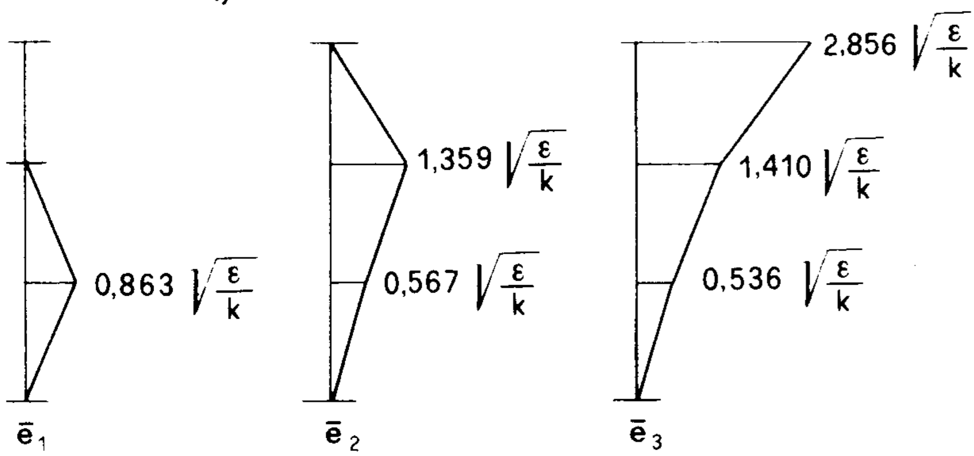


Figura 7

Una base ortonormale è la seguente (fig. 7).

$$\mathbf{E} = \sqrt{\frac{\epsilon}{k}} \begin{vmatrix} 0{,}863 & 0{,}567 & 0{,}536 \\ 0 & 1{,}359 & 1{,}410 \\ 0 & 0 & 2{,}856 \end{vmatrix} . \qquad (148)$$

Le dimensioni degli elementi di E sono $[l]$; le dimensioni del tensore metrico sono, come devono essere, $[Fl]$.

Se agisce l'insieme di forze della fig. 8 si ha

$$\mathbf{f} = F \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0{,}5 \end{vmatrix} \tag{149}$$

e quindi

$$\mathbf{q} = \mathbf{E}^T \mathbf{f} = \sqrt{\frac{\epsilon}{k}}\, F \begin{vmatrix} 0{,}863 \\ 1{,}926 \\ 3{,}374 \end{vmatrix} \tag{150}$$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2\epsilon}\, \mathbf{q} = \frac{F}{\sqrt{\epsilon k}} \begin{vmatrix} 0{,}431 \\ 0{,}963 \\ 1{,}687 \end{vmatrix} .$$

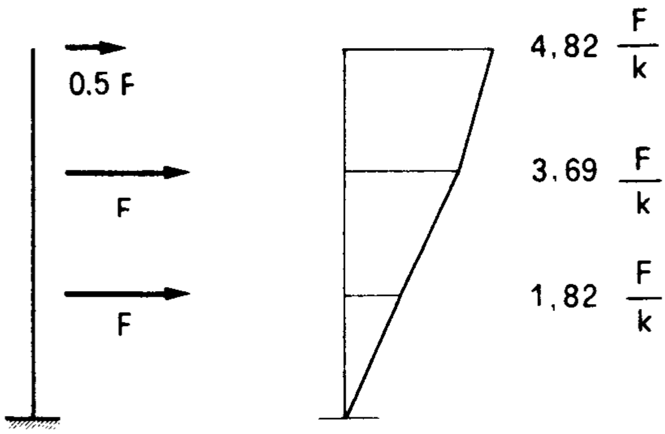


Figura 8

Le q_i hanno dimensione $[Fl]$, le x_i sono numeri puri.
Si ha infine (136)

$$\mathbf{c} = \mathbf{E}\mathbf{x} = \frac{F}{k} \begin{vmatrix} 1{,}824 \\ 3{,}688 \\ 4{,}818 \end{vmatrix} . \tag{151}$$

Il lavoro eseguito dalle forze è

$$L_a = \frac{F}{2} \cdot \frac{F}{k} \left(1{,}824 + 3{,}688 + 2{,}414\right) = 3{,}963 \frac{F^2}{k} .$$

l'energia di deformazione è

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} = 3{,}963 \frac{F^2}{k} .$$

c) L'arco della fig. 9 è a due gradi di libertà.

Le coordinate lagrangiane sono gli abbassamenti del secondo e quarto concio. La base naturale è riportata nella stessa fig. 9. Si ha:

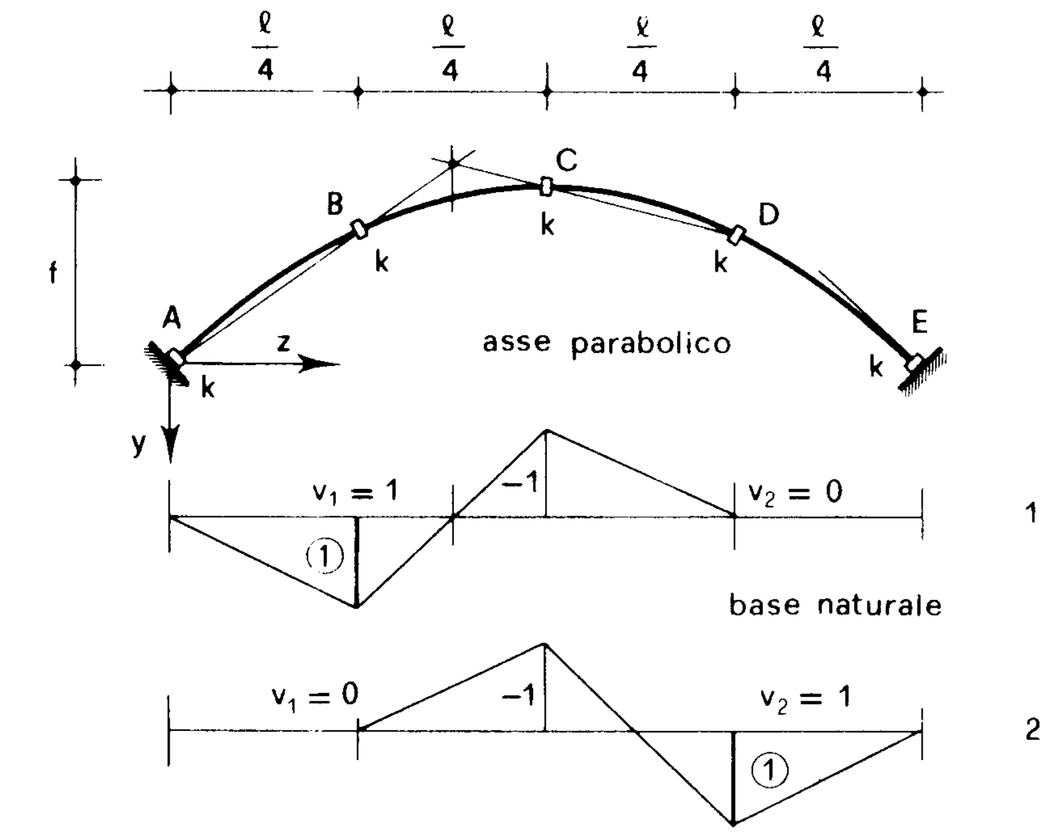
$$k_{11} = k \sum_j \Delta\varphi_{1j}^2 = 320 \frac{k}{l^2}$$

$$k_{22} = k \sum_j \Delta\varphi_{2j}^2 = 320 \frac{k}{l^2}$$

$$k_{12} = k \sum_j \Delta\varphi_{1j} \Delta\varphi_{2j} = 240 \frac{k}{l^2}$$

e quindi

$$\mathbf{K} = \frac{k}{l^2} \begin{vmatrix} 320 & 240 \\ 240 & 320 \end{vmatrix} . \tag{152}$$



$\Delta\varphi_{1_i}$	$-\frac{4}{\ell}$	$\frac{12}{\ell}$	$-\frac{12}{\ell}$	$\frac{4}{\ell}$	0
$\Delta\varphi_{2_i}$	0	$\frac{4}{\ell}$	$-\frac{12}{\ell}$	$\frac{12}{\ell}$	$-\frac{4}{\ell}$

Figura 9

Anche in questo caso le dimensioni di k_{ij} sono $[Fl^{-1}]$. Per simmetria, una base ortogonale è quella della fig. 10, e cioè

$$\mathbf{e}_1 = \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \\ \eta_1 \end{vmatrix} \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \eta_2 \\ \\ -\eta_2 \end{vmatrix} . \tag{153}$$

Le condizioni di normalizzazione sono

$$\frac{1}{2}\, \mathbf{e}_1^T\, \mathbf{K}\, \mathbf{e}_1 = 560\, \frac{k}{l^2}\, \eta_1^2 = \epsilon$$

$$\frac{1}{2}\,\mathbf{e}_2^T\,\mathbf{K}\,\mathbf{e}_2 \;=\; 80\,\frac{k}{l^2}\,\eta_2^2 = \epsilon$$

da cui

$$\eta_1 = 0{,}0423\,l\,\sqrt{\frac{\epsilon}{k}}$$

$$\eta_2 = 0{,}1118\,l\,\sqrt{\frac{\epsilon}{k}}$$

e quindi

$$\mathbf{E} = l\,\sqrt{\frac{\epsilon}{k}}\,\begin{vmatrix} 0{,}0423 & 0{,}1118 \\ & \\ 0{,}0423 & -0{,}1118 \end{vmatrix}\,. \qquad (154)$$

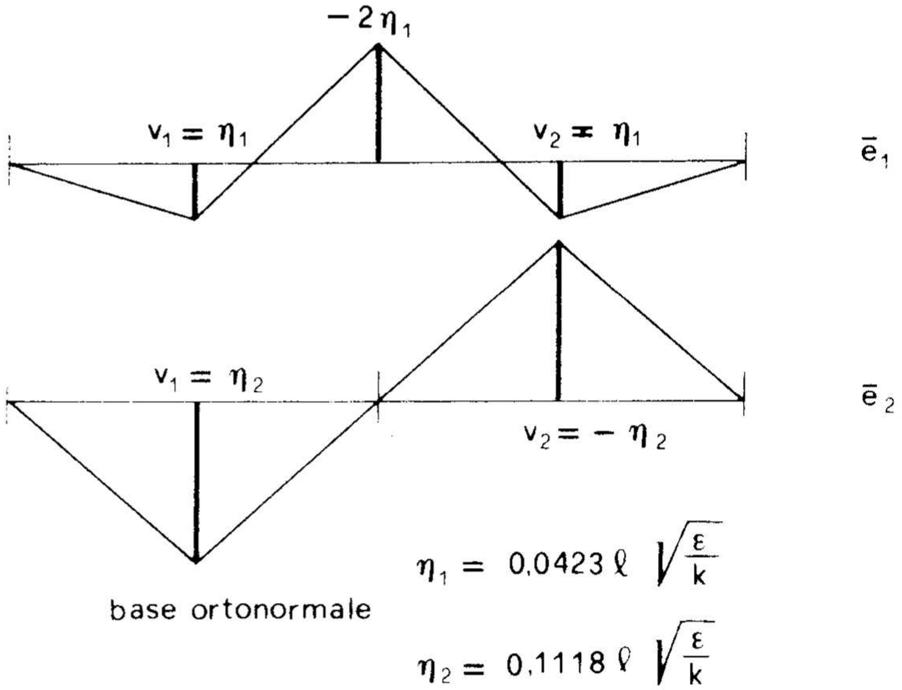


Figura 10

Se agisce un carico su tutta la luce è q = 0; infatti le aree delle due deformate corrispondenti alla base naturale sono nulle. Ciò è coerente con il fatto che, essendo l'asse parabolico, la linea d'influenza del momento flettente deve avere area nulla, essendo ovunque nullo il momento sotto un carico uniforme esteso a tutta la linea (purché si trascuri l'effetto dell'accorciamento assiale).

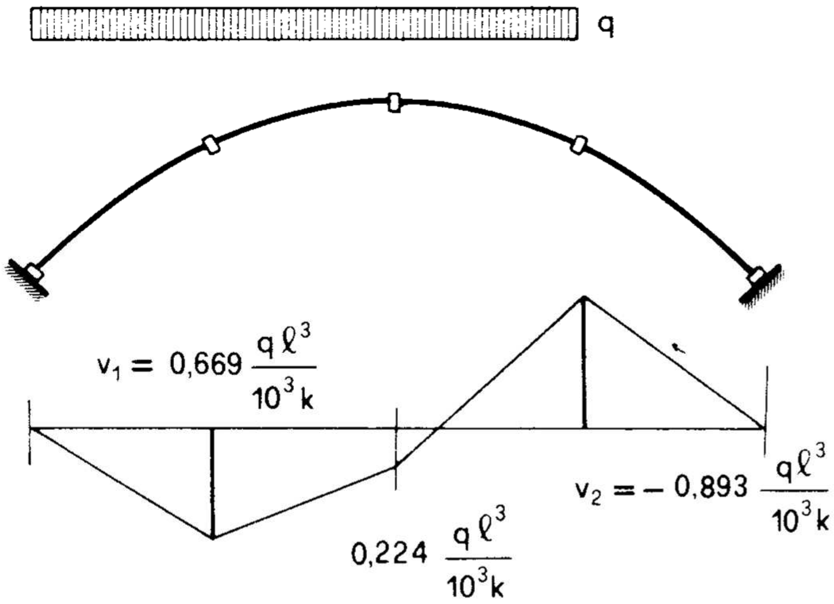


Figura 11

Se invece il carico q è esteso da 0 a $\frac{3}{4}\,l$ (fig. 11) si ha

$$\mathbf{f} = q\,l \begin{vmatrix} 0 \\ \\ -\,0{,}125 \end{vmatrix} \tag{155}$$

e quindi

$$\mathbf{q} = \mathbf{E}^T\mathbf{f} = q\,l^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{k}}\,10^{-3} \begin{vmatrix} -\,5{,}287 \\ \\ -\,13{,}975 \end{vmatrix} \tag{156}$$

$$\mathrm{x} = \frac{1}{2\epsilon}\,\mathrm{q} = q\,l^2 \sqrt{\frac{1}{\epsilon k}}\,10^{-3} \left|\begin{matrix} -\,2.643 \\ \\ 6.987 \end{matrix}\right| \tag{157}$$

$$\mathrm{c} = \mathbf{E}\mathrm{x} = \frac{q\,l^3}{k}\,10^{-3} \left|\begin{matrix} 0.669 \\ \\ -\,0.893 \end{matrix}\right| . \tag{158}$$

La deformata è riportata nella fig. 11 .