Appendice
(a cura di Claudio Franciosi)

Il calcolo automatico delle autosoluzioni

1. Premessa

Siano A e B matrici di ordine $n \times n$ e sia q un vettore di ordine n. Si pongono i seguenti problemi:

a) ricerca dei valori del parametro λ (autovalori) per cui si abbia:

$$Aq = \lambda q \tag{1}$$

b) ricerca dei valori del parametro λ per cui risulti:

$$Bq = \lambda Cq \tag{2}$$

Il caso a) (problema classico degli autovalori) appare come caso particolare di b) (problema generale degli autovalori) per $C = I$, ma esso sarà trattato separatamente.

Si considerano infatti i soli casi particolari in cui A è simmetrica e B e C sono ambedue simmetriche, con C definita positiva; in tal caso è il problema generale che viene ricondotto al caso classico, e non viceversa.

In ambedue i casi la ricerca del vettore q soddisfacente la (1), o rispettivamente la (2), una volta fissato il valore del parametro, va sotto il nome di ricerca dell'autovettore q.

2. Le trasformazioni di similitudine e congruenza

Siano P e Q matrici di ordine $n \times n$ non singolari. La matrice A e la matrice $T = QAP$ si dicono equivalenti.

Se Q è uguale alla matrice trasposta di P, A e T si dicono congruenti, ed il prodotto:

$$P^T AP$$

si dice trasformazione di congruenza.

Se Q è uguale alla matrice inversa di P, A e T si dicono simili, ed il prodotto:

$$P^{-1}AP$$

si dice trasformazione di similitudine.

Se infine P è ortogonale, e quindi $P^T = P^{-1}$ le due trasformazioni coincidono.

La trasformazione di congruenza conserva la simmetria della matrice, la trasformazione di similitudine conserva gli autovalori; la trasformazione di ortogonalità conserva quindi sia la simmetria sia gli autovalori.

Nel seguito si farà uso di due matrici P, ambedue ortogonali, di forma particolare.

La prima, indicata con R_{ij} è uguale alla matrice identica, ma presenta diversi da zero gli elementi di posto (i, j) e (j, i), e diversi da uno gli elementi di posto (i, i) e (j, j).

La seconda, indicata con H, è della forma:

$$H = I - 2ww^T$$

con la restrizione $w^T w = 1$

Tale matrice, oltre ad essere ortogonale, è simmetrica.

3. Il metodo di Jacobi per il caso classico

3a) Premesse

Secondo il metodo di Jacobi si opera una serie di trasformazioni ortogonali, tramite matrici R_{ij}, ognuna delle quali ha l'effetto di annullare un elemento prescelto al di fuori della diagonale principale. L'elemento annullato in un generico passo può tornare non nullo ai passi successivi, e quindi il processo è iterativo; la prova della convergenza è basata sulla diminuzione, ad ogni passo, della norma degli elementi non diagonali.

Si voglia allora annullare l'elemento di posto (i, j).

Consideriamo la matrice R_{ij} in cui sia:

$$\begin{array}{cc|c} \text{col. } i & \text{col. } j & \\ \hline \cos\vartheta & \sin\vartheta & \text{riga } i \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta & \text{riga } j \end{array}$$

con $|\vartheta| \leqslant \dfrac{\pi}{4}$.

Il prodotto:

$$A_1 = R_{ij}^{-1} A R_{ij}$$

fornisce una matrice uguale alla matrice A tranne che nelle righe e nelle colonne i e j

I valori modificati sono:

$$\left.\begin{aligned} a'_{ik} &= a'_{ki} = a_{ki} \cos\vartheta + a_{kj} \sin\vartheta \\ a'_{jk} &= a'_{kj} = -a_{ki} \sin\vartheta + a_{kj} \cos\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \text{per } k \neq i,j \tag{3}$$

$$a'_{ii} = a_{ii} \cos^2\vartheta + 2a_{ij} \cos\vartheta \sin\vartheta + a_{jj} \sin^2\vartheta \tag{4}$$

$$a'_{jj} = a_{jj} \sin^2\vartheta + 2a_{ij} \cos\vartheta \sin\vartheta + a_{jj} \cos^2\vartheta \tag{5}$$

$$a'_{ij} = a'_{ji} = (a_{jj} - a_{ii}) \cos\vartheta \sin\vartheta + a_{ij} (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)$$

ϑ è scelto in modo da annullare a'_{ij}, ottenendo:

$$\begin{aligned} \frac{\cos\vartheta \sin\vartheta}{\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta} &= \frac{a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \\ \tan 2\vartheta &= \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \quad . \end{aligned} \tag{6}$$

La scelta dell'elemento da annullare ad ogni passo è importante per la velocità della convergenza. In un programma automatico non è conveniente scegliere ad ogni passo il massimo tra gli elementi non diagonali; si preferisce esaminare ordinatamente gli elementi, annullandoli se superano un certo valore.

Tale valore, detto "di soglia", è abbassato convenientemente ogni volta che si sono esaminati tutti gli elementi non diagonali.

Alla fine del procedimento si ha:

$$R^{-1} A R = \Lambda \tag{7}$$

con Λ diagonale ed R prodotto di tutte le matrici R_{ij} usate nel procedimento.

Essendo, dalla (7):

$$AR = \Lambda R$$

si nota che R è la matrice degli autovettori; è perciò conveniente ad ogni passo calcolare il nuovo valore di R.

Se $R^{(m)}$ è il valore di R al passo m, gli elementi di $R^{(m+1)}$ sono invariati se non appartengono alle colonne i e j. I nuovi valori di tali colonne sono:

$$\begin{aligned} R_{ki}^{(m+1)} &= R_{ki}^{(m)} \cos \vartheta_{(m+1)} - R_{kj}^{(m)} \sin \vartheta_{(m+1)} \\ R_{kj}^{(m+1)} &= R_{ki}^{(m)} \sin \vartheta_{(m+1)} + R_{kj}^{(m)} \cos \vartheta_{(m+1)} \, . \end{aligned} \tag{8}$$

Il procedimento ha lo svantaggio di fornire sempre tutti gli autovalori, e di essere quindi abbastanza lento.

D'altro canto esso si presta con estrema facilità al calcolo degli autovettori, fornisce anche autovalori coincidenti, ed in tal caso fornisce una base di autovettori per tale autospazio.

3b) La programmazione del procedimento (subroutine JACOBI)

I parametri di input ed output sono descritti nel listato del programma (righe 70-190) (fig. 1).

- le righe 230-430 leggono i dati, e se richiesto, stampano la matrice di partenza
- le righe 450-530 pongono la matrice identica in R
- le righe 540-660 calcolano la norma iniziale degli elementi fuori diagonale, con la formula

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2} \qquad i \neq j$$

e la norma finale, posta uguale a:

$$A2 = \frac{A \cdot R}{N}$$

dove R è stato posto (riga 440), pari a 10^{-12}.

- le righe 680-780 inizializzano alcuni parametri.

  I2 è una variabile di test, che è posta inizialmente uguale a zero, per divenire pari ad uno (riga 820) non appena si incontri un elemento di valore assoluto superiore al valore di soglia T, calcolato nella riga 710.

Tale valore è posto inizialmente pari al valore della norma iniziale, ed abbassato ad ogni ciclo (riga 720); esso permette di esaminare se è conveniente annullare l'elemento non diagonale esaminato, oppure se è preferibile passare oltre (test di riga 810).
Nella 730 e 740 si inizializzano i valori L ed M delle colonne da esaminare, $M1$ ed $L1$ (righe 750-760) servono per il calcolo del posto dell'elemento (l, m) nella matrice colonna A.
Precisamente, se si memorizza in A il triangolo inferiore per righe l'elemento di posto (i, j) si trova nella posizione:

$$H = j + \frac{i^2 - i}{2} \; .$$

La 770 ad esempio individua l'elemento di posto (m, l).

– Le righe 840-960 calcolano sin ϑ e cos ϑ: essendovi relazioni algebriche tra tan 2ϑ e sin ϑ, cos ϑ si può evitare il calcolo di funzioni trigonometriche.
Sia infatti:

$$\lambda = -a_{ij}$$

$$\mu = \frac{1}{2} (a_{ii} - a_{jj}) \qquad (9)$$

da cui:

$$\mathrm{tg}\, 2\vartheta = \frac{2\, \mathrm{tg}\, \vartheta}{1 - \mathrm{tg}^2\, \vartheta} = \frac{\lambda}{\mu} \; .$$

E' quindi:

$$2\, \mathrm{tg}\, \vartheta = \frac{\lambda}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu}\, \mathrm{tg}^2\, \vartheta$$

$$\mathrm{tg}\, \vartheta = -\frac{\mu}{\lambda} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\lambda^2}} \; .$$

Sia ora:

$$\omega^2 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + \mu^2} \tag{10}$$

da cui:

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{1}{\omega}\sqrt{1 - \omega^2}$$

e quindi in definitiva:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \pm \frac{1}{\omega}\sqrt{1 - \omega^2} \pm \frac{1}{\omega} \quad .$$

D'altra parte:

$$\sin\vartheta = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta}}$$

e quindi:

$$\sin\vartheta = \frac{1 - \sqrt{1 - \omega^2}}{\sqrt{2(1 - \sqrt{1 - \omega^2})}} \quad .$$

Posto $a = \sqrt{1 - \omega^2}$ si ha:

$$\sin\vartheta = \frac{1 - a}{\sqrt{2(1 - a)}} = \frac{(1 - a)(1 + a)}{\sqrt{2(1 - a)(1 + a)(1 + a)}} =$$

$$= \frac{1 - a^2}{\sqrt{2(1 - a^2)(1 + a)}} \quad .$$

E' quindi infine:

$$\sin\vartheta = \frac{\omega}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - \omega^2})}} \quad . \tag{11}$$

Le righe 860 ed 870 individuano gli elementi di posto (l, l) ed (m, m), la 880 calcola μ secondo la formula (9), le righe 890-910 calcolano ω secondo la (10), la 920 calcola $\sin\vartheta$ secondo la (11), mentre le rimanenti righe calcolano, nell'ordine, $\sin^2\vartheta$, $\cos\vartheta$, $\cos^2\vartheta$, $\sin\vartheta\cos\vartheta$.

- le righe 1020-1090 eseguono la formula (3)
- le righe 1230-1280 eseguono le formule (4) e (5)
- le righe 1000 e 1010 individuano l'elemento iniziale, nell'array R, delle colonne L ed M che poi vengono modificate, secondo le (8), nelle righe 1140-1180
- Seguono alcuni test; nell'ordine si esamina:
  se si è annullata tutta la colonna l (1320-1340)
  se si è terminato un intero ciclo (1380-1400)
  se nel ciclo terminato è stata effettuata qualche trasformazione (1420-1460)
  se la norma finale è ancora maggiore del valore di soglia corrente (1480-1500).

Se tutti questi test sono soddisfatti si passa ad ordinare, in senso decrescente, gli autovalori ed i corrispondenti autovettori, ed alla loro stampa. Gli autovettori sono normalizzati dividendo ogni componente del generico autovettore per la sua *n-ma* componente (che è così pari all'unità).

```
 10 ! SUBROUTINE JACOBI
 20 ! **************************
    ****************************
    *************
 30 ! ** CALCOLO AUTOVALORI ED A
    UTOVETTORI DI UNA MATRICE SI
    MMETRICA
 40 ! ** METODO DI JACOBI CLASSI
    CO
 50 ! ** NELLA MATRICE A VA MEMO
    RIZZATO IL TRIANGOLO INFERIO
    RE PER RIGHE
 60 ! **************************
    ****************************
    *************
 70 ! ** PARAMETRI DI INPUT :
 80 ! ** N - DIMENSIONE DELLA MA
    TRICE
 90 ! ** M2 - VARIABILE DA PORRE
     UGUALE A ZERO SE SI VUOL CA
    LCOLARE ANCHE GLI AUTOVETTOR
    I
100 ! ** S9 - VARIABILE DA PORRE
     UGUALE A :
110 ! ** 0  SE NON SI VOGLIONO S
    TAMPE
120 ! ** 1  SE SI VUOLE LA SOLA
    STAMPA FINALE
130 ! ** 10 SE SI VUOLE ANCHE LA
     STAMPA DELLA MATRICE DI PAR
    TENZA
140 ! ** A(I) - MATRICE COLONNA
    DEL TRIANGOLO INFERIORE DELL
    A MATRICE
150 ! **************************
    ****************************
    *************
160 ! ** PARAMETRI DI OUTPUT :
170 ! ** N AUTOVALORI NELLE POSI
    ZIONI DIAGONALI DI A
180 ! ** SE RICHIESTI N AUTOVETT
    ORI IN COLONNA IN R
190 ! **************************
    ****************************
    *************
200 SETTIME 0,0
210 OPTION BASE 1
220 DIM A(100),R(200)
230 READ N,M2,S9
240 FOR I=1 TO N*(N+1)/2
250 READ A(I)
260 NEXT I
270 IF S9<>10 THEN 440
280 !
290 ! STAMPE INIZIALI
300 !
310 PRINT USING 330
320 PRINT USING 340
330 IMAGE 5/,"=================
    ===========",/,"SUBROUTINE
    JACOBI"
```

Figura 1a

```
340 IMAGE "====================
    =========",5/
350 PRINT USING 360
360 IMAGE "MATRICE A",3/
370 FOR I=1 TO N
380 FOR J=I TO N
390 H=I+(J^2-J)/2
400 PRINT "A("&VAL$(I)&","&VAL$(
    J)&") =",A(H)
410 NEXT J
420 NEXT I
430 PRINT USING "3/"
440 R=.000000000001
450 IF M2<>0 THEN 550
460 Q=-N
470 FOR J=1 TO N
480 Q=Q+N
490 FOR I=1 TO N
500 I1=Q+I
510 IF I=J THEN R(I1)=1 ELSE R(I
    1)=0
520 NEXT I
530 NEXT J
540 !
550 ! CALCOLO NORME INIZIALE E F
    INALE
560 !
570 A=0
580 FOR I=1 TO N
590 FOR J=I+1 TO N
600 A1=I+(J^2-J)/2
610 A=A+A(A1)^2
620 NEXT J
630 NEXT I
640 IF A<=0 THEN 1570
650 A=SQR(2*A)
660 A2=A*R/N
670 !
680 ! INIZIALIZZAZIONI
690 !
700 I2=0
710 T=A
720 T=T/N
730 L=1
740 M=L+1
750 M1=(M^2-M)/2
760 L1=(L^2-L)/2
770 L2=L+M1
780 !
790 ! TEST SULL'ELEMENTO NON DIA
    GONALE
800 !
810 IF ABS(A(L2))<T THEN 1300
820 I2=1
830 !
840 ! CALCOLO SENO E COSENO
850 !
860 L3=L+L1
870 M3=M+M1
880 X=(A(L3)-A(M3))^2
```

Figura 1b

```
890 Y=-A(L2)/SQR(A(L2)^2+X^2)
900 IF X>=0 THEN 920
910 Y=-Y
920 S1=Y/SQR(2*(1+SQR(1-Y^2)))
930 S2=S1^2
940 C1=SQR(1-S2)
950 C2=C1^2
960 S3=S1*C1
970 !
980 ! ROTAZIONE DELLE COLONNE L
    ED M
990 !
1000 L4=N*(L-1)
1010 M4=N*(M-1)
1020 FOR I=1 TO N
1030 Q=(I^2-I)/2
1040 IF I=L OR I=M THEN 1100
1050 IF I<=M THEN M5=I+M1 ELSE M
     5=M+Q
1060 IF I>=L THEN L5=L+Q ELSE L5
     =I+L1
1070 X=A(L5)*C1-A(M5)*S1
1080 A(M5)=A(L5)*S1+A(M5)*C1
1090 A(L5)=X
1100 IF M2<>0 THEN 1190
1110 !
1120 ! CALCOLO AUTOVETTORI
1130 !
1140 L6=L4+I
1150 M6=M4+I
1160 X=R(L6)*C1-R(M6)*S1
1170 R(M6)=R(L6)*S1+R(M6)*C1
1180 R(L6)=X
1190 NEXT I
1200 !
1210 ! CALCOLO ELEMENTI DIAGONAL
     I (L,L) ED (M,M)
1220 !
1230 X=2*A(L2)*S3
1240 Y=A(L3)*C2+A(M3)*S2-X
1250 X=A(L3)*S2+A(M3)*C2+X
1260 A(L2)=(A(L3)-A(M3))*S3+A(L2
     )*(C2-S2)
1270 A(L3)=Y
1280 A(M3)=X
1290 !
1300 ! TEST SU M
1310 !
1320 IF M=N THEN 1360
1330 M=M+1
1340 GOTO 750
1350 !
1360 ! TEST SU L
1370 !
1380 IF L=N-1 THEN 1440
1390 L=L+1
1400 GOTO 740
1410 !
1420 ! TEST DI PICCOLEZZA
1430 !
```

Figura 1c

```
1440 IF I2<>0 THEN 1500
1450 I2=0
1460 GOTO 730
1470 !
1480 ! TEST SULLA NORMA FINALE
1490 !
1500 IF T>A2 THEN 720
1510 !
1520 ! USCITA
1530 !
1540 !
1550 ! ORDINAMENTO AUTOVALORI IN
      ORDINE CRESCENTE
1560 !
1570 Q=-N
1580 FOR I=1 TO N
1590 Q=Q+N
1600 L3=I+(I^2-I)/2
1610 Q9=N*(I-2)
1620 FOR J=I TO N
1630 Q9=Q9+N
1640 M3=J+(J^2-J)/2
1650 IF A(L3)<=A(M3) THEN 1800
1660 X=A(L3)
1670 A(L3)=A(M3)
1680 A(M3)=X
1690 !
1700 ! CALCOLO AUTOVETTORI
1710 !
1720 IF M2<>0 THEN 1800
1730 FOR K=1 TO N
1740 L6=Q+K
1750 M6=Q9+K
1760 X=R(L6)
1770 R(L6)=R(M6)
1780 R(M6)=X
1790 NEXT K
1800 NEXT J
1810 NEXT I
1820 W1=TIME
1830 IF S9=0 THEN 2110
1840 !
1850 ! STAMPA AUTOVALORI
1860 !
1870 PRINT USING 1880
1880 IMAGE 2/   ,"AUTOVALORI",2/
1890 FOR I=1 TO N
1900 A1=I+(I^2-I)/2
1910 PRINT A(A1)
1920 NEXT I
1930 PRINT USING "4/"
1940 !
1950 ! NORMALIZZAZIONE E STAMPA
      AUTOVETTORI
1960 !
1970 IF M2<>0 THEN 2110
1980 V=1
1990 V1=N
2000 FOR I=1 TO N
2010 PRINT USING "2/"
```

Figura 1d

```
2020 PRINT "AUTOVETTORE";I
2030 PRINT
2040 FOR J=1 TO N
2050 R(V)=R(V)/R(V1)
2060 PRINT R(V)
2070 V=V+1
2080 NEXT J
2090 V1=V1+N
2100 NEXT I
2110 PRINT
2120 PRINT USING 2130 ; W1
2130 IMAGE 8/,"Tempo di esecuzio
     ne ",DDDD.DD,X,"sec",10/
2140 END
2150 DATA 4,0,10
2160 DATA 7,1,2,5,3,7,1,2,3,5,-2
     ,1,0,3,-6,3,1,2,-5,1,4,0,0,
     3,-1,7,8,2
```

Figura 1e

4. Il metodo di Givens-Householder

Secondo il metodo di Givens-Householder la matrice di partenza viene preventivamente ridotta a matrice tridiagonale, tramite una trasformazione ortogonale del secondo tipo. Di questa matrice si calcolano poi gli autovalori, sfruttando le proprietà del suo polinomio caratteristico, e gli autovettori; da questi infine ci si riconduce agli autovettori del problema originario.

4a) Riduzione di A a matrice tridiagonale simmetrica

La riduzione di A a forma tridiagonale simmetrica si ottiene in forma non iterativa, tramite $n-2$ trasformazioni ortogonali. Dopo la i-ma trasformazione:

$$A_i = H_i H_{i-1} \ldots H_1 A (H_i \ldots H_1)^T \tag{12}$$

la matrice A_i ha il minore principale di ordine i in forma tridiagonale.

Esaminiamo la prima trasformazione (la matrice $I - 2uu^T$ è simmetrica):

$$A_1 = (I - 2uu^T)\, A\, (I - 2uu^T)$$

il cui scopo è annullare gli elementi della prima riga e della prima colonna di A al di fuori delle posizioni tridiagonali.

Nel seguito si sceglie il vettore u in modo che $u_1 = 0$, quindi la prima colonna della matrice $I - 2uu^T$ è $(1, 0, \ldots 0)^T$ e la prima colonna di A_1 è quella di $(I - 2uu^T)A$.

Indicata con a la prima colonna di A e con c la prima colonna di A_1, della forma desiderata $(/, /, 0, \ldots 0)^T$, il problema è scegliere il vettore u in modo che sia:

$$(I - 2uu^T)\, a = c \tag{13}$$

Le condizioni cui deve soddisfare il vettore u sono già note.

- $u^T u = 1$
- la prima componente di u deve essere nulla.

Il lemma successivo garantisce l'esistenza e l'unicità del vettore u:

LEMMA – Siano x ed y vettori non uguali e con norma uguale. Esiste allora un vettore u di norma unitaria tale che:

$$(I - 2uu^T)x = y \; ; \tag{14}$$

tale vettore è fornito dall'espressione:

$$u = \frac{x - y}{\| x - y \|} \tag{15}$$

ed è l'unico a soddisfare la (14) e ad avere norma unitaria.

DIM. Avendo x ed y norma uguale dovrà essere $x^T x = y^T y$ e $x^T y = y^T x$.

Ne segue, per la (15)

$$(I - 2uu^T)x = \left[I - \frac{2(x - y)(x - y)^T}{\| x - y \|^2} \right] x =$$

$$= x - \frac{2(x^T x - y^T y)}{2(x^T x - y^T y)} (x - y) = y \; .$$

Se esistesse un vettore v di norma unitaria tale che:

$$y = (I - 2vv^T)x = (I - 2uu^T)x$$

sarebbe anche $vv^T x = uu^T x$. Essendo $x \neq y$ ne segue $u^T x \neq e$, quindi

$$u = \alpha v = \pm v \; .$$

Poiché la prima componente di u è nulla, dovra essere $c_1 = a_{11}$, e poiché $\| c \| = \| a \|$ si avrà:

$$c = (a_{11}, \pm s, 0, \ldots 0)^T$$

dove è:

$$s^2 = \| a \|^2 - a_{11}^2 = \sum_2^n a_{j1}^2 \; . \tag{16}$$

Per il lemma è allora:

$$u^T = \frac{(a - c)^T}{\| a - c \|} = \frac{(0, a_{21} + s, a_{31} \ldots a_{n1})}{\| a - c \|} \quad ;$$

A_1 ha allora la forma desiderata:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \pm s & 0 & . & . & . & 0 \\ \pm s & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \times & \times & \times & \times & \times & \times \end{vmatrix} .$$

L'i-mo passo è la replica del primo applicato alla matrice di ordine $n - i + 1$.

4b) Calcolo degli autovalori di una matrice tridiagonale simmetrica

Sia:

$$C = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & & & & & \\ b_1 & c_2 & b_2 & & & & \\ & b_2 & \cdot & \cdot & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot \quad \cdot & b_{n-1} \\ & & & & & b_{n-1} & c_n \end{vmatrix}$$

una matrice tridiagonale, e supponiamo che nessun b_i possa essere nullo.

Tale assunzione non lede la generalità del procedimento; se infatti r dei b_i fossero nulli, C sarebbe esprimibile come somma diretta di $r + 1$ matrici tridiagonali di ordine più basso:

$$C = \begin{vmatrix} [C^{(1)}] & & & \\ & [C^{(2)}] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [C^{(n)}] \end{vmatrix}$$

dove $C^{(s)}$ è di ordine m_s, e $\sum_{i=1}^{r} m_i = n$.

Gli autovalori di C sono quelli delle $r + 1$ matrici $C^{(s)}$, e se x è un autovettore di $C^{(s)}$, il corrispondente autovettore y di C è dato da:

$$y^T = (\underset{m_1}{0},\ \underset{m_2}{0}, \ldots,\ \underset{m_{s-1}}{0}, x^T,\ \underset{m_{s+1}}{0}, \ldots\ \underset{m_n}{0}) \; .$$

Se si vuole evitare di trattare questo caso particolare si può (vedi [2]) sostituire l'eventuale b_i nullo con una quantità molto piccola.

Si assuma quindi $b_i \neq 0 \; i = 1, \ldots N - 1$

Definiamo i polinomi:

$$p_0(\lambda) = 1$$

$$p_1(\lambda) = (c_1 - \lambda)$$

$$p_i(\lambda) = (c_i - \lambda) p_{i-1}(\lambda) - b_{i-1}^2 p_{i-2}(\lambda) \quad i = 2, \ldots n \, .$$

Essi hanno la proprietà, verificabile per ispezione diretta:

- p_i è il polinomio caratteristico della sottomatrice principale di ordine i

Inoltre si ha il:

TEOREMA – Se $p_i(\lambda_0) = 0$ allora $p_{i+1}(\lambda_0)\, p_{i-1}(\lambda_0) < 0, i = 1, \ldots$ $\ldots n - 1$

DIM. La dimostrazione è per induzione.
Sia vero l'asserto per $i = k$ ossia:

$$p_k(\lambda_0) = 0 \Rightarrow p_{k+1}(\lambda_0) p_{k-1}(\lambda_0) < 0 \qquad (17)$$

e dimostriamo che esso è vero anche per $i = k + 1$:

$$p_{k+1}(\lambda_0) = 0 \Rightarrow p_k(\lambda_0) p_{k+2}(\lambda_0) < 0$$

Dall'ipotesi che $p_{k+1}(\lambda_0) = 0$ e dalla (15) si trae $p_k(\lambda_0) \neq 0$ ed essendo $p_{k+2}(\lambda_0) = -b_{k+1}^2 p_k(\lambda_0)$ si ha $p_k(\lambda_0)\, p_{k+2}(\lambda_0) = -b_{k+1}^2 p_k^2(\lambda_0)$.

Poiché poi per $i = 1$ l'asserto è verificato, la dimostrazione è completa.

Fissato λ, consideriamo la successione numerica $p_i(\lambda)$, e calcoliamo i suoi accordi di segno, ossia calcoliamo quante volte si ripetono l'uno dopo l'altro due numeri con lo stesso segno.

Sia ad esempio $n = 3$ e:

$$p_1(\lambda) = 2 - \lambda$$

$$p_2(\lambda) = (2 - \lambda)^2 - 1$$

$$p_3(\lambda) = (2 - \lambda) p_2(\lambda) - p_1(\lambda)\ .$$

E' allora, per $\lambda = 0$:

$$p_0 = 1$$

$$p_1 = 2$$

$$p_2 = 3$$

$$p_3 = 4\ .$$

Il numero di accordi di segno $a(0)$ e quindi pari a 3.

Per $\lambda = 2$ è invece:

$$p_0 = 1$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -1$$

$$p_3 = 0 .$$

Si fa in tal caso la convenzione che se $p_i(\lambda) = 0$ il suo segno è quello di $p_{i-1}(\lambda)$, e quindi $a(2) = 2$

L'importanza del numero $a(\lambda)$ scaturisce dal seguente:

TEOREMA – $a(\lambda)$ è il numero di radici di $p_n(\lambda)$ maggiori o uguali a λ.

DIM. La dimostrazione è anche in questo caso per induzione, e per essa si rimanda a [2] pp. 300-302.

Usando questo risultato si possono calcolare gli autovalori.

Si voglia infatti approssimare l'autovalore λ_{n-m+1}, ossia la *n-ma* radice del polinomio caratteristico, e si conosca un intervallo $[l, u]$ in cui λ_{n-m+1} giace.

Sia λ_1 il punto di mezzo di $[l, u]$. Se $a(\lambda_1) \geqslant m$, $\lambda_{n-m+1} \in [\lambda_1, u]$ se $a(\lambda_1) < m$, $\lambda_{n-m+1} \in [l, \lambda_1]$. Iterando il ragionamento su uno dei due intervalli (quello in cui è contenuto l'autovalore), dopo k iterazioni si ha un intervallo di lunghezza $2^{-k}(u - l)$ che contiene λ_{n-m+1}. Il metodo è ovviamente null'altro che il metodo di bisezione per la ricerca degli zeri di una funzione, in cui però si sfrutta il teorema precedente per la separazione delle radici.

4c) Il calcolo degli autovettori della matrice tridiagonale

Se λ è un autovalore, le componenti dell'autovettore ad esso corrispondente devono soddisfare le equazioni:

$$(a_1 - \lambda)x_1 + b_1 x_2 = 0$$

$$b_{i-1}x_{i-1} + (a_i - \lambda)x_i + b_i x_{i+1} = 0 \qquad i = 2, \ldots n-1$$

$$b_{n-1}x_{n-1} + (a_n - \lambda)x_n = 0 \;;$$

x_1 è diverso da zero, e posto $x_1 = 1$ si ha, in generale:

$$x_r = \frac{(-1)^{r-1} p_{r-1}(\lambda)}{b_1 b_2 \ldots b_{r-1}} \qquad r = 2, \ldots n .$$

Questa formulazione ha però un difetto: una leggera imprecisione nel calcolo dell'autovalore può risolversi in un rilevante errore per il calcolo dell'autovettore.

Sia infatti $\bar{\lambda}$ un'approssimazione dell'autovalore esatto λ_k.

Se la:

$$b_{n-1} x_{n-1} + (a_n - \bar{\lambda}) x_n = 0$$

fosse verificata, $\bar{\lambda}$ sarebbe un autovalore esatto, perché x sarebbe un vettore non nullo soddisfacente l'equazione:

$$(C - \bar{\lambda} I) x = 0 .$$

Sarà quindi:

$$b_{n-1} x_{n-1} + (a_n - \bar{\lambda}) x_n = \epsilon \neq 0 .$$

Il vettore x soddisfa quindi l'equazione:

$$(C - \bar{\lambda} I) x = \epsilon e_n$$

con e_n vettore colonna *n-mo* della matrice identità.

A meno di inutili moltiplicatori, quindi, ed essendo per ipotesi $(C - \bar{\lambda} I)$ non singolare, si ha:

$$x = (C - \bar{\lambda} I)^{-1} e_n .$$

Siano $u_1, u_2, \ldots u_n$ autovettori di C formanti una base. Sarà:

$$e_n = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i$$

da cui:

$$x = \frac{\sum_1^n \gamma_i u_i}{(\lambda_i - \bar{\lambda})} = \frac{\gamma_k u_k}{\lambda_k - \lambda} + \sum_{i \neq k} \frac{\gamma_i u_i}{\lambda_i - \bar{\lambda}} .$$

Per essere x una buona approssimazione di u_k dovrà essere:

$$\frac{\gamma_k}{\lambda_k - \bar{\lambda}} \gg \frac{\gamma_i}{\lambda_i - \bar{\lambda}} \qquad\qquad i \neq k$$

e se γ_k è molto piccolo, ciò potrebbe non essere vero.

Per porre rimedio a tale inconveniente si ricorre al metodo detto dell'"iterazione inversa".

Consideriamo il sistema:

$$(C - \bar{\lambda} I)x = b \tag{18}$$

con b vettore arbitrario normalizzato.

Espresso b nella forma:

$$b = \sum_i \gamma_i u_i$$

si ha:

$$x = \sum_i \frac{\gamma_i u_i}{\lambda_i - \bar{\lambda}} .$$

Risolvendo il sistema:

$$(C - \bar{\lambda} I)y = x \tag{19}$$

si avrà:

$$y = \sum_i \frac{\gamma_i u_i}{(\lambda_i - \bar{\lambda})^2}$$

e l'approssimazione è già migliorata. Ripetendo più volte questo processo la potenza al denominatore aumenta e l'autovettore tende all'autovettore reale.

Se però b è scelto in modo opportuno basteranno due iterazioni per ottenere buoni risultati.

4d) Calcolo degli autovettori della matrice di partenza.

Sia A la matrice di partenza e C la matrice tridiagonale simmetrica ad essa ortogonale:

$$C = PAP^T$$

ossia:

$$A = P^T AP$$

con:

$$P = (I - 2u_{n-2} u_{n-2}^T) \ldots (I - 2u_1 u_1^T) \ . \qquad (20)$$

Se y è un autovettore di C, ossia se:

$$Cy = \lambda y$$

si ha:

$$P^T y = P^T Cy = P^T CPP^T y = AP^T y$$

cosicchè:

$$P^T y = (I - 2u_1 u_1^T) \ldots . (I - 2u_{n-2} u_{n-2}^T)$$

è il corrispondente autovettore di A.

4e) La programmazione del procedimento.

I parametri di input e di output sono descritti nel listato del programma fig. 2 (righe 80-200). Il segmento 480-1020 riduce la matrice a forma tridiagonale; la diagonale principale è memorizzata nell'array C, gli $N - 1$ elementi fuori diagonale nell'array B.

Si consideri la trasformazione *i-ma:*

$$A_i = (I - u_i u_i^T) A_{i-1} (I - 2u_i u_i^T)$$

con $A_0 = A$ e con u fornito dalla (15).

Si pone $I - 2u_i u_i^T = \mathrm{I} - \alpha w_i w_i^T$ con:

$$\alpha = \frac{2}{\|a - c\|^2} = \frac{1}{s^2 + a_{i+s,i}\, s} \quad .$$

Ne segue $w^T = (0, \ldots a_{i+1,i} + s, a_{i+2,i}, \ldots a_{n,i})$

La quantità s è fornita dalla (16); il suo segno è posto uguale al segno di $a_{i+1,i}$ in modo da evitare pericoli di cancellazione.

E' quindi

$$A_i = (I - \alpha w_i w_i^T)(A_{i-1} - \alpha A_{i-1} w_i w_i^T) \; .$$

Si pone

$$p_i = \alpha A_{i-1} w_i \tag{21}$$

ottenendo:

$$A_i = A_{i-1} - w_i p_i^T - p_i w_i^T + \alpha w_i (w_i^T p_i) w_i^T \; .$$

Definito:

$$q_i = p_i - \frac{\alpha}{2} w_i (w_i^T p_i) \tag{22}$$

si ha infine:

$$A_i = A_{i-1} - w_i p_i^T - \left(p_i - \frac{\alpha}{2} w_i (w_i^T p_i)\right) w_i^T + \frac{\alpha}{2} w_i (w_i^T p_i) w_i^T$$

$$A_i = A_{i-1} - w_i (p_i^T - (w_i^T p_i) w_i^T - \left(p_i - \frac{\alpha}{2} w_i (w_i^T p_i)\right) w_i^T$$

$$A_i = A_{i-1} - w_i q_i^T - q_i w_i^T \; . \tag{23}$$

Il procedimento consiste allora in un ciclo in I, da 1 ad $N - 2$ nel cui generico passo si ha:

– il calcolo di s con le righe 510-600

– la memorizzazione di $a_{i,i}$ in $C(I)$ e si $-s$ in $B(I)$, come richiesto

dalla forma della matrice A_i (righe 610-620)
- se $s = 0$ si va al passo successivo (riga 630)
- il calcolo di α, memorizzato in A (righe 640-650)
- il calcolo del vettore w e la memorizzazione del suo elemento di posto $i + 1$ in $A(I + 1, I)$ per usi futuri (righe 660-700)
- il calcolo del vettore p (f. 21) con le righe 710-790
- il calcolo della quantità scalare $\frac{\alpha}{2} w_i^T p_i$, memorizzata in $K1$ (righe 800-840)
- il calcolo di q_i (f. 22) con le righe 850-870
- il calcolo di A_i (f. 23) con le righe 880-930
- la memorizzazione di α nella posizione $a_{i,i}$ per usi futuri (riga 940)

Dopo aver completato il ciclo le righe 960-1010 memorizzano $a_{n,n-1}$ in b_{n-1}, $a_{n-1,n-1}$ in c_{n-1} e $a_{n,n}$ in c_n.

Il segmento 1030-1570 calcola gli autovalori di questa matrice, con il metodo della bisezione.
- Le righe 1070-1090 calcolano i quadrati dei b_i e li memorizzano nell'array W.
- le righe 1100-1150 calcolano un intervallo in cui sono compresi tutti gli autovalori. E' precisamente:

$$NO = \|A\|_\infty \max \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

e l'intervallo è $[-NO, NO]$
- le righe 1160-1180 inizializzano la matrice degli autovalori

Il ciclo in K (righe 1190-1480) è l'applicazione del metodo di bisezione.

La 1200 stabilisce un primo limite inferiore, la 1210 calcola il punto di mezzo dell'intervallo di ricerca

Con la 1220 si indaga sulla larghezza di questo intervallo: se esso è minore di una quantità E, posta uguale a 10^{-8} nella riga 460, si passa al calcolo di un altro autovalore, altrimenti si calcolano gli accordi di segno $a(L\,1)$.

Nella 1280 il numero di accordi di segno è posto uguale a zero.

Si calcolano poi i rapporti $s_i(\lambda) = p_i(\lambda)/p_{i-1}(\lambda)$, ottenendo:

$$s_1(\lambda) = c_1 - \lambda \tag{24}$$

$$s_i(\lambda) = c_i - \lambda - b_{i-1}^2/s_{i-1}(\lambda) \quad \text{se } s_{i-1}(\lambda) \neq 0 \tag{25}$$

$$s_i(\lambda) = c_i - \lambda \qquad \text{se } s_{i-2}(\lambda) = 0 \text{ e } i > 2 . \qquad (26)$$

Se $s_{i-1}(\lambda) = 0$ si pone $s_i(\lambda) < 0$ senza calcolarlo.

Con la riga 1290 si inizializza il contatore dei rapporti.

La riga 1300 calcola $S = s_1$, la 1310 aumenta di uno il numero degli accordi se $S_1 > 0$, la 1320 esamina se S è nullo; se lo è il contatore si incrementa di due, per la convenzione fatta, e se risulta minore di N si calcola (1300) s_{i+2} con la formula (26).

Se invece s_i non è nullo si aumenta di uno il contatore (1350) e si verifica che esso è ancora minore di N (1360); si calcola poi s_i con la formula (23) (riga 1370) e si ritorna ai test di 1310-1320.

Quando I diviene uguale ad N si esce dal ciclo e con la 1390 si decide da quale lato restringere l'intervallo, se a destra (1450) o a sinistra (1400); in quest'ultimo caso si stabilisce anche un limite superiore per i restanti autovalori (righe 1410-1430).

Ristretto l'intervallo si ritorna alla linea 1210 finché non si è raggiunta la precisione voluta.

Il segmento 1590-2250 calcola gli autovettori della matrice tridiagonale.

La riga 1630 inizia il ciclo in I per il calcolo dei richiesti $N2$ autovettori.

Le righe 1670-1740 inizializzano alcune variabili necessarie nel seguito. Le righe 1760-1950 riducono la matrice $(C - \lambda I)$ a forma triangolare usando il metodo di Gauss con pivoting parziale. La matrice intera I conserva memoria degli scambi necessari per il pivoting.

Alla fine del procedimento la diagonale principale è memorizzata in R, la diagonale al di sopra della principale è in Q, e quella ancora al di sopra è in P:

$$\begin{vmatrix} r_1 & q_1 & p_1 & & & & \\ & r_2 & q_2 & p_2 & & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \cdot & \cdot & p_{n-2} \\ & & & & & & & \cdot & q_{n-1} \\ & & & & & & & & r_n \end{vmatrix}$$

Le 1940 e 1960 sostituiscono un eventuale $R(I)$ nullo con una quantità molto piccola.

Le righe 1980-2020 generano un vettore Y di termini noti in maniera pseudo-random in modo da evitare, nei limiti del possibile, i pericoli su menzionati di instabilità numerica.

Le righe 2040-2080 risolvono una prima volta il sistema (18). Ora il vettore Y diviene il vettore dei termini noti per la seconda iterazione. A ciò fare occorre effettuare anche su Y le variazioni di righe che sono state fatte sulla matrice dei coefficienti per il pivoting (righe 2170-2230). Si ritorna (riga 2240) a risolvere il sistema, e ci si accontenta della seconda iterazione (riga 2120).

Infine il segmento 2260-2480 calcola l'autovettore del problema di partenza, ed a tal fine tornano utili gli elementi memorizzati precedentemente nella matrice A.

Secondo la formula (20) occorre calcolare il prodotto:

$$y = (I - \alpha_j w_j w_j^T) y$$

con j che va da 1 ad $n - 2$.

Si calcola allora, e si memorizza in T, la quantità scalare $w_j w_j^T$ (righe 2290-2340) e poi si calcola

$$y_j = y_{j-1} - T \alpha_j w_{j-1}$$

(righe 2350-2390)

Infine le righe 2410-2480 stampano l'autovettore normalizzandolo col porre la sua componente *n-ma* pari all'unità.

I pregi ed i difetti del metodo di Givens Householder sono duali di quelli del metodo di Jacobi: tra i pregi va infatti segnalata la possibilità del calcolo dei soli primi autovalori ed autovettori, tra i difetti una certa difficoltà di impostazione quando gli autovalori coincidono: in tal caso infatti si ha il:

TEOREMA – Se una matrice simmetrica ha un autovalore di molteplicità k, la matrice tridiagonale corrispondente deve avere almeno $(k - 1)$ elementi non diagonali b_i nulli.

E' anche da dire però che è estremamente difficile, anche quando in teoria si avrebbero autovalori coincidenti, che gli errori di arrotondamento diano dei b_i esattamente uguali a zero.

```
10 ! SUBROUTINE GIVENS
20 ! *************************
   **************************
   **************
30 ! ** CALCOLO AUTOVALORI ED A
   UTOVETTORI DI UNA MATRICE SI
   MMETRICA
40 ! ** NELLA MATRICE VA MEMORI
   ZZATA IL TRIANGOLO INFERIORE
    PER RIGHE
50 ! ** METODO DI GIVENS-HOUSEH
   OLDER
60 ! ** SI CALCOLANO GLI AUTOVA
   LORI A COMINCIARE DAL PIU' B
   ASSO
70 ! *************************
   **************************
   **************
80 ! ** DATI DI INPUT :
90 ! ** N - DIMENSIONE DELLA MA
   TRICE A(N,N)
100 ! ** A(N) - VETTORE IN CUI E
   ' MEMORIZZATO,PER RIGHE,IL T
   RIANGOLO INFERIORE DI A(N,N)
110 ! ** N1 - NUMERO DI AUTOVALO
   RI DA CALCOLARE
120 ! ** N2 - NUMERO DI AUTOVETT
   ORI DA CALCOLARE (N2<=N1)
130 ! ** S9 - VARIABILE DA PORRE
    UGUALE A :
140 ! ** 0 SE NON SI VOGLIONO ST
   AMPE
150 ! ** 1 SE SI VOGLIONO LE STA
   MPE FINALI DI AUTOVALORI ED
   AUTOVETTORI
160 ! ** 10 SE SI VUOLE ANCHE LA
    STAMPA DELLA MATRICE DI PAR
   TENZA
170 ! *************************
   **************************
   **************
180 ! ** DATI DI OUTPUT
190 ! ** N1 AUTOVALORI IN ORDINE
    CRESCENTE
200 ! ** N2 AUTOVETTORI CORRISPO
   NDENTI AI PRIMI N2 AUTOVALOR
   I
210 ! *************************
   **************************
   **************
220 OPTION BASE 1
230 ! DIM A(1085),C(50),B(50),W(
   52),P(50),Q(50),Y(50),R(50)
240 INTEGER I(100)
250 SETTIME 0,0
260 READ N,N1,N2,S9
270 FOR I=1 TO N*(N+1)/2
280 READ A(I)
290 NEXT I
300 PRINT USING 320
```

Figura 2a

```
310 PRINT USING 330
320 IMAGE 4/,"==================
    =============",/,4X,"SUBROUT
    INE GIVENS"
330 IMAGE /,"CALCOLO AUTOVALORI
    E AUTOVETTORI DI UNA MATRICE
     SIMMETRICA"
340 PRINT USING 350
350 IMAGE "=====================
    =========",5/
360 IF S9<>10 THEN 460
370 PRINT USING 440
380 FOR I=1 TO N
390 FOR J=I TO N
400 H=I+(J^2-J)/2
410 PRINT "A("&VAL$(J)&","&VAL$(
    I)&") = ";A(H)
420 NEXT J
430 NEXT I
440 IMAGE "MATRICE DI PARTENZA",
    3/
450 PRINT USING "2/"
460 E=.00000001
470 !
480 ! RIDUZIONE A MATRICE TRIDIA
    GONALE
490 !
500 FOR I=1 TO N-2
510 I1=I+1
520 H1=I+(I1^2-I1)/2
530 H2=I+(I^2-I)/2
540 S=0
550 FOR J=I1 TO N
560 H=I+(J^2-J)/2
570 S=S+A(H)^2
580 NEXT J
590 S=SQR(S)
600 S=SGN(A(H1))*S
610 C(I)=A(H2)
620 B(I)=-S
630 IF S=0 THEN 980
640 A=S^2+A(H1)*S
650 A=1/A
660 W(I+1),A(H1)=A(H1)+S
670 FOR J=I+2 TO N
680 H=I+(J^2-J)/2
690 W(J)=A(H)
700 NEXT J
710 FOR J=I+1 TO N
720 P(J)=0
730 J1=(J^2-J)/2
740 FOR K=I+1 TO N
750 IF K<J THEN H=K+J1 ELSE H=J+
    (K^2-K)/2
760 P(J)=P(J)+A(H)*W(K)
770 NEXT K
780 P(J)=A*P(J)
790 NEXT J
800 K1=0
810 FOR J=I+1 TO N
```

Figura 2b

```
820 K1=K1+W(J)*F(J)
830 NEXT J
840 K1=K1*A/2
850 FOR J=I+1 TO N
860 Q(J)=P(J)-K1*W(J)
870 NEXT J
880 FOR K=I+1 TO N
890 FOR J=K TO N
900 H=K+(J^2-J)/2
910 A(H)=A(H)-(Q(J)*W(K)+Q(K)*W(
    J))
920 NEXT J
930 NEXT K
940 A(H2)=A
950 NEXT I
960 H=N-1+(N^2-N)/2
970 B(N-1)=A(H)
980 H=N-1+((N-1)^2-N+1)/2
990 C(N-1)=A(H)
1000 H=N+(N^2-N)/2
1010 C(N)=A(H)
1020 !
1030 !
1040 ! CALCOLO AUTOVALORI SULLA
     MATRICE TRIDIAGONALE
1050 !
1060 !
1070 FOR I=1 TO N-1
1080 W(I)=B(I)^2
1090 NEXT I
1100 N0=ABS(C(1))+ABS(B(1))
1110 N0=MAX(N0,ABS(C(N))+ABS(B(N
     -1)))
1120 FOR I=2 TO N-1
1130 N0=MAX(N0,ABS(C(I))+ABS(B(I
     ))+ABS(B(I-1)))
1140 NEXT I
1150 L=-N0
1160 FOR I=1 TO N1
1170 E(I)=N0
1180 NEXT I
1190 FOR K=1 TO N1
1200 U=E(K)
1210 L1=(L+U)/2
1220 IF U-L<E THEN 1470
1230 !
1240 !
1250 ! CALCOLO ACCORDI DI SEGNO
1260 !
1270 !
1280 A=0
1290 I=1
1300 S=C(I)-L1
1310 IF S>=0 THEN A=A+1
1320 IF S<>0 THEN 1350
1330 I=I+2
1340 IF I<=N THEN 1300 ELSE 1390
1350 I=I+1
1360 IF I>N THEN 1390
1370 S=C(I)-L1-W(I-1)/S
```

Figura 2c

```
1380 GOTO 1310
1390 IF A>=N-K+1 THEN 1450
1400 U=L1
1410 FOR I=K+1 TO N-A
1420 E(I)=L1
1430 NEXT I
1440 GOTO 1210
1450 L=L1
1460 GOTO 1210
1470 E(K)=L1
1480 NEXT K
1490 CLEAR
1500 IF S9=0 THEN 1570
1510 PRINT "AUTOVALORI"
1520 PRINT USING "2/"
1530 FOR I=1 TO N1
1540 PRINT E(I)
1550 NEXT I
1560 PRINT USING "3/"
1570 !
1580 !
1590 ! CALCOLO AUTOVETTORI DELLA
     MATRICE TRIDIAGONALE
1600 !
1610 !
1620 Y(N+1),Y(N+2)=0
1630 FOR I=1 TO N2
1640 !
1650 ! INIZIALIZZAZIONI
1660 !
1670 FOR J=1 TO N
1680 R(J)=C(J)-E(I)
1690 P(J)=0
1700 NEXT J
1710 FOR J=1 TO N-1
1720 Q(J)=B(J)
1730 NEXT J
1740 L$="TRUE"
1750 !
1760 ! RIDUZIONE DI C-LI A FORMA
     TRIANGOLARE
1770 !
1780 FOR J=1 TO N-1
1790 IF ABS(R(J))<ABS(B(J)) THEN
     1830
1800 M=B(J)/R(J)
1810 I(J)=0
1820 GOTO 1910
1830 M=R(J)/B(J)
1840 I(J)=1
1850 R(J)=B(J)
1860 T=R(J+1)
1870 R(J+1)=Q(J)
1880 Q(J)=T
1890 P(J)=Q(J+1)
1900 Q(J+1)=0
1910 M(J)=M
1920 R(J+1)=R(J+1)-M(J)*Q(J)
1930 Q(J+1)=Q(J+1)-M(J)*P(J)
1940 IF R(J)=0 THEN R(J)= 000000
     0001
```

Figura 2d

```
1950 NEXT J
1960 IF R(N)=0 THEN R(N = 000000
     0001
1970 !
1980 ! GENERAZIONE RANDOM
1990 !
2000 FOR K=1 TO N
2010 Y(K)=RND
2020 NEXT K
2030 !
2040 ! SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO
      PER LA RISOLUZIONE DEL SIS
     TEMA
2050 !
2060 FOR K=N TO 1 STEP -1
2070 Y(K)=(Y(K)-Q(K)*Y(K+1)-P(K)
     *Y(K+2))/R(K)
2080 NEXT K
2090 !
2100 ! CALCOLO AUTOVETTORI MATRI
     CE DI PARTENZA
2110 !
2120 IF L$="FALSE" THEN 2280
2130 L$="FALSE"
2140 !
2150 ! SOSTITUZIONI DI RIGA SUL
     NUOVO VETTORE DEI TERMINI N
     OTI
2160 !
2170 FOR J=1 TO N-1
2180 IF I(J)=0 THEN 2220
2190 T=Y(J)
2200 Y(J)=Y(J+1)
2210 Y(J+1)=T
2220 Y(J+1)=Y(J+1)-M(J)*Y(J)
2230 NEXT J
2240 GOTO 2060
2250 !
2260 ! SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO
      PER IL CALCOLO DELL'AUTOVE
     TTORE
2270 !
2280 FOR J=N-2 TO 1 STEP -1
2290 H=J+(J^2-J)/2
2300 T=0
2310 FOR K=J+1 TO N
2320 H1=J+(K^2-K)/2
2330 T=T+A(H1)*Y(K)
2340 NEXT K
2350 FOR L=J+1 TO N
2360 H1=J+(L^2-L)/2
2370 S=T*A(H)*A(H1)
2380 Y(L)=Y(L)-S
2390 NEXT L
2400 NEXT J
2410 IF S9=0 THEN 2490
2420 PRINT "AUTOVETTORE N " I
2430 PRINT
2440 FOR L=1 TO N-1
2450 PRINT Y(L)/Y(N)
```

Figura 2e

```
2460 NEXT L
2470 PRINT " 1"
2480 PRINT USING "2/"
2490 NEXT I
2500 PRINT USING 2510 ; TIME
2510 IMAGE 7/,"Tempo di esec.
     ",DDDDD.DD," sec",8/
2520 END
2530 DATA 4,3,2,10
2540 DATA 120,80,120,40,16,120,-
     16,-40,-80,120
```

Figura 2f

5. Il problema generale degli autovalori

La ricerca di autovalori per il caso generale:

$$(A - \lambda B)q = 0$$

con A e B simmetriche e B definita positiva si riconduce al caso classico tramite alcune operazioni matriciali.

Si pone:

$$B = LL^T$$

con L matrice triangolare bassa, così come ammesso da un noto teorema di Cholesky.

Si ha così:

$$Aq = \lambda LL^T q$$

e premoltiplicando per L^{-1}:

$$L^{-1}Aq = \lambda L^T q \ .$$

Si pone ora $L^T q = x$ da cui:

$$q = (L^T)^{-1} x = (L^{-1})^T x \qquad (27)$$

ed infine si ha:

$$L^{-1} A (L^{-1})^T x = \lambda x \ .$$

La matrice $L^{-1}A(L^{-1})^T$ è simmetrica, perché ottenuta tramite una trasformazione di congruenza, ed ha gli stessi autovalori del problema generalizzato, essendo stata ricavata da esso tramite prodotti matriciali.

Trovati gli autovettori di questo problema si risale agli autovettori del problema di partenza tramite il prodotto (27).

Il programma è quindi il precedente cui sono stati aggiunti un segmento iniziale (580-1300) per ridursi al caso classico, ed un segmento finale (3320-3400) che esegue il prodotto (27). fig. 3

Il segmento iniziale calcola la matrice L e la memorizza in B 1 (righe 650-840), inverte la L e la memorizza ancora in $B1$ (righe 850-1050), calcola il prodotto $L^{-1}A$, e lo memorizza in F (righe 1070-

1170), ed infine calcola il prodotto FL, memorizzandolo in A (righe 1190-1300).

L'unico punto da chiarire è il calcolo di L, ossia la fattorizzazione di Cholesky.

Secondo Cholesky qualsiasi matrice B simmetrica e definita positiva può esprimersi come il prodotto di una matrice triangolare bassa per la sua trasposta. In notazione indiciale è:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{i} l_{ik}\, l_{jk} \qquad i \leqslant j$$

e quindi a partire dai termini diagonali è possibile calcolare i termini di L per colonne.

E' infatti, ad esempio:

$$b_{11} = l_{11}^2 \Rightarrow l_{11} = \sqrt{b_{11}}$$

$$b_{21} = l_{21}\, l_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{b_{21}}{l_{11}} \ .$$

```
10 ! SUBROUTINE WILK
20 ! ****************************
   ****************************
   ***************
30 ! ** CALCOLO AUTOVALORI ED A
   UTOVETTORI DEL PROBLEMA GENE
   RALE
40 ! ** NELLE MATRICI VA MEMORI
   ZZATO IL TRIANGOLO INFERIORE
    PER RIGHE
50 ! ** METODO DI GIVENS-HOUSEH
   OLDER
60 ! ** SI CALCOLANO GLI AUTOVA
   LORI A COMINCIARE DAL PIU' B
   ASSO
70 ! ****************************
   ****************************
   ***************
80 ! ** DATI DI INPUT
90 ! ** N - DIMENSIONE DELLE MA
   TRICI A(N,N) E B(N,N)
100 ! ** VETTORI A E B1 IN CUI S
   ONO MEMORIZZATI PER RIGHE I
   TRIANGOLI INFERIORI DI A E B
110 ! ** N1 - NUMERO DI AUTOVALO
   RI DA CALCOLARE
120 ! ** N2 - NUMERO DI AUTOVETT
   ORI DA CALCOLARE (N2<=N1)
130 ! ** S9 - VARIABILE DA PORRE
    UGUALE A
140 ! ** 0 SE NON SI VOGLIONO ST
   AMPE
150 ! ** 1 SE SI VOGLIONO LE STA
   MPE FINALI DI AUTOVALORI ED
   AUTOVETTORI
160 ! ** 10 SE SI VUOLE ANCHE LA
    STAMPA DELLE MATRICI DI PAR
   TENZA A E B
170 ! ****************************
   ****************************
   ***************
180 ! ** DATI DI OUTPUT
190 ! ** N1 AUTOVALORI IN ORDINE
    CRESCENTE
200 ! ** N2 AUTOVETTORI CORRISPO
   NDENTI AI PRIMI N2 AUTOVALOR
   I
210 ! ****************************
   ****************************
   ***************
220 OPTION BASE 1
230 ! DIM A(465),B1(465),F(30,30
   ),C(30),B(30),W(32),P(30),Q(
   30),Y(30),R(30),Y1(30)
240 INTEGER I(300)
250 SETTIME 0,0
260 READ N,N1,N2,S9
270 FOR I=1 TO N*(N+1)/2
280 READ A(I)
290 NEXT I
```

Figura 3a

```
300 FOR I=1 TO N*(N+1)/2
310 READ B1(I)
320 NEXT I
330 PRINT USING 350
340 PRINT USING 360
350 IMAGE 4/,"=================
    =============",/,4X,"SUBROUT
    INE WILK"
360 IMAGE /,"CALCOLO AUTOVALORI
    E AUTOVETTORI DEL PROBLEMA G
    ENERALE"
370 PRINT USING 380
380 IMAGE "=====================
    =========",5/
390 IF S9<>10 THEN 630
400 PRINT USING 470
410 FOR I=1 TO N
420 FOR J=I TO N
430 H=I+(J^2-J)/2
440 PRINT "A("&VAL$(J)&","&VAL$(
    I)&") = ";A(H)
450 NEXT J
460 NEXT I
470 IMAGE "MATRICE A DI PARTENZA
    ",3/
480 PRINT USING "2/"
490 PRINT USING 560
500 FOR I=1 TO N
510 FOR J=I TO N
520 H=I+(J^2-J)/2
530 PRINT "B("&VAL$(J)&","&VAL$(
    I)&") = ";B1(H)
540 NEXT J
550 NEXT I
560 IMAGE "MATRICE B DI PARTENZA
    ",3/
570 PRINT USING "2/"
580 ! ***********************
590 !
600 ! PASSAGGIO AL CASO CLASSICO
610 !
620 ! ***********************
630 !
640 ! FATTORIZZAZIONE ALLA CHOLE
    WSKY
650 !
660 I1=0
670 K1=1
680 FOR I=1 TO N
690 K=0
700 FOR J=1 TO I
710 S=0
720 IF J=1 THEN 770
730 FOR L=K1 TO I1
740 K=K+1
750 S=S+B1(L)*B1(K)
760 NEXT L
770 K=K+1
780 I1=I1+1
790 S=B1(I1)-S
```

Figura 3b

```
800 IF J<I THEN B1(I1)=S/B1(K) E
    LSE B1(I1)=SQR(S)
810 NEXT J
820 K1=K1+I
830 NEXT I
840 !
850 ! INVERSIONE DI L
860 !
870 FOR J=1 TO N
880 H=J+(J^2-J)/2
890 S=1/B1(H)
900 FOR I=J TO N
910 H1=J+(I^2-I)/2
920 B1(H1)=S*B1(H1)
930 NEXT I
940 B1(H)=S
950 FOR K=1 TO J-1
960 H1=K+(J^2-J)/2
970 FOR I=J+1 TO N
980 H2=K+(I^2-I)/2
990 H3=J+(I^2-I)/2
1000 B1(H2)=B1(H2)-B1(H3)*B1(H1)
1010 NEXT I
1020 B1(H1)=-S*B1(H1)
1030 NEXT K
1040 NEXT J
1050 !
1060 ! CALCOLO L(-1)*A
1070 !
1080 FOR I=1 TO N
1090 FOR J=1 TO N
1100 F(I,J)=0
1110 FOR K=1 TO I
1120 IF J>K THEN H2=K+(J^2-J)/2
     ELSE H2=J+(K^2-K)/2
1130 H1=K+(I^2-I)/2
1140 F(I,J)=F(I,J)+B1(H1)*A(H2)
1150 NEXT K
1160 NEXT J
1170 NEXT I
1180 !
1190 ! MATRICE FINALE
1200 !
1210 FOR I=1 TO N
1220 FOR J=I TO N
1230 H=I+(J^2-J)/2
1240 A(H)=0
1250 FOR K=1 TO J
1260 H2=K+(J^2-J)/2
1270 A(H)=A(H)+F(I,K)*B1(H2)
1280 NEXT K
1290 NEXT J
1300 NEXT I
1310 ! ***********************
1320 !
1330 ! CASO CLASSICO
1340 !
1350 ! ***********************
1360 E=.00000001
1370 !
```

Figura 3c

```
1380 ! RIDUZIONE A MATRICE TRIDI
     AGONALE
1390 !
1400 FOR I=1 TO N-2
1410 I1=I+1
1420 H1=I+(I1^2-I1)/2
1430 H2=I+(I^2-I)/2
1440 S=0
1450 FOR J=I1 TO N
1460 H=I+(J^2-J)/2
1470 S=S+A(H)^2
1480 NEXT J
1490 S=SQR(S)
1500 S=SGN(A(H1))*S
1510 C(I)=A(H2)
1520 B(I)=-S
1530 IF S=0 THEN 1880
1540 A=S^2+A(H1)*S
1550 A=1/A
1560 W(I+1),A(H1)=A(H1)+S
1570 FOR J=I+2 TO N
1580 H=I+(J^2-J)/2
1590 W(J)=A(H)
1600 NEXT J
1610 FOR J=I+1 TO N
1620 P(J)=0
1630 J1=(J^2-J)/2
1640 FOR K=I+1 TO N
1650 IF K<J THEN H=K+J1 ELSE H=J
     +(K^2-K)/2
1660 P(J)=P(J)+A(H)*W(K)
1670 NEXT K
1680 P(J)=A*P(J)
1690 NEXT J
1700 K1=0
1710 FOR J=I+1 TO N
1720 K1=K1+W(J)*P(J)
1730 NEXT J
1740 K1=K1*A/2
1750 FOR J=I+1 TO N
1760 Q(J)=P(J)-K1*W(J)
1770 NEXT J
1780 FOR K=I+1 TO N
1790 FOR J=K TO N
1800 H=K+(J^2-J)/2
1810 A(H)=A(H)-(Q(J)*W(K)+Q(K)*W
     (J))
1820 NEXT J
1830 NEXT K
1840 A(H2)=A
1850 NEXT I
1860 H=N-1+(N^2-N)/2
1870 B(N-1)=A(H)
1880 H=N-1+((N-1)^2-N+1)/2
1890 C(N-1)=A(H)
1900 H=N+(N^2-N)/2
1910 C(N)=A(H)
1920 !
1930 !
1940 ! CALCOLO AUTOVALORI SULLA
     MATRICE TRIDIAGONALE
```

Figura 3d

```
1950 !
1960 !
1970 FOR I=1 TO N-1
1980 W(I)=B(I)^2
1990 NEXT I
2000 N0=ABS(C(1))+ABS(B(1))
2010 N0=MAX(N0,ABS(C(N))+ABS(B(N
     -1)))
2020 FOR I=2 TO N-1
2030 N0=MAX(N0,ABS(C(I))+ABS(B(I
     ))+ABS(B(I-1)))
2040 NEXT I
2050 L=-N0
2060 FOR I=1 TO N1
2070 E(I)=N0
2080 NEXT I
2090 FOR K=1 TO N1
2100 U=E(K)
2110 L1=(L+U)/2
2120 IF U-L<E THEN 2370
2130 !
2140 !
2150 ! CALCOLO ACCORDI DI SEGNO
2160 !
2170 !
2180 A=0
2190 I=1
2200 S=C(I)-L1
2210 IF S>=0 THEN A=A+1
2220 IF S<>0 THEN 2250
2230 I=I+2
2240 IF I<=N THEN 2200 ELSE 2290
2250 I=I+1
2260 IF I>N THEN 2290
2270 S=C(I)-L1-W(I-1)/S
2280 GOTO 2210
2290 IF A>=N-K+1 THEN 2350
2300 U=L1
2310 FOR I=K+1 TO N-A
2320 E(I)=L1
2330 NEXT I
2340 GOTO 2110
2350 L=L1
2360 GOTO 2110
2370 E(K)=L1
2380 NEXT K
2390 CLEAR
2400 IF S9=0 THEN 2470
2410 PRINT "AUTOVALORI"
2420 PRINT USING "2/"
2430 FOR I=1 TO N1
2440 PRINT E(I)
2450 NEXT I
2460 PRINT USING "3/"
2470 !
2480 !
2490 ! CALCOLO AUTOVETTORI DELLA
      MATRICE TRIDIAGONALE
2500 !
2510 !
```

Figura 3e

```
2520 Y(N+1),Y(N+2)=0
2530 FOR I=1 TO N2
2540 !
2550 ! INIZIALIZZAZIONI
2560 !
2570 FOR J=1 TO N
2580 R(J)=C(J)-E(I)
2590 P(J)=0
2600 NEXT J
2610 FOR J=1 TO N-1
2620 Q(J)=B(J)
2630 NEXT J
2640 L$="TRUE"
2650 !
2660 ! RIDUZIONE DI C-LI A FORMA
      TRIANGOLARE
2670 !
2680 FOR J=1 TO N-1
2690 IF ABS(R(J))<ABS(B(J)) THEN
      2730
2700 M=B(J)/R(J)
2710 I(J)=0
2720 GOTO 2810
2730 M=R(J)/B(J)
2740 I(J)=1
2750 R(J)=B(J)
2760 T=R(J+1)
2770 R(J+1)=Q(J)
2780 Q(J)=T
2790 P(J)=Q(J+1)
2800 Q(J+1)=0
2810 M(J)=M
2820 R(J+1)=R(J+1)-M(J)*Q(J)
2830 Q(J+1)=Q(J+1)-M(J)*P(J)
2840 IF R(J)=0 THEN R(J)= 000000
     0001
2850 NEXT J
2860 IF R(N)=0 THEN R(N)= 000000
     0001
2870 !
2880 ! GENERAZIONE RANDOM
2890 !
2900 FOR K=1 TO N
2910 Y(K)=RND
2920 NEXT K
2930 !
2940 ! SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO
      PER LA RISOLUZIONE DEL SIS
     TEMA
2950 !
2960 FOR K=N TO 1 STEP -1
2970 Y(K)=(Y(K)-Q(K)*Y(K+1)-P(K)
     *Y(K+2))/R(K)
2980 NEXT K
2990 !
3000 ! CALCOLO AUTOVETTORI MATRI
     CE DI PARTENZA
3010 !
3020 IF L$="FALSE" THEN 3130
3030 L$="FALSE"
```

Figura 3f

```
3040
3050   SOSTITUZIONI DI RIGA SUL
     NUOVO VETTORE DEI TERMINI N
     OTI
3060 !
3070 FOR J=1 TO N-1
3080 IF I(J)=0 THEN 3120
3090 T=Y(J)
3100 Y(J)=Y(J+1)
3110 Y(J+1)=T
3120 Y(J+1)=Y(J+1)-M(J)*Y(J)
3130 NEXT J
3140 GOTO 2960
3150 !
3160 ! SOSTITUZIONE ALL'INDIETRO
      PER IL CALCOLO DELL'AUTOVE
     TTORE
3170 !
3180 FOR J=N-2 TO 1 STEP -1
3190 H=J+(J^2-J)/2
3200 T=0
3210 FOR K=J+1 TO N
3220 H1=J+(K^2-K)/2
3230 T=T+A(H1)*Y(K)
3240 NEXT K
3250 FOR L=J+1 TO N
3260 H1=J+(L^2-L)/2
3270 S=T*A(H)*A(H1)
3280 Y(L)=Y(L)-S
3290 NEXT L
3300 NEXT J
3310 !
3320 ! PASSAGGIO ALL'AUTOVETTORE
      PER IL PROBLEMA GENERALE
3330 !
3340 FOR J=1 TO N
3350 Y1(J)=0
3360 FOR L=J TO N
3370 H=J+(L^2-L)/2
3380 Y1(J)=Y1(J)+B1(H)*Y(L)
3390 NEXT L
3400 NEXT J
3410 IF S9=0 THEN 3490
3420 PRINT "AUTOVETTORE N ",I
3430 PRINT
3440 FOR L=1 TO N-1
3450 PRINT Y1(L)/Y1(N)
3460 NEXT L
3470 PRINT " 1"
3480 PRINT USING "2/"
3490 NEXT I
3500 PRINT USING 3510 ; TIME
3510 IMAGE 7/,"Tempo di esec
      ",DDDDD.DD," sec",3/
3520 END
3530 DATA 4,3,2,10
3540 DATA .935,.613,.216,.217,.3
     17,.514,.413,.323,.441,.315
3550 DATA .983,.165,.897,.213,.2
     14,.903,.122,.132,.213,.977
```

Figura 3g

Bibliografia

1. Wilkinson J.H. The algebraic eigenvalue problem, London: Oxford University Press (1965)
2. Ralston A. Numerical methods for digital computers. Wiley Vol 1. (1960) e 2. (1967)