to all'asse x, sia il baricentro G che il centro di taglio C sono ubicati su x. La relazione dei momenti statici rispetto ad una retta, per esempio DE (orientata come y) fornisce la posizione di G:

$$A = 16\, a\, \delta$$

$$S_{DE} = 2 \cdot 6\, a\, \delta \cdot a + a\, \delta \cdot 2\, a = 14\, a^2\, \delta$$

$$d_{G \cdot DE} = \frac{S_{DE}}{A} = \frac{7}{8}\, a\ .$$

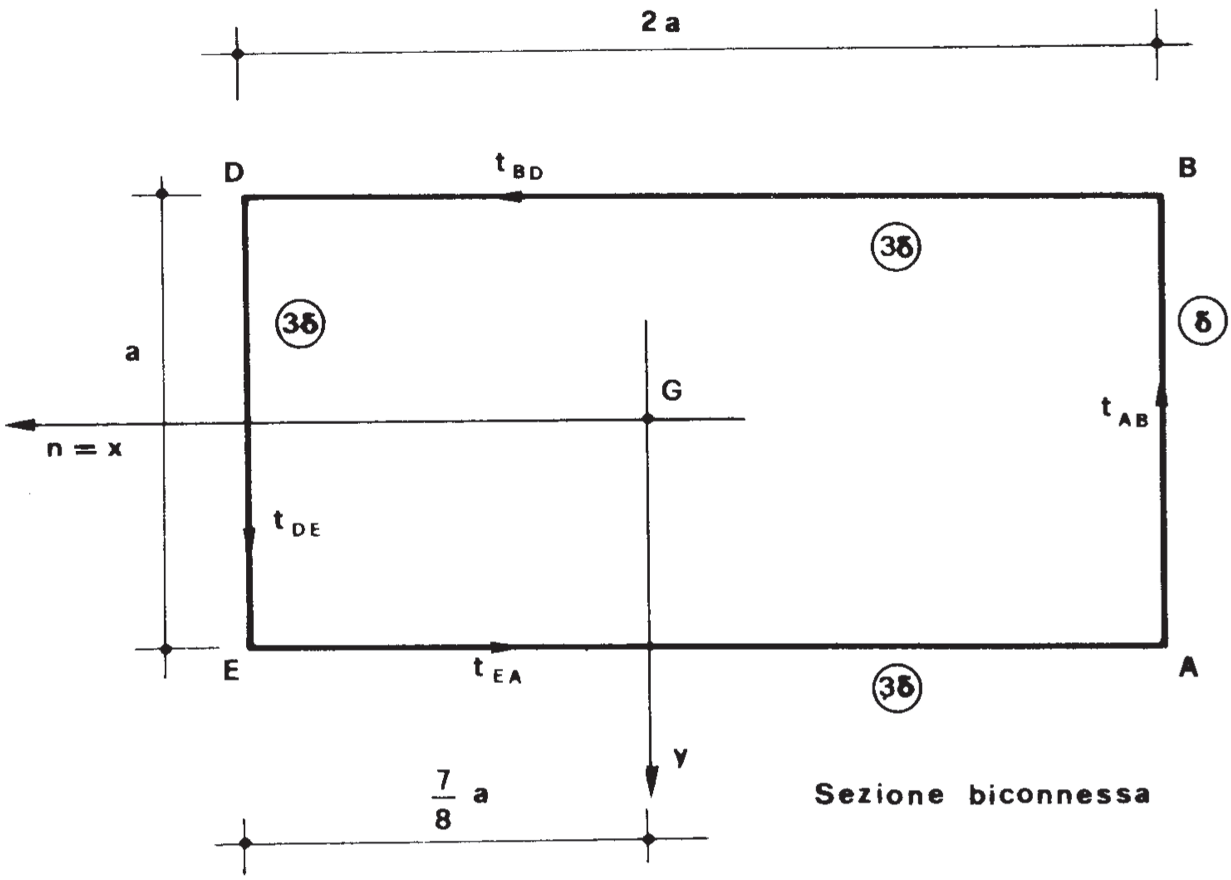
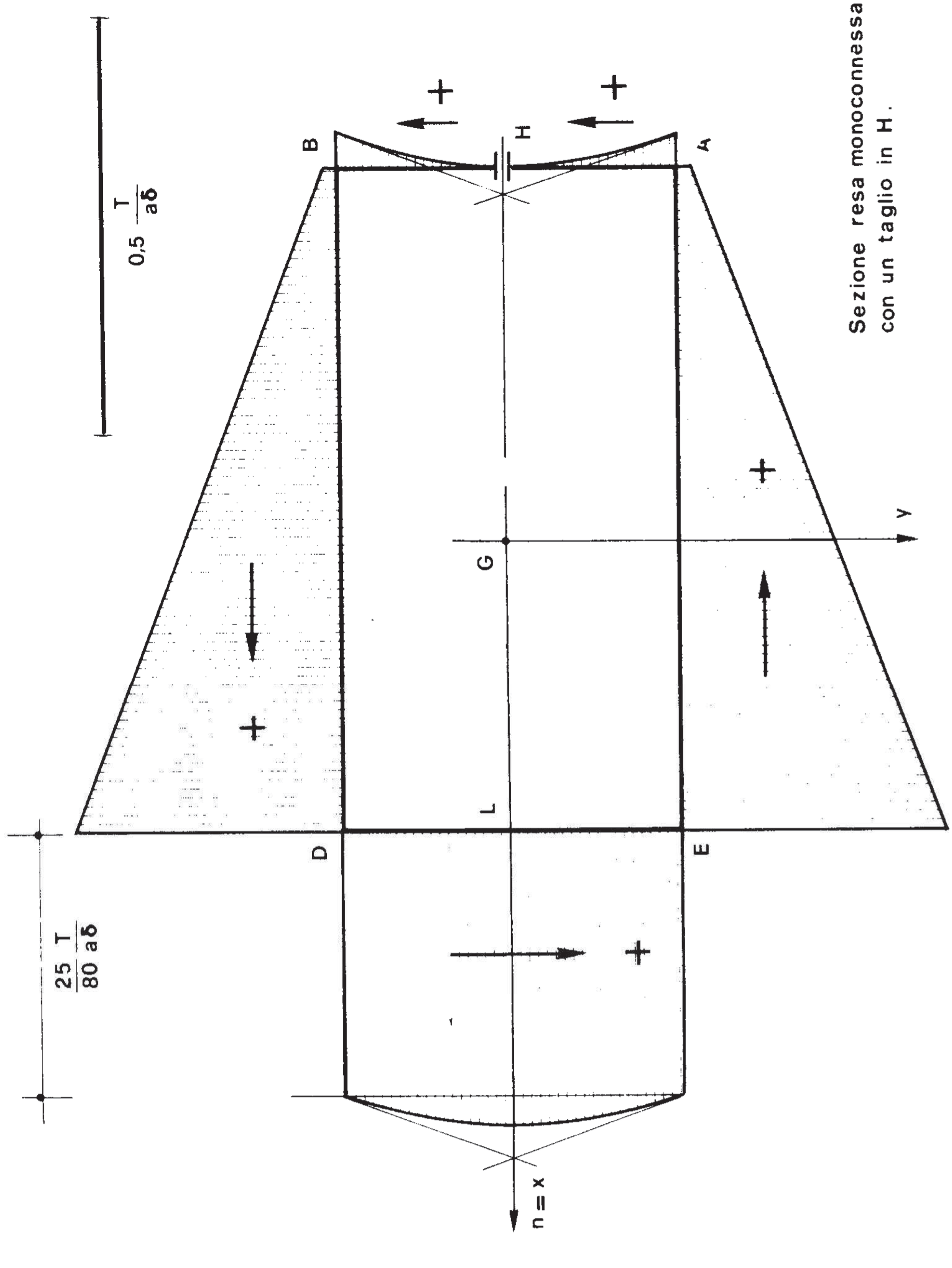


Figura 12a

E' sufficiente, per la ricerca di C, operare su un solo asse neutro, che conviene sia x. Risulta

$$I_x = 2 \cdot 6\, a\, \delta \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3\, \delta\, a^3}{12} + \frac{\delta\, a^3}{12} = \frac{10}{3}\, \delta\, a^3\ .$$



Sezione resa monoconnessa
con un taglio in H.
$0{,}5\,\frac{T}{a\delta}$
$\frac{25}{80}\,\frac{T}{a\delta}$
A
B
H
G
L
D
E
y
n = x

Figura 12b

Per ottenere il diagramma delle τ si opera un taglio in H, rendendo la sezione monoconnessa (fig. 12b). Si ha così ($T_f = T$)

$$\tau_H = \qquad\qquad = 0$$

$$\tau_{BA} = \frac{T}{I_x\,\delta} \cdot \frac{a\,\delta}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{3}{80}\,\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_{BD} = \frac{\tau_{BA}}{3} = \frac{1}{80}\,\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_{DB} = \tau_{BD} + \frac{T}{3\,I_x\,\delta} \cdot 6a\,\delta \cdot \frac{a}{2} = \frac{25}{80}\,\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_{DE} = \tau_{DB}$$

$$\tau_L = \tau_{DB} + \tau_{BH} = \frac{28}{80}\,\frac{T}{a\,\delta}\,.$$

Tale diagramma è in equilibrio con T sulla sezione chiusa. Un diagramma τ (s) come quello della fig.12c è anch'esso in equilibrio sulla sezione chiusa, per $T = 0$ infatti per esso deve essere div $\tau = 0$, essendo già nel primo soddisfatta la (33). Quindi la somma delle τ (s) della fig. 12b, e delle τ (s) della fig. 12c, soddisfa il problema se è soddisfatta la congruenza. Lo spostamento relativo Δw in H è pari a

$$\int_m \gamma\, ds \quad \frac{1}{G}\int_m \tau\, ds\,, \tag{54}$$

dove l'integrale è esteso alla linea media m: quindi la *condizione di congruenza è*

$$\int_m \tau\, ds = 0\;; \tag{55}$$

essa non è altro che l'espressione del *teorema di Stokes* in riferimento alla linea chiusa m, ed all'insieme vettoriale delle τ da taglio, cui si associa rotore nullo.

Giova osservare che la (55) si traduce *nell'annullarsi dell'area del diagramma* τ (s).

Operando sulle τ (s) della fig. 12b si ha

$$\int_m \tau\, ds = \left[\frac{1}{3}\,\frac{3}{80} + \frac{2}{3}\,\frac{3}{80} + \frac{25}{80} + \frac{4}{2}\left(\frac{1}{80} + \frac{25}{80}\right)\right]\frac{T}{\delta} = \frac{T}{\delta}\ ;$$

operando sulle τ (s) della fig.12c si ha

$$\int_m \tau\, ds = \tau_H\, a + \frac{\tau_H}{3}\cdot 5a = \frac{8}{3}\, a\, \tau_H\ ;$$

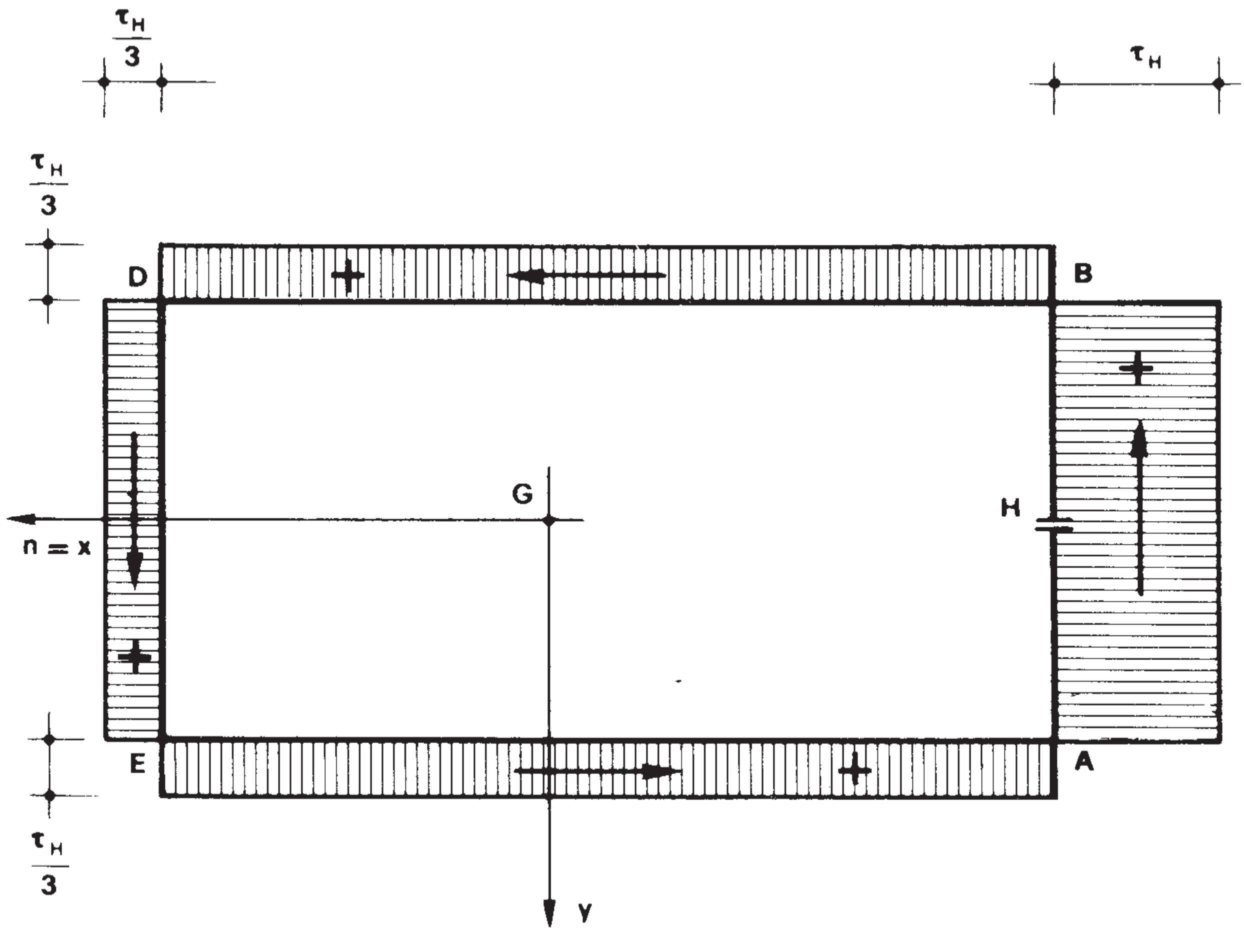


Figura 12c

quindi la (55) si traduce nella

$$\frac{T}{\delta} + \frac{8}{3}\, a\, \tau_H = 0$$

da cui

$$\tau_H = -\frac{3}{8}\frac{T}{a\,\delta}\,.$$

Si ha pertanto

$$\tau_H \qquad\qquad = -\frac{30}{80}\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_{BA} = \left(\frac{3}{80} - \frac{30}{80}\right)\frac{T}{a\,\delta} = -\frac{27}{80}\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_{BD} = \left(\frac{1}{80} - \frac{10}{80}\right)\frac{T}{a\,\delta} = -\frac{9}{80}\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_{DB} = \left(\frac{25}{80} - \frac{10}{80}\right)\frac{T}{a\,\delta} = \frac{15}{80}\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_{DE} = \tau_{DB} \qquad = \frac{15}{80}\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_L = \left(\frac{28}{80} - \frac{10}{80}\right)\frac{T}{a\,\delta} = \frac{18}{80}\frac{T}{a\,\delta}\,.$$

Le risultanti parziali delle $\tau\,\delta\,ds$ sono (fig. 12e)

$$T_{AB} = \left(\frac{27}{80} + \frac{2}{3}\,\frac{3}{80}\right)T = \frac{29}{80}\,T$$

$$T_{BD} = \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{80} + \frac{15}{80}\right)6\,T = \frac{18}{80}\,T$$

$$T_{DE} = \left(\frac{15}{80} + \frac{2}{3}\,\frac{3}{80}\right)3\,T = \frac{51}{80}\,T\,.$$

La risultante T agisce all'ascissa x_c fornita dall'equazione di equivalenza alla rotazione intorno a D:

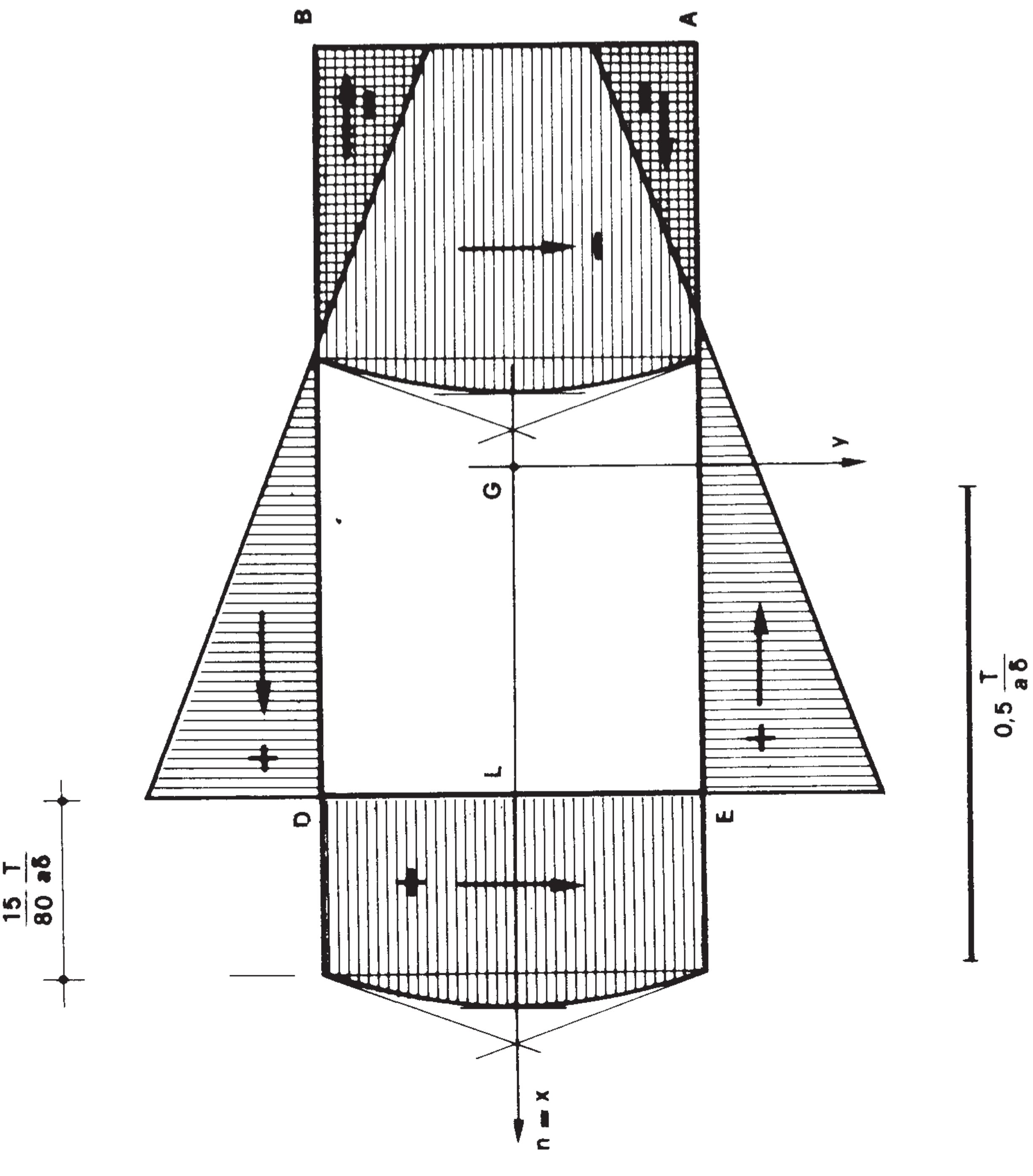


Figura 12d

$$-\frac{29}{80}\,T\cdot 2a + \frac{18}{80}\,T\cdot a = -\,T\left(\frac{7}{8}\,a - x_c\right)$$

da cui

$$x_c = \frac{3}{8}\,a\,.$$

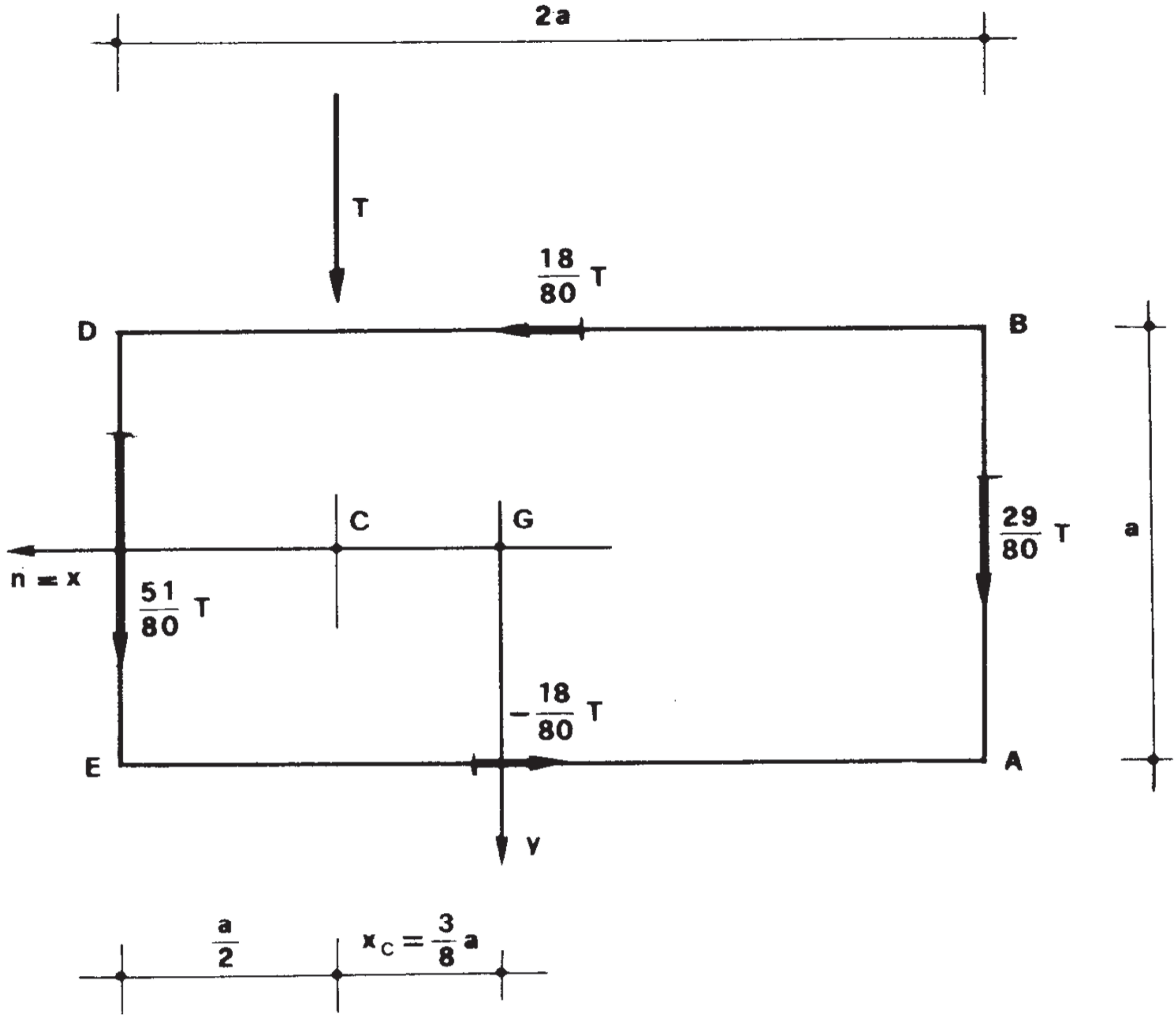


Figura 12e

Problema n. 13.

La sezione della fig.13a è triconnessa; essa è simmetrica rispetto all'asse x, e perciò su x giacciono sia il baricentro G che il centro di taglio C. Risulta $A = 22\,a\delta$.

La relazione dei momenti statici rispetto alla BA (orientata come y) si scrive

$$S_{BA} = 2 \cdot 8 a \delta \cdot a + a \delta \cdot a + a \delta \cdot 2a = A \cdot d_{G \cdot BA}$$

da cui

$$d_{G \cdot BA} = \frac{19}{22} a \,.$$

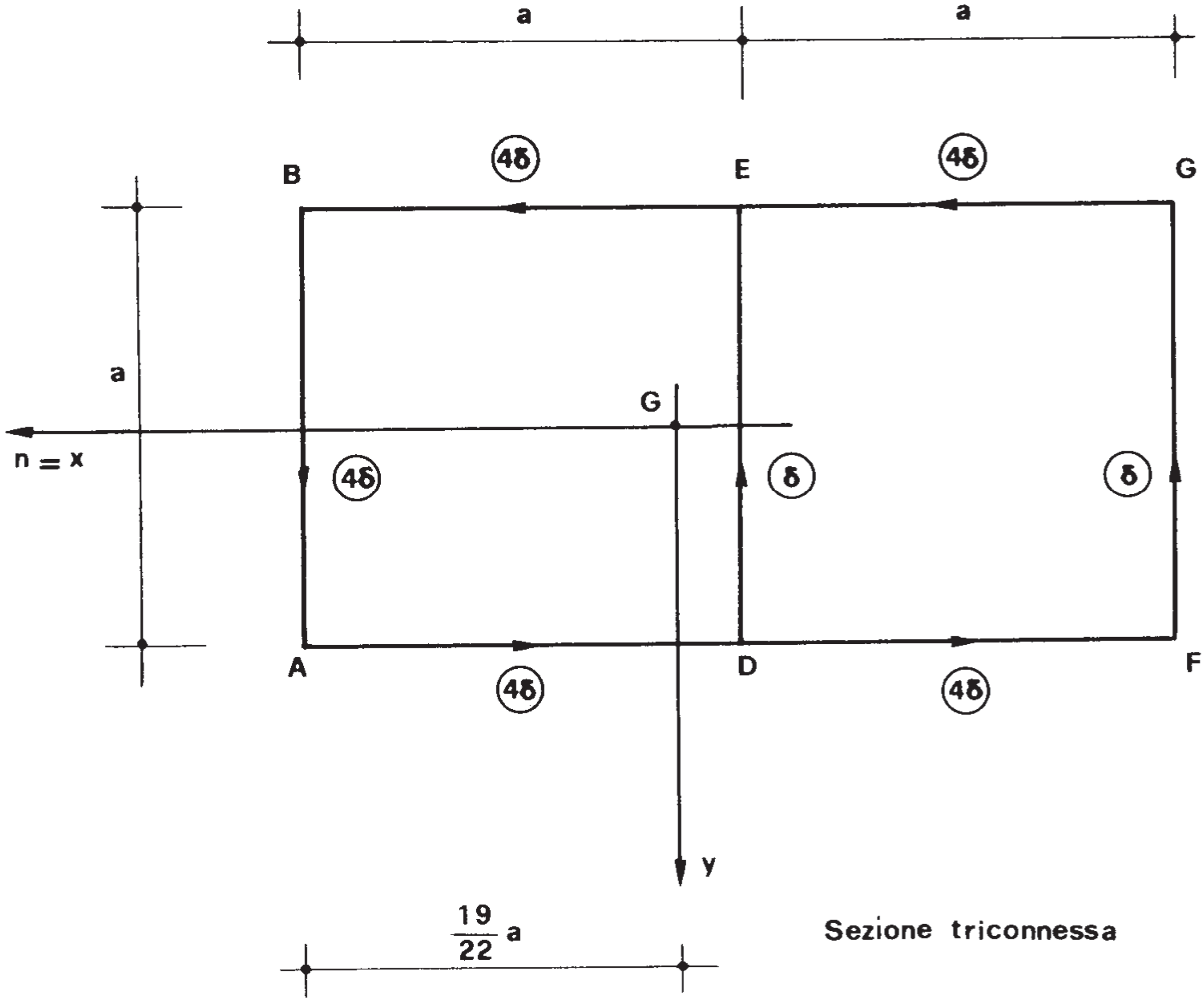


Figura 13a

Per ottenere C basta tracciare le τ (s) connesse con un solo asse neutro; conviene assumere $n = x$. In relazione a tale asse risulta

$$I_x = 2 \cdot 8 a \delta \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{6 \delta a^3}{12} = \frac{9}{2} \delta a^3 \,.$$

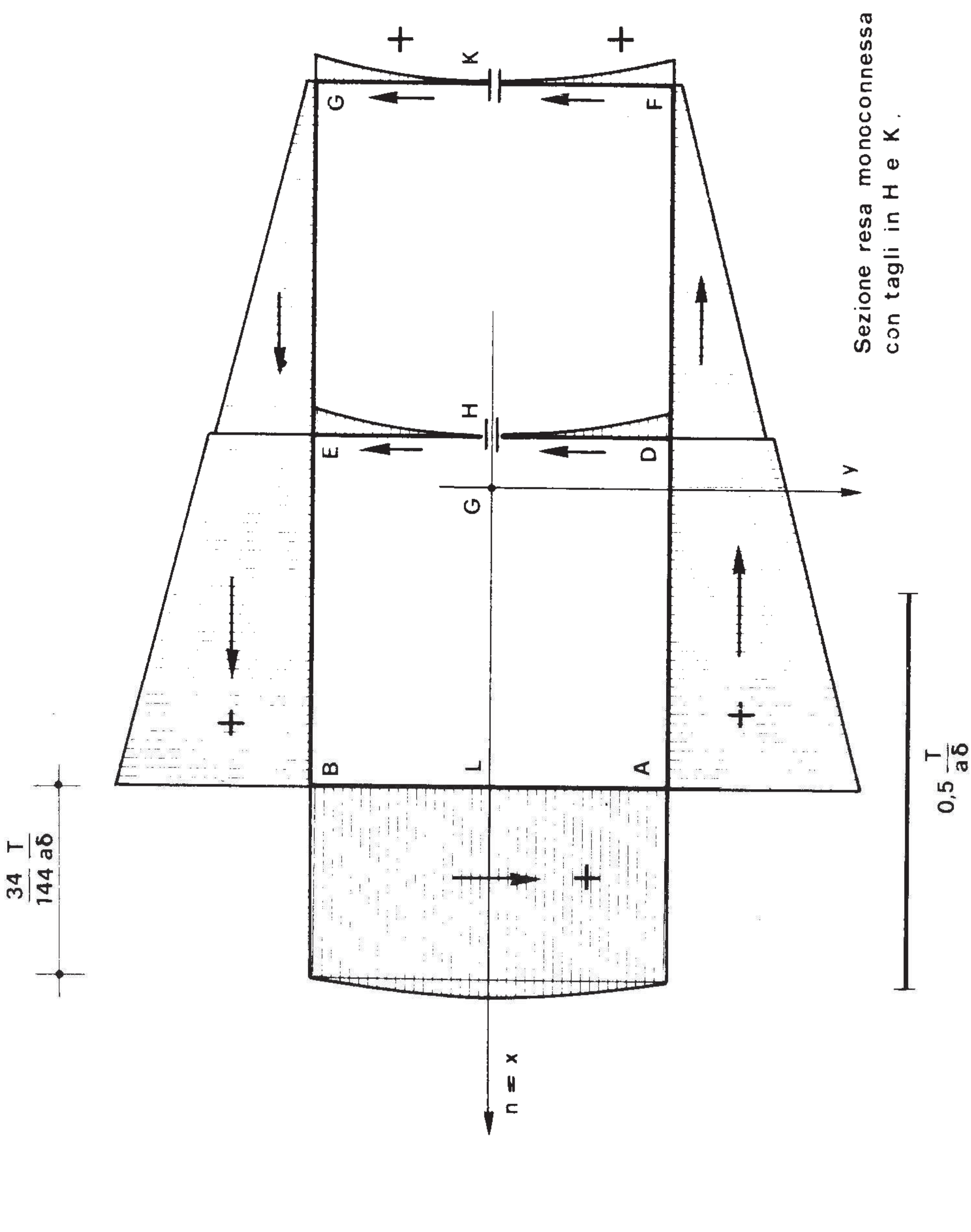

Sezione resa monoconnessa
con tagli in H e K.
K
H
G
F
E
D
B
L
A
G
y
n ≡ x
$\frac{34}{144}\frac{T}{a\delta}$
$0{,}5\,\frac{T}{a\delta}$

Figura 13b

Si esegue prima lo studio per la sezione resa monoconnessa con due tagli in H e K (fig. 13b). Per essa risulta ($T_f = T$)

$$\tau_H = \tau_K = 0$$

$$\tau_{GK} = \frac{T}{I_x \delta} \cdot \frac{a\delta}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{1}{36}\frac{T}{a\delta} = \frac{4}{144}\frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{GE} = \frac{\tau_{GK}}{4} = \frac{1}{144}\frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{EG} = \tau_{GE} + \frac{T}{4I_x\delta} \cdot 4a\delta \cdot \frac{a}{2} = \frac{17}{144}\frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{EH} = \tau_{GK} = \frac{4}{144}\frac{T}{a\delta}.$$

Dalla relazione

$$-4\delta\tau_{EG} - \delta\tau_{EH} + 4\delta\tau_{EB} = 0$$

risulta

$$\tau_{EB} = \tau_{EG} + \frac{\tau_{EH}}{4} = \frac{18}{144}\frac{T}{a\delta}.$$

Si ha ancora

$$\tau_{BE} = \tau_{EB} + \frac{T}{4I_x\delta} \cdot 4a\delta \cdot \frac{a}{2} = \frac{34}{144}\frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{BA} = \tau_{BE} = \quad = \frac{34}{144}\frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_L = \tau_{BA} + \tau_{GK} = \frac{38}{144}\frac{T}{a\delta}.$$

Il diagramma τ (s) della fig.13b è in equilibrio con T sulla sezione triconnessa; i due diagrammi delle fig.13c e 13d sono in equilibrio per $T = 0$ sulla sezione triconnessa; quindi la somma dei tre diagrammi è la

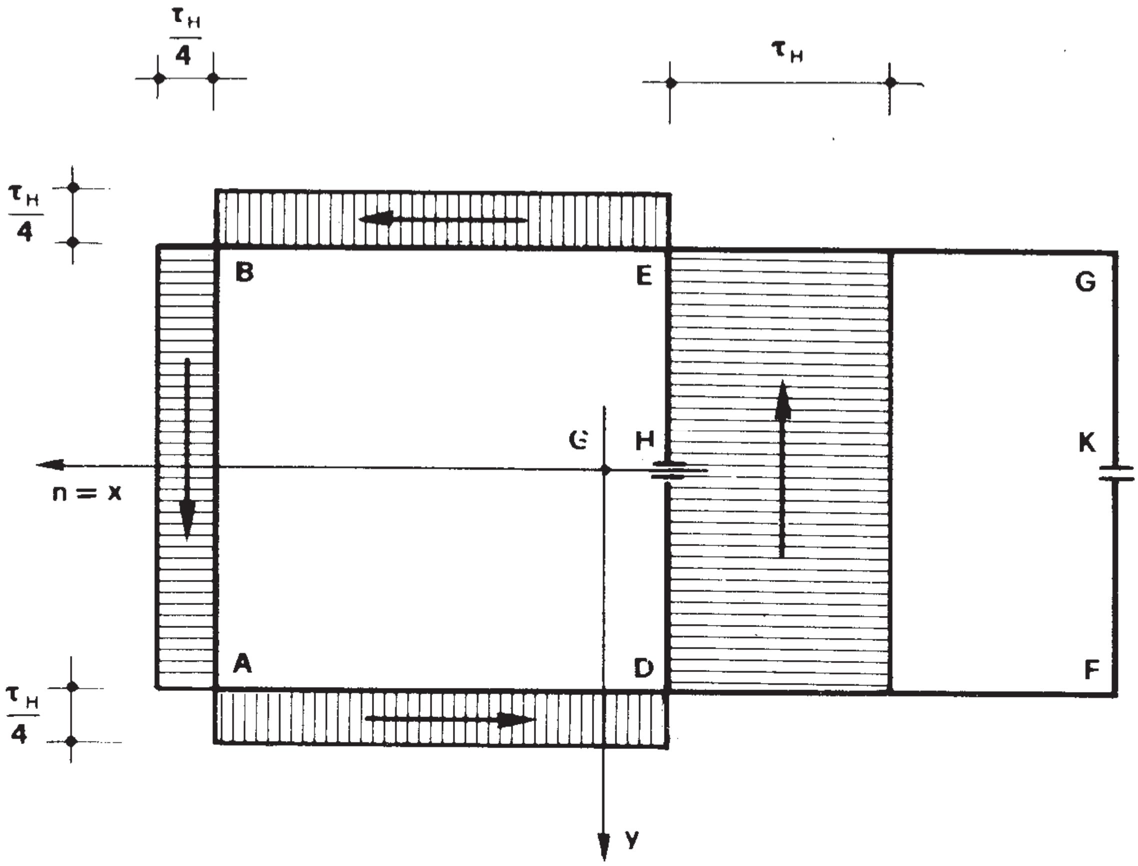


Figura 13c

soluzione se sono rispettate le due condizioni di congruenza in H e K. Per quanto già detto nel problema precedente, tali condizioni si scrivono

$$\begin{aligned} \int_{ADEB} \tau \, ds &= 0 \\ \int_{AFGB} \tau \, ds &= 0 \end{aligned} \qquad (56)$$

Il primo dei due integrali (56) deve essere eseguito percorrendo la linea $ADEB$ in uno stesso senso (per esempio antiorario), lo stesso vale per il secondo, in relazione alla linea $AFGB$. Essi esprimono la condizione dell'annullarsi di Δw in H e K, ed equivalgono alla scrittura del teorema di Stokes alle due linee anzidette.

Il secondo integrale può essere sostituito da quello relativo alla maglia *FGED:*

$$\int_{FGED} \tau \, ds = 0 \; ; \qquad (57)$$

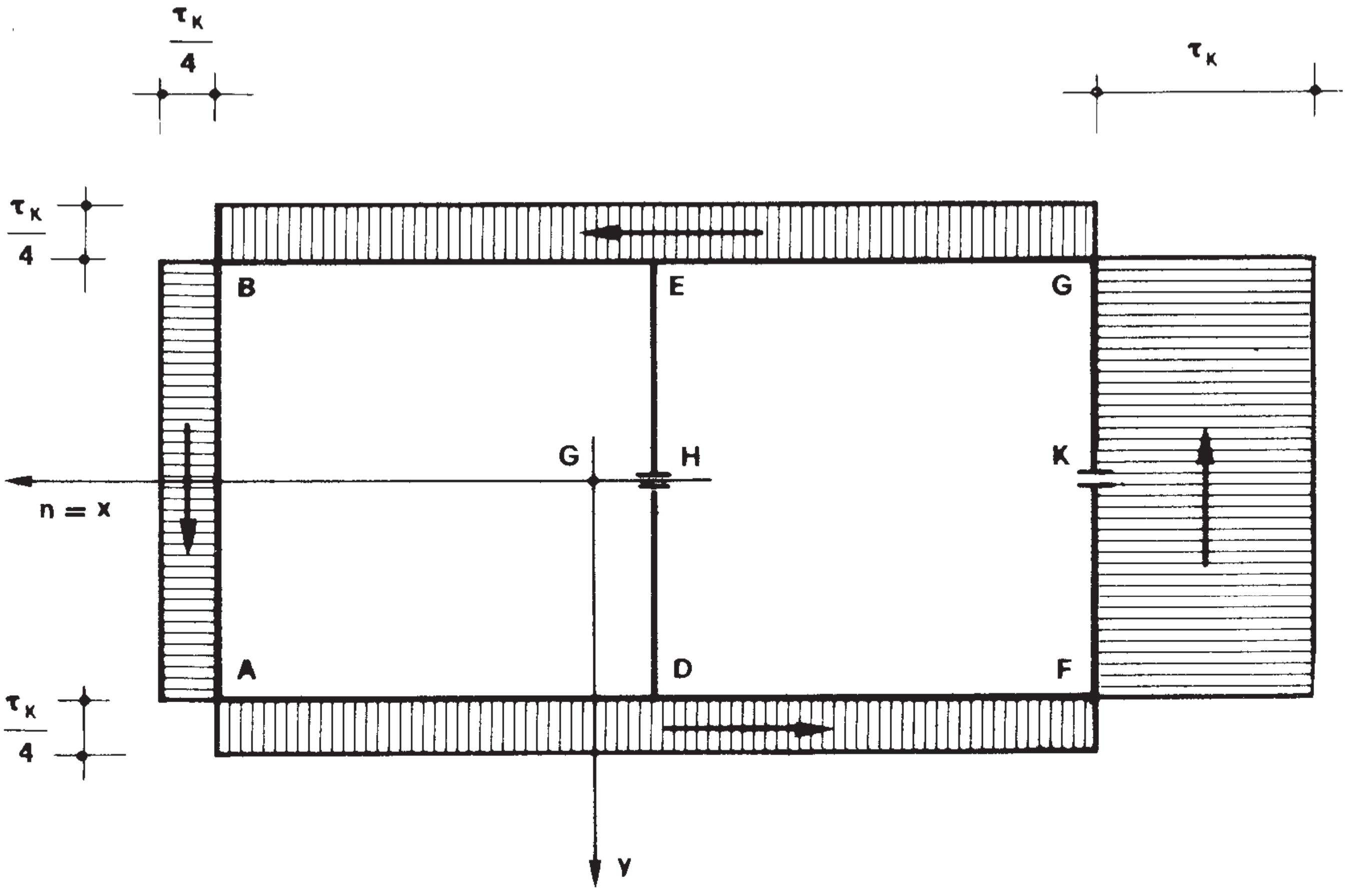


Figura 13d

ciò si evince sommando al secondo integrale delle (56) il primo cambiato di segno.

Con riferimento alle τ (s) della fig. 13b, si ha

$$\int_{ADEB} \tau \, ds = \left[\frac{1}{3}\,\frac{4}{144} + \frac{2}{2}\left(\frac{18}{144} + \frac{34}{144}\right) + \frac{34}{144} + \frac{2}{3}\,\frac{4}{144}\right]\frac{T}{\delta} =$$

$$= \frac{90}{144}\,\frac{T}{\delta}$$

$$\int_{FGED} \tau \, ds = \left[\frac{1}{3}\,\frac{4}{144} - \frac{1}{3}\,\frac{4}{144} + \frac{2}{2}\left(\frac{1}{144} + \frac{17}{144}\right)\right]\frac{T}{\delta} =$$

$$= \frac{18}{144}\,\frac{T}{\delta}\,.$$

Con riferimento alle τ (s) della fig.13c si ha

$$\int_{ADEB} \tau \, ds = \tau_H\, a + \frac{\tau_H}{4} \cdot 3a = \frac{7}{4}\,\tau_H\, a$$

$$\int_{FGED} \tau \, ds = \qquad - \tau_H\, a\,.$$

Con riferimento alle τ (s) della fig. 13d si ha

$$\int_{ADEB} \tau \, ds = \frac{\tau_K}{4} \cdot 3a \qquad = \frac{3}{4}\,\tau_K\, a$$

$$\int_{FGED} \tau \, ds = \tau_K a + \frac{\tau_K}{4} \cdot 2a = \frac{3}{2}\,\tau_K\, a\,.$$

Le due condizioni di congruenza si scrivono perciò come segue:

$$\frac{90}{144}\,\frac{T}{\delta} + \frac{7}{4}\,\tau_H\, a + \frac{3}{4}\,\tau_K\, a = 0$$

$$\frac{18}{144}\,\frac{T}{\delta} - \qquad \tau_H\, a + \frac{3}{2}\,\tau_K\, a = 0$$

da cui

$$\tau_H = -\frac{36}{144}\,\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_K = -\frac{36}{144}\,\frac{T}{a\,\delta}\,.$$

E' perciò (fig. 13e)

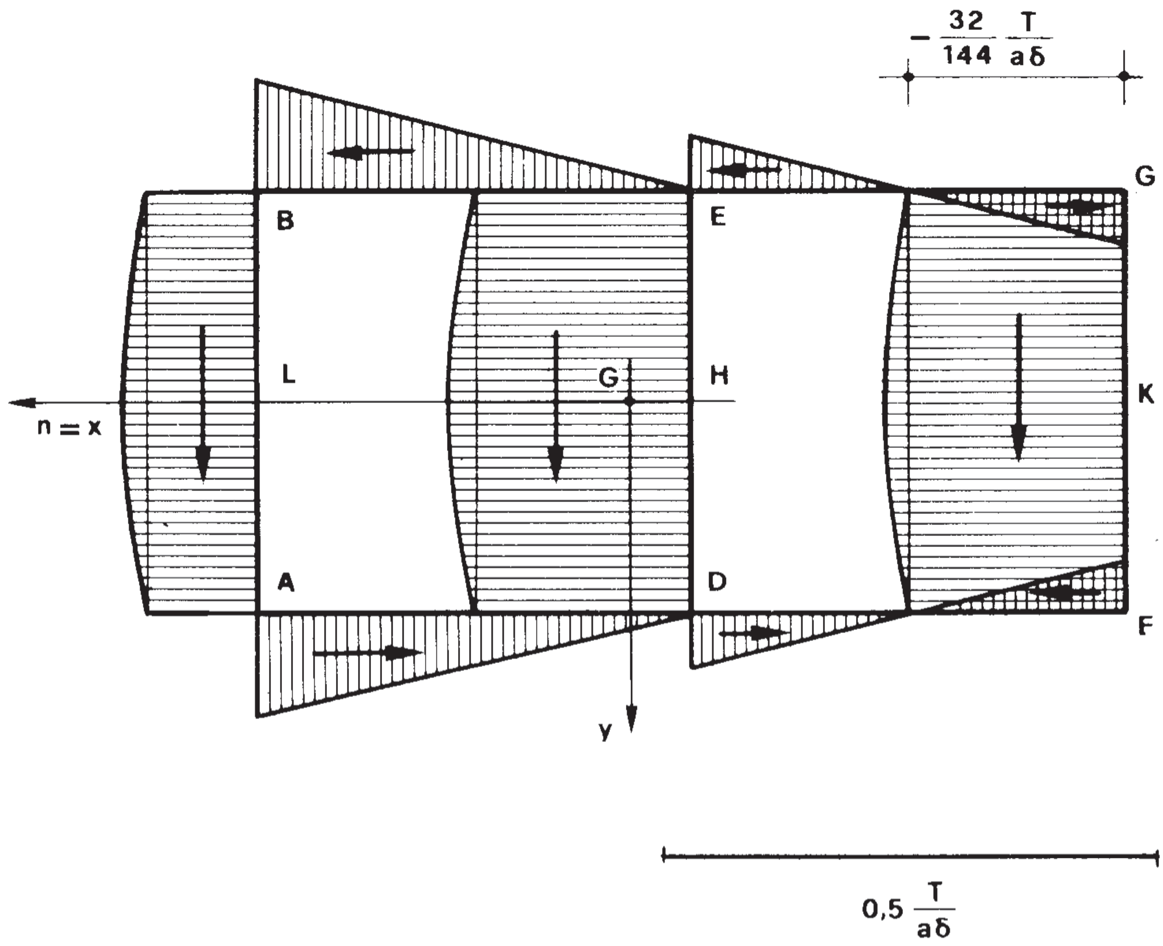


Figura 13e

$$\tau_H \;=\tau_K \qquad\qquad = -\frac{36}{144}\,\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_{GK} = \left(\frac{4}{144} - \frac{36}{144}\right)\frac{T}{a\,\delta} \qquad = -\frac{32}{144}\,\frac{T}{a\,\delta}$$

$$\tau_{GE} = \frac{\tau_{GK}}{4} = -\frac{8}{144}\frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{EG} = \left(\frac{17}{144} - \frac{9}{144}\right)\frac{T}{a\delta} = \frac{8}{144}\frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{EH} = \left(\frac{4}{144} - \frac{36}{144}\right)\frac{T}{a\delta} = -\frac{32}{144}\frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{EB} = \left(\frac{18}{144} - \frac{9}{144} - \frac{9}{144}\right)\frac{T}{a\delta} = 0$$

$$\tau_{BE} = \left(\frac{34}{144} - \frac{9}{144} - \frac{9}{144}\right)\frac{T}{a\delta} = \frac{16}{144}\frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{BL} = \tau_{BE} = \frac{16}{144}\frac{T}{a\delta}$$

$$\tau_{L} = \left(\frac{38}{144} - \frac{9}{144} - \frac{9}{144}\right)\frac{T}{a\delta} = \frac{20}{144}\frac{T}{a\delta}\,.$$

Le risultanti parziali delle $\tau\,\delta\,ds$ sono (fig.13f)

$$T_{GF} = \left(\frac{32}{144} + \frac{2}{3}\,\frac{4}{144}\right)T = \frac{13}{54}\,T$$

$$T_{ED} = T_{GF} = \frac{13}{54}\,T$$

$$T_{BA} = \left(\frac{16}{144} + \frac{2}{3}\,\frac{4}{144}\right)4T = \frac{28}{54}\,T$$

$$T_{EG} = 0$$

$$T_{BE} = \frac{1}{2}\,\frac{16}{144}\,4T = \frac{12}{54}\,T$$

La posizione della risultante T è definita dall'equazione di equivalenza alla rotazione intorno a B:

$$-\frac{13}{54}\,T\cdot 2a-\frac{13}{54}\,T\cdot a+\frac{12}{54}\,T\cdot a=-T\left(\frac{19}{22}\,a-x_c\right)$$

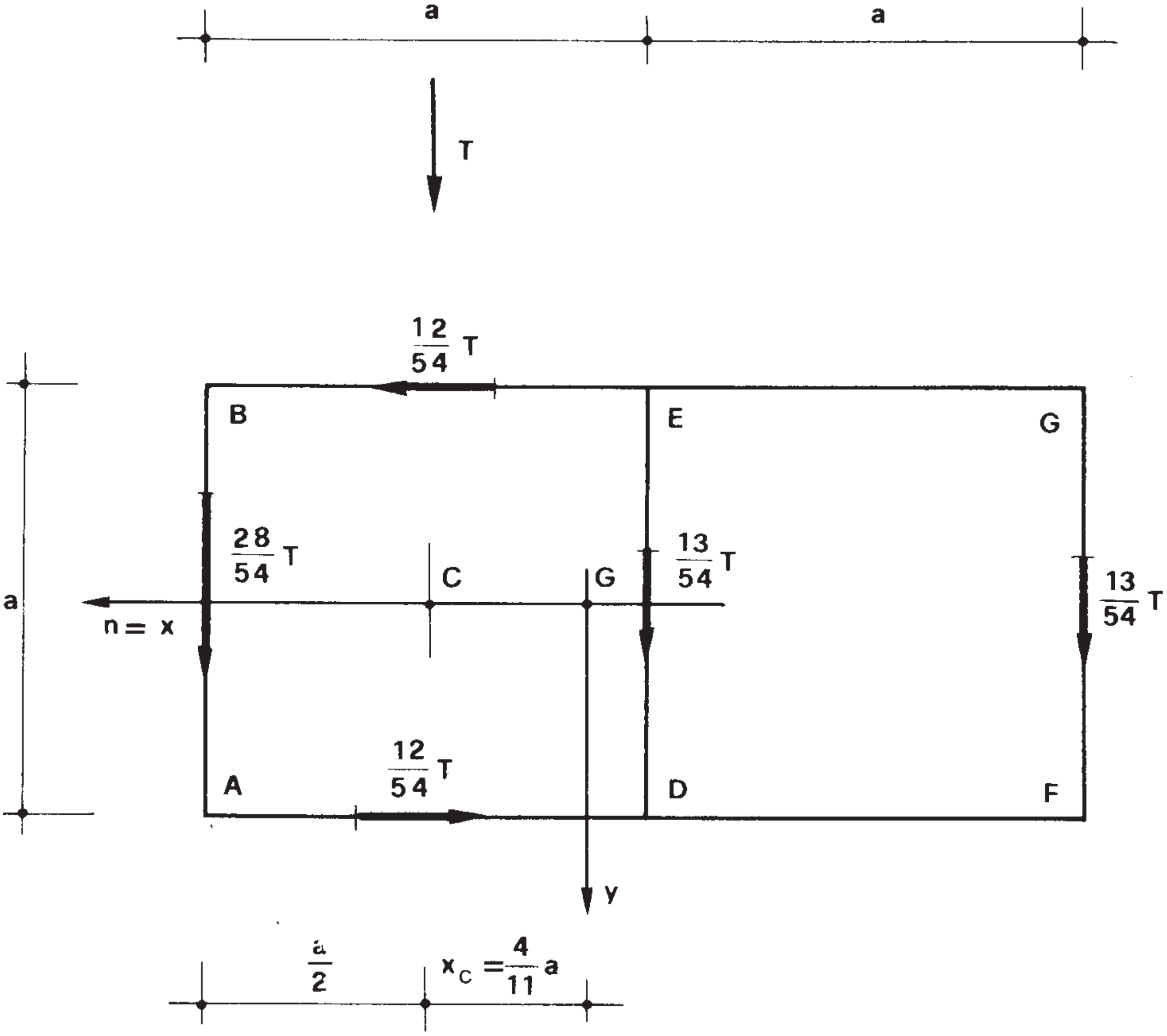


Figura 13f

da cui

$$x_c=\frac{4}{11}\,a\,.$$

Si verifica che, conformemente alle due condizioni di congruenza, le aree dei diagrammi $\tau\,(s)$ sono nulle, sia per la maglia *ADEB* che per la *DFGE*.

Problema n. 14.

La stessa sezione del problema 13 sia soggetta ad una coppia torcente $\mathfrak{M}$ (fig. 14a). Le incognite sono i tre prodotti $4\delta\tau_1$, $\delta\tau_2$ e $\delta\tau_3$ (flus-

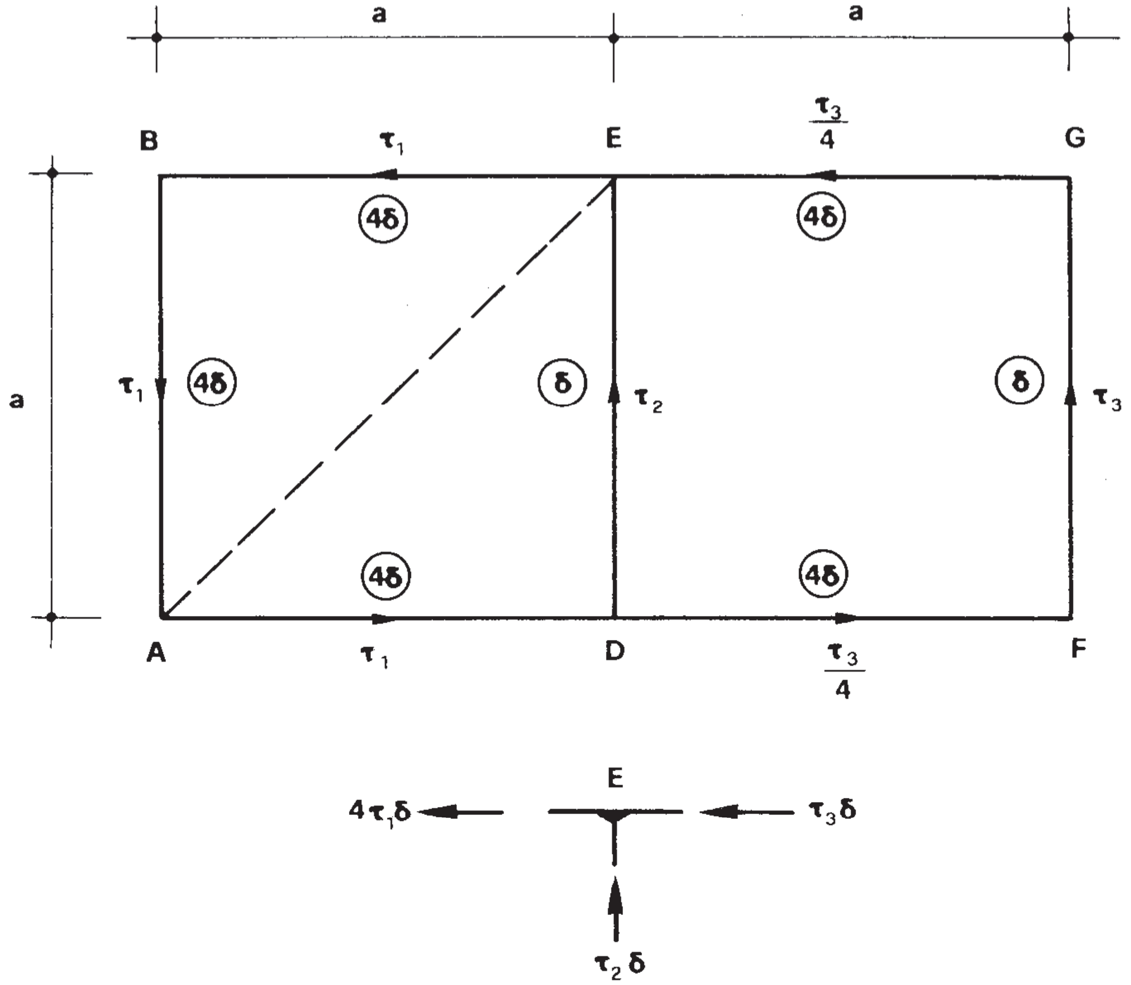


Figura 14a

si relativi ai tre tratti *EBAD, ED, DFGE*) e l'angolo ϑ' specifico di rotazione. I versi positivi delle τ (rette t_i) sono sempre quelli della fig.13a, e sono riportati anche nella fig.14a.

L'*equazione di nodo* scritta in E è

$$4\tau_1\,\delta - \tau_2\,\delta - \frac{\tau_3}{4}\,4\,\delta = 0\ . \tag{58}$$

Le due *equazioni di maglia* scritte per $ADEB$ e per $DFGE$ sono rispettivamente

$$3\,a\,\tau_1 + a\,\tau_2 = 2\,G\,\vartheta'\,a^2$$

(59)

$$-a\tau_2 + a\tau_3 + 2a\cdot\frac{\tau_3}{4} = 2G\vartheta' a^2 .$$

L'*equazione di equilibrio globale,* scegliendo come polo il punto A, si scrive determinando prima le *aree settoriali* dei tre tratti $EBAD$, ED, $DFGE$:

$$A_{s1} = \frac{a^2}{2}$$

$$A_{s2} = \frac{a^2}{2}$$

$$A_{s3} = 3\,\frac{a^2}{2} ;$$

è quindi

$$\mathfrak{M} = 2\,\Sigma_i\,\tau_i\,\delta_i\,A_{si} =$$

$$\mathfrak{M} = 2\left(4\tau_1\,\delta\cdot\frac{a^2}{2} + \tau_2\,\delta\cdot\frac{a^2}{2} + \tau_3\,\delta\cdot\frac{3a^2}{2}\right)$$

e ancora

$$= 4\tau_1\,\delta a^2 + \tau_2\,\delta a^2 + 3\tau_3\,\delta a^2 . \qquad (60)$$

Dalla (58) si trae

$$\tau_1 = \frac{\tau_2 + \tau_3}{4} ;$$

le (59) si scrivono così

$$7\tau_2 + 3\tau_3 = 8G\vartheta' a$$

$$-2\tau_2 + 3\tau_3 = 4G\vartheta' a$$

da cui

$$\tau_2 = \frac{12}{27}\, G\, \vartheta' a$$

$$\tau_3 = \frac{44}{27}\, G\, \vartheta' a \qquad (61)$$

e quindi

$$\tau_1 = \frac{14}{27}\, G\, \vartheta' a \qquad (62)$$

Dalla (60) si trae

$$\frac{\mathfrak{M}}{\delta\, a^2} = \frac{200}{27}\, G\, \vartheta' a$$

da cui

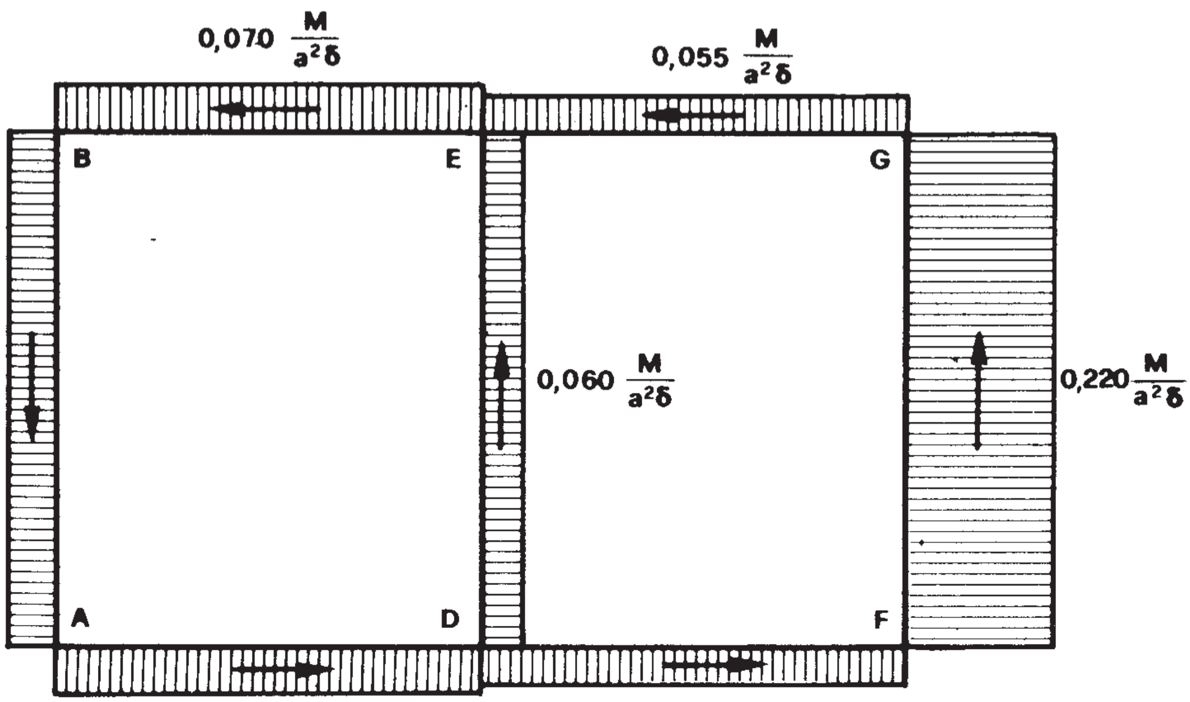


Figura 14b

$$\vartheta' = \frac{27}{200}\, \frac{\mathfrak{M}}{G\, \delta\, a^3}\,. \qquad (63)$$

La (63) fornisce il valore della rigidità torsionale della sezione:

$$C_t = \frac{200}{27}\, G\,\delta\, a^3 \ . \tag{64}$$

Inoltre, la (63), sostituita nelle (61) e (62), fornisce le espressioni delle τ in funzione di ϑ:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{14}{200}\,\frac{\mathfrak{M}}{\delta\, a^2} \\ \tau_2 &= \frac{12}{200}\,\frac{\mathfrak{M}}{\delta\, a^2} \\ \tau_3 &= \frac{44}{200}\,\frac{\mathfrak{M}}{\delta\, a^2}\ . \end{aligned} \tag{65}$$

Il diagramma delle τ è disegnato nella fig.14b.

Problema n. 15.

Nel problema 12 e nel 13 si è giustificata la relazione di Stokes nel taglio come fatto di congruenza; lo stesso vuole qui farsi per la torsione. Innanzitutto (fig. 15a) deve fornirsi l'espressione delle w nella torsione delle sezioni aperte.

Sia AB una generica sezione monoconnessa; la torsione, generata da una coppia $\mathfrak{M}$, non altera la forma della sezione retta, in cui perciò le u e v possono associarsi ad una rotazione rigida. Il centro O di tale rotazione dipende dai vincoli della sezione incastrata, se in tale sezione esiste un appoggio torsionale, e cioè tale da impedire ϑ ma non i w.

Si utilizza il principio dei lavori virtuali, assumendo come spostamenti quelli reali, e come sistema di forze fittizio quello costituito da una distribuzione $\tau\delta = cost$ sulle sezioni rette; questo sistema è in equilibrio, se è accompagnato dalle $\tau_A\ \delta_A$ sulla faccia laterale del prisma di base δ_A, e dalle $\tau_B\ \delta_B$ sulla faccia di base δ_B. E' facile infatti verificare che sulla sezione $z = l$ (disegnata nella fig. 15a, dove l'asse z è diretto verso l'alto) la risultante delle $\tau\ \delta\ ds$ è fornita da $\tau k \delta$, dove k è in modulo e segno la lunghezza del segmento AB; sulla sezione $z = 0$ la risultante è $-\ \tau k \delta$(*).

(*) Le due forze $\tau\ \delta\ k$ e $-\ \tau\ \delta\ k$ sono parallele alla congiungente AB, e determinano un piano

Sulla faccia laterale di base δ_A la risultante è invece $-\tau h \delta$, dove h è l'altezza del prisma; e sulla faccia laterale di base δ_B è $\tau h \delta$. Tali forze si fanno equilibrio.

Il principio dei lavori virtuali permette di scrivere(*)

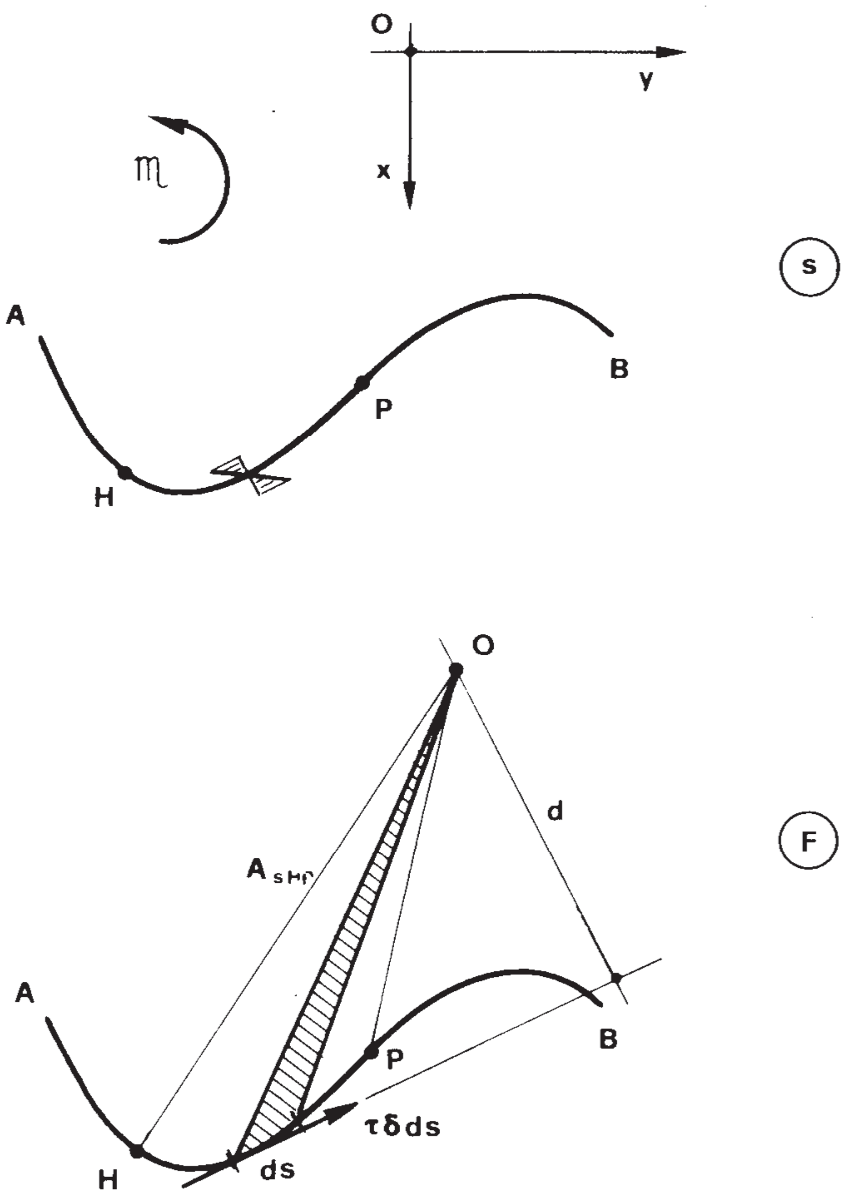


Figura 15a

parallelo a z; esse quindi equivalgono ad una coppia il cui vettore momento è ortogonale al piano definito dalla retta AB e dalla direzione z.

(*) Il lavoro interno

$$\int_V \tau \gamma \, dV = h \int_A \tau_1 \tau_2 \, dA$$

è nullo, perchè τ_1 è antisimmetrico rispetto alla t, e τ_2 è simmetrica.

$$(w_B - w_A)\, \tau h \delta + \int_A^B \tau \delta\, ds \cdot \vartheta' h d = 0 \tag{66}$$

da cui

$$w_B - w_A = -\, \vartheta' \int_A^B d \cdot ds\,. \tag{67}$$

Dati due punti qualsiasi H e P, dove H precede P nel verso di t, è

$$w_P = w_H - \vartheta' \int_A^B d \cdot ds\,. \tag{68}$$

L'integrale della (68) non è che il doppio dell'area A_{sHP} compresa tra i due raggi OH e OP, e la linea media; tale area è l'*area settoriale* relativa al polo O ed al tratto HP, ed è da considerarsi *positiva* se, muovendosi da H a P lungo la linea media, il raggio ruota in senso *antiorario*. La (68) si scrive così

$$w_P = w_H - 2\,\vartheta' A_{sHP}\,. \tag{69}$$

Si osservi che w_P non dipende dall'altezza h del prisma, e cioè gli ingobbimenti w sono gli stessi per tutte le sezioni. Le w_P sono date a meno della w_H, e ciò corrisponde al fatto che esse sono definite a meno di una traslazione rigida del prisma lungo l'asse z. La retta parallela a z e passante per O non ruota, tutte le altre parallele a z ruotano.

Ciò premesso, si consideri la trave la cui sezione retta, chiusa, è riportata nella fig.15b. Si rende monoconnessa la sezione tagliando la trave lungo la generatrice di traccia A, e si applica una coppia torcente $\mathfrak{M}_a$ tale da generare, su tale trave, una ϑ' pari a quella reale, e cioè a quella che la coppia $\mathfrak{M}$ reale genera sulla trave a sezione chiusa. Sulla trave aperta si ha, comunque si scelga il polo O,

$$A_{sA'A''} = A_m = a b\,.$$

e quindi

$$w''_A - w'_A = -\, 2\,\vartheta' A_m\,.$$

Per ripristinare la congruenza senza turbare l'equilibrio si fa agire una distribuzione $\tau\delta = cost$ sulle due basi del prisma, accompagnate dalle $\tau\delta$ simmetriche sulle due facce risultanti del taglio in A; tale distribuzione equivale ad una coppia torcente fornita da

$$\mathfrak{M}_b = 2\,\tau\,\delta\,A_m \ , \tag{70}$$

e ad essa non si accompagna ϑ'.

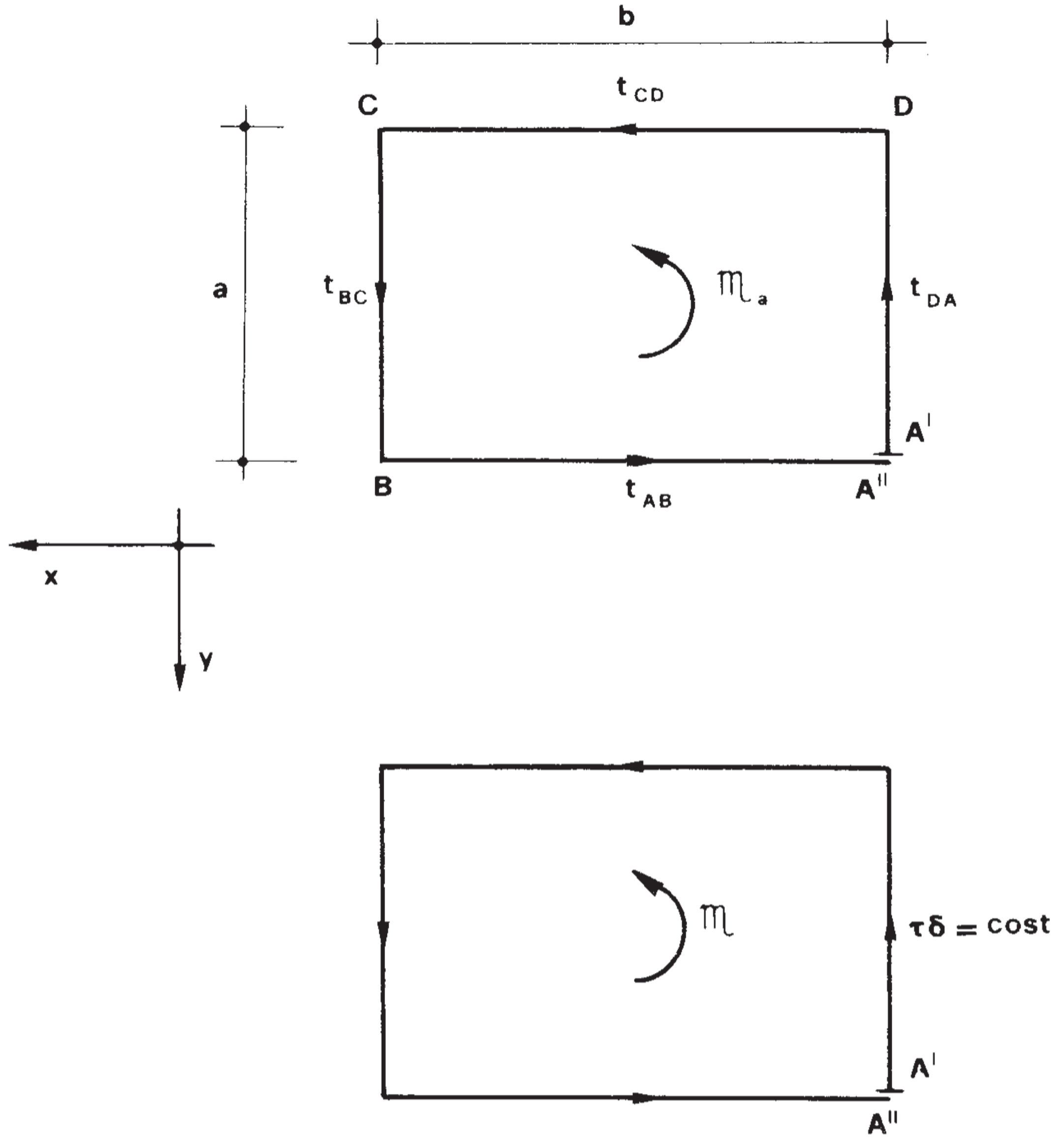


Figura 15 b

Per effetto della distribuzione aggiuntiva di τ si ha

$$w''_A - w'_A = \frac{1}{G}\int_{A'}^{A''} \tau\, ds = \frac{\tau\,\delta}{G}\int_{A'}^{A''} \frac{ds}{\delta} \ .$$

Il prodotto $\tau\delta$ è fornito dalla condizione di congruenza lungo la generatrice in A

$$2\vartheta' A_m - \frac{\tau\delta}{G}\int_{A'}^{A''}\frac{ds}{\delta} = 0$$

e quindi da

$$\tau\delta = \frac{2\vartheta' A_m G}{\int_m \frac{ds}{\delta}} .$$

Per la (70) si ha

$$\mathfrak{M} = \frac{\vartheta' 4 A_m^2 G}{\int_m \frac{ds}{\delta}} . \tag{71}$$

Trascurando $\mathfrak{M}_a$ in confronto ad $\mathfrak{M}$, la (71) fornisce

$$C_t = \frac{4 A_m^2 G}{\int_m \frac{ds}{\delta}} , \tag{72}$$

e la (70)

$$\tau = \frac{\mathfrak{M}}{2\delta A_m} , \tag{73}$$

e cioè le due formule di Bredt.

Problema n. 16.

La trave ST della fig. 16a è vincolata con sette pendoli, quindi è una volta iperstatica. La sezione è quella già studiata nel problema 9. Le condizioni di vincolo sono:

$$z = 0 \qquad ; \qquad w_G = u_B = u_E = v_A = 0 \ ;$$

$$z = dz \qquad ; \qquad v_C = 0 \ ;$$

$$z = l \qquad ; \qquad u_C = v_A = 0 \ .$$

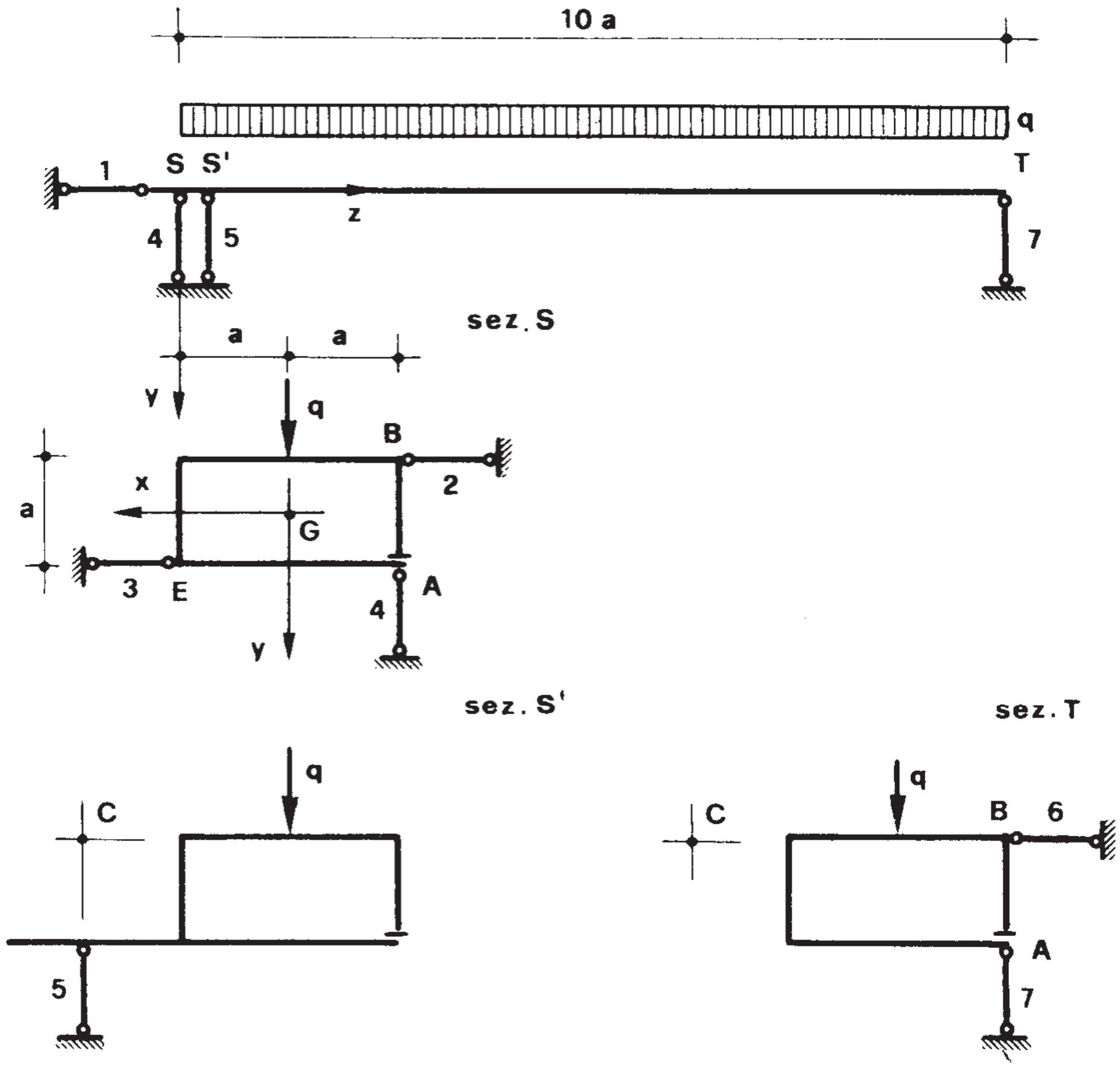


Figura 16a

La trave si rende isostatica eliminando il pendolo 7; quindi $X = N_7$.

Lo spostamento v_7° è dovuto per una parte v_{7f}° alle deformazioni da flessione, e per una parte v_{7t}° alle deformazioni da torsione. La prima è

$$v_{7f}^\circ = \frac{q \cdot (10\,a)^4}{8\,EI} \quad ;$$

con i dati del problema 9 si ha

$$v^{\circ}_{7f} = \frac{3}{52} \frac{qa}{E\delta} 10^4 = 576{,}9 \frac{q}{E} \frac{a}{\delta} .$$

Per calcolare la seconda parte, si osservi che nella deformazione torsionale di un concio di lunghezza dz soggetto a momento costante le fibre (e cioè i segmenti paralleli a z e compresi tra le due basi del concio) restano rettilinee, e quella contenente il centro di rotazione resta per di più parallela a z. Suddividendo la trave in conci ordinati da $z = 0$ a $z = l$, si avrà quindi nel primo concio una fibra di traccia $x_0 y_0$ che non presenta spostamenti; la fibra del secondo concio che non presenta spostamenti non può che avere la stessa traccia, per ragioni di continuità dell'inclinazione. Iterando il ragionamento per tutti i conci seguenti, si trae che *esiste una fibra della trave che resta parallela all'asse z (fibra fissa).* La posizione di tale fibra è dettata dai vincoli; nel caso in esame essa ha per traccia sulla generica sezione il punto O di concorso delle proiezioni secondo z sul piano della sezione degli assi dei pendoli 5 e 6, poichè tale traccia nella sezione S' può trovarsi solo sulla proiezione del pendolo 5, e nella sezione T sulla proiezione del pendolo 6 (oppure del pendolo 7). Si è scelto O coincidente con il centro C di taglio. Il diagramma del momento centrale M°_c (fig. 16b) è fornito da

$$M^{\circ}_c (z) = - q (l - z) x_c ;$$

la rotazione torsionale della sezione T è perciò data da

$$\vartheta^{\circ}_T = \int_0^l \frac{M^{\circ}_t}{C_t} dz = - \frac{q x_c l^2}{2 C_t} .$$

Se ne trae

$$v^{\circ}_{7t} = \frac{q x_c l^2}{2 C_t} (x_c + a) = \frac{37}{26} \frac{24}{13} \frac{100 a^4 q}{C_t} .$$

La rigidità torsionale è

$$C_t = \frac{G}{3} \Sigma s_i \delta_i^3 = G a \delta^3 \frac{34}{3} ; \qquad (74)$$

se ne trae

$$v^{\circ}_{7t} = 23{,}18 \, \frac{q}{G} \, \frac{a^3}{\delta^3} \, .$$

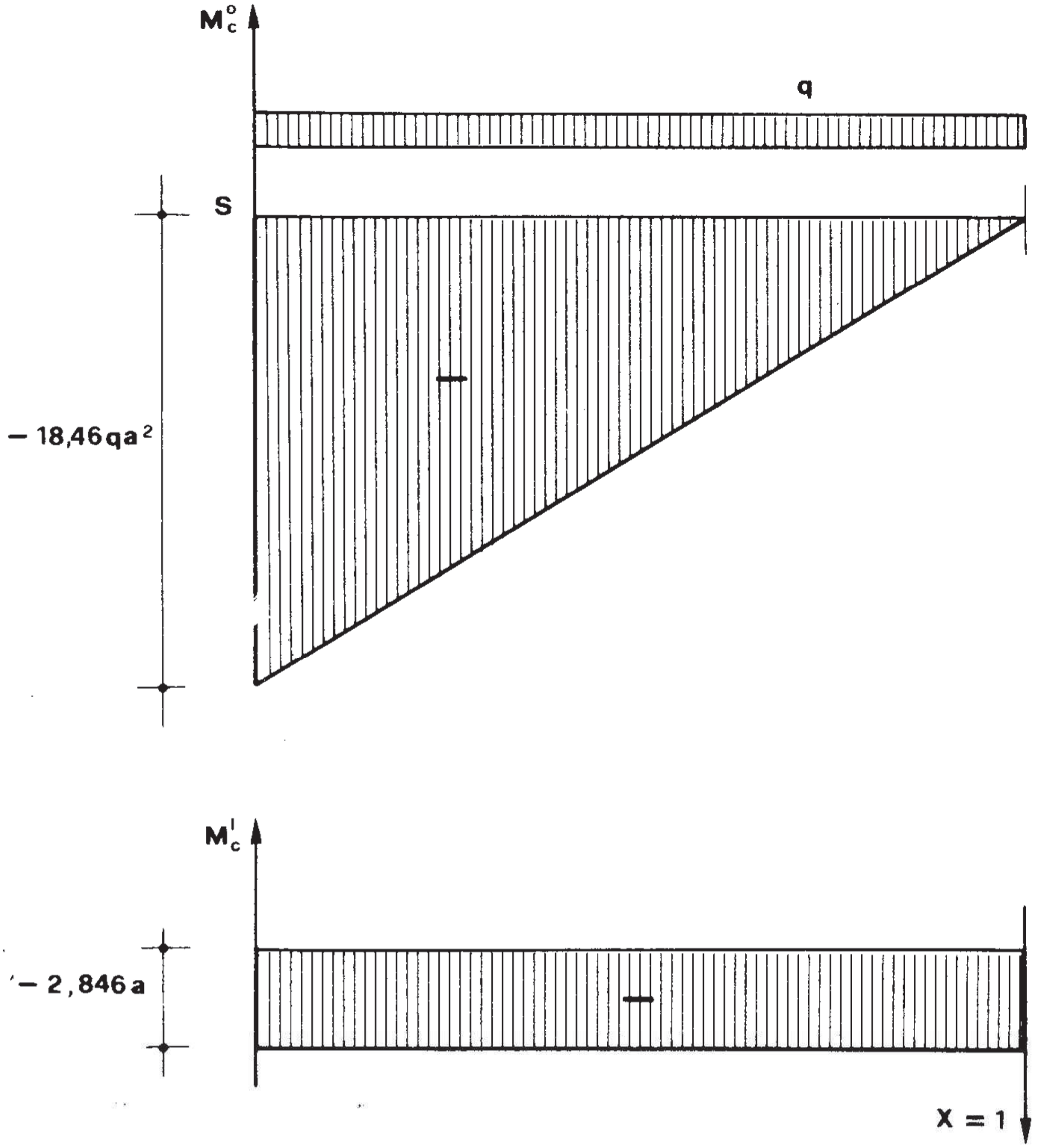


Figura 16b

E' perciò

$$v^{\circ}_{7} = q \left(576{,}9 \, \frac{a}{E\,\delta} + 23{,}18 \, \frac{a^3}{G\,\delta^3}\right).$$

Lo spostamento v'_{7f} (spostamento corrispondente al pendolo 7, e dovuto ad $X = 1$) è

$$v'_{7f} = \frac{(10\,a)^3}{3\,EI} = \frac{2}{13}\,\frac{1}{E\delta}\,10^3 = 153{,}8\,\frac{1}{E\delta}\,.$$

Il momento centrale dovuto ad $X = 1$ è

$$M'_c\,(z) = -\,(x_c + a) = -\,\frac{37}{13}\,a = -\,2{,}846\,a\,,$$

e quindi

$$\vartheta^1_T = \int_0^l \frac{M'_c}{C_t}\,dz = -\,\frac{37}{13}\,\frac{10\,a^2}{C_t} = -\,2{,}511\,\frac{a}{G\delta^3}$$

$$v'_{7t} = -\,\vartheta^1_T\,(x_c + a) = 7{,}146\,\frac{a^2}{G\delta^3}\,.$$

E' quindi

$$v'_7 = 153{,}8\,\frac{1}{E\delta} + 7{,}146\,\frac{a^2}{G\delta^3}\,.$$

L'equazione di congruenza

$$v^\circ_7 + X\,v'_7 = 0$$

porge

$$X = -\,q\,a\,\frac{577 + 23{,}2\,\dfrac{Ea^2}{G\delta^2}}{154 + 7{,}15\,\dfrac{Ea^2}{G\delta^2}}\,. \qquad (75)$$

Nel caso particolare

$$\frac{a}{\delta} = 30$$

$$\frac{E}{G} = \ 2$$

si ha $X = -\ 3{,}25\ qa$.

A scopo di paragone, la X dovuta al solo effetto flessionale si calcola in $X = -\ 3{,}75\ qa$. Nella fig.16c sono disegnati i diagrammi delle caratteristiche M_x, T_y ed M_c. Per il momento flettente M_x, si ha

$$M_{xS} \quad - \frac{ql^2}{2} - Xl \quad -\ 17{,}5\ qa^2 \ ;$$

chiamando in gioco il solo effetto flessionale si sarebbe avuto

$$M_{xS} \quad - \frac{ql^2}{8} \quad -\ 12{,}5\ qa^2 \ ,$$

con un errore del 28 % .

Per il taglio si ha

$$T_{yS} = ql + X = \quad 6{,}75\ qa$$

$$T_{yT} = \qquad X = -\ 3{,}25\ qa \ .$$

Per il momento centrale M_c si ha

$$\begin{aligned} M_{cS} &= -\ qlx_c - X(x_c + a) = \\ &= (-\ 18{,}46 + 9{,}25)\ qa^2 = -\ 9{,}21\ qa^2 \\ M_{cT} &= -\ X\ (x_c + a) \qquad = \quad 9{,}25\ qa^2 \ . \end{aligned}$$

Si verifichi la sezione d'incastro (fig.16d e 16e). Il momento flettente provoca le σ di valori estremi

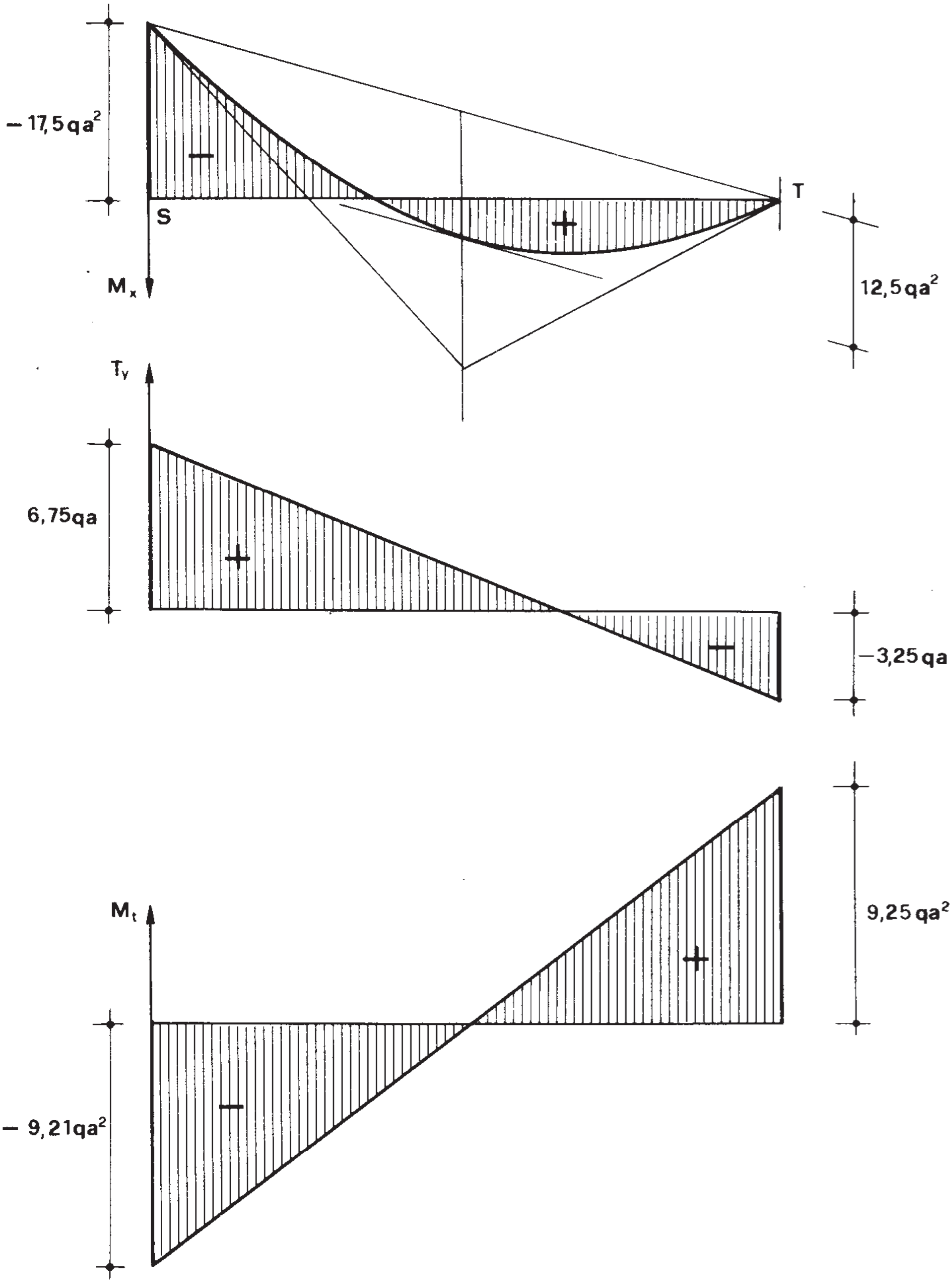


Figura 16c

$$\sigma_m = \pm \frac{M_x}{I_x} \frac{a}{2} = \pm\ 121\ \frac{q}{a}\ .$$

Risulta, poi per la torsione,

$$C_t = \frac{34}{3}\ G\,a\,\delta^3 = 4{,}20 \cdot 10^{-4}\ G\,a^4$$

$$\vartheta' = \frac{M_t}{C_t} = -\ \frac{9{,}21}{C_t}\ q a^2 = -\ 2{,}19 \cdot 10^4\ \frac{q}{G a^2}$$

$$rot\ \tau = 2\,G\,\vartheta' = -\ 4{,}38 \cdot 10^4\ \frac{q}{a^2}$$

e quindi, sui lati *BD* ed *EA*,

$$|\tau|_{max} = 4{,}38 \cdot 10^4\ \frac{q}{a^2} \cdot \delta = 1460\ \frac{q}{a}\ .$$

Per il taglio il diagramma delle τ è quello della fig. 9b,in cui $T = 6{,}75$ qa; quindi

$$\tau_H = -\ 11{,}7\ \frac{q}{a}$$

$$\tau_{DB} = 93{,}5\ \frac{q}{a}$$

$$\tau_{DE} = 187\ \frac{q}{a}$$

$$\tau_L = 199\ \frac{q}{a}\ .$$

Il diagramma delle τ da taglio è disegnato nella fig. 16e.

Si osservi che i momenti cui sono connessi ϑ' e relative τ da torsione (momenti centrali) vanno sempre calcolati rispetto al centro di taglio C; quando invece si calcolano le espressioni delle componenti dello spostamento necessario per scrivere le equazioni di congruenza, occorre te-

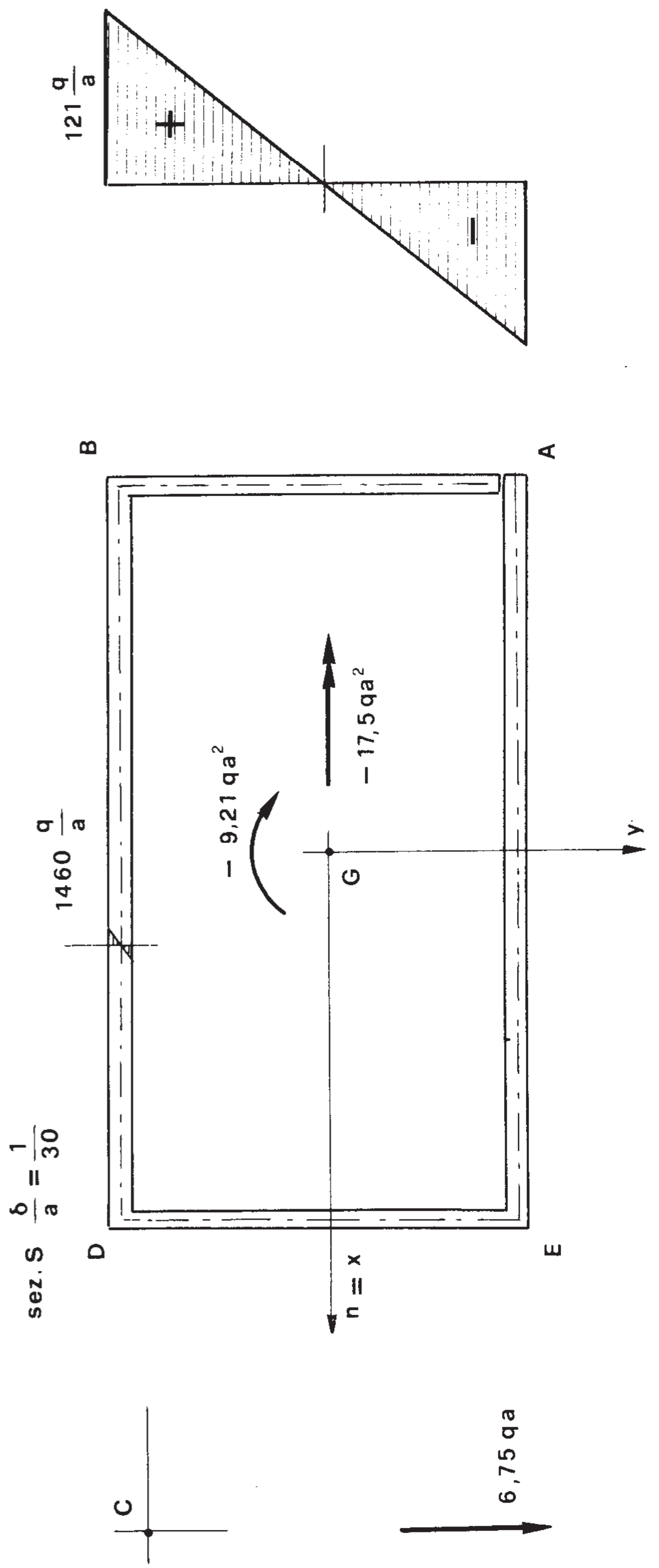


Figura 16d

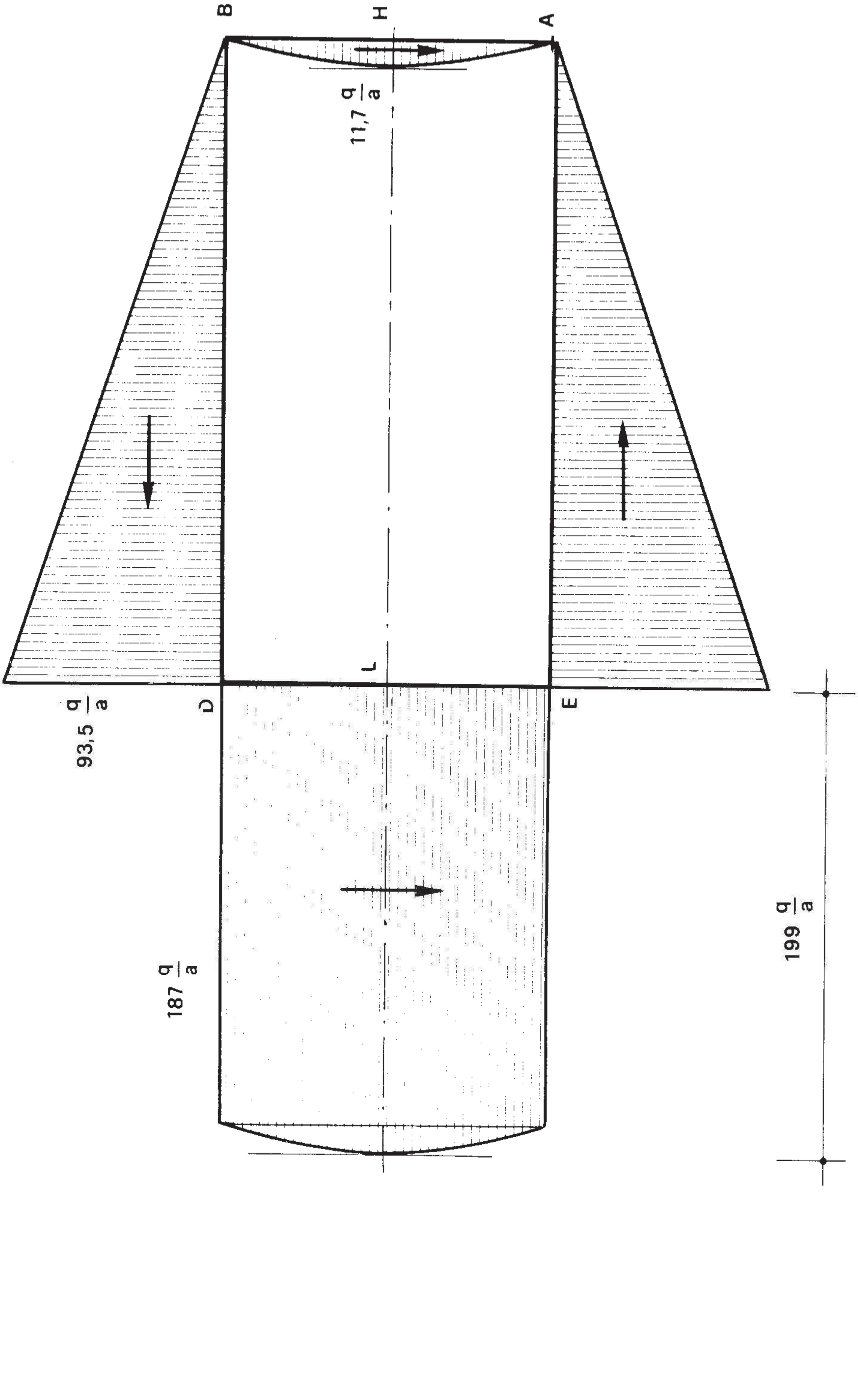


Figura 16e

ner presente che le rotazioni torsionali avvengono intorno alla traccia O della fibra fissa, determinata dai vincoli. Nel problema in esame si da il caso che O coincida con C. Se invece le ascisse del carico q e dei vincoli 5 e 7 sono generiche, e sempre nell'ipotesi che x sia asse principale d'inerzia, si ha, chiamando x_q l'ascissa di q, x_c quella del centro di taglio, x_p quella di N_7,

$$v^{\circ}_{7f} = \frac{q l^4}{8 EI}$$

$$v^{\circ}_{7t} = \frac{q l^2}{2 C_t} (x_c - x_q)(x_0 - x_r)$$

$$v'_{7f} = \frac{l^3}{3 EI}$$

$$v'_{7t} = \frac{l}{C_t} (x_c - x_r)(x_0 - x_r)$$

da cui

$$X = -\frac{3}{8} q l \frac{1 + \dfrac{4EI}{C_t} \dfrac{(x_c - x_q)(x_0 - x_r)}{l^2}}{1 + \dfrac{3EI}{C_t} \dfrac{(x_c - x_r)(x_0 - x_r)}{l^2}} . \tag{76}$$

Allo stesso risultato si può giungere utilizzando il principio dei lavori virtuali. Si ha così, sempre operando sulla struttura resa isostatica per eliminazione del pendolo 7,

$$\int_A p'_{Sz}\, w_{St}\, dA = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M'_x M_x\, dz + \frac{1}{C_t} \int_0^l M'_c M_c\, dz + \int_V \sigma'_z\, \epsilon_{zt}\, dV . \tag{77}$$

I due termini aggiuntivi in dA e dV della (77) sono necessari; il primo, per tenere conto del lavoro compiuto dalle forze agenti sulle basi; il secondo, per l'obbligo di operare su spostamenti congruenti, chiamando quindi in causa le deformazioni

$$\epsilon_{zt} = \frac{\partial w_t}{\partial z}$$

dovute al fatto che le w da torsione sono variabili se M_c o la sezione sono variabili.

Si osservi che, chiamando w_1 i w connessi con un momento centrale unitario, è

$$w_t = M_c w_1$$

$$\epsilon_{zt} = \frac{\partial w_t}{\partial z} = w_1 \frac{dM_c}{dz} + M_c \frac{\partial w_{1t}}{\partial z} ;$$

se *la sezione è costante,* è

$$\epsilon_{zt} = w_1 \frac{dM_c}{dz} .$$

Si ha perciò, in tal caso,

$$\int_A p'_{Sz}\, w_{St}\, dA = - \int_A \sigma'_{Sz}\, w_{St}\, dA = - \frac{M'_{Sx}}{I_x} \int_A y\, w_{St}\, dA =$$

$$= - \frac{M'_{Sx}}{I_x} M_{Sc} \int_A y\, w_1\, dA ;$$

$$\int_V \sigma'_z\, \epsilon_{zt}\, dV = \int_0^l \frac{M'_x}{I_x} \frac{dM_c}{dz} \int_A y\, w_1\, dA\, dz .$$

Si consideri la trave AB della fig. 16f, di luce $l = 1$, con incastro flessionale e appoggio torsionale in A; l'appoggio sia tale da consentire ad ogni sezione retta rotazioni ϑ intorno alla retta parallela all'asse z e di traccia O sul piano della sezione B. Siano x ed y *gli assi principali d'inerzia* della sezione retta. La trave sia soggetta a due distinte condizioni di carico: 1) due coppie torcenti $\mathfrak{M}_t$ e $-\mathfrak{M}_t$ in B ed A; 2) una forza tagliante

T che giace nel piano della sezione B e passa per il centro di taglio C. Poichè in 2) è $\vartheta = 0$, è pure $L_{12} = 0$. D'altro canto è

$$L_{21} = - T\,\vartheta_B\,(x_0 - x_c) + \int_A p_{zA}\,w_t\,dA\ ;$$

dalle espressioni

$$\vartheta_B = \vartheta' = \frac{\mathfrak{M}_t}{C_t}$$

$$w_t = \mathfrak{M}_t\,w_1$$

$$p_{zA} = -\,\sigma_{zA} = \frac{T}{I_x}\,y$$

si trae

$$L_{21} = - \frac{T\mathfrak{M}_t}{C_t}\,(x_0 - x_c) + \frac{T\mathfrak{M}_t}{I_x}\int_A w_1\,y\,dA = 0$$

da cui

$$\int_A w_1\,y\,dA = \frac{I_x}{C_t}\,(x_0 - x_c)\,. \tag{78}$$

Analogamente, scambiando x con y ed y con $-x$, si ha

$$\int_A w_1\,x\,dA = \frac{I_y}{C_t}\,(y_c - y_0)\,. \tag{79}$$

Quindi può scriversi

$$\int_A p'_{Sz}\,w_{St}\,dA = - \frac{M'_{Sx}}{C_t}\,M_{St}\,(x_0 - x_c)$$

$$\int_V \sigma'_z \, \epsilon_{zt} \, dV \quad = \frac{x_0 - x_c}{C_t} \int_0^l M'_x \, \frac{dM_t}{dz} \, dz \ ,$$

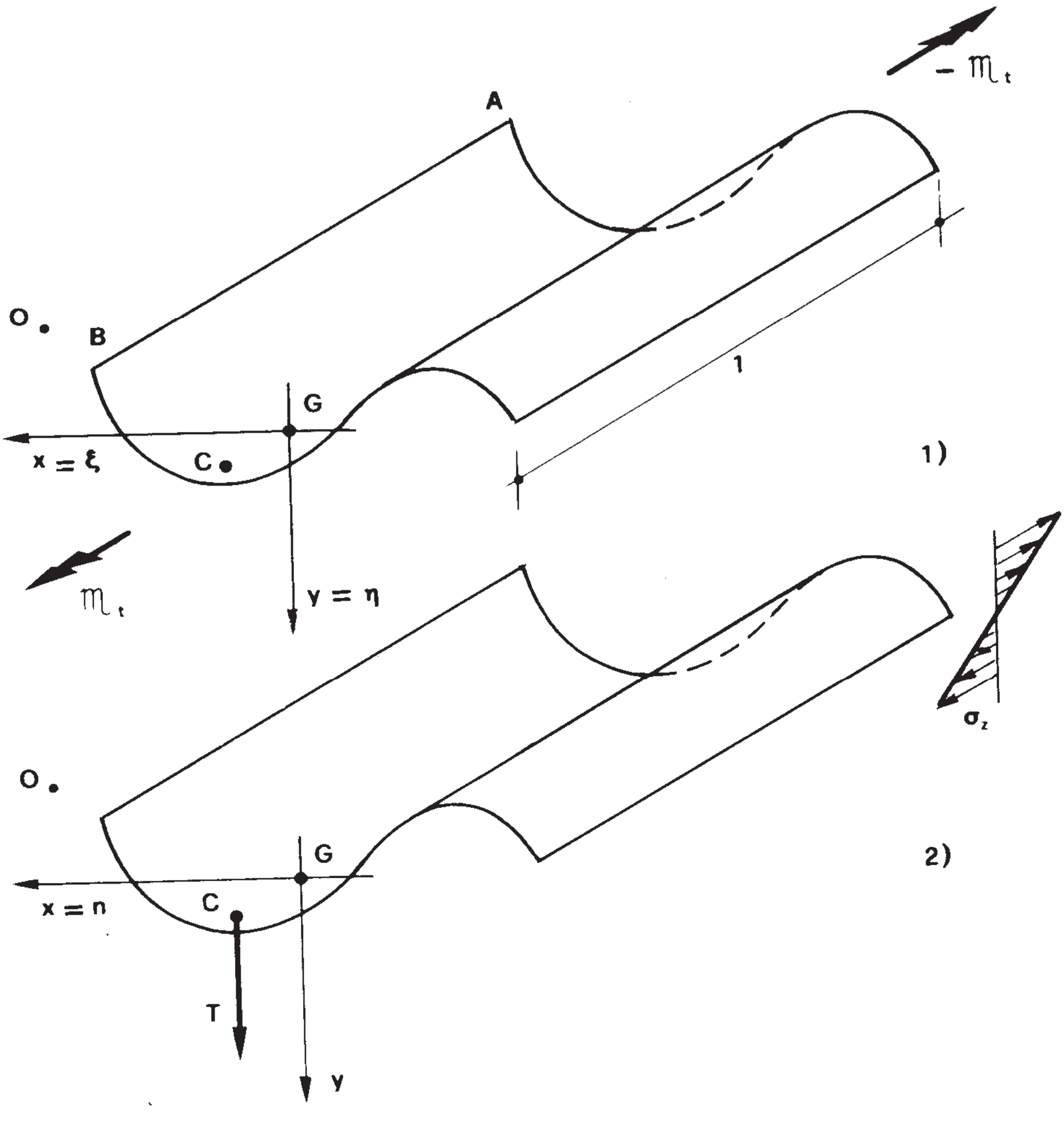


Figura 16f

e la (77) diviene

$$- \frac{x_0 - x_c}{C_t} M'_{Sx} M_{St} = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M'_x M_x \, dz + \frac{1}{C_t} \int_0^l M'_t M_t \, dz +$$

$$+ \frac{x_0 - x_c}{C_t} \int_0^l M'_x \frac{dM_t}{dz} \, dz \, . \qquad (80)$$

Poichè è

$$\int_0^l M'_x M^\circ_x \, dz = \frac{q l^4}{8}$$

$$\int_0^l M'^2_x \, dz = \frac{l^3}{3}$$

$$\int_0^l M'_t M^\circ_t \, dz = \frac{ql^2}{2} (x_c - x_r) (x_c - x_q)$$

$$\int_0^l M'^2_t \, dz = l (x_c - x_r)^2$$

$$\int_0^l M'_x \frac{dM^\circ_t}{dz} \, dz = - \frac{q l^2}{2} (x_c - x_q)$$

la (80) si scrive

$$l \frac{x_0 - x_c}{C_t} [- q l (x_c - x_q) - X (x_c - x_r)] =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left(\frac{ql^4}{8} + X \frac{l^3}{3} \right) +$$

$$+ \frac{1}{C_t} \left[\frac{ql^2}{2} (x_c - x_r) (x_c - x_q) + X l (x_c - x_r)^2 \right]$$

$$- \frac{ql^2}{2C_t} (x_0 - x_c) (x_c - x_q) \, .$$

Si ha perciò conferma della (76).
Si osservi che *i termini aggiuntivi scompaiono se è* $x_0 = x_r$.

Problema n. 17.

La trave della fig. 17a è a sezione costante: come sezione si è scelta quella già studiata nel prob. 8 di questo capitolo, esaltata nel rapporto 1 : 10. La trave, vincolata con sette pendoli, è una volta iperstatica, si sceglie come iperstatica X la reazione del pendolo 7, e quindi la struttura si rende isostatica sopprimendo tale pendolo. La fibra inalterata dalla torsione è quindi quella definita dall'intersezione O delle proiezioni degli assi dei pendoli 5 e 6 sul piano della generica sezione retta, risulta perciò, che O coincide con l'intersezione delle linee medie del tratto verticale di sinistra e del tratto orizzontale inferiore della sezione retta. Pertanto risulta (fig.17b)

$$x_0 - x_c = 48 - 12{,}22 = 35{,}78\ cm$$

$$x'_q - x_c = 48 - 12{,}22 = 35{,}78\ cm$$

$$x''_q - x_c = -50 - 12{,}22 = -62{,}22\ cm$$

$$x_X - x_c = \qquad = -12{,}22\ cm$$

$$x_X - x_0 = \qquad = -48\ cm\ ;$$

si sono indicate con x'_q ed x''_q le ascisse del carico q rispettivamente in $z \in [0\ m,\ 8\ m]$ e $z \in [8\ m,\ 16\ m]$.

Si risolve prima il problema attraverso la scrittura di un'equazione di congruenza. Risulta, separando l'effetto flessionale dal torsionale,(*)

$$v^{\circ}_{X\,fless} = \frac{3}{EI_n}\left(\frac{12^4}{8} + \frac{4 \cdot 12^3}{3} + \frac{4^2}{2} \cdot \frac{12^2}{2}\right) cos^2(yf) =$$

(*) La struttura isostatica è la mensola AD; se $AB = l$, $BD = a$, risulta (fig. 17b, $q^* = q\ cos\alpha$)

$$\eta^{\circ}_B = \frac{q^* l^4}{8\ EI} + q^* a\ \frac{l^3}{3\ EI} + q^*\ \frac{a^2}{2}\ \frac{l^2}{2EI}$$

$$\eta'_B = \frac{1 \cdot l^3}{3\ EI}\ cos\,\alpha$$

$$= 16416 \; \frac{cos^2(yf)}{EI_n} \; = \; \frac{139{,}08}{E} \; \cdot \; 10^4 \; m \; ;$$

$$v'_{X\,fless} \; = \frac{12^3}{3\,EI_n} \; cos^2\!\left(yf\right) \quad = 576 \; \frac{cos^2(y\,f)}{EI_n} \; = \frac{4{,}8800}{E} \; \cdot \; 10^4 \; m \; ;$$

$$\vartheta^\circ_B \; = \int_0^8 \frac{0{,}358 \; q \; dz}{C_t} \; z - \int_8^{12} \frac{0{,}622 \; q \; dz}{C_t} \; z \; - \; \frac{0{,}622 \cdot 4q \cdot 12}{C_t} =$$

$$= \frac{q}{C_t} \; (0{,}358 \; \cdot \; \frac{64}{2} \; - \; 0{,}622 \cdot \; \frac{80}{2} \; - \; 0{,}622 \cdot 48) = - \; 43{,}28 \; \frac{q}{C_t} \; ;$$

$$v^\circ_{X\,tor} \; = (x_X \; - \; x_0) \; \vartheta^\circ_B \; = - \; 0{,}480 \; \vartheta^\circ_B \; =$$

$$= 20{,}77 \; \frac{q}{C_t} \; = \; \frac{104{,}12}{E} \; 10^4 \; m t^{-1} \; ;$$

$$\vartheta^1_B \; = - \; \frac{0{,}122 \cdot 12}{C_t} \; = - \; \frac{1{,}464}{C_t} \; t^{-1} \; ;$$

$$v'_{X\,tor.} \; = (x_X \; - \; x_0) \; \vartheta^1_B \; = \; \frac{0{,}703}{C_t} \; m t^{-1} \; =$$

$$= \; \frac{1{,}1747}{E} \; 10^4 \; m t^{-1} \; .$$

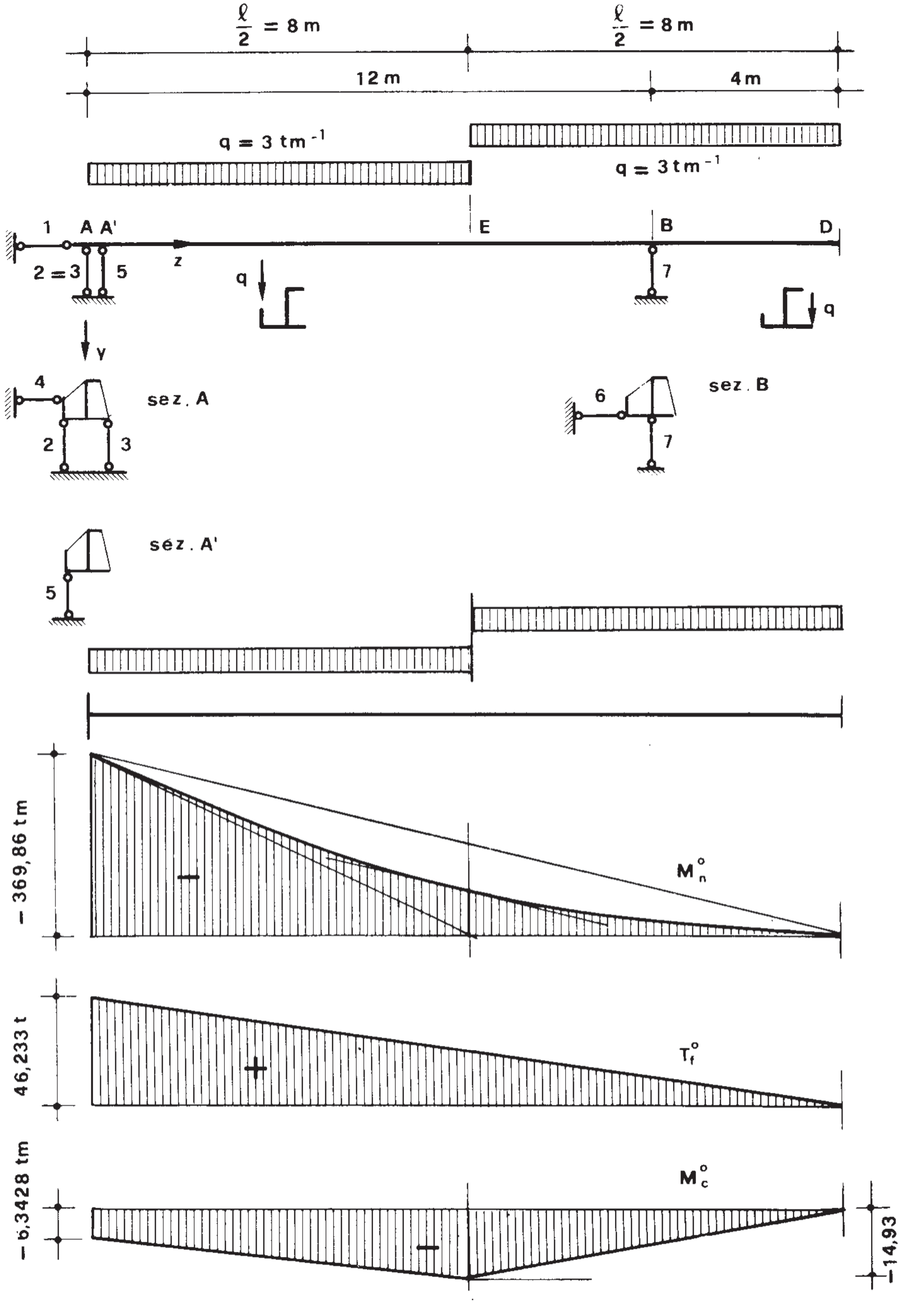
e ancora

$v^\circ_B = \eta^\circ_B \; cos\,\alpha$

$v'_B = \eta'_B \; cos\,\alpha$.

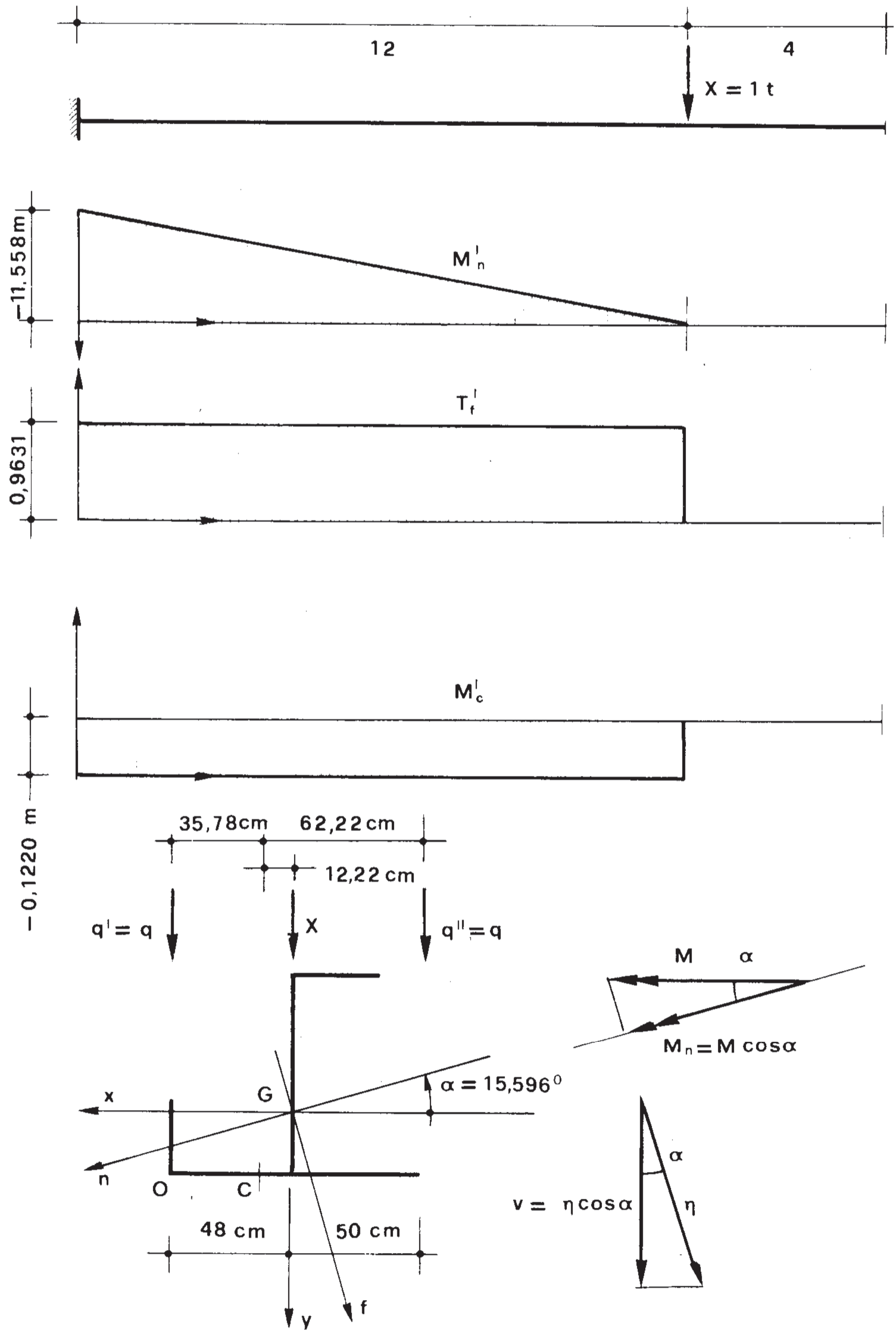
Il momento d'inerzia I_n è (fig. 8c, $n \equiv s_2$)

$I_n = I_\xi \; cos^2 \; 39{,}855 + I_\eta \; sen^2 \; 39{,}855 = 1{,}0950 \cdot 10^6 \; cm^4 = 109{,}50 \cdot 10^{-4} \; m^4$.



ℓ/2 = 8 m
ℓ/2 = 8 m
12 m
4 m
q = 3 tm⁻¹
q = 3 tm⁻¹
1
A A'
E
B
D
2 = 3
5
z
7
q
q
y
4
sez. A
2
3
6
sez. B
7
sez. A'
5
− 369,86 tm
−
M°n
46,233 t
+
T°f
− 6,3428 tm
M°c
−
− 14,93

Figura 17a



12
4
X = 1 t
−11,558m
M'_n
0,9631
T'_f
M'_c
−0,1220 m
35,78cm
62,22cm
12,22 cm
q' = q
X
q'' = q
M
α
M_n = M cosα
x
G
α = 15,596°
n
O
C
48 cm
50 cm
y
f
α
v = η cosα
η

Figura 17b

Perciò, tenendo conto del solo effetto flessionale si ha

$$X = -\frac{16416}{576} \quad -\frac{139{,}08}{4{,}88} \quad - 28{,}50\,t \tag{81}$$

mentre tenendo conto anche dell'effetto torcente è

$$X = -\frac{139{,}08 + 104{,}12}{4{,}88 + 1{,}1747} = -40{,}19\,t\,. \tag{82}$$

Per i calcoli di cui sopra si sono dovuti ricavare i seguenti dati :

$$I_n = I_\xi \cos^2 41{,}75° + I_\eta \operatorname{sen}^2 41{,}75° =$$
$$= 1{,}080 \cdot 10^{-2}\, m^4\ ;$$
$$C_t = \frac{G}{3}\, \Sigma\, s_i\, \delta_i^3 = 1{,}187\, G \cdot 10^{-3}\, tm^2\ ;$$

ponendo $G = \frac{E}{2}$, si ha

$$C_t = 0{,}5935\, E \cdot 10^{-3}\, tm^2\,.$$

Si ha inoltre

$$A = 0{,}1224\, m^2\,.$$

Lo stesso problema si risolve adesso attraverso il principio dei lavori virtuali; nel corso di esso si terrà conto anche delle deformazioni da taglio.

I diagrammi delle caratteristiche M_n° T_f° ed M_t°, dovute al carico q, quelli delle caratteristiche M_n' T_f' ed M_t', dovute ad $X = 1$, sono riportati nelle fig. 17a e 17b; nella fig. 17b è anche disegnata la sezione retta con le posizioni del carico q' in $z \in [0\ m,\ 8\ m]$, del carico q'' in $z \in [8\ m,\ 16\ m]$, e della reazione $X = 1$ in $z = 12\ m$. Si osserva che sia q che X sono diretti secondo y, e l'asse neutro n quindi è lo stesso in tutte le sezioni; risulta (vedi prob. 8)

$$(x\,n) = (y\,f) = 15{,}596°\,.$$

Per tenere conto anche del taglio, si calcola il fattore di taglio χ_n relativo all'asse neutro n. A ciò fare, si sollecita la sezione (fig. 17d) con una forza tagliante (e quindi $\ni C$) nella direzione e nel verso di $s = y$; la forza sia $T = 1000\ Kg$. Le componenti di T secondo le due direzioni preferenziali, coniugate di x ed y, e dette s_1 ed s_2 (fig. 8c) sono fornite dal sistema

$$T_1 \cos 10{,}6° - T_2 \cos 74{,}4 = 1000$$

$$T_1 \operatorname{sen} 10{,}6° - T_2 \operatorname{sen} 74{,}4 = \quad 0$$

da cui

$$T_1 = 1073\ Kg$$

$$T_2 = \ 205\ Kg$$

Le τ' da taglio dovute alla $T = 1\ t$ agente secondo y sono quindi (fig. 17d) somma di quelle della fig. 8g (lette in $Kg\ cm^{-2}$) moltiplicate per 1,073 e di quelle dovute dalla fig. 8g (lette in $Kg\ cm^{-2}$) moltiplica-

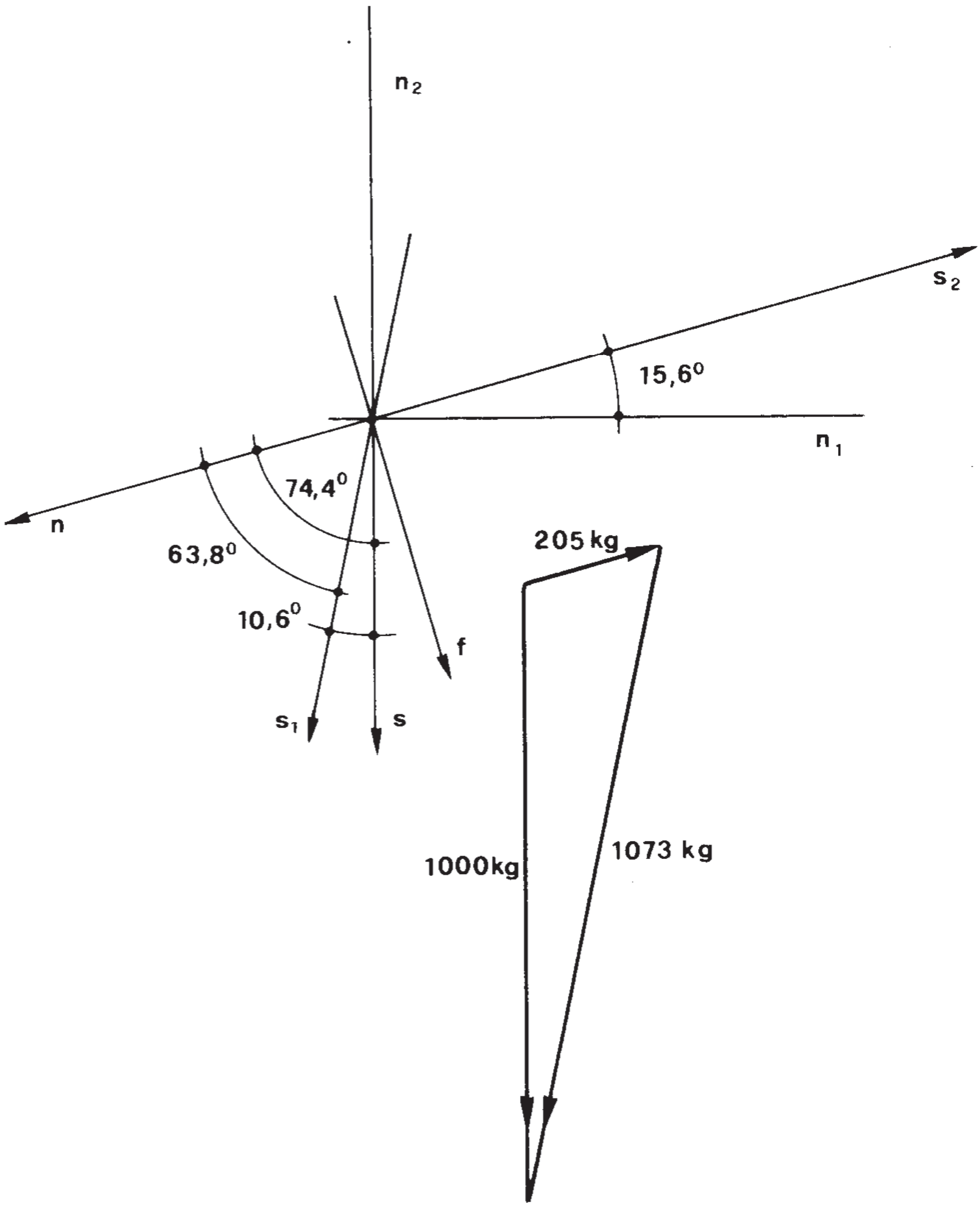


Figura 17c

te per 0,205. Si ha così, per la relazione energetica

$$\chi_n \frac{T_f^2}{2GA} = \frac{1}{2} \int_A \tau' \gamma' \, dA = \frac{1}{2G} \int_s \tau'^2 \, \delta \, ds \; .$$

l'espressione di χ_n:

$$\chi_n = \frac{A}{T_f^2} \int_s \tau'^2 \, \delta \, ds = \frac{A}{\cos^2 (yf)} \int_s \tau'^2 \, \delta \, ds \quad ; \qquad (83)$$

nel caso in esame si ha, per $T = 1000 \ Kg$,

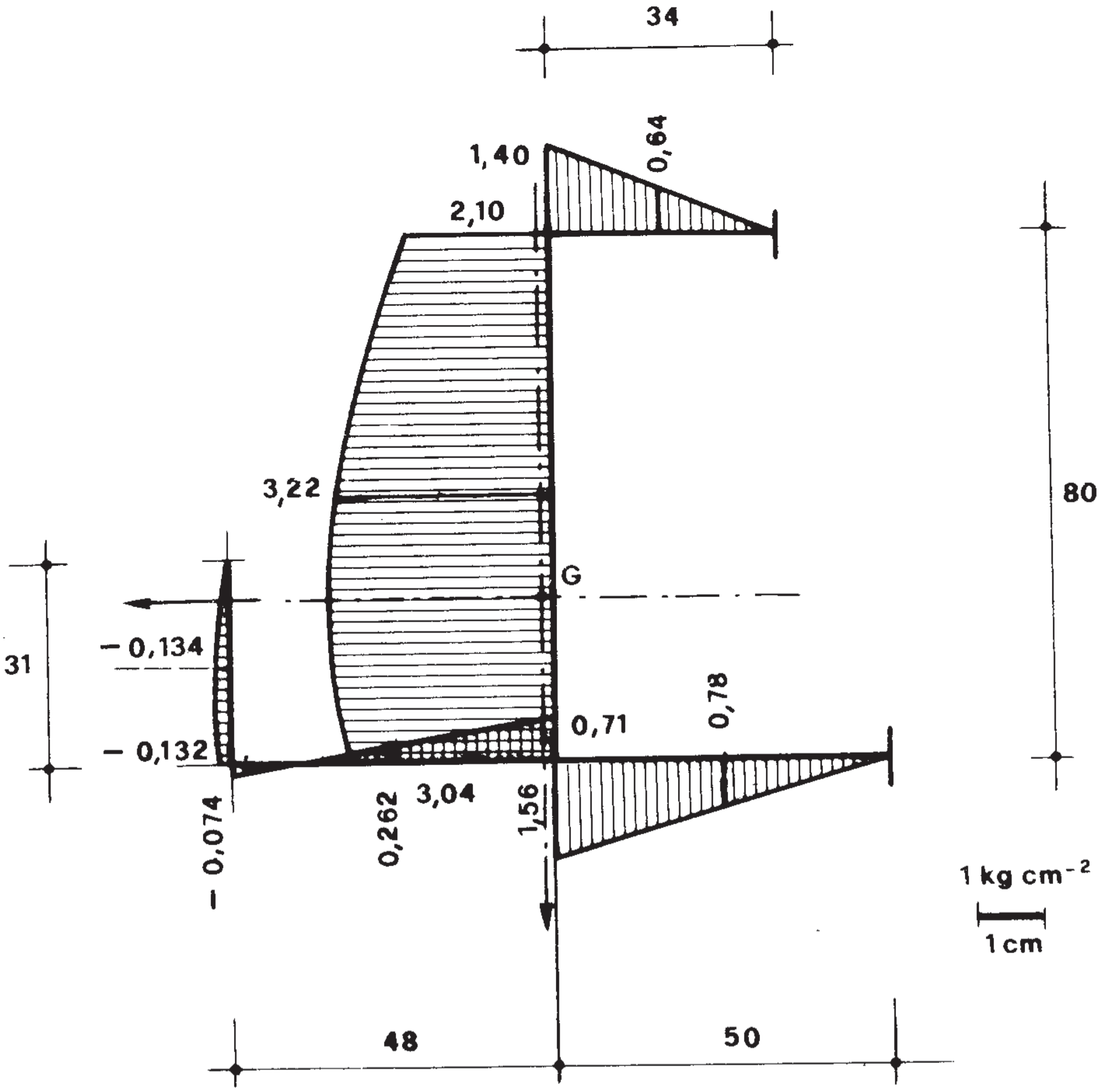


Figura 17d

$$\int_s \tau'^2 \, \delta \, ds = 3{,}24 \cdot 10^{-3} \ cm^{-2}$$

e quindi

$$\chi_n = \frac{1224 \cdot 3{,}24 \cdot 10^{-3}}{cos^2 (yf)} = 4{,}27 \ .$$

L'equazione dei lavori virtuali si scrive

$$\int_A p'_{Az} \, w_{At} \, dA = \frac{1}{EI_n} \int_0^l M'_n M_n \, dz + \frac{\chi_n}{GA} \int_0^l T'_f \, T_f \, dz + \qquad (84)$$

$$+ \frac{1}{C_t} \int_0^l M'_0 M_0 \, dz + \int_V \sigma'_z \, \epsilon_{zt} \, dV \ .$$

Una dimostrazione analoga a quella della fig. 16f, eseguita per il caso più generale in cui n non è principale d'inerzia, porge(*)

$$L_{21} = T \frac{\mathfrak{M}_t}{C_t} d_{os} + \int_A \frac{T \, cos(yf)}{I_n} d_n \cdot \mathfrak{M}_t \, w_1 \, dA = 0$$

da cui

$$\int_A w_1 \, d_n \, dA = - d^n_{os} \frac{I_n}{C_t} \ . \qquad (85)$$

Può quindi scriversi

$$\int_A p'_{Az} \, w_{At} \, dA = - \frac{M'_{nA} \, M_{0A}}{I_n} \int_A d_n \, w_1 \, dA =$$

$$= \frac{M'_{nA} \, M_{0A}}{C_t} \, d^n_{os} \ ;$$

$$\int_V \sigma'_z \, \epsilon_{zt} \, dV = \frac{1}{I_n} \int_0^l M'_n \frac{dM_c}{dz} \int_A d_n \, w_1 \, dA =$$

(*) Si chiama d_{os} la distanza del centro di rotazione O dalla retta orientata s ($\in C$) misurata normalmente ad s, d^n_{os} la stessa distanza misurata secondo n.

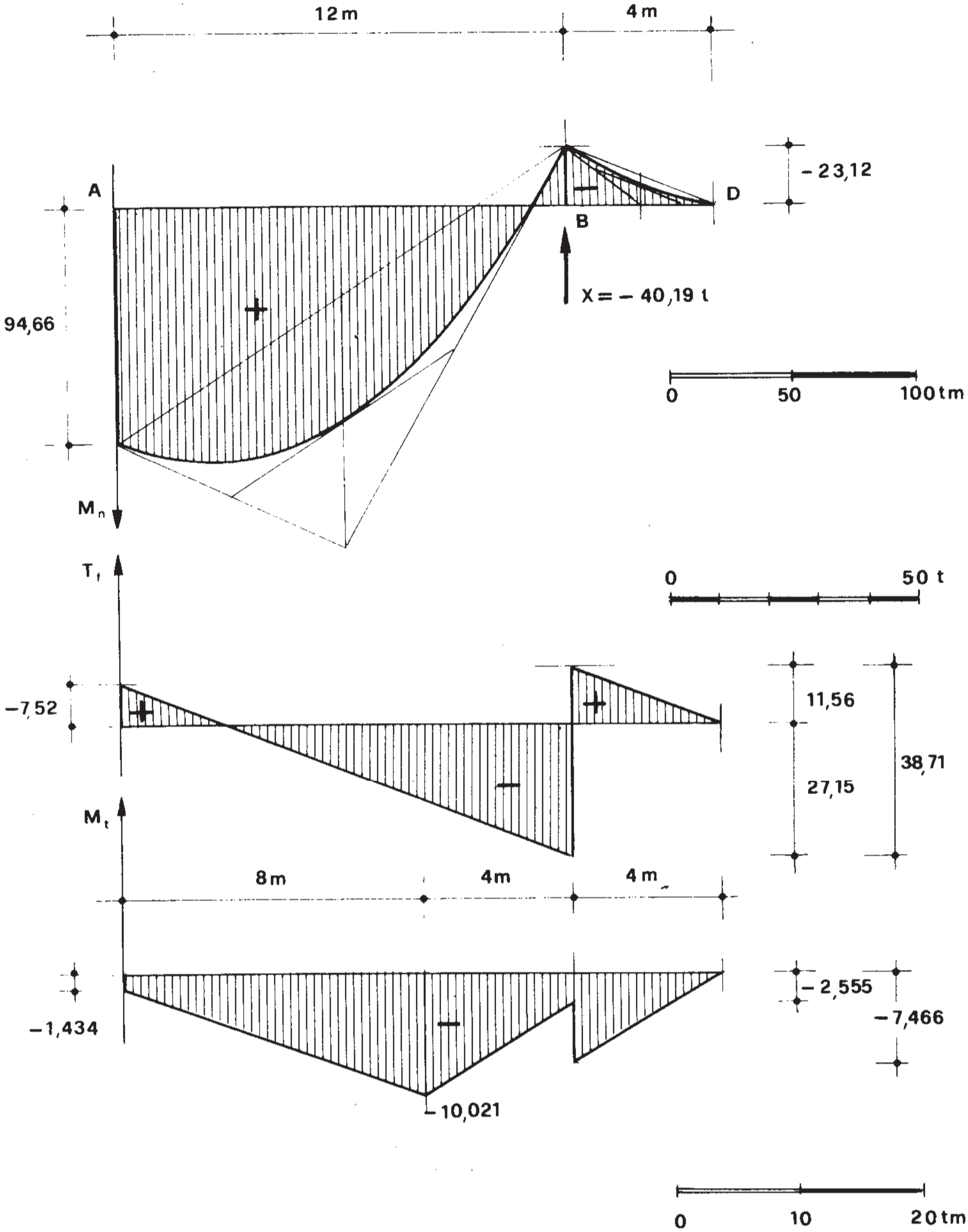

12m
4m
A
B
D
- 23,12
94,66
X = - 40,19 t
0
50
100tm
M_n
T_f
0
50 t
-7,52
11,56
27,15
38,71
M_t
8m
4m
4m
-1,434
- 2,555
-7,466
-10,021
0
10
20tm

Figura 17e

$$= -\frac{d_{os}^{n}}{C_t}\int_0^l M'_n \frac{dM_c}{dz}\,dz\;.$$

Quindi l'equazione (84) si scrive

$$\frac{M'_{nA}\,M_{cA}}{C_t}\,d_{os}^{n} = \frac{1}{EI_n}\int_0^l M'_n M_n\,dz + \frac{\chi_n}{GA}\int_0^l T'_f T_f\,dz + \frac{1}{C_t}\int_0^l M'_o M_o\,dz - \frac{d_{os}^{n}}{C_t}\int_0^l M'_n \frac{dM_o}{dz}\,dz\;. \qquad (86)$$

Nel caso in esame è

$$d_{os}^{n} = -\frac{0{,}3578}{\cos 15{,}596} = -\,0{,}344\;m\;;$$

$$\int_0^l M'_n M_n^{\circ}\,dz = 15060 \quad tm^3\;;$$

$$\int_0^l M'^{2}_n\,dz = 528{,}44 \quad m^3\;;$$

$$\int_0^l T'_f T_f^{\circ}\,dz = 330{,}18 \quad tm\;;$$

$$\int_0^l T'^{2}_f\,dz = 11{,}008 \quad m\;;$$

$$\int_0^l M'_c M_c^{\circ}\,dz = 15{,}838 \quad tm^3\;;$$

$$\int_0^l M'^{2}_c\,dz = 0{,}179 \quad m^3\;;$$

$$\int_0^l M'_n \frac{dM^\circ_c}{dz} dz = 52{,}52 \quad tm^2 \; ;$$

$$\int_0^l M'_n \frac{dM'_c}{dz} = 0 \; .$$

E' inoltre (fig. 17a, b)

$$M'_{nA} = -\ 11{,}56 \ m$$

$$M^\circ_{cA} = -\ 6{,}343 \ tm$$

$$M'_{cA} = -\ 0{,}1220 \ tm \; .$$

La (86) si scrive perciò come segue:

$$\begin{aligned} &-45{,}70 \cdot 10^4 - 87{,}91 \cdot 10^2 X = \\ &= 13{,}945 \cdot 10^5 + 48{,}93 \cdot 10^3 X + \\ &+ 23{,}31 \cdot 10^3 + 77{,}70 \cdot 10 \ X + \\ &+ 26{,}686 \cdot 10^4 + 30{,}16 \cdot 10^2 X + \\ &+ 32{,}38 \cdot 10^4 \; . \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$X = -\frac{2{,}465 \cdot 10^6}{6{,}161 \cdot 10^4} = -\ 40 \, t \; .$$

Se si tiene conto del solo effetto flettente è

$$X = \frac{1394{,}5}{48{,}93} = -\ 28{,}5 \ t \; ,$$

in accordo con la (81).

Se si tiene conto dei soli effetti flettenti e torcente, è

$$X = - \frac{2{,}442 \cdot 10^6}{6{,}083 \cdot 10^4} = - 40{,}14\, t \ ,$$

in buon accordo con la (82).

Si osserva perciò che l'effetto delle deformazioni da taglio sulla X non sono, nel caso in esame, influenti fino alla quarta cifra significativa; invece l'effetto delle deformazioni torsionali è del 40 % sulla X.

Nella fig.17e sono riportati i diagrammi delle caratteristiche.

Si osservi qui che se si fosse posto il pendolo 5 in asse con il 7, l'effetto torsionale sarebbe stato nullo; onde la notevole e a prima vista insospettabile importanza della *posizione del vincolo.*

Si passi adesso alla verifica della sezione B (fig.17f). Si ricercano prima le σ_z; i due punti più distanti dell'asse neutro n sono 1 e 2, cui corrispondono le distanze da n (prese normalmente ad n)

$$d_{1n} = 0{,}405\ m$$

$$d_{2n} = 0{,}565\ m\ .$$

Quindi è

$$\sigma_1 = \frac{M_n}{I_n}\, d_{1n} = - \frac{23{,}12}{109{,}5 \cdot 10^{-4}}\, 0{,}405 = - 855\ tm^{-2} = - 85{,}5\ Kg\ cm^{-2}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_n}{I_n}\, d_{2n} = \frac{23{,}12}{109{,}5 \cdot 10^{-4}}\, 0{,}565 = 1193\ tm^{-2} = 119{,}3\ Kg\ cm^{-2}.$$

Si determinano successivamente le τ_z da taglio. Risulta $T_f = 27{,}15\ t$, e quindi $T = 28{,}18\ t$. Le τ da taglio sono perciò quelle della fig. 17d, moltiplicate per 28,18.

Infine si ricavano le τ_z da torsione. Poichè è

$$\frac{C_t}{G} = 1{,}197 \cdot 10^{-4}\ m^4 = 1{,}197 \cdot 10^4\ cm^4$$

risulta, per l'angolo specifico di torsione, il valore

$$\vartheta' = \frac{M_t}{C_t} = - \frac{268600}{11970\ G} = - \frac{22{,}44}{G}\ cm^{-1}$$

e quindi

$$rot\,\tau = 2\,G\,\vartheta' = -\,44{,}88\;Kg\;cm^{-3}\;.$$

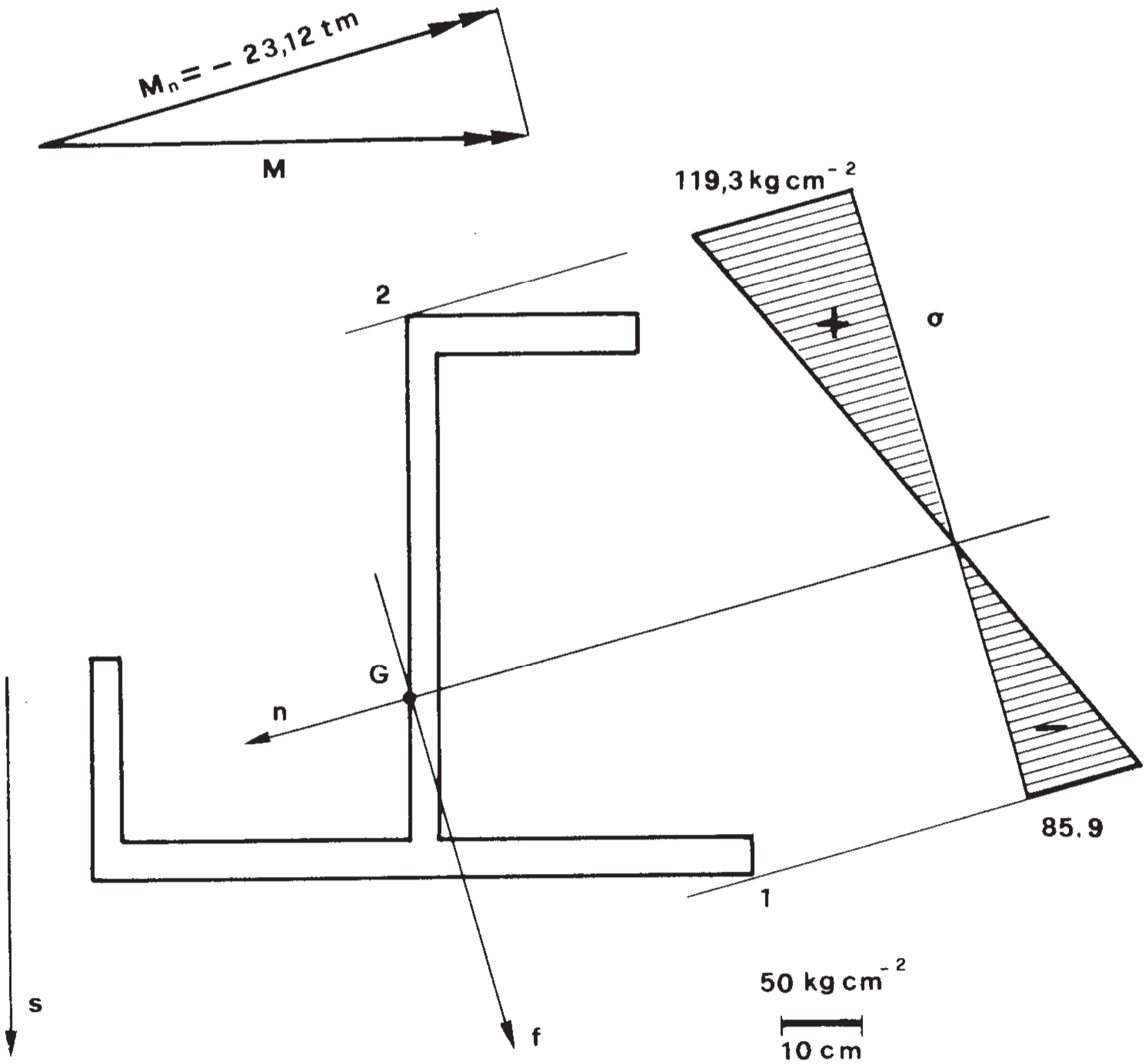


Figura 17f

Si ha perciò nei tratti di spessore $\delta = 6\;cm$

$$|\tau|_{max} = |2\,G\,\vartheta'| \cdot \frac{\delta}{2} = 134{,}64\;\;Kg\;\;cm^{-2}\;\;,$$

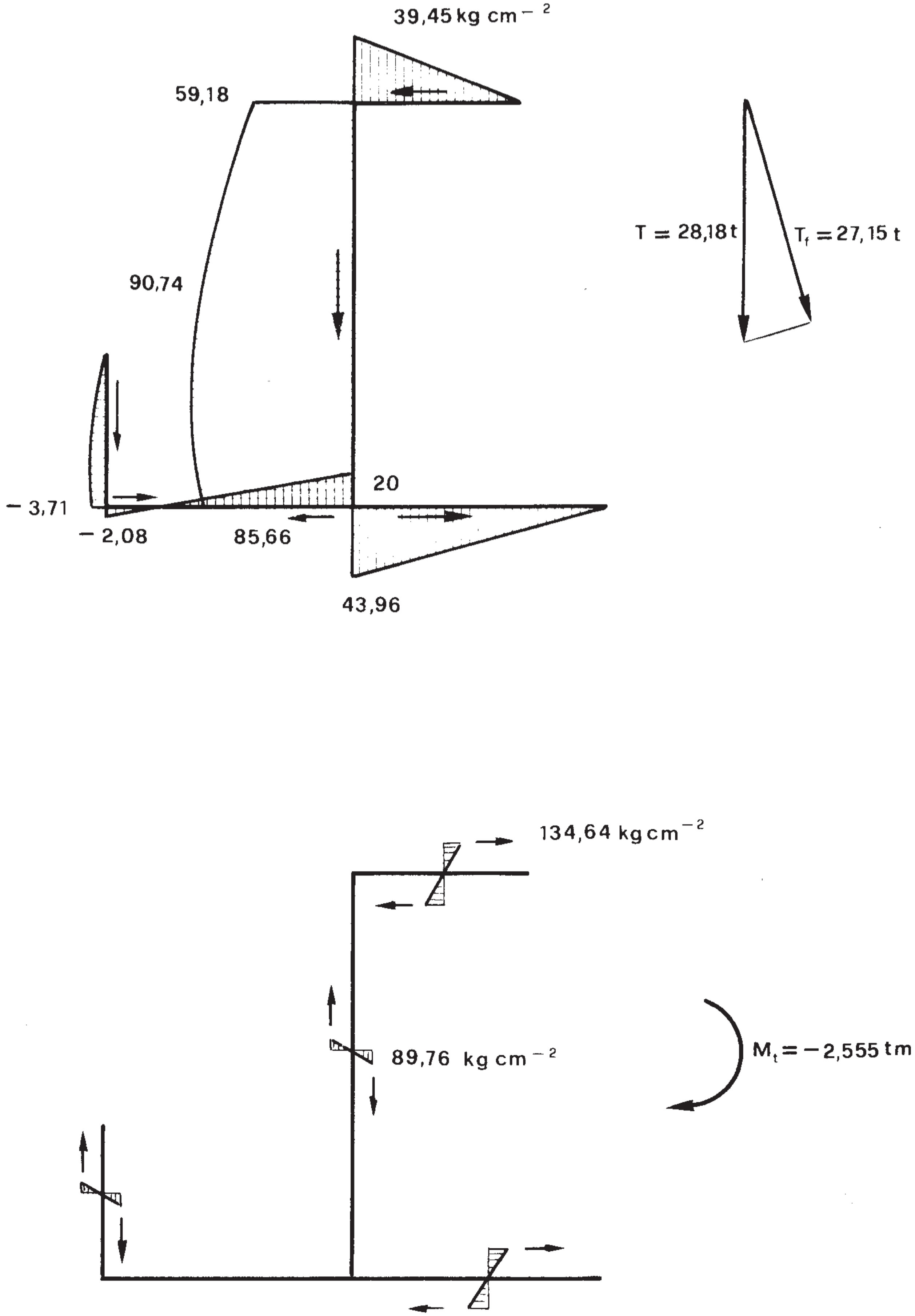

39,45 kg cm⁻²
59,18
T = 28,18 t
Tf = 27,15 t
90,74
20
− 3,71
− 2,08
85,66
43,96
134,64 kg cm⁻²
89,76 kg cm⁻²
Mt = −2,555 tm

Figura 17g

e nei tratti di spessore $\delta = 4\ cm$

$$|\tau|_{max} = 89{,}76\ Kg\ cm^{-2}$$

Problema n. 18.

Nel problema n. 17 sia il carico applicato che la reazione iperstatica inducevano deformazioni flessionali e torsionali sul sistema principale. Nel problema della fig. 18a, invece, si ha che il carico applicato, costituito da coppie m_t uniformemente distribuite, provoca solo deformazioni torsionali, mentre la reazione X (sforzo nel pendolo 7) genera solo deformazioni flessionali, poichè X passa per il centro di taglio C. La trave è identica, come vincoli, alla trave prob. 17, fatta eccezione del pendolo 7.

Per effetto delle coppie m_t si ha

$$\vartheta^\circ_B = \int_0^l \frac{m_t\, dz}{C_t}\, z = \frac{m_t}{C_t}\, \frac{l^2}{2}$$

e quindi

$$v^\circ_x = \vartheta^\circ_B\, d_{os} = \frac{m_t\, l^2\, d_{os}}{2\, C_t}\ .$$

Per effetto della $X = 1$ è

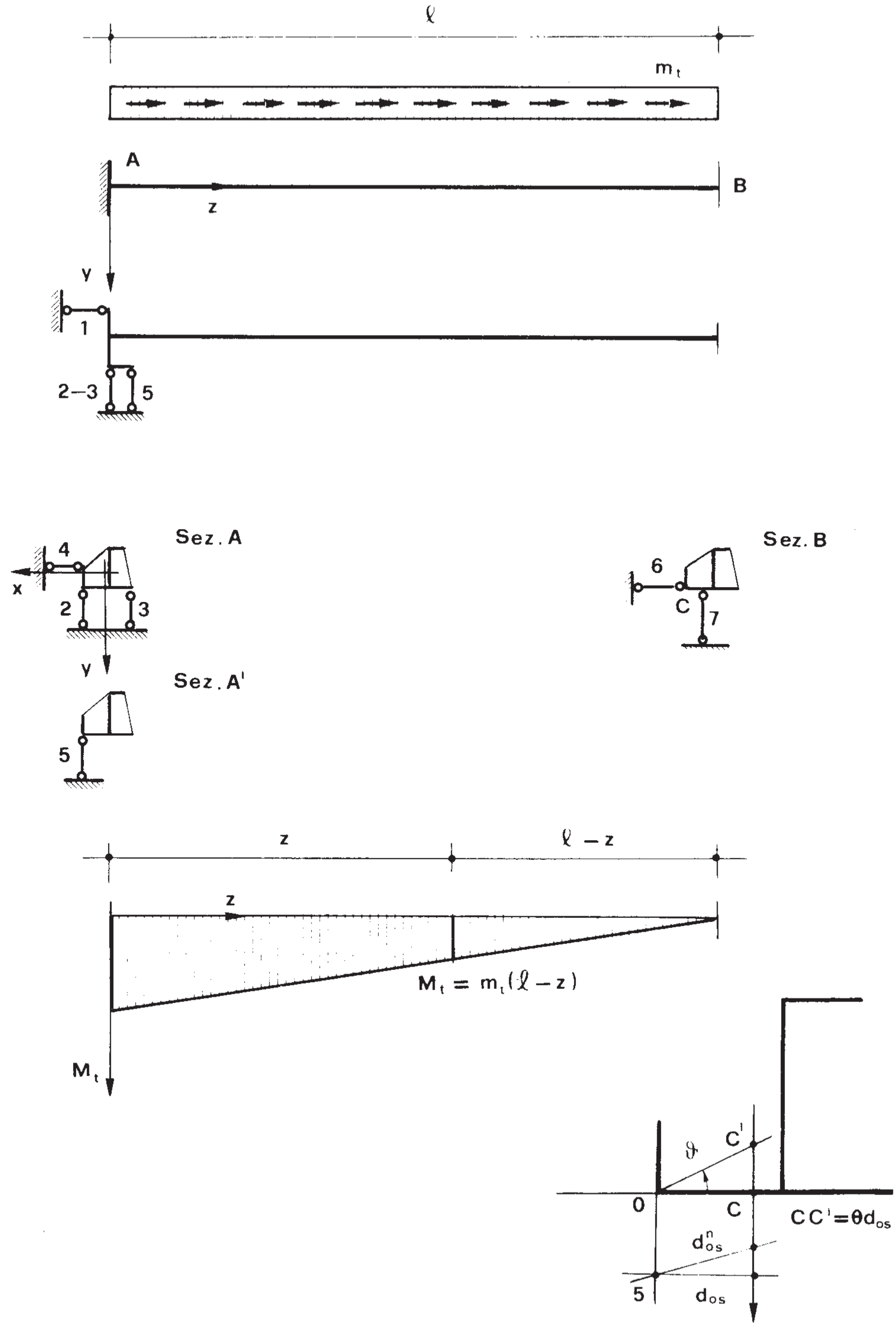
$$v'_x = \frac{\cos(yf)\cdot l^3}{3\, EI_n}\, \cos(yf) = \frac{l^3}{3\, EI_n}\, \cos^2(yf)$$

Dalla relazione di congruenza

$$v^\circ_x + X v'_x = 0$$

si trae

$$X = -\,\frac{3}{2}\, \frac{EI_n}{C_t}\, \frac{d_{os}}{l}\, \frac{m_t}{\cos^2(yf)}\ . \tag{87}$$



ℓ
m_t
A
B
z
y
1
2—3
5
Sez. A
4
x
2
3
y
Sez. A'
5
Sez. B
6
C
7
z
ℓ − z
z
$M_t = m_t(\ell - z)$
M_t
C'
ϑ
0
C
CC' = θd_{os}
d^n_{os}
5
d_{os}

Figura 18a

Seguendo la strada del principio dei lavori virtuali (fig. 18b) si scrive l'equazione (86)

$$\frac{M'_{nA}\ M_{oA}}{C_t}\ d^n_{os} = \frac{1}{EI_n}\int_o^l M'_n\ M_n\ dz - \frac{d^n_{os}}{C_t}\int_o^l M'_n\ \frac{dM_o}{dz}\ dz\ .$$

Poichè è

$$M'_{nA} = -\ l\ cos\ (yf)$$

$$M_{oA} = m_t\, l$$

$$\int_0^l M'^2_n\ dz = cos^2\ (yf)\int_0^l (l - z)^2\ dz = \frac{l^3}{3}\ cos^2\ (yf)$$

$$\int_0^l M'_n\ \frac{dM_0}{dz}\ dz = \int_0^l (l - z)\ cos\ (yf) \cdot m_t\ dz = m_t\ dz = m_t\ cos\ (yf) \cdot \frac{l^2}{2}\ ,$$

si trae

$$-\ \frac{m_t\, l^2\, d^n_{os}}{C_t}\ cos\ (yf) = \frac{Xl^3}{3\ EI_n}\ cos^2\ (yf) - \frac{d^n_{os}}{C_t}\ m_t\ \frac{l^2}{2}\ cos\ (yf)$$

da cui

$$-\ \frac{m_t\, l^2\, d^n_{os}}{2\, C_t} = X\ \frac{l^3}{3\, EI_n}\ cos\ (yf)$$

e quindi

$$X = -\ \frac{3}{2}\ \frac{EI_n}{C_t}\ \frac{d^n_{os}}{l}\ \frac{m_t}{cos\ (yf)}\ \ ;$$

tale espressione coincide con la (87), perchè $d^n_{os}\ cos\ (ys) = d_{os}$.

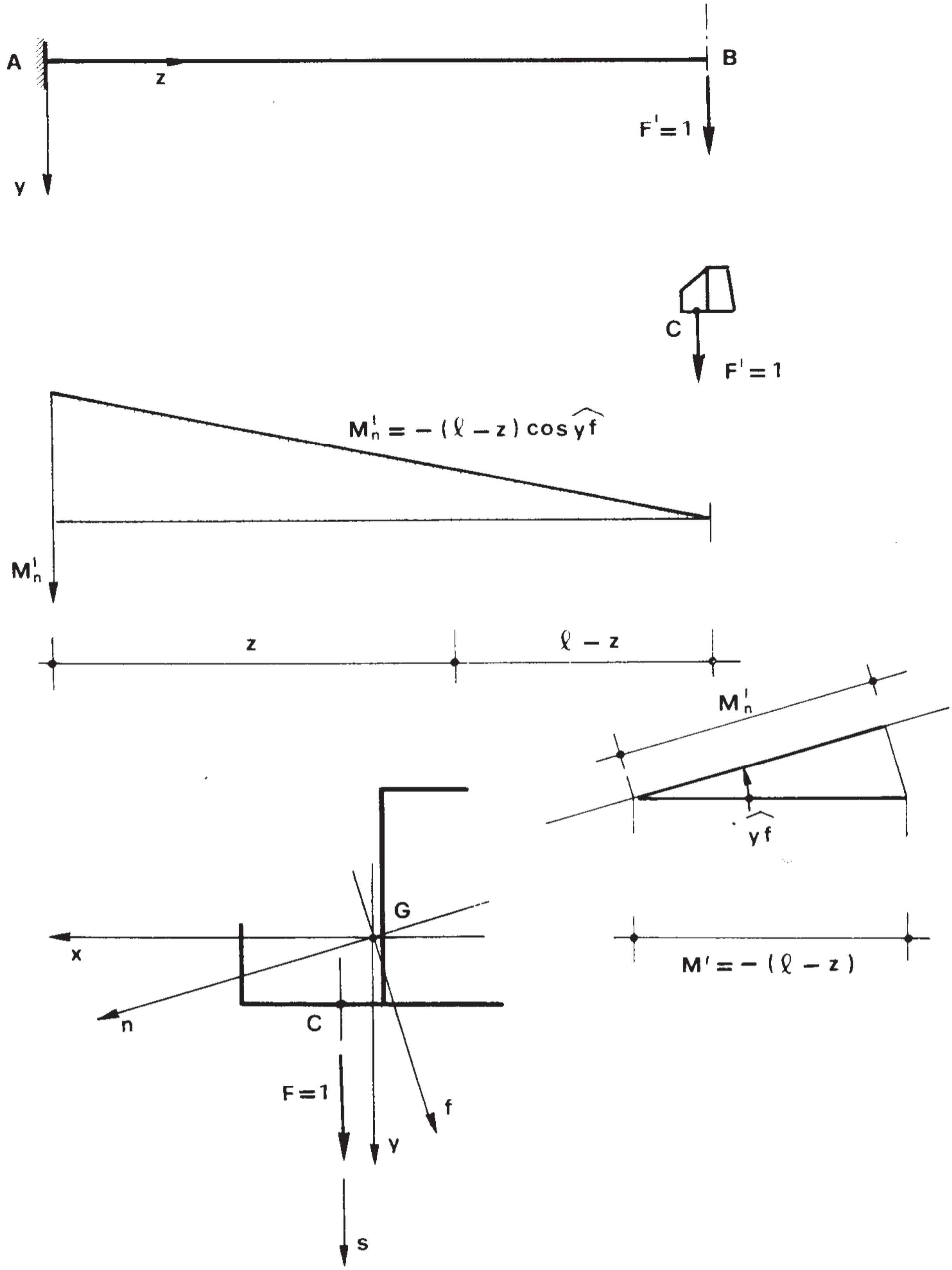


Figura 18b

Problema n. 19.

La trave della fig.19a si rende isostatica eliminando il pendolo in B. Poichè sia il carico q che la reazione X contengono il centro di taglio C, la struttura non presenta alcuna deformazione torsionale; è questo il motivo per cui non si è fatta alcuna precisazione sulle effettive condizioni di vincolo, e cioè sulla effettiva ubicazione dei pendoli, e quindi sulla posizione del centro di rotazione torsionale O. Gli assi di sollecitazione s° ed s' relativi al carico q ed alla reazione X non coincidono: chiamando m la retta baricentrica parallela al vettore momento, n l'asse neutro, si ha

$$s^\circ = y$$
$$m^\circ = x \ ;$$

i valori degli angoli che le rette s°, m°, n°, ed s', m', n', formano tra loro e con gli assi principali d'inerzia sono riportati nella fig.19b.

Per effetto del carico q la sezione B trasla nella direzione f°, ortogonale ad n°, della quantità(*)

(*) Fissati i versi di s° ed s', sono fissati anche quelli di m° ed m', poiché il verso ms di rotazione deve essere antiorario. Il verso di n° ed n' si fissa in modo che l'angolo $n^\circ m^\circ$ e quello $n'm'$ siano minori di $\frac{\pi}{2}$; il verso di f° ed f' è tale che i versi della rotazione $f^\circ s^\circ$ e della $f's'$ siano antiorari.

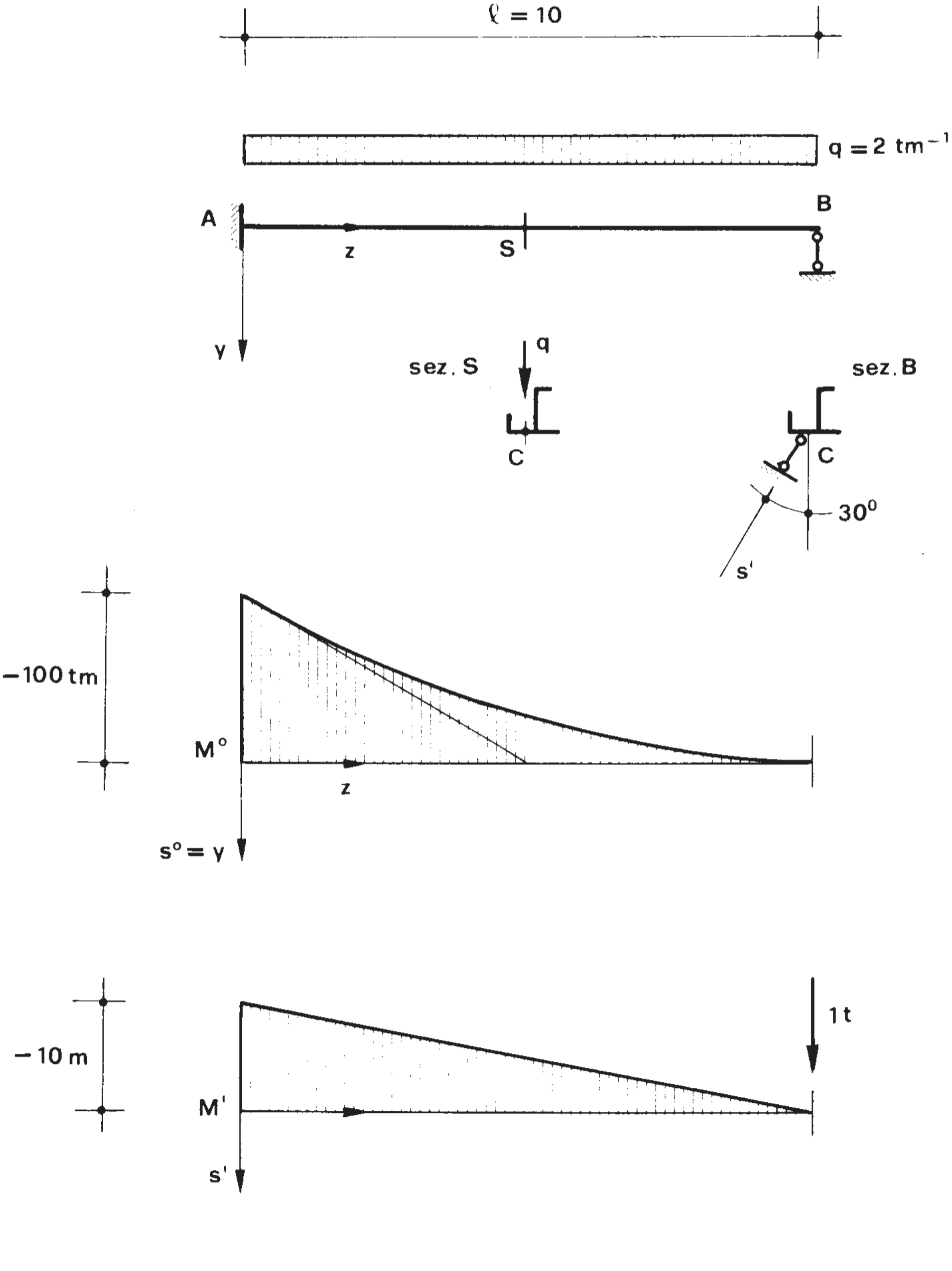


Figura 19a

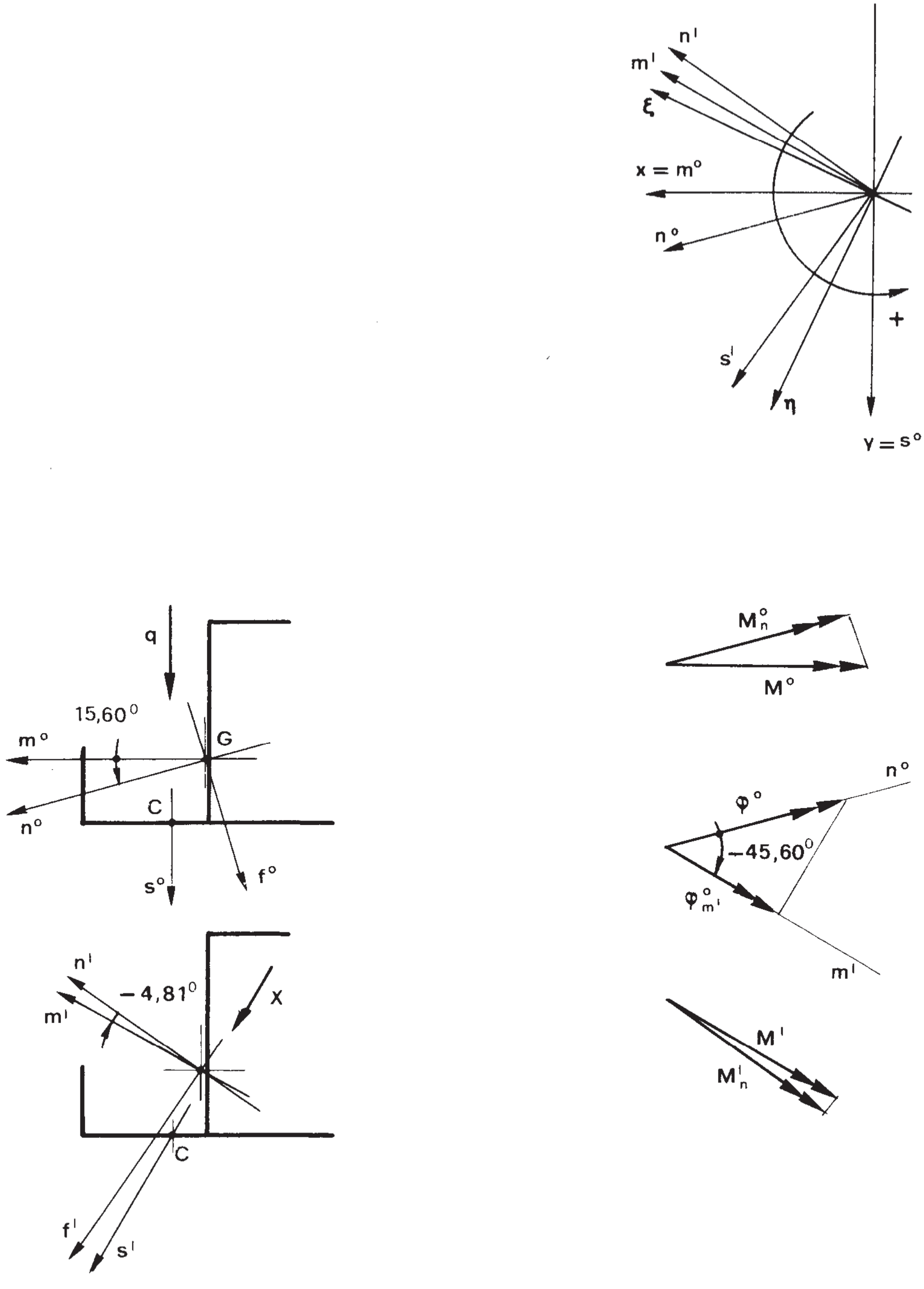


Figura 19b

$$s_B^{\circ} = \frac{q \cos (m^{\circ} n^{\circ})}{8\, EI_{n^{\circ}}}\, l^4 \, .$$

dove con $I_{n^{\circ}}$ si è indicato il momento d'inerzia rispetto all'asse n°. La componente di tale spostamento secondo la retta s' è

$$s_{BX}^{\circ} = \frac{q l^4}{8\, EI_{n^{\circ}}} \cos (m^{\circ} n^{\circ}) \cdot \cos (m' n^{\circ}) \, .$$

Per effetto della $X = 1$ la sezione B trasla nella direzione f', ortogonale ad n', della quantità

$$s_B' = \frac{\cos (m' n')}{3\, EI_{n'}}\, l^3 \, .$$

dove con $I_{n'}$ si è indicato il momento d'inerzia rispetto all'asse n'. La componente di tale spostamento secondo la retta s' è

$$s_{BX}' = \frac{l^3}{3\, EI_{n'}} \cos^2 (m' n') \, .$$

La condizione di congruenza

$$s_{BX}^{\circ} + X\, s_{BX}' = 0$$

porge

$$X = -\frac{3}{8}\, q l\, \frac{I_{n'}}{I_{n^{\circ}}}\, \frac{\cos (m^{\circ} n^{\circ}) \cdot \cos (m' n^{\circ})}{\cos^2 (m' n')} \, . \tag{88}$$

Operando attraverso il principio dei lavori virtuali si ha

$$1 \cdot 0 = \int_0^l M' \cdot (d\varphi)_{m'} = \int_0^l M' \left(\frac{M^{\circ} \cos (m^{\circ} n^{\circ})}{EI_{n^{\circ}}} \cos (n^{\circ} m') + \right.$$

$$\left. + X\, \frac{M' \cos (m' n')}{EI_{n'}} \cos (n' m') \right) dz$$

da cui

$$X = - \frac{\int_0^l M' M^\circ dz}{\int_0^l M'^2 \, dz} \quad \frac{I_{n'}}{I_{n^\circ}} \quad \frac{\cos (m^\circ n^\circ) \cdot \cos (m' n^\circ)}{\cos^2 (n' m')}$$

Poichè è

$$\int_0^l M' M^\circ dz = \frac{q}{2} \int_0^l (l - z)^3 \, dz = - \frac{q\, l^4}{8}$$

$$\int_0^l M'^2 \, dz = \int_0^l (l - z)^2 \, dz = \frac{l^3}{3} \, .$$

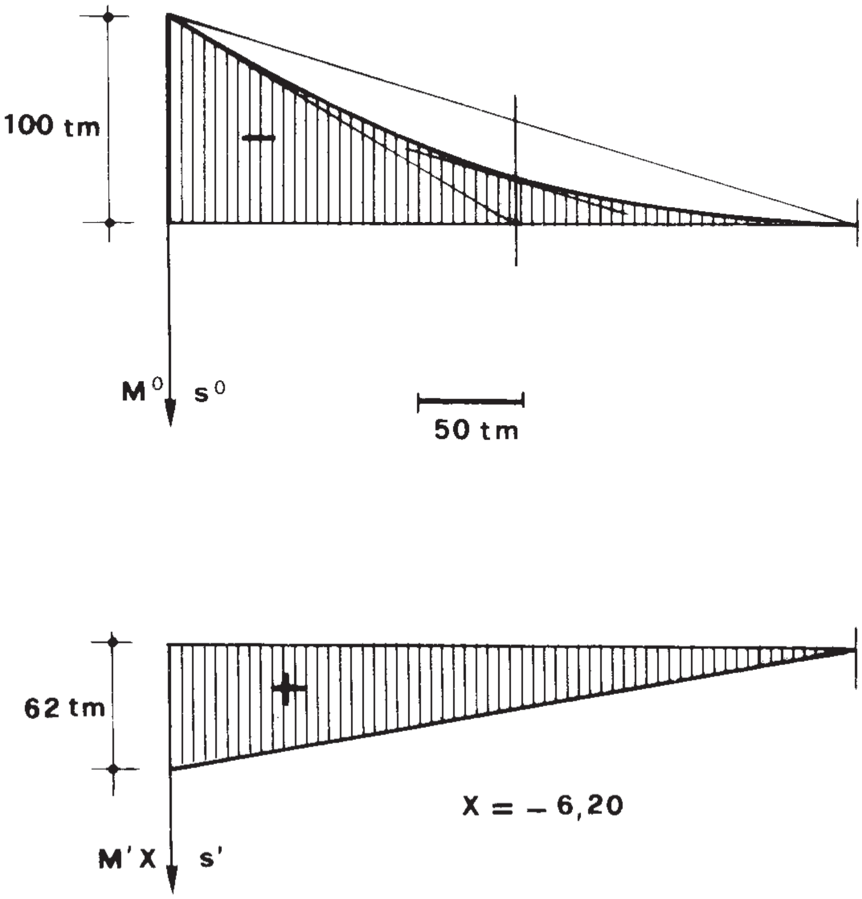


Figura 19c

si ritrova la (88).

Nella fig.19c sono disegnati i momenti flettenti dovuti ad M° ed

X; ci si trova in presenza di una flessione deviata ad asse di sollecitazione variabile, poichè il rapporto tra i due momenti non è costante.

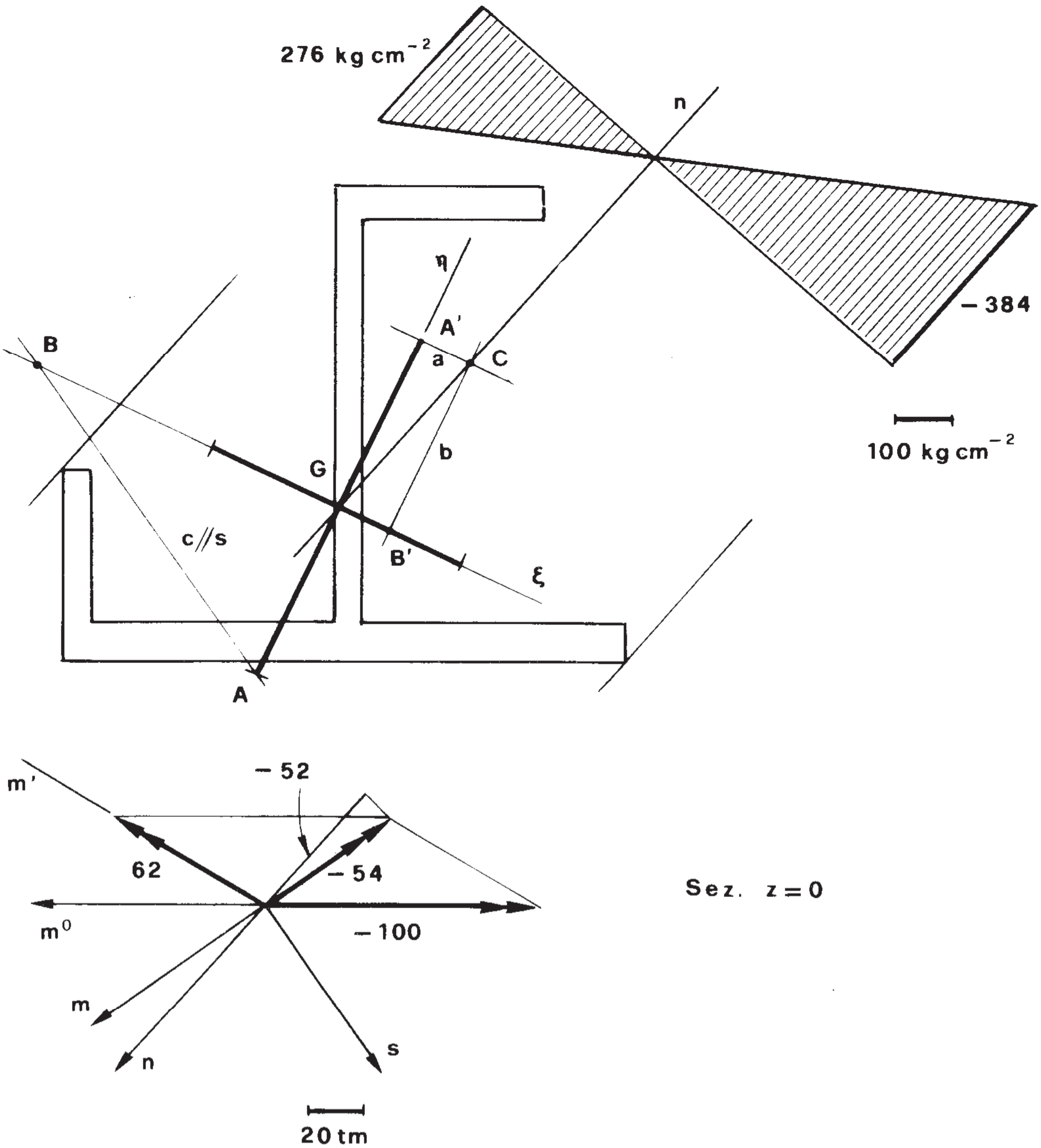


Figura 19d

Nella fig. 19d è effettuata la verifica nella sezione $z = 0$, dove sono presenti i momenti

$$M^\circ = -100 \ tm$$

secondo l'asse $m°$, ed

$$M'X = 62 \; tm$$

secondo l'asse m'. La risultante dei due vettori momento fornisce il momento totale

$$M = -54 \; tm$$

agente secondo l'asse m, orientato come in figura.

L'asse di sollecitazione s è ortogonale ad m; la sua coniugata baricentrica, e cioè l'asse neutro n, si ottiene disegnando l'antipolo C della generica retta c parallela ad s, e congiungendo C con G.

Si ha così

$$\varphi = \xi n = 73{,}14°$$

$$\begin{aligned} I_n &= I_\eta \, sen^2 \varphi + I_\xi \, cos^2 \varphi = \\ &= (0{,}717 \cdot 0{,}916 + 1{,}369 \cdot 0{,}084) \, 10^6 = \\ &= 0{,}772 \cdot 10^6 \, cm^4 \; . \end{aligned}$$

Con riferimento ai due punti più sollecitati 1 e 2 si ha

$$\sigma_1 = \frac{M_n}{I_n} d_{1n} = -\frac{5.200.000}{772.000} \cdot 57 = -384 \; Kg \; cm^{-2}$$

$$\sigma_2 = \frac{M_n}{I_n} d_{2n} = \frac{5.200.000}{772.000} \cdot 41 = 276 \; Kg \; cm^{-2} \; .$$

Analoga verifica è riportata, nella fig. 19e, per la sezione all'ascissa $z = 5 \, m$.

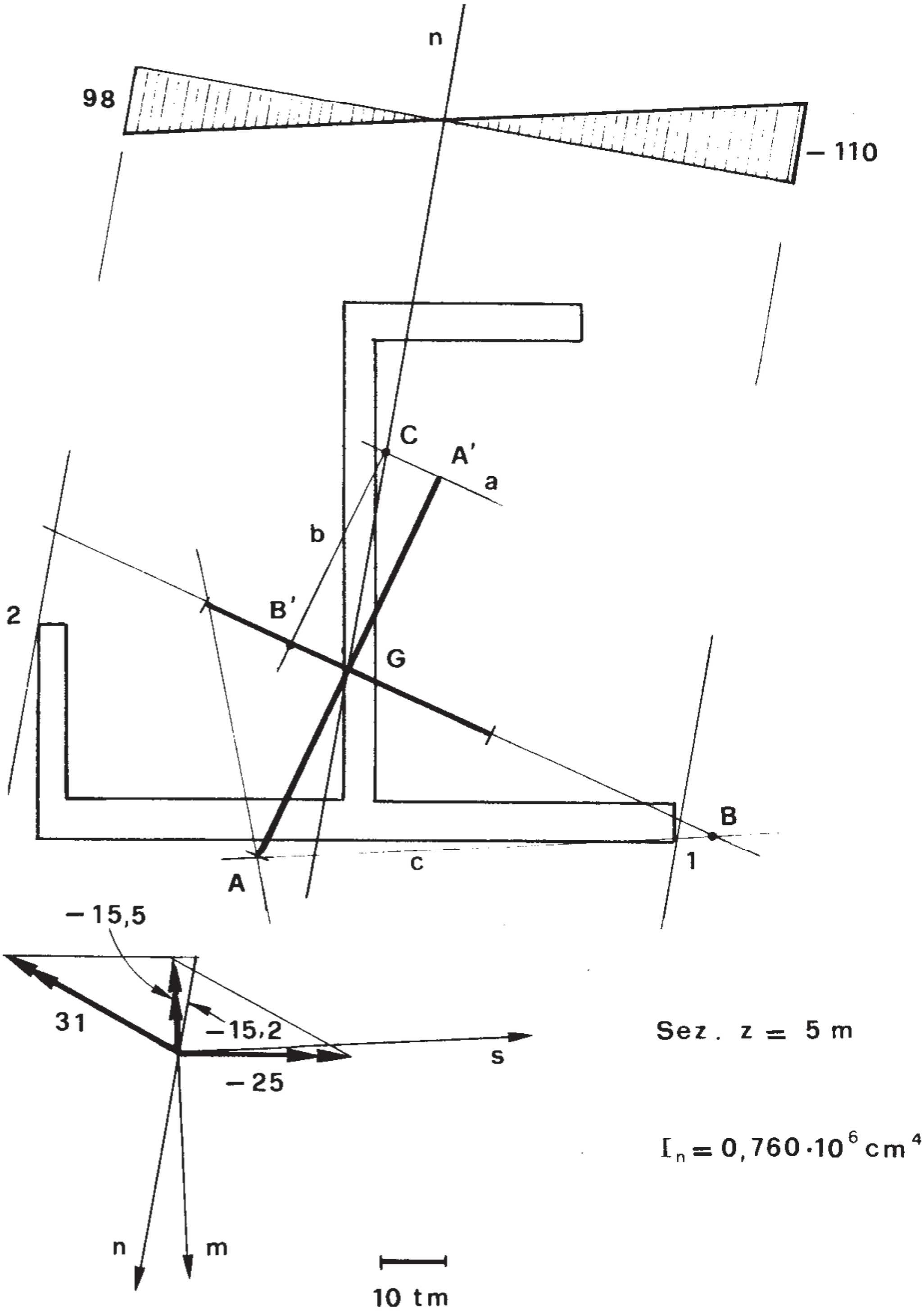

n
98
— 110
C
A'
a
b
B'
G
2
B
1
A
c
— 15,5
31
— 15,2
— 25
s
n
m
10 tm
Sez. z = 5 m
$I_n = 0,760 \cdot 10^6$ cm^4

Figura 19e