

## CAPITOLO QUARTO SIMMETRIA ED ANTISIMMETRIA

*Premessa.*

Ci si limita ad un riferimento cartesiano (non necessariamente ortogonale)  $xyz$ . Si consideri un insieme  $S$  di elementi  $s_i$  funzioni del punto; questi elementi possono essere scalari o vettori.

Si chiama *immagine* di un elemento rispetto al piano  $xy$  e secondo la direzione  $z$ , un altro elemento così definito:

a) se  $s_i$  è uno scalare connesso con il punto  $xyz$ , la sua immagine è lo scalare connesso con il punto  $xy - z$ , e di valore pari a quello di  $s_i$ ;

b) se  $s_i$  è un vettore  $AB$ , la sua immagine è il vettore  $A'B'$  tale che

$$\begin{array}{lll} x_A = & x_{A'} & ; & x_B = & x_{B'} \\ y_A = & y_{A'} & ; & y_B = & y_{B'} \\ z_A = & -z_{A'} & ; & z_B = & -z_{B'} \end{array} \quad (1)$$

Si chiama *antimmagine* di  $s_i$  ( $xyz$ ) uno scalare, o un vettore, connesso con il punto  $xy - z$ , e tale che il suo opposto sia l'immagine di  $s_i$ .

Sia l'immagine che l'antimmagine di un generico elemento  $s_i$  di  $S$  non appartengono, in genere, ad  $S$ .

Se il riferimento è tale che  $z$  sia ortogonale al piano  $xy$ , l'immagine si definisce *speculare*.

Un insieme  $S$  si chiama *simmetrico* rispetto al piano  $xy$  e secondo la direzione  $z$  se ad ogni elemento di  $S$  si accompagna un altro, pure di  $S$ , che sia la sua immagine. Un insieme  $S$  si chiama *antisimmetrico* rispetto al piano  $xy$  e secondo la direzione  $z$  se ad ogni elemento di  $S$  si accompagna un altro, pure di  $S$ , che sia la sua antimmagine.

Casi particolari di simmetria sono la *simmetria geometrica* (se gli elementi  $s_i$  sono dei punti) e la *simmetria fisica* (se gli elementi  $s_i$  sono scalari o vettori corrispondenti a proprietà fisiche, come la densità, la dilatabilità termica, il calore specifico etc.). Nel ristretto ambito della Scienza delle Costruzioni, la simmetria fisica involge in genere la densità e le proprietà elastiche del materiale.

Si consideri una struttura avente simmetria geometrica e fisica rispetto ad un piano  $xy$ , e secondo la direzione  $z$  ortogonale ad  $xy$  (simmetria ortogonale); siano validi i presupposti del *principio di sovrapposizione degli effetti*. La struttura sia soggetta ad un insieme di forze applicate (o distorsioni) simmetrico anch'esso rispetto al piano  $xy$ , e secondo la direzione  $z$ . Siano  $P$  e  $Q$  due punti simmetrici qualsiasi. Si faccia intervenire prima il carico esterno agente da una parte del piano  $xy$ , poi il carico esterno agente dall'altra parte. Il primo carico provoca in  $P$  e  $Q$  le componenti dello spostamento  $u'_P$   $v'_P$   $w'_P$ ,  $u'_Q$   $v'_Q$   $w'_Q$ ; il secondo carico provocherà le componenti

$$\begin{aligned} u''_P &= u'_Q \\ v''_P &= v'_Q \\ w''_P &= -w'_Q \\ u''_Q &= u'_P \\ v''_Q &= v'_P \\ w''_Q &= -w'_P ; \end{aligned}$$

quindi, sovrapponendo gli effetti,

$$\begin{aligned} u_P &= u'_P + u''_P = u'_P + u'_Q \\ v_P &= v'_P + v''_P = v'_P + v'_Q \\ w_P &= w'_P + w''_P = w'_P - w'_Q \\ u_Q &= u'_Q + u''_Q = u'_Q + u'_P = u_P \\ v_Q &= v'_Q + v''_Q = v'_Q + v'_P = v_P \\ w_Q &= w'_Q + w''_Q = w'_Q - w'_P = -w_P \end{aligned} \tag{2}$$

Queste relazioni dicono che gli spostamenti  $s$  costituiscono un insieme simmetrico rispetto al piano  $xy$ , e secondo la direzione  $z$ . La simmetria degli spostamenti implica la simmetria delle deformazioni e delle tensioni, e cioè, dati due punti simmetrici  $P$  e  $Q$ , è

$$\epsilon_{xQ} = \epsilon_{yP}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{yQ} &= \epsilon_{yP} \\
 \epsilon_{zQ} &= \epsilon_{zP} \\
 \gamma_{xyQ} &= \gamma_{xyP} \\
 \gamma_{yzQ} &= -\gamma_{yzP} \\
 \gamma_{zxQ} &= -\gamma_{zxP}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

analoghe relazioni valgono per le  $\sigma_i$  e  $\tau_{jk}$ .

Si faccia adesso invece il caso che l'insieme delle forze applicate (o distorsioni) sia antisimmetrico rispetto al piano  $xy$ , e secondo la direzione  $z$ ; in tal caso il secondo carico provocherà in  $Q$  le componenti

$$\begin{aligned}
 u''_P &= -u'_Q \\
 v''_P &= -v'_Q \\
 w''_P &= -w'_Q \\
 u''_Q &= -u'_P \\
 v''_Q &= -v'_P \\
 w''_Q &= -w'_P \quad ;
 \end{aligned}$$

quindi, sovrapponendo gli effetti si avrà

$$\begin{aligned}
 u_P &= u'_P + u''_P = u'_P - u'_Q \\
 v_P &= v'_P + v''_P = v'_P - v'_Q \\
 w_P &= w'_P + w''_P = w'_P + w'_Q \\
 u_Q &= u'_Q + u''_Q = u'_Q - u'_P = -u_P \\
 v_Q &= v'_Q + v''_Q = v'_Q - v'_P = -v_P \\
 w_Q &= w'_Q + w''_Q = w'_Q + w'_P = w_P
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Queste relazioni assicurano che gli spostamenti  $s$  costituiscono un insieme antisimmetrico rispetto al piano  $xy$ , e secondo la direzione  $z$ . L'an-

tisimmetria degli spostamenti implica l'antisimmetria delle deformazioni e delle tensioni; e cioè, dati due punti simmetrici  $P$  e  $Q$ , è

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{xQ} &= -\epsilon_{xP} \\
 \epsilon_{yQ} &= -\epsilon_{yP} \\
 \epsilon_{zQ} &= -\epsilon_{zP} \\
 \gamma_{xyQ} &= -\gamma_{xyP} \\
 \gamma_{yzQ} &= \gamma_{yzP} \\
 \gamma_{zxQ} &= \gamma_{zxP} \quad ;
 \end{aligned} \tag{5}$$

analoghe relazioni valgono per le  $\sigma_i$   $\tau_{jl}$ .

Si può quindi enunciare: "in una struttura avente simmetria geometrica e fisica ortogonale rispetto ad un piano  $xy$ , e sotto l'ipotesi di validità del principio di sovrapposizione degli effetti, un insieme di forze applicate (o distorsioni) con simmetria ortogonale rispetto ad  $xy$  secondo  $z$  genera un insieme di effetti (spostamenti, deformazioni, tensioni) aventi le stesse proprietà di simmetria; un insieme di forze applicate (o distorsioni) con antisimmetria ortogonale rispetto ad  $xy$  genera un insieme di effetti aventi le stesse proprietà di antisimmetria".

Nel caso dei sistemi monodimensionali, gli effetti possono essere riassunti nelle caratteristiche della sollecitazione interna; in più, nei sistemi monodimensionali piani tali caratteristiche si riducono ad  $MNT$ . Un esempio, in tale ambito, è quello della fig. a e b, rappresentanti lo stesso arco soggetto a due condizioni di carico, una simmetrica, l'altra antisimmetrica. Si osservi che il piano  $xy$  è ortogonale a  $z$ , e che esiste simmetria geometrica e fisica anche rispetto al piano  $yz$ .

Nella fig. a) si nota che le condizioni di *simmetria* impongono che per le reazioni si abbia

$$\begin{aligned}
 V_B &= V_A \\
 H_B &= -H_A \\
 \mathfrak{M}_B &= -\mathfrak{M}_A \quad ;
 \end{aligned} \tag{6}$$

si sono chiamate con  $V$  ed  $H$ , come d'uso, le componenti verticale ed orizzontale (spinta) della reazione. Così pure, in due sezioni  $H$  e  $K$  simmetriche deve aversi

$$M_K = M_H \quad v_K = v_H$$

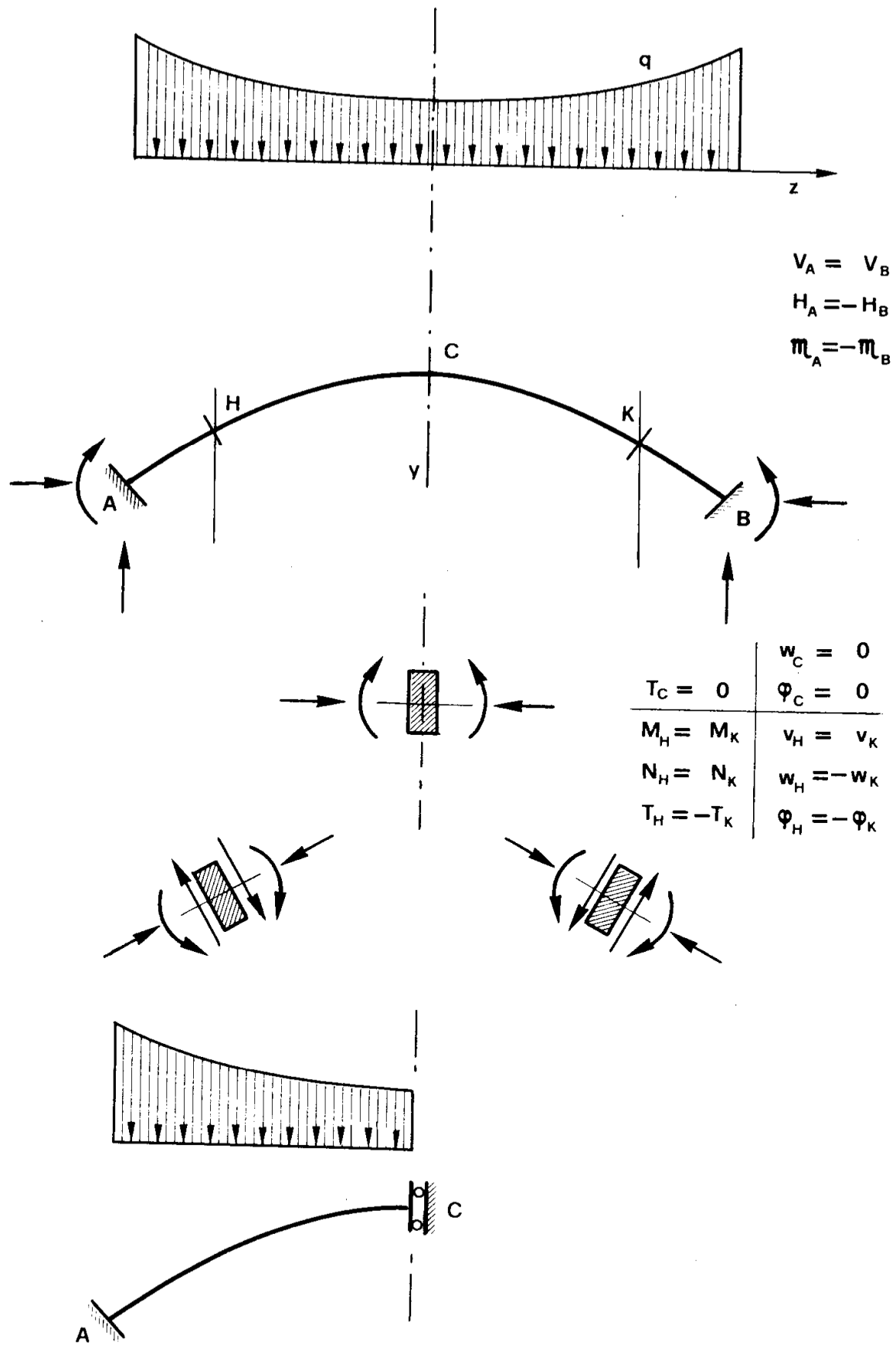


Figura a

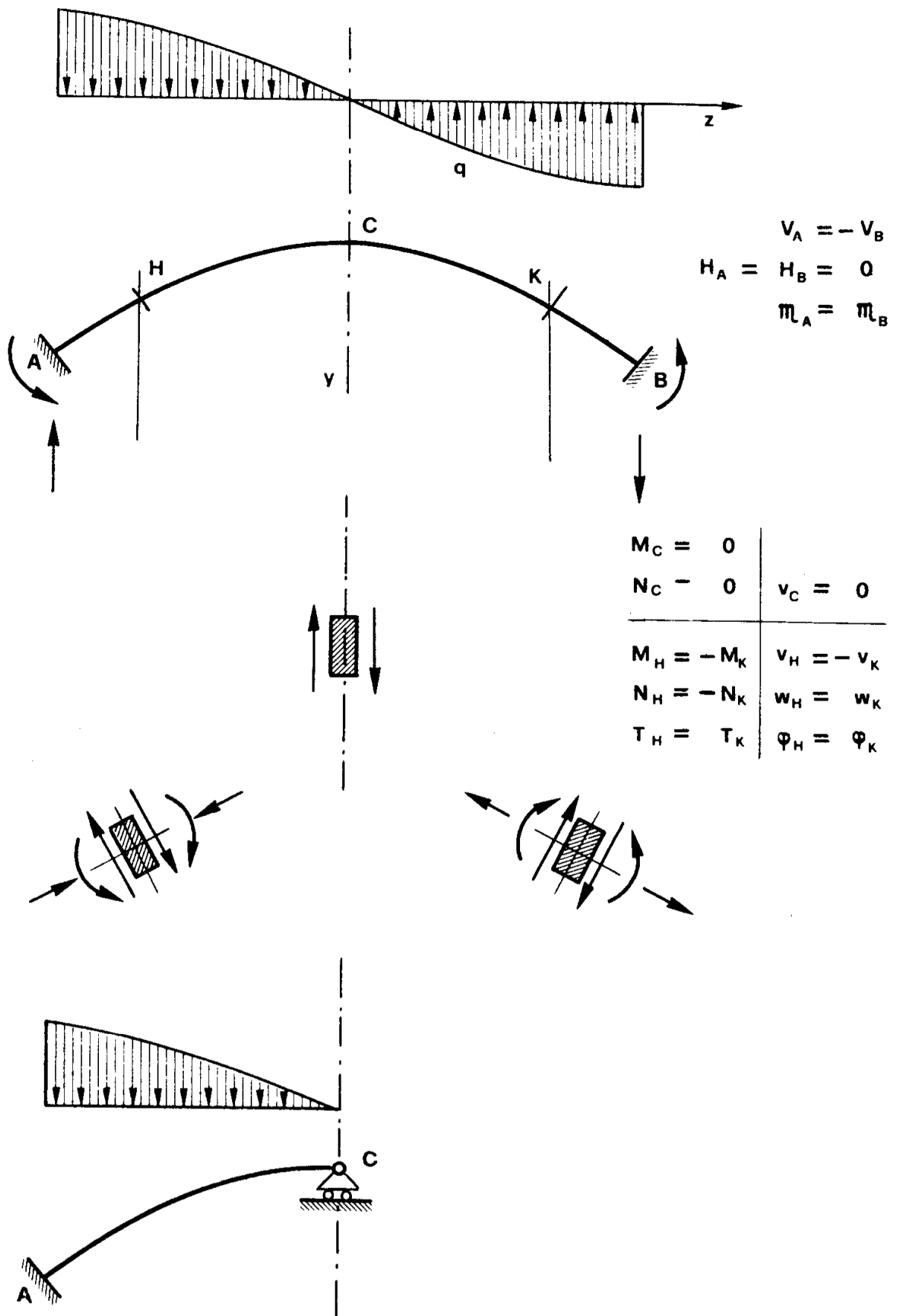


Figura b

$$\begin{aligned}
 M_K &= M_H & v_K &= v_H \\
 N_K &= N_H & w_K &= -w_H \\
 T_K &= -T_H & \varphi_K &= -\varphi_H
 \end{aligned} \tag{7}$$

Nella sezione di chiave  $C$  deve poi essere

$$\begin{aligned}
 T_C &= 0 \\
 w_C &= 0 \\
 \varphi_C &= 0 ;
 \end{aligned} \tag{8}$$

ciò porta a semplificare il sistema, come è riportato nella fig. a, in un semiarco, incastrato in  $A$  e con un bipendolo a piano di scorrimento verticale in  $C$ . Il grado di iperstaticità è abbassato così da tre a due.

Si noti che i diagrammi di  $v$ ,  $M$ ,  $N$  sono simmetrici rispetto alla retta  $y$ ; i diagrammi di  $w$ ,  $\varphi$ ,  $T$  sono antisimmetrici, e si annullano quindi in  $y$ , per ragioni di continuità.

Si vuol fare osservare che, se cade l'ipotesi di validità del principio di sovrapposizione degli effetti, in particolare se si opera trascurando l'ipotesi di piccoli spostamenti, la struttura può assumere configurazioni diverse dalla simmetrica (sbandamento laterale) indifferentemente a sinistra o a destra; queste ultime sono stabili, la simmetria è instabile. Nella fig. b le condizioni di *antisimmetria* impongono che per le reazioni si abbia

$$\begin{aligned}
 V_B &= -V_A \\
 H_B &= H_A = 0 \\
 m_B &= m_A ;
 \end{aligned} \tag{9}$$

in due sezioni  $H$  e  $K$  simmetriche deve essere

$$\begin{aligned}
 M_K &= -M_H & v_K &= -v_H \\
 N_K &= -N_H & w_K &= w_H \\
 T_K &= T_H & \varphi_K &= \varphi_H
 \end{aligned} \tag{10}$$

Nella sezione  $C$  di chiave deve essere

$$M_C = 0$$

$$N_C = 0 \quad (11)$$

$$v_C = 0 ;$$

il sistema può quindi semplificarsi in un semiarco incastrato in  $A$ , e con un appoggio a piano di scorrimento orizzontale in  $C$ ; il grado di iperstaticità si abbassa da tre ad uno.

I diagrammi di  $w$ ,  $\varphi$ ,  $T$  sono simmetrici rispetto alla retta  $y$ ; i diagrammi di  $v$ ,  $M$ ,  $N$  sono antisimmetrici, e si annullano in  $y$ , per continuità. In questo capitolo saranno riportati alcuni esercizi elementari, prevalentemente limitati a sistemi monodimensionali piani costituiti da travi ad asse rettilineo, così come si è fatto finora nei tre precedenti capitoli.

### Problema n. 1.

Si esamina la trave ad asse circolare della fig. 1a, simmetrica geometricamente e fisicamente rispetto ai due diametri ortogonali  $AB$  e  $CD$ , e rispetto alle bisettrici  $EG$  ed  $HK$  degli angoli formati da tali diametri. Per esempio, la trave è a sezione costante e di materiale omogeneo. La struttura è soggetta a due forze radiali centripete in  $A$  e  $B$ , ed a due forze radiali centrifughe in  $C$  e  $D$ , tutte di uguale modulo  $F$ . Quindi la struttura è caricata simmetricamente rispetto alle rette  $AB$  e  $CD$ , antisimmetricamente rispetto alle rette  $EG$  ed  $HK$ .

La struttura è labile perchè è libera da vincoli, ma è soggetta ad un insieme di forze in equilibrio, quindi è in equilibrio. Si fissi, rispetto al riferimento  $yz$ , il centro  $O$  e la direzione di  $AB$ . Per le suddette condizioni di simmetria si può scrivere

$$\text{sez. } A \quad T_A = 0$$

$$s_{At} = 0$$

$$\varphi_A = 0$$

sez.  $E$

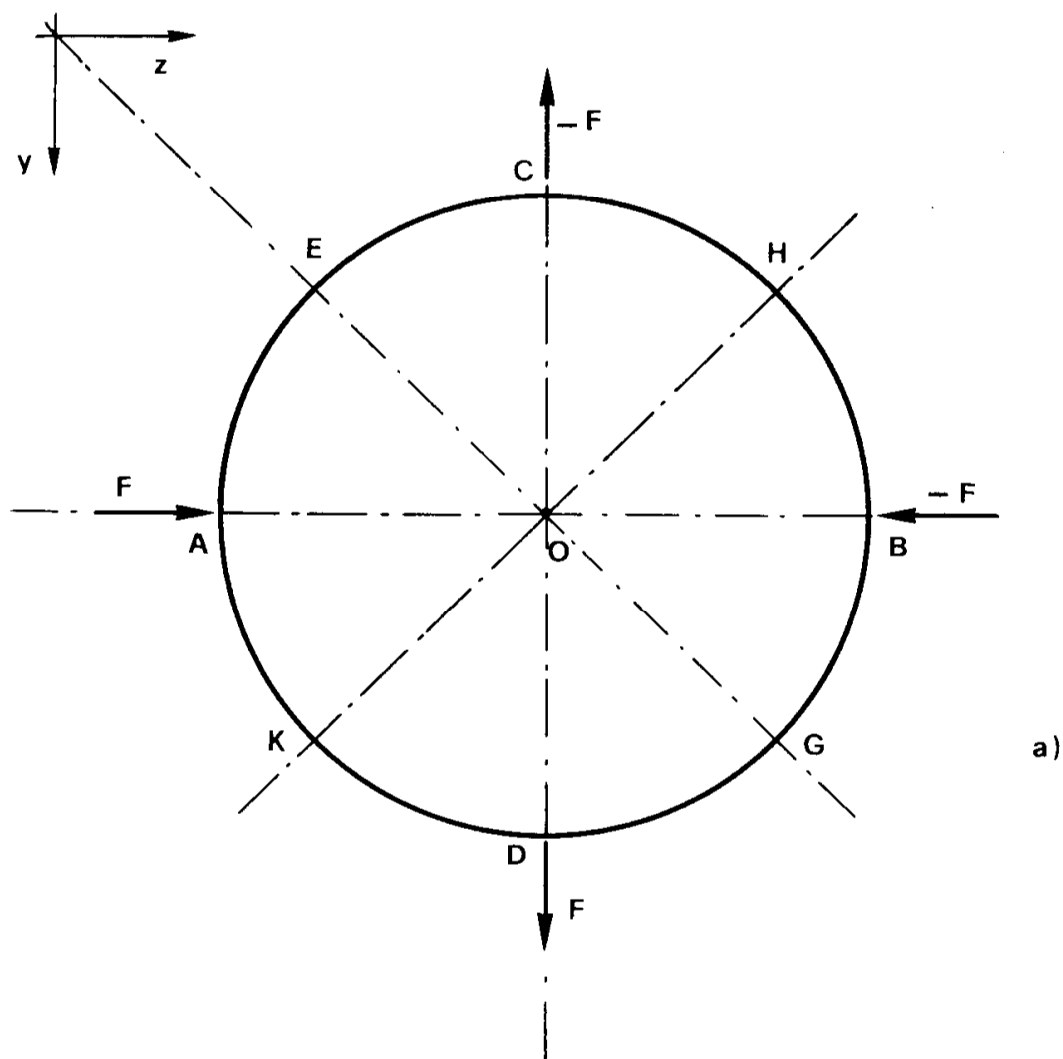
$$M_E = 0$$

$$N_E = 0$$

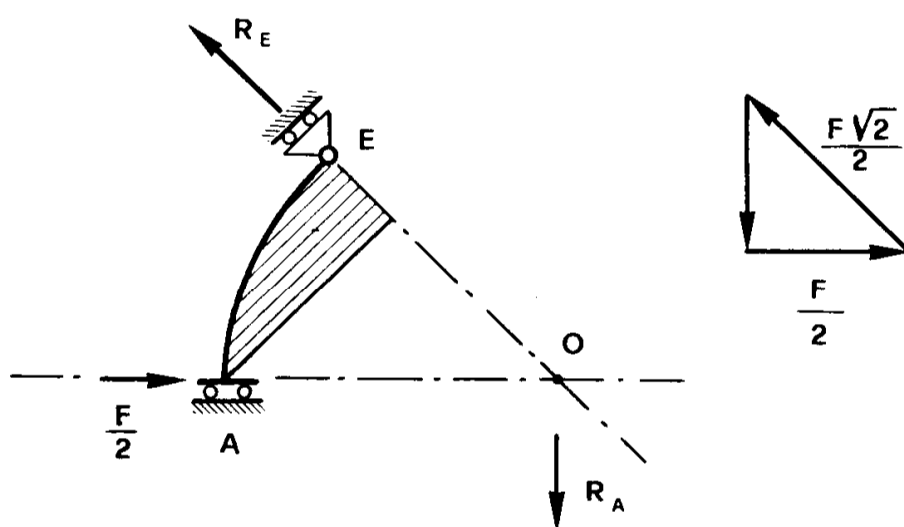
$$s_{Er} = 0 ;$$

si sono indicati con  $s_t$  ed  $s_r$  le componenti tangenziale e radiale dello spostamento.





a)



b)

Figura 1

Quindi l'arco  $AE$  può isolarsi dal resto della struttura, vincolandolo in  $A$  con un bipendolo che consenta la sola  $s_{Ar}$ , ed in  $E$  con un appoggio che impedisca la  $s_{Er}$ . Si osservi che, per poter parlare di simmetria di carico rispetto ai diametri  $AB$  e  $CD$ , è necessario scomporre ogni forza  $F$  in due  $\frac{F}{2}$  vicinissime e parallele ad  $F$ ; perciò l'arco  $AE$  risulta caricato dalla forza  $\frac{F}{2}$  secondo il raggio  $AO$ .

La struttura è ridotta così ad uno schema isostatico; la ricerca delle reazioni e delle caratteristiche è pedissequa (fig. 1b).

### Problema n. 2.

Nella fig. 2a è riportata la stessa trave del problema precedente; le forze però sono tutte centripete, quindi c'è simmetria di carico sia rispetto ai diametri  $AB$  e  $CD$  che rispetto alle bisettrici  $EG$  ed  $HK$ . E' perciò

$$\text{sez. } A \qquad T_A = 0$$

$$s_{At} = 0$$

$$\varphi_A = 0$$

$$\text{sez. } E \qquad T_E = 0$$

$$s_{Et} = 0$$

$$\varphi_E = 0$$

L'arco  $AE$  può quindi isolarsi, vincolando in  $A$  con un bipendolo che consenta la sola  $s_{Ar}$ , in  $B$  con un bipendolo che consenta la sola  $s_{Er}$ . Tale struttura ridotta (fig. 2b) è ancora iperstatica; si può scegliere come struttura isostatica quella della fig. 2c, e cioè come incognita  $X$  il momento  $M_E$ . Poichè si tratta di una trave ad asse curvilineo, il metodo della scrittura diretta dell'equazione di congruenza (cap. 2) non è consigliabile; nel capitolo sesto, sul principio dei lavori virtuali, si mostrerà come tale equazione sia costruibile in ogni caso, e tenendo conto di qualsiasi fattore.

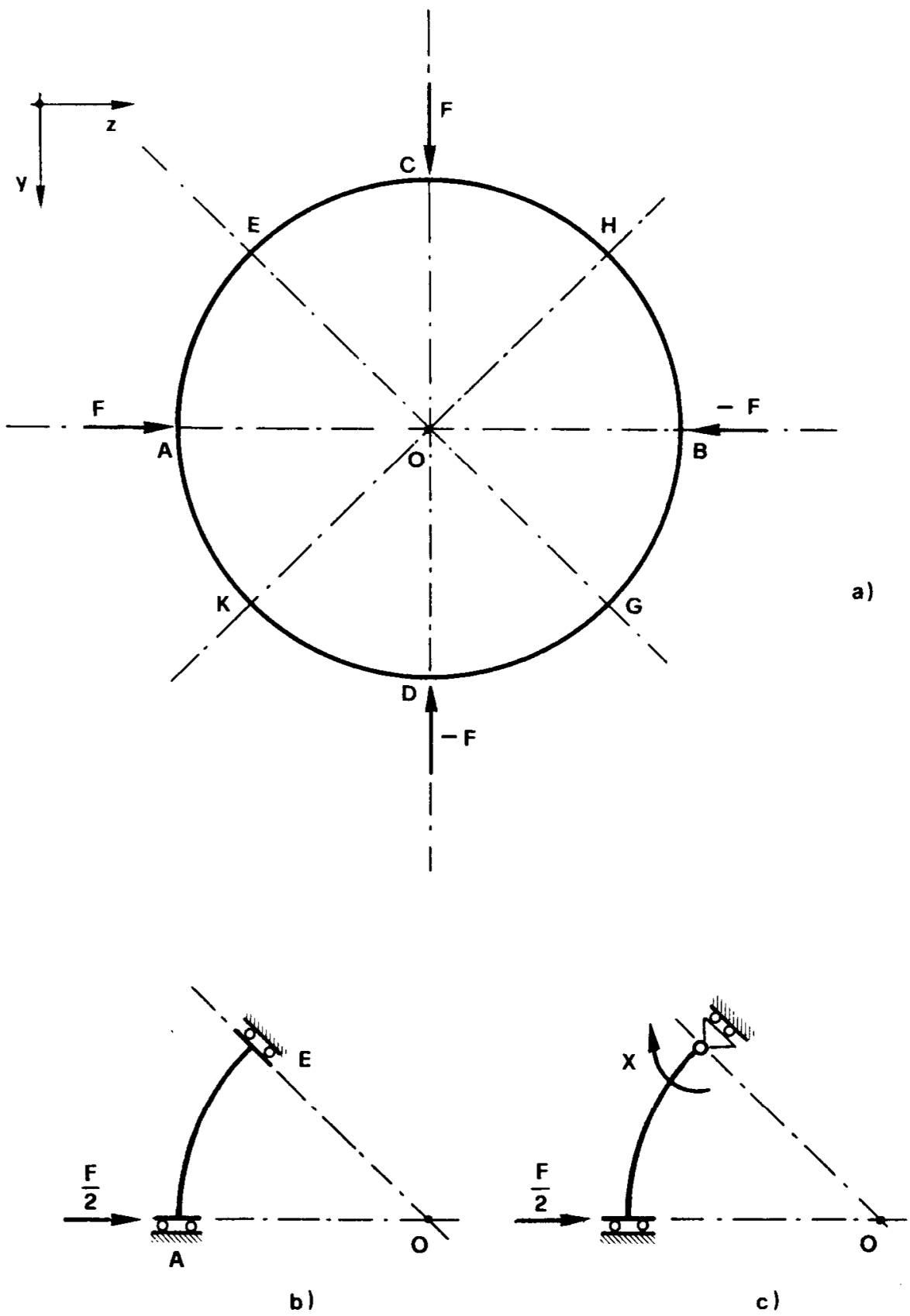


Figura 2

Problema n. 3.

L'arco della fig. 3a sia simmetrico (geometricamente e fisicamente) e

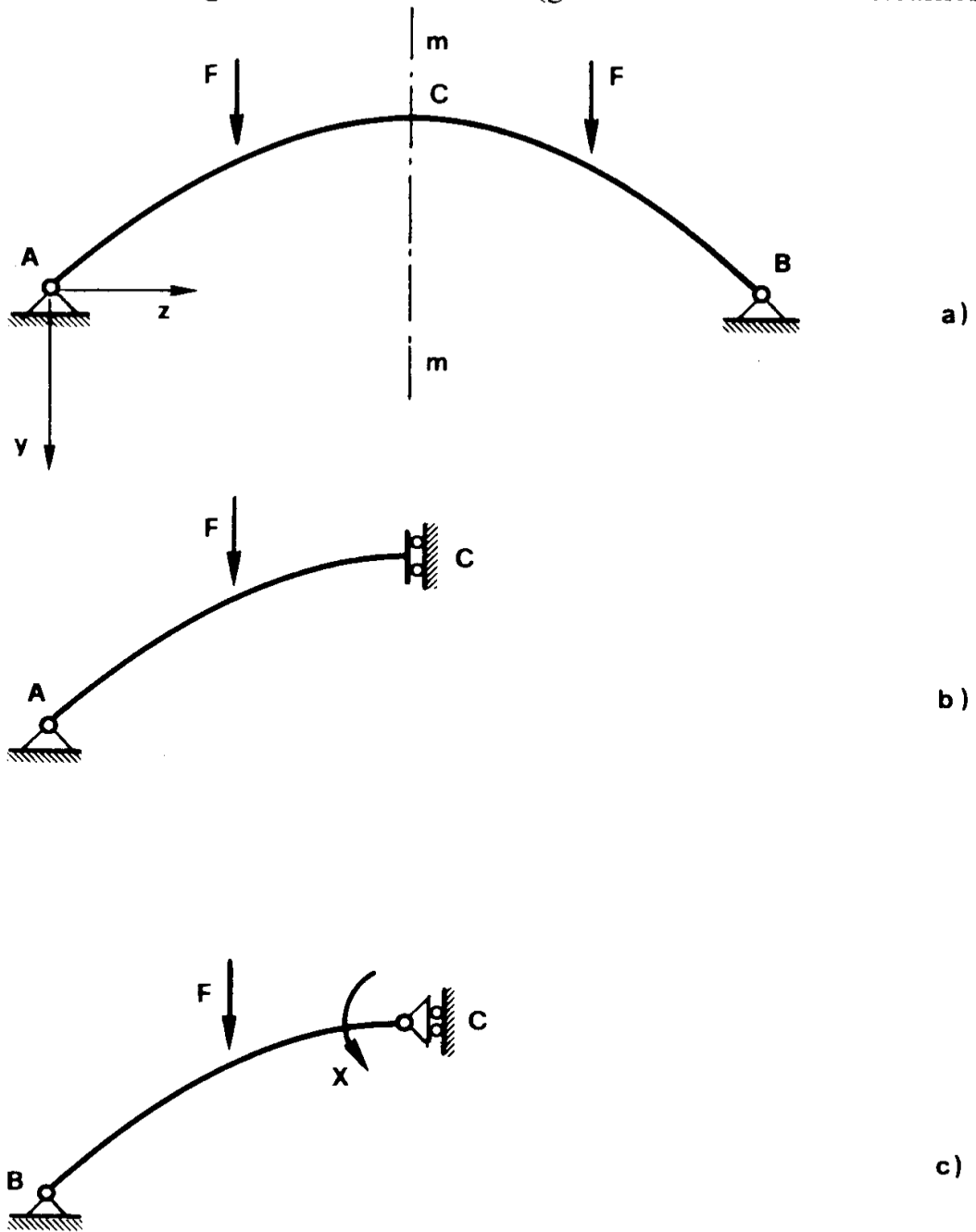


Figura 3

simmetricamente caricato rispetto alla retta  $mm$  di mezzeria; in  $C$  è perciò

$$T_C = 0$$

$$w_C = 0$$

$$\varphi_C = 0,$$

e la struttura può schematizzarsi come nella fig. 3b. Tale struttura è, come l'originaria, una volta iperstatica; come struttura isostatica si può assumere quella della fig. 3c, scegliendo come incognita  $X$  il momento  $M_C$ . Anche in questo caso è consigliabile assumere l'equazione di congruenza utilizzando la formulazione ad hoc del principio dei lavori virtuali.

**Problema n. 4.**

Lo stesso arco del problema precedente è caricato antisimmetrica-

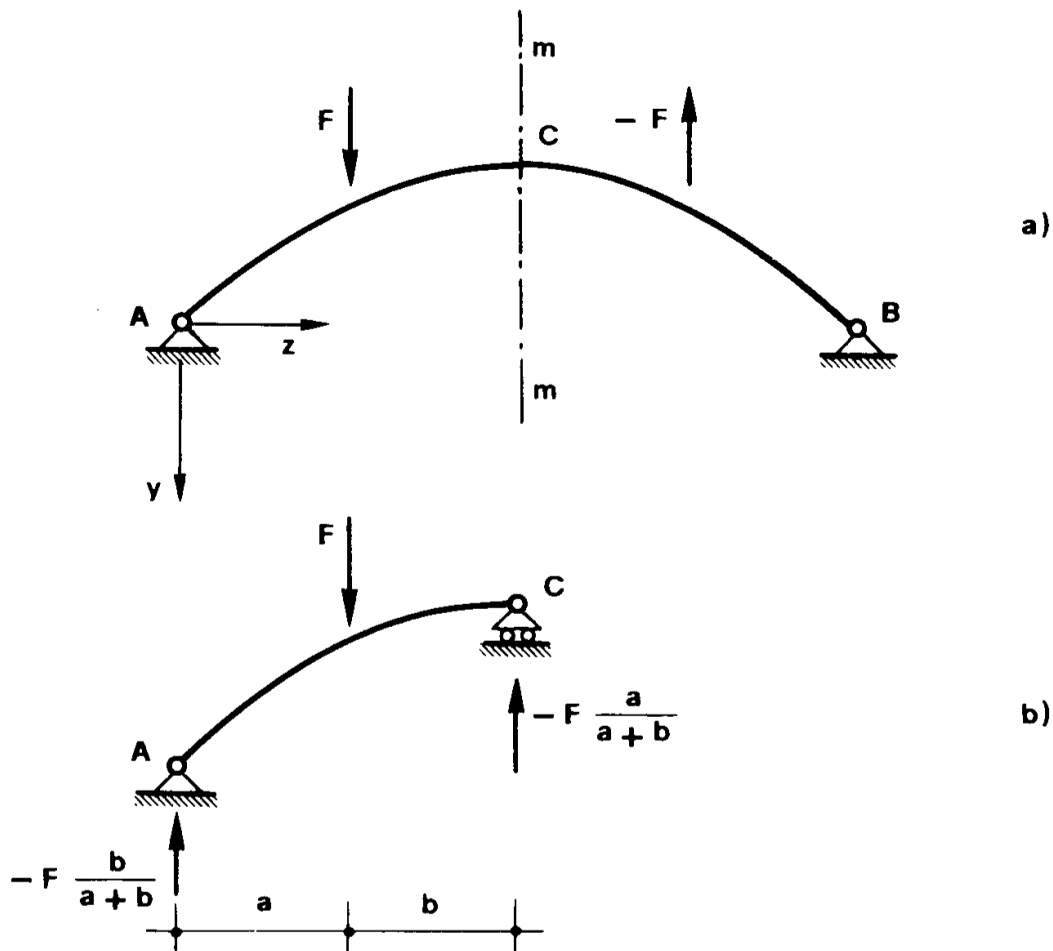


Figura 4

mente rispetto alla mezzeria (fig. 4a), in  $C$  è

$$M_C = 0$$

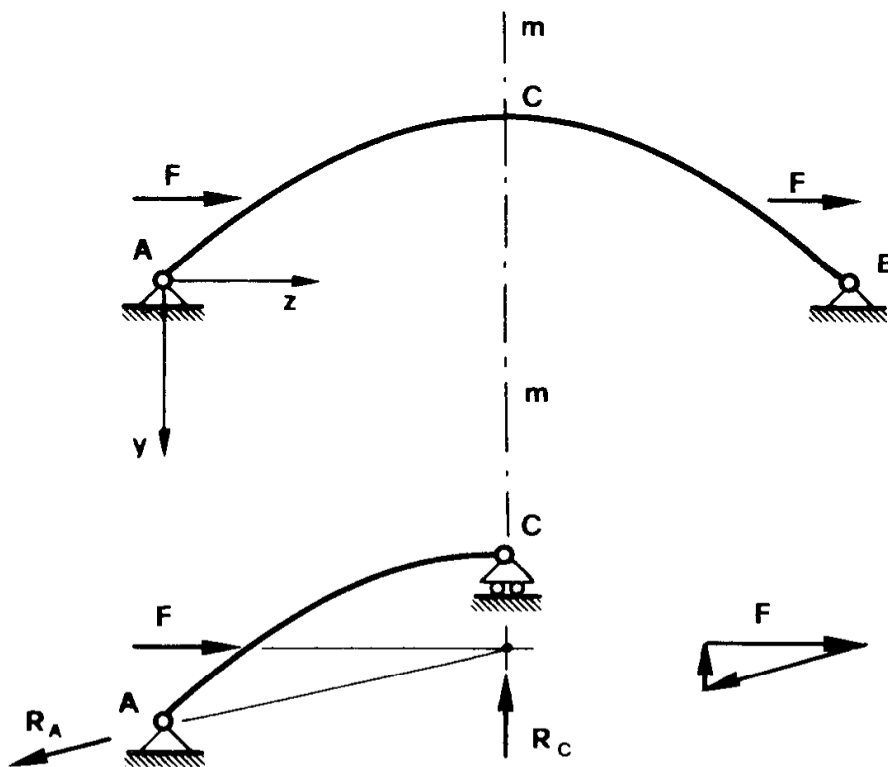
$$N_C = 0$$

$$v_C = 0 ,$$

e quindi la struttura si schematizza come nella fig. 4b. Essa è isostatica ed il suo studio è ovvio.

### Problema n. 5.

Lo stesso arco dell'esercizio precedente è ancora caricato antisimmet-



*Figura 5*

tricamente rispetto alla mezzeria (fig. 5), con due forze orizzontali. Anche in questo caso lo studio della struttura ridotta isostatica è ovvio.

### Problema n. 6.

La trave della fig. 6a sia fisicamente e geometricamente simmetrica rispetto alla verticale  $mm$  per l'appoggio centrale  $B$ ; quindi in  $B$  è

$$\varphi_B = 0 .$$

La trave può ridursi a quella della fig. 6b, con appoggio in  $A$  ed incastro rigido in  $B$ ; essa è ancora una volta iperstatica, ma presenta il vantaggio di essere nota.

Anche il portale della fig. 6c si riduce alla trave della fig. 6b, e le iperstatiche, in questo caso, da due ad una; devono essere trascurate le

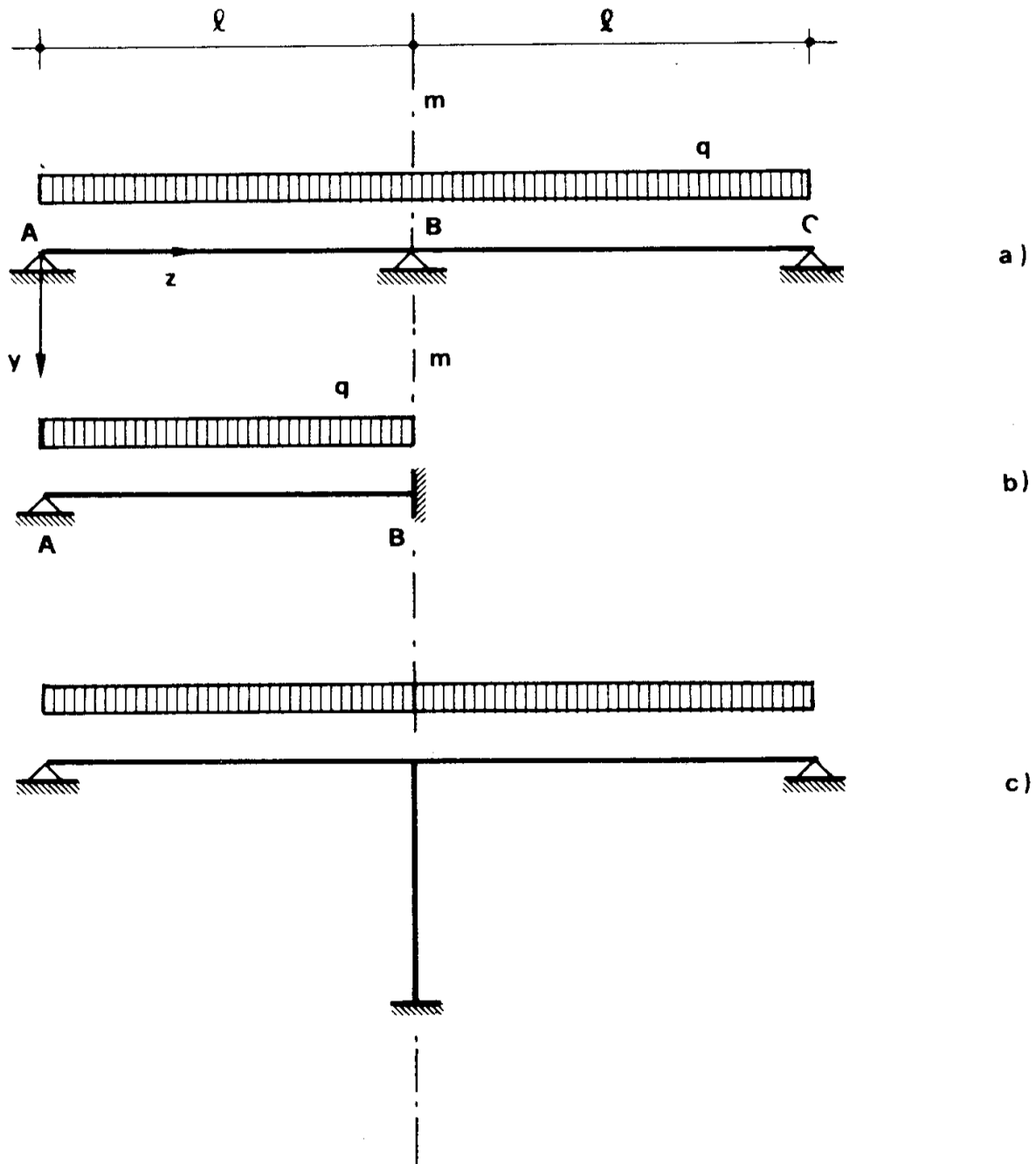


Figura 6

deformazioni assiali nel ritto, oppure l'incastro in B della fig. 6b deve intendersi come verticalmente cedevole.

## Problema n. 7.

La trave della fig. 7a, con  $EI = cost$ , è simmetrica ed antisimmetricamente caricata rispetto alla verticale  $mm$  per  $B$ . Poichè la coppia agisce

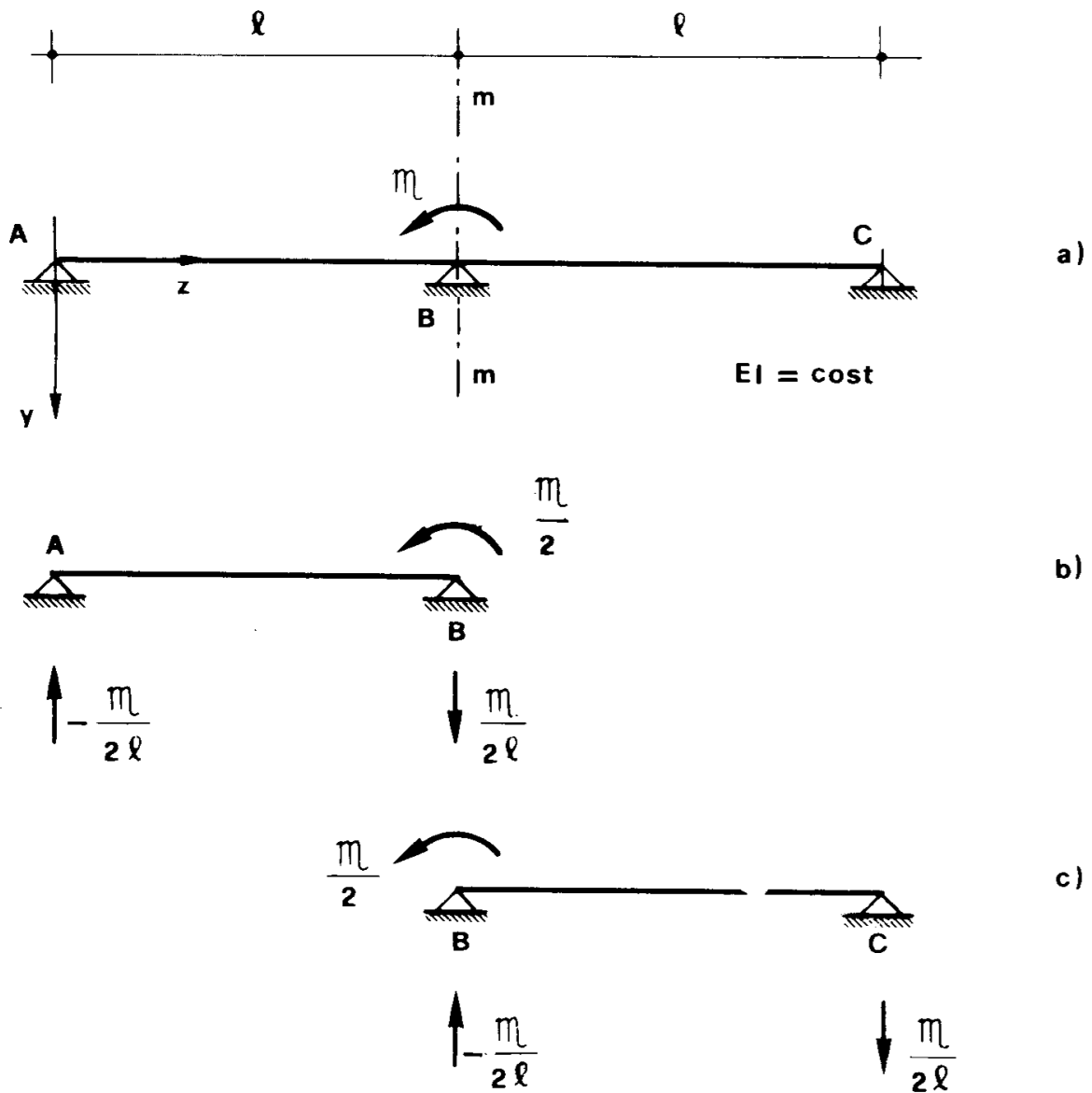


Figura 7

proprio in  $B$ , occorre scomporla in due, pari ad  $\frac{m}{2}$ , agenti immediatamente a sinistra e a destra di  $B$ .

In  $B$  si ha

$$M_B = 0$$



e quindi la struttura si può ridurre alla trave  $AB$  appoggiata in  $A$  e  $B$  (fig. 7b), soggetta alla coppia  $\frac{\mathfrak{M}}{2}$  in  $B$ . E' perciò

$$\varphi_A = -\frac{\mathfrak{M} l}{12 EI}$$

$$\varphi_B = \frac{\mathfrak{M} l}{6 EI} .$$

Per avere le reazioni  $R_B$  della trave assegnata occorre sommare quella calcolata su  $AB$  (fig. 7b) e quella calcolata sulla  $BC$  (fig. 7c); quindi è

$$R_B = 0 ,$$

come dovevamo attenderci per l'antisimmetria del carico.

### Problema n. 8.

La trave della fig. 8a, con  $EI = cost$ , e soggetta ad una coppia  $\mathfrak{M}$  in mezzeria, è antisimmetricamente caricata rispetto all'asse di simmetria  $mm$ ; quindi la struttura si riduce a quella della fig. 8b, ed è

$$\varphi_A = -\frac{\mathfrak{M}}{2} \frac{l}{2} \frac{1}{6 EI} = -\frac{\mathfrak{M} l}{24 EI} = \varphi_B$$

$$\varphi_H = \frac{\mathfrak{M}}{2} \frac{l}{2} \frac{1}{3 EI} = \frac{\mathfrak{M} l}{12 EI}$$

$$R_A = -\frac{\mathfrak{M}}{l} = -R_B$$

### Problema n. 9.

La trave della fig. 9a, con  $EI = cost$ , e soggetta ad un carico  $q$  uniforme, è simmetrica e simmetricamente caricata rispetto alla verticale di

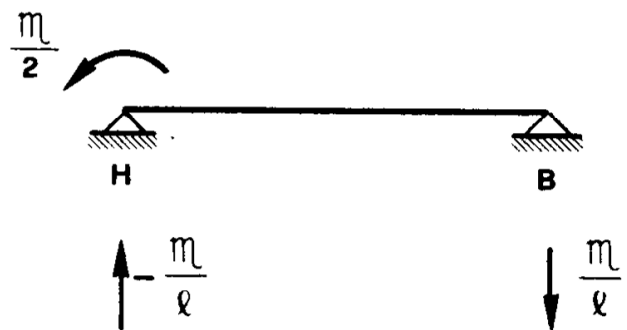
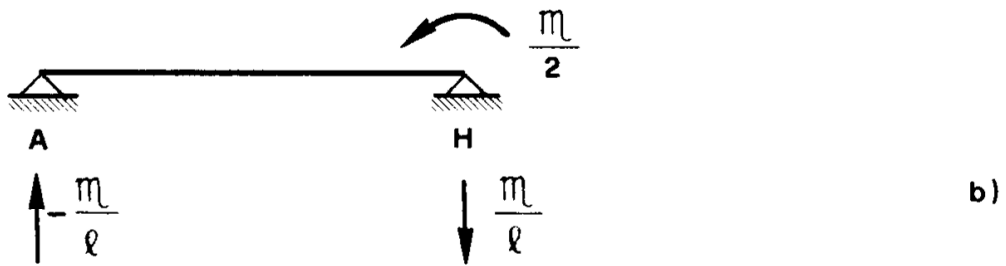
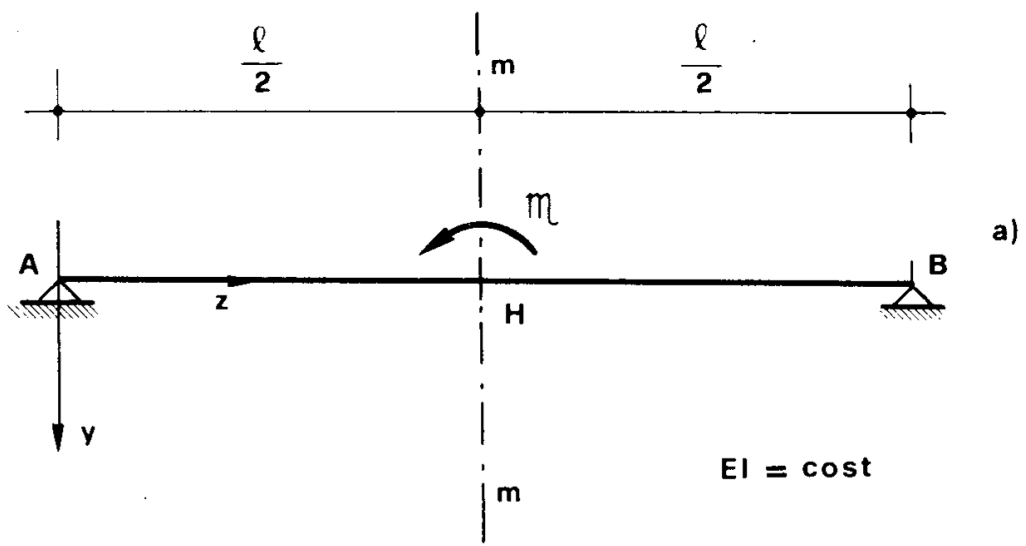


Figura 8

mezzeria  $mm$ ; quindi la struttura ridotta è quella della fig. 9b, ove

$$T_H = 0$$

$$\varphi_H = 0 .$$

La struttura ridotta è una volta iperstatica. Si può scegliere come

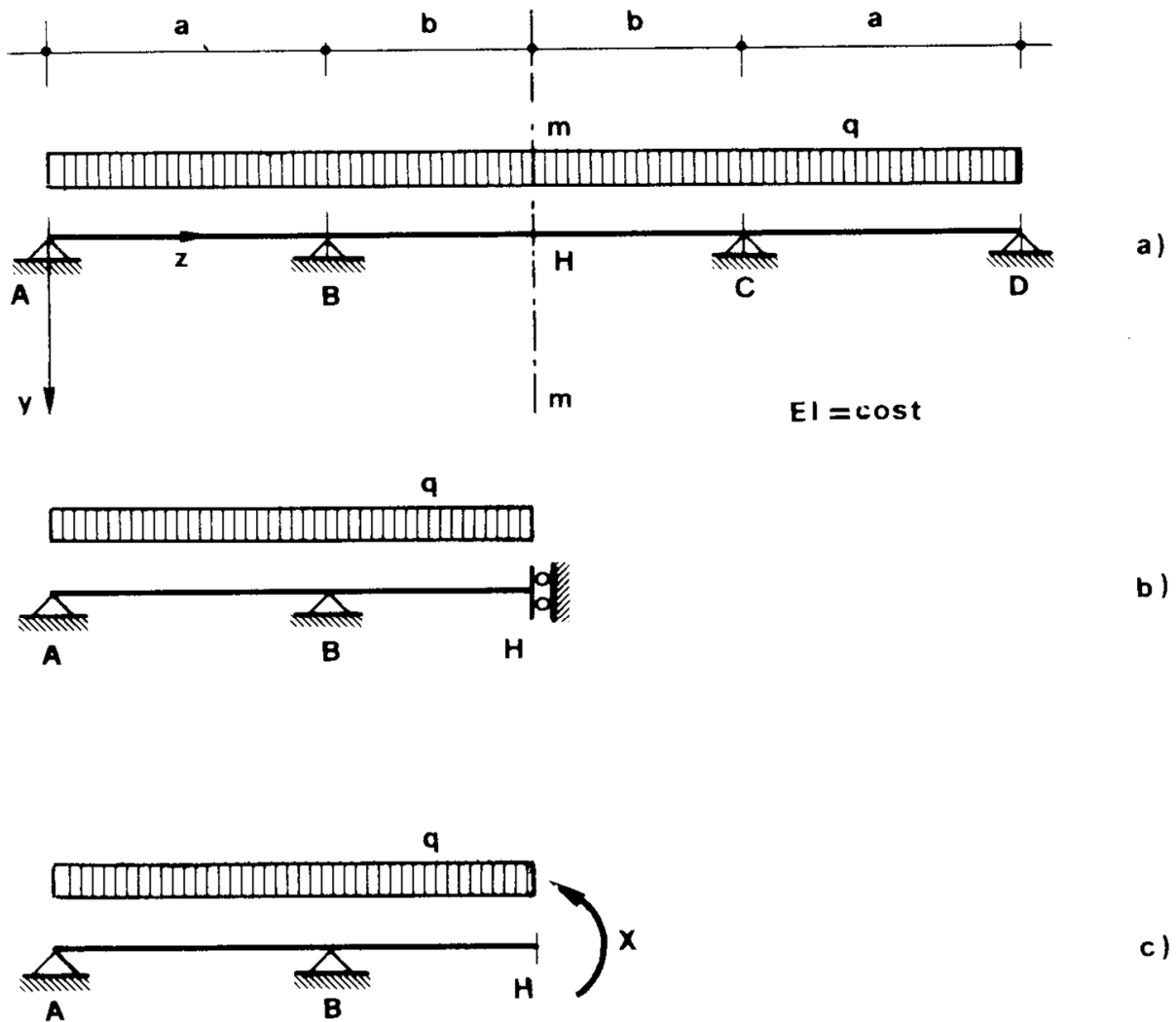


Figura 9

struttura isostatica quella della fig. 9c, e quindi come incognita iperstatica  $X$  il momento  $M_H$ ; più precisamente, la coppia  $\mathfrak{M}_H$  che è trasmessa in  $H$  da  $HD$  su  $AH$ . L'equazione di congruenza è

$$\varphi_H = \frac{qa^3}{24EI} - \frac{qb^3}{6EI} + \frac{Xa}{3EI} + \frac{Xb}{EI} = 0$$

da cui

$$X = q \frac{-a^3 + 4b^3}{8(a + 3b)}$$

Si verifica che, per  $a \rightarrow 0$  (trave  $AD$  incastrata in  $A$  e  $D$ ) è

$$X \rightarrow \frac{qb^2}{6} = \frac{q(2b)^2}{24} ;$$

per  $b \rightarrow 0$  (trave  $AH$  appoggiata in  $A$  ed incastrata in  $H$ ) è

$$X \rightarrow -\frac{qa^2}{8} .$$

### Problema n. 10.

Qualsiasi condizione di carico può suddividersi in due, una simmetrica e l'altra antisimmetrica rispetto all'eventuale retta di simmetria fisico-geometrica della struttura. La simmetria della struttura è quindi un elemento da cui comunque può trarsi vantaggio, quali che siano le forze o distorsioni applicate. Per suddividere un insieme di forze  $F_i$ , applicate tutte da una parte della retta di simmetria, in due insiemi, uno simmetrico e l'altro antisimmetrico rispetto alla stessa retta, basta considerare l'insieme  $\frac{F_i}{2}$

delle forze dimezzate, e farne una volta il simmetrico, ed una volta l'antisimmetrico, lo stesso vale per le distorsioni. E' quanto si è fatto nella struttura della fig. 10 a; è ovvio che, se le forze non sono tutte dalla stessa parte della retta di simmetria, basta eseguire l'operazione per quelle da una parte e per quelle dall'altra separatamente.

Nella trave della fig. 10 a, con  $EI = cost$ , un carico  $q$  uniforme agisce sulla semiluce di sinistra; le due condizioni simmetrica ed antisimmetrica sono quelle delle fig. 10 b e 10 c. Se si vuole  $v_H$ , dalla fig. 10 b si ha (cap. 1, for. 40)

$$v'_H = \frac{5}{384} \frac{q}{2} \frac{l^4}{EI} ,$$

e dalla fig. 10 c

$$v''_H = 0 .$$

Quindi

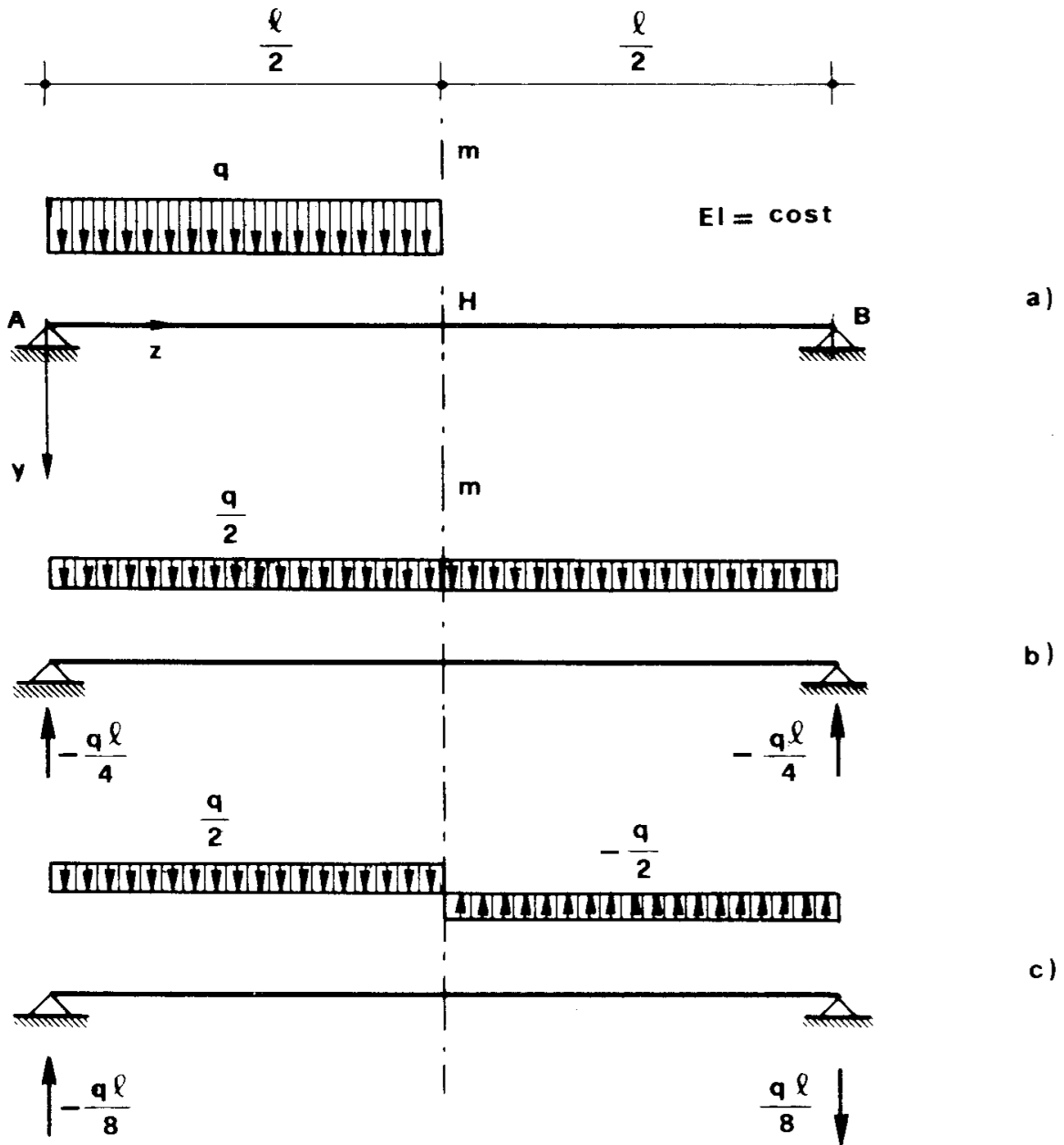


Figura 10

$$v_H = v'_H = \frac{1}{2} \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} ,$$

e cioè l'abbassamento di  $H$  è la metà di quello che si avrebbe se il carico  $q$  insistesse, con la stessa intensità, su tutta la luce. Si osserva pure che

l'abbassamento di  $H$  è lo stesso, se lo stesso carico totale si distribuisce da  $A$  ad  $H$  (con intensità  $q$ ) o da  $A$  a  $B$  con intensità  $\frac{q}{2}$ . Così pure è

$$M''_H = 0$$

$$M_H = M'_H = \frac{ql^2}{16};$$

$$T'_H = 0$$

$$T_H = T''_H = -\frac{ql}{8};$$

$$R'_A = -\frac{ql}{4}$$

$$R''_A = -\frac{ql}{8}$$

$$R_A = -\frac{3}{8} ql;$$

$$R'_B = -\frac{ql}{4}$$

$$R''_B = \frac{ql}{8}$$

$$R_B = -\frac{1}{8} ql.$$

### Problema n. 11.

Il portale della fig. 11a, simmetrico rispetto alla verticale di mezzeria  $mm$ , è caricato nel nodo di sinistra da una forza orizzontale  $F$ . Se si trascurano le deformazioni assiali del traverso, la forza  $F$  può essere suddivisa in due forze  $\frac{F}{2}$  equiverse, applicate nei due nodi; allora la struttura

risulta caricata antisimmetricamente, e può ridursi a quella della fig. 11b.

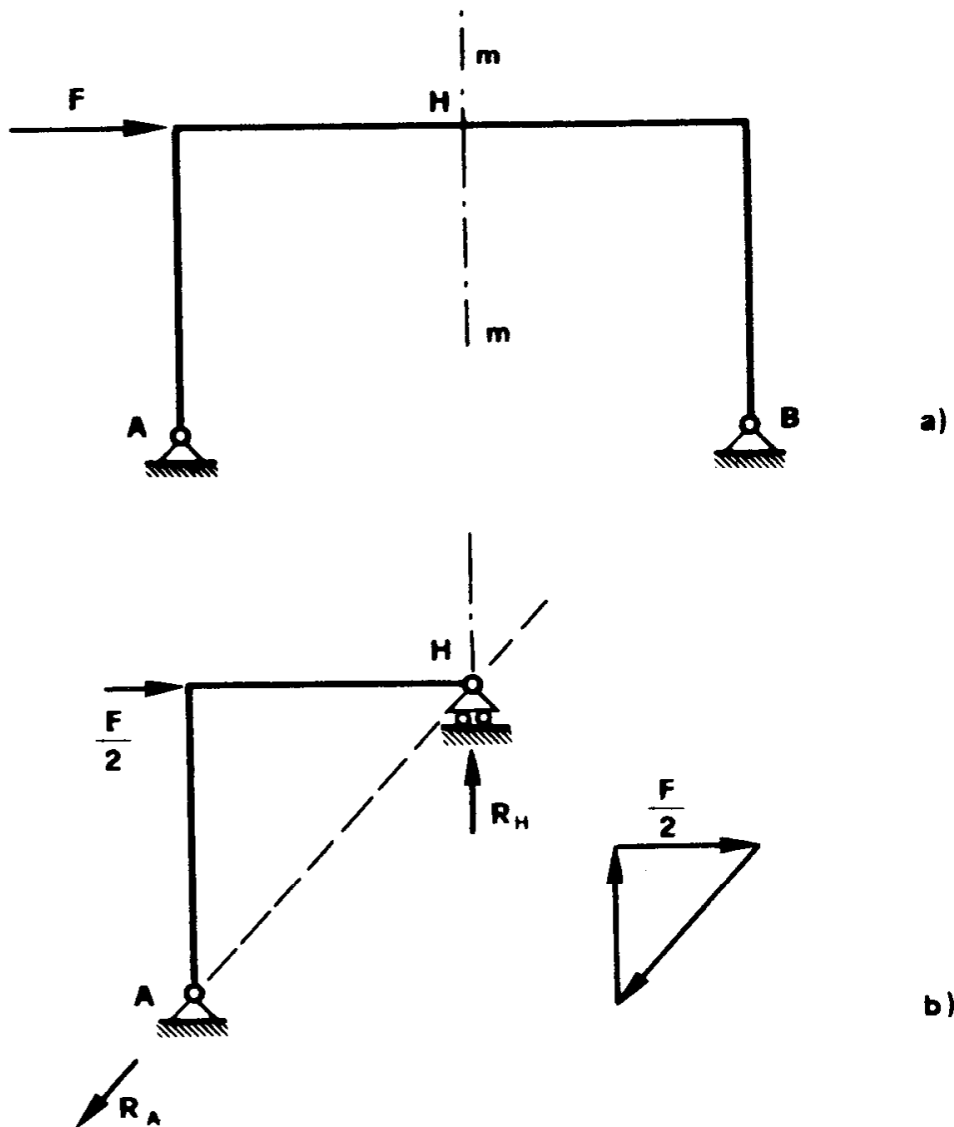


Figura 11

Ogni telaio simmetrico a traversi orizzontali, e soggetto a forze orizzontali sui traversi stessi, può essere considerato soggetto a carico antisimmetrico, se si trascurano le deformazioni assiali dei traversi.

### Problema n. 12.

Il problema è analogo a quello trattato in 1) e 2). Il telaio quadrato della fig. 12 è geometricamente e fisicamente simmetrico rispetto alle due mediane ed alle due bisettrici; per esempio, tale condizione si verifica banalmente se  $EI = cost$ .

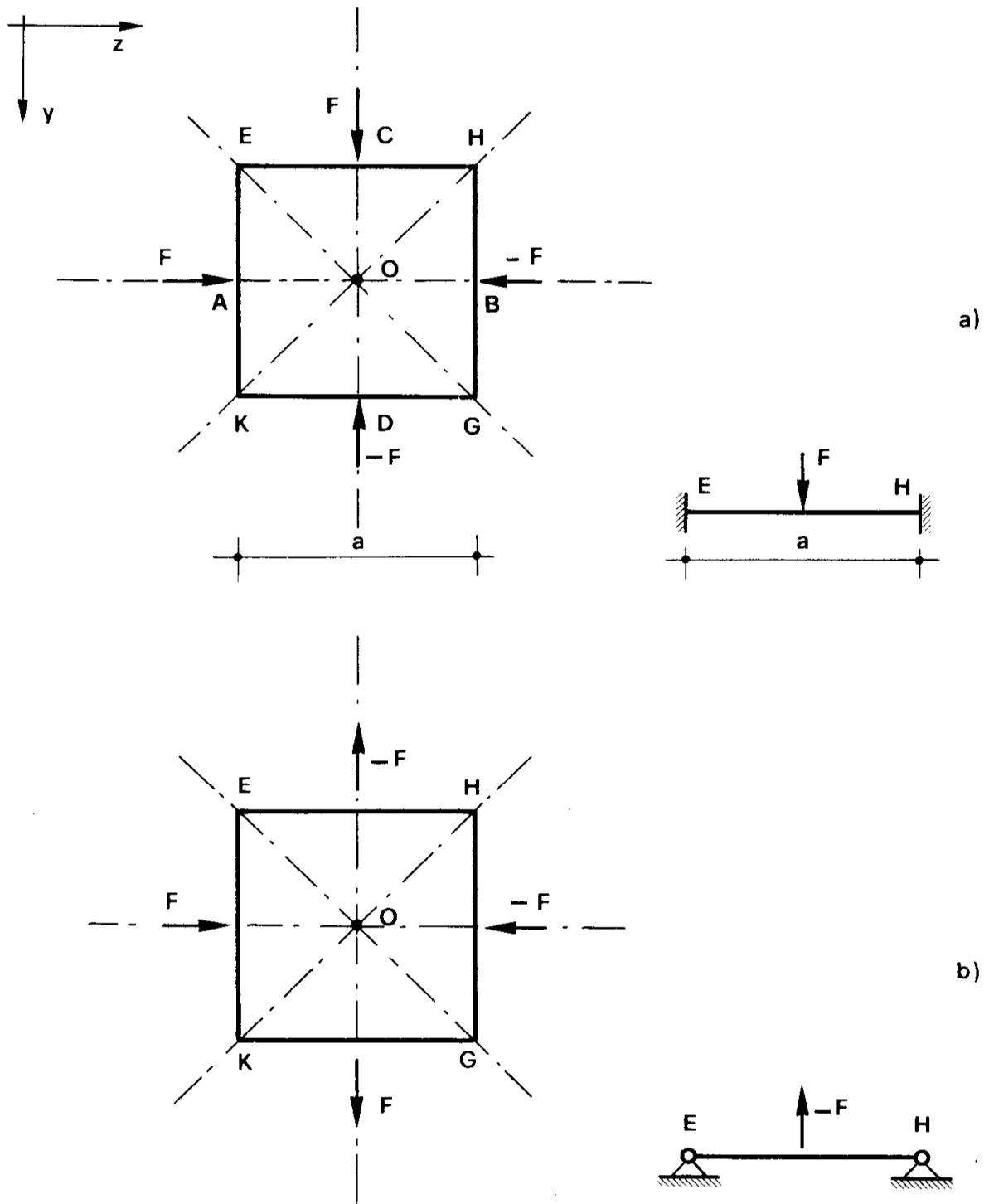


Figura 12



Il carico della fig. 12a è simmetrico rispetto alle stesse rette di simmetria della struttura, quindi, se si fissa il centro  $O$  e la direzione della mediana  $AB$ , risulta

$$\begin{aligned}v_E &= v_H \\ \varphi_E &= \varphi_H = 0 ;\end{aligned}$$

la struttura ridotta è quindi quella della fig. 12a (trave perfettamente incastrata in  $E$  ed  $H$ ).

Il carico della fig. 12 b è invece simmetrico rispetto alle mediane, antisimmetrico rispetto alle diagonali, quindi è (antisimmetria rispetto ad  $EG$ )

$$\begin{aligned}M_H &= 0 \\ N_{HE} &= N_{HG} = 0\end{aligned}$$

e (antisimmetria rispetto a  $HK$ )

$$\begin{aligned}M_E &= 0 \\ N_{EH} &= N_{EK} = 0 .\end{aligned}$$

La struttura ridotta è quindi quella della fig. 12b (trave appoggiata in  $E$  ed  $H$ ).

### Problema n. 13.

Il telaio della fig. 13a, con  $EI = cost$ , è fisicamente e geometricamente simmetrico rispetto alle due mediane; il carico è simmetrico rispetto alle stesse rette. La struttura ridotta è perciò quella della fig. 13b, una volta iperstatica.

Si scelga come struttura isostatica quella della fig. 13c, e quindi come incognita iperstatica  $X$  il momento  $M_C$ , o meglio la coppia che in  $C$  è trasmessa sulla parte  $AC$ .

Nella fig. 13d è rappresentato il diagramma dei momenti sotto le forze applicate in  $A$  e  $C$ : si è prima ottenuta la risultante  $2 - 0$  di tali forze, che si è poi scomposta secondo le rette d'azione di  $R_C$  ed  $R_A$ ; si è quindi disegnata la retta d'azione della risultante delle forze estreme in  $C$  ( $R_C + + 1 \cdot 2$ ), e si è ottenuto il punto  $H$  dove si annulla il diagramma dei momenti relativo alla parte  $AB$ .

Nella fig. 13e è rappresentata la deformata della struttura, si ha

$$\varphi_B = -\frac{Fb \cdot a}{EI} - \frac{Fa^2}{2EI} = -\frac{F}{2EI} (a^2 + 2ab)$$

$$\varphi_c^{\circ} = \varphi_B - \frac{Fb^2}{2EI} = -\frac{F}{2EI} (a^2 + 2ab + b^2).$$

Nella fig. 13f è dato il diagramma dei momenti per  $X = 1$ , nella fig. 13g la deformata; si ha

$$\varphi_B = \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_c' = \varphi_B + \frac{b}{EI} = \frac{1}{EI} (a + b).$$

L'equazione di congruenza

$$\varphi_c^{\circ} + X \varphi_c' = 0$$

porge

$$X = F \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2(a + b)}.$$

Per  $a = b$  è

$$X = Fa,$$

e risulta  $M_B = 0$  (vedi prob. 12, fig. 12b).

Per  $b = 2a$  è (fig. 13h)

$$X = \frac{3}{2} Fa$$

e quindi

$$M_C = \frac{3}{2} Fa$$

$$M_B = -\frac{1}{2} Fa$$

$$M_A = -\frac{3}{2} Fa .$$

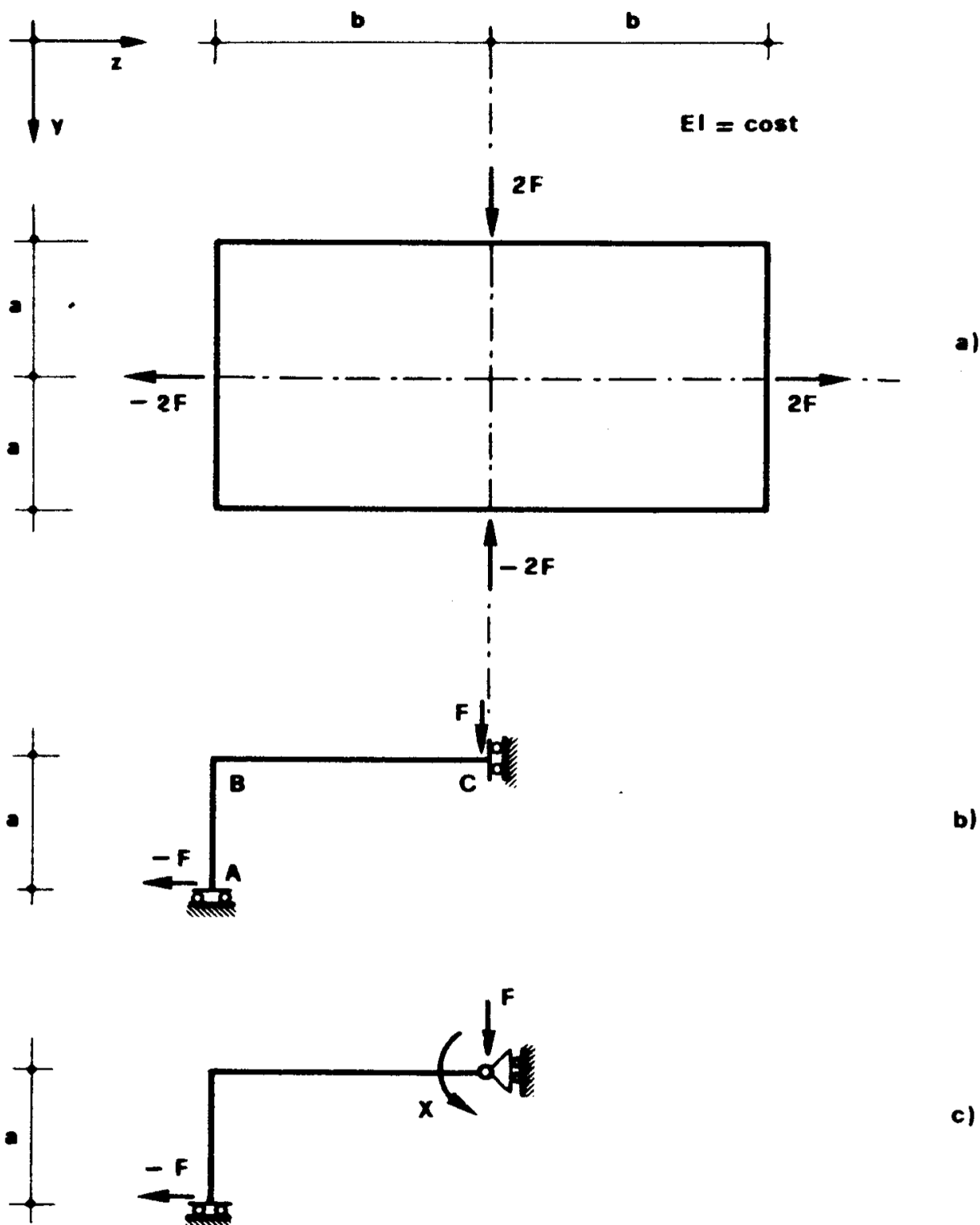


Figura 13a, b, c

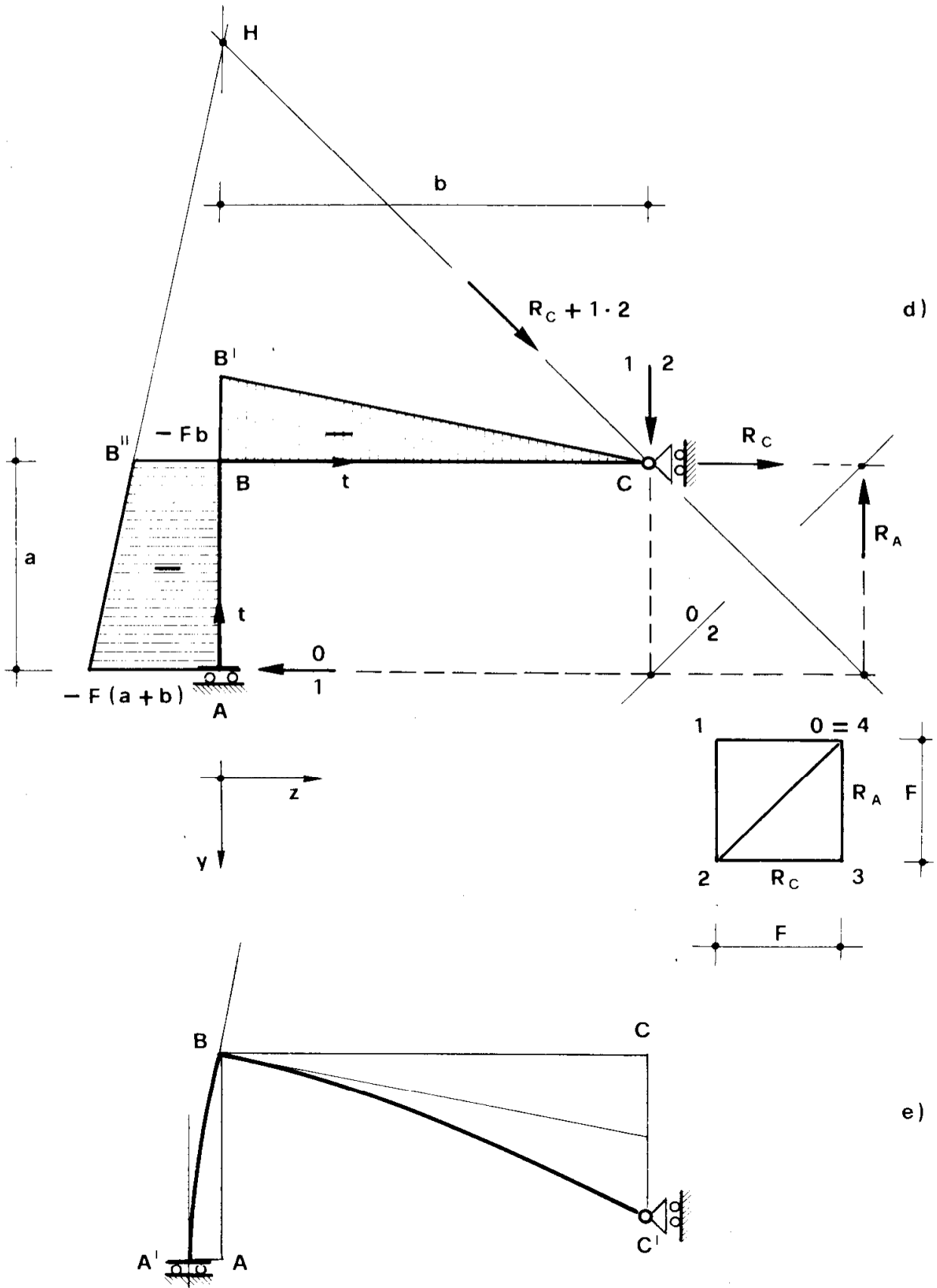
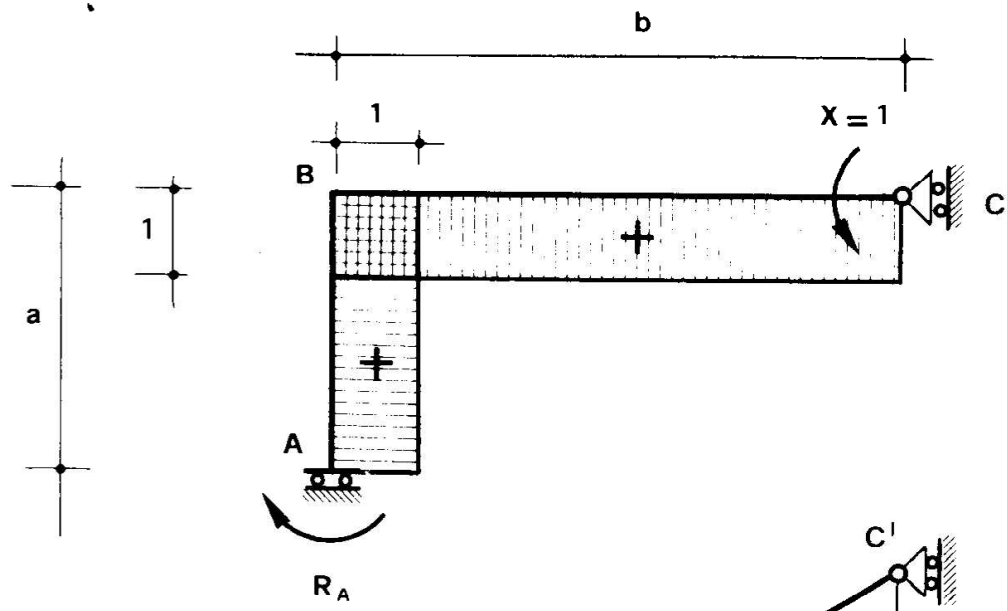
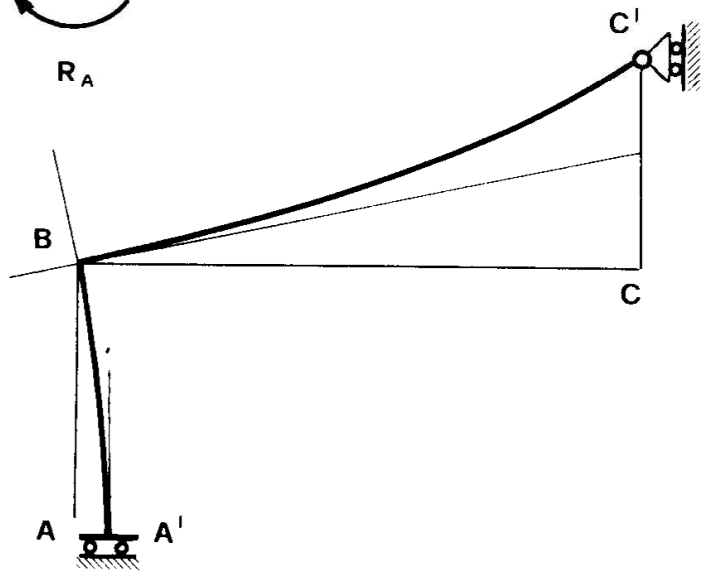


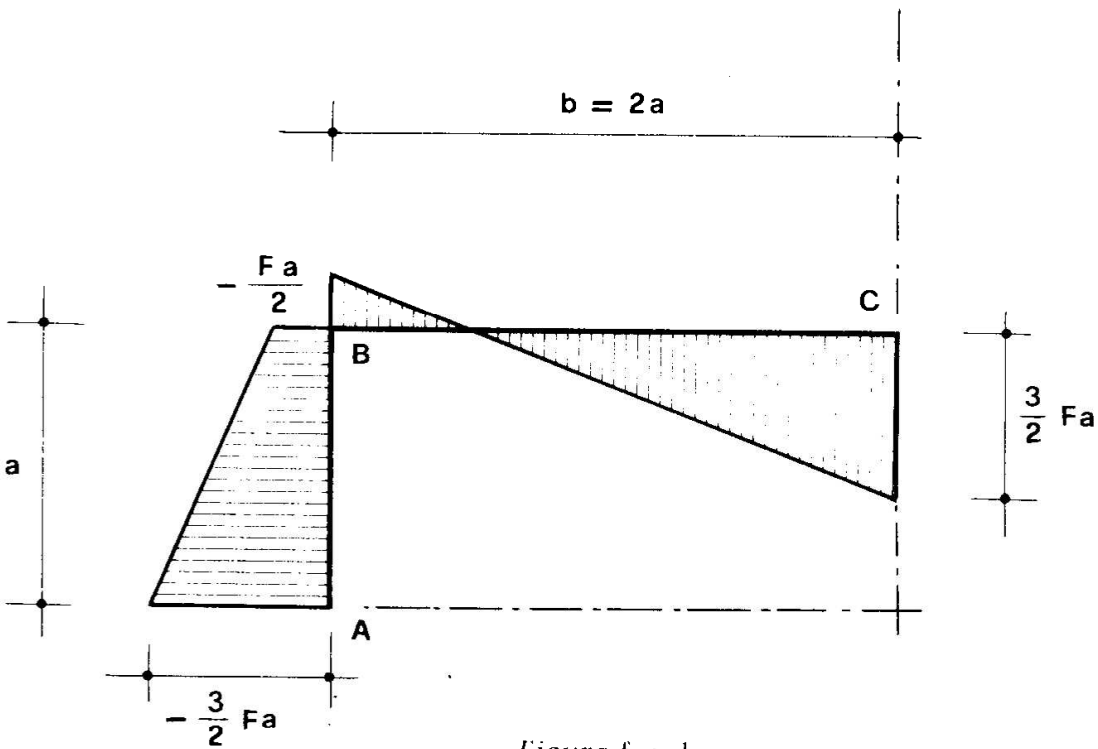
Figura 13d, e



f)



g)



h)

Figura f, g, h

Problema n. 14.

La stessa struttura della fig. 13 è risolta considerando che, per simmetria, i momenti flettenti ai quattro vertici sono uguali (il verso  $t$  si

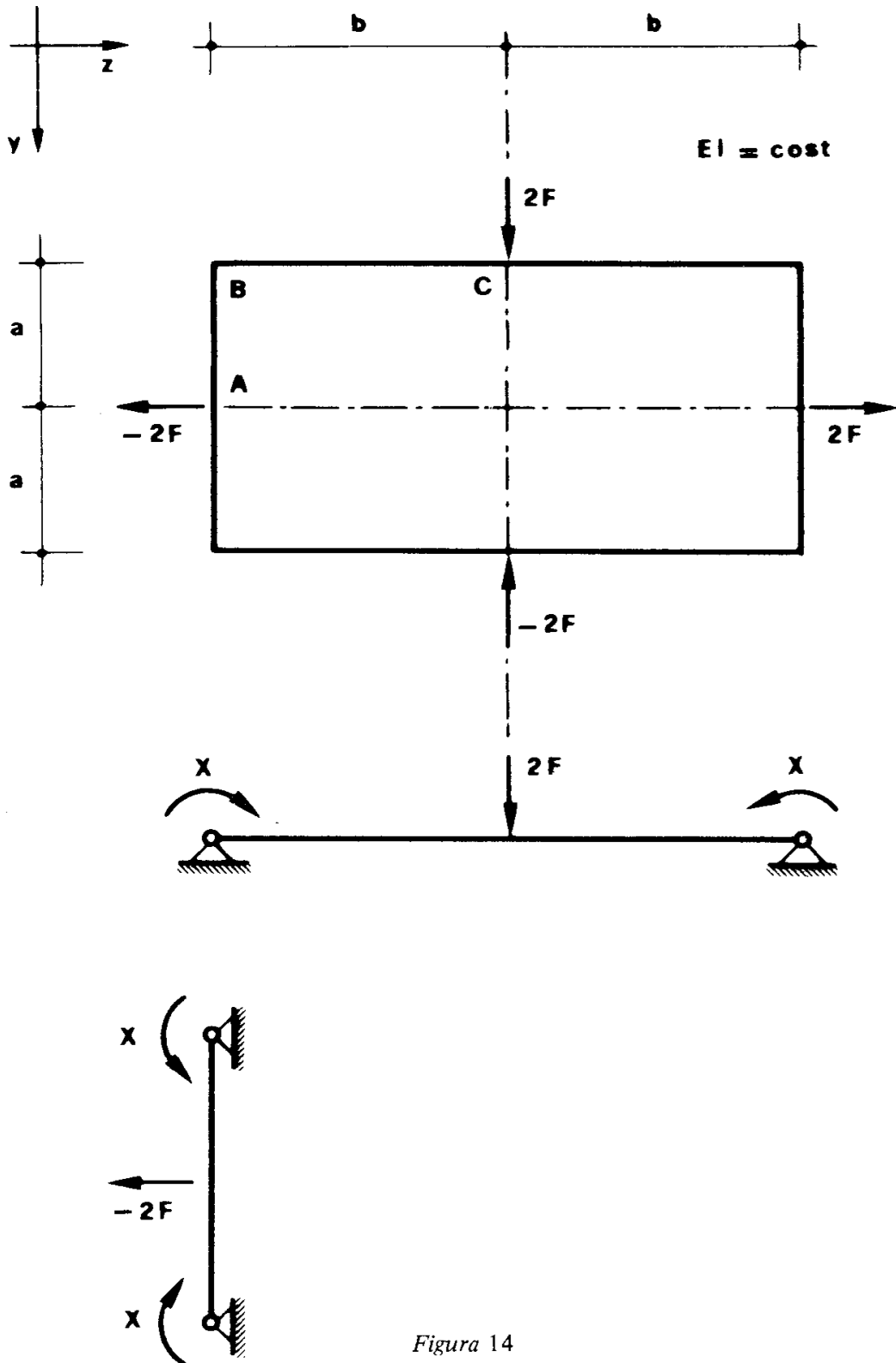


Figura 14

prende, per ogni trave rettilinea del telaio, in modo che si inseguano in senso orario; in tal modo sono positivi i momenti che tendono le fibre in-

terne del telaio). Assumendo come incognita iperstatica  $X$  tale momento, la struttura ridotta è quella della fig. 14, e l'equazione di congruenza è (cap. 1, for. 36)

$$-\frac{2F \cdot (2b)^2}{16 EI} - \frac{X \cdot 2b}{2EI} = -\frac{2F \cdot (2a)^2}{16 EI} + \frac{X \cdot 2a}{2EI}$$

da cui

$$X = -F \frac{b^2 - a^2}{2(b + a)}$$

e quindi

$$M_C = X + Fb = F \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2(a + b)}$$

$$M_A = X - Fa = -F \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2(a + b)} - M_C$$

### Problema n. 15.

Il telaio della fig. 15 a è fisicamente e geometricamente simmetrico rispetto alla verticale di mezzeria; il carico è simmetrico rispetto alla stessa verticale. Poichè in  $H$  ed  $E$  è  $T = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $w = 0$ , la struttura ridotta è quella della fig. 15 b; essa è a nodi fissi, quindi può operarsi alla Cross con un solo processo di diffusione<sup>(\*)</sup>.

Prima di passare al calcolo della rigidità si osservi che nella trave  $GL$  appoggiata agli estremi, e soggetta a due coppie  $-\mathfrak{M}$  ed  $\mathfrak{M}$  in  $G$  ed  $L$ , si ha

$$\varphi_L = -\varphi_G = \frac{\mathfrak{M}_{I_{GL}}}{2EI_{GL}} ;$$

(\*) La struttura in sé è a nodi spostabili; la simmetria del carico la rende — ma non sempre accade — a nodi fissi. E' questo un notevole vantaggio della simmetria, oltre a quello di far operare su metà struttura.

quindi nella trave  $GH$ , appoggiata in  $G$  e vincolata con bipendolo in  $H$ , una coppia  $\mathfrak{M}$  in  $G$  provoca una  $\varphi_G$  pari a

$$\frac{\mathfrak{M} l_{GL}}{2 EI_{GL}},$$

e perciò la trave  $GH$  ha rigidità pari a

$$\rho_{GH} = \frac{2 EI_{GL}}{l_{GL}} = \frac{28 \cdot 8I}{12a}$$

Si ha perciò

$$\rho_{CA} = 4 \frac{3EI}{8a} = 1,5 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{CD} = 4 \frac{12EI}{10a} = 4,8 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{CF} = 4 \frac{2EI}{6a} = 1,3 \frac{EI}{a};$$

$$\rho_{FC} = \rho_{CF} = 1,3 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{FG} = 4 \frac{8EI}{10a} = 3,2 \frac{EI}{a};$$

$$\rho_{DC} = \rho_{CD} = 4,8 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{DB} = 4 \frac{2EI}{8a} = \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{DE} = 2 \frac{12EI}{12a} = 2 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{DG} = 4 \frac{EI}{6a} = 0,6 \frac{EI}{a};$$



$$\rho_{GF} = \rho_{FG} = 3,2 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{GH} = 2 \frac{8 EI}{12 a} = 1,3 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{GD} = \rho_{DG} = 0,6 \frac{EI}{a} .$$

I coefficienti di ripartizione sono riportati nella fig. 15c.  
Le coppie d'incastro perfetto sono

$$\overline{m}_{CD} = - \overline{m}_{DC} = \frac{2q \cdot (10 a)^2}{12} = 16,67 qa^2$$

$$\overline{m}_{DE} = \frac{2q \cdot (12 a)^2}{12} = 24 qa^2$$

$$\overline{m}_{FG} = - \overline{m}_{GF} = \frac{q \cdot (10 a)^2}{12} = 8,33 qa^2$$

$$\overline{m}_{GH} = \frac{q \cdot (12 a)^2}{12} = 12 qa^2 .$$

La diffusione alla Cross è eseguita (nell'ordine *CDGF*), nella fig. 15d;  
alla fine si ottiene

$$m_{CA} = - 2,99 qa^2$$

$$m_{CD} = 6,51 qa^2$$

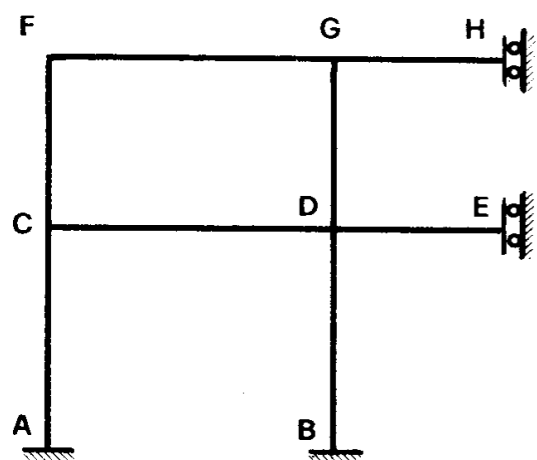
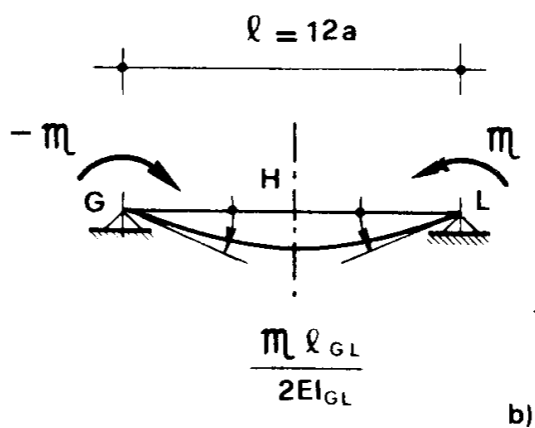
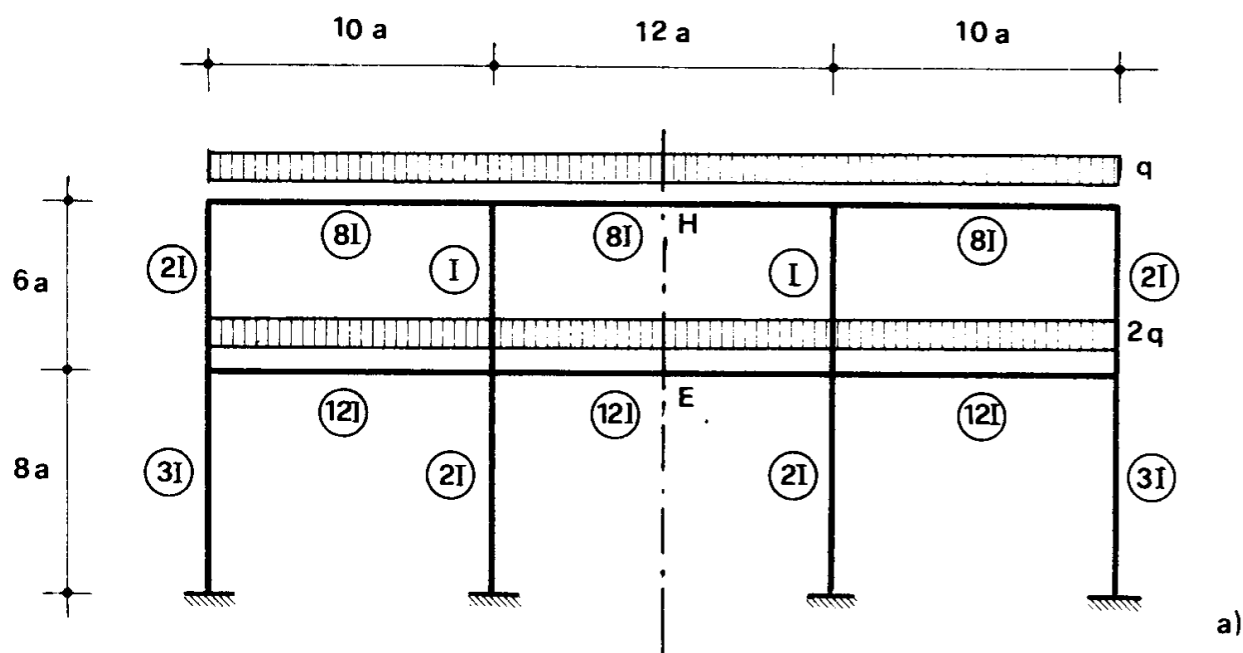
$$m_{CF} = - 3,52 qa^2 ;$$

$$m_{FC} = - 3,26 qa^2 ;$$

$$m_{FG} = 3,26 qa^2 ;$$

$$m_{DC} = - 22,77 qa^2 ;$$

$$m_{DB} = - 0,28 qa^2 ;$$



$$\begin{array}{l} \text{F} \\ \text{└─ 0,706} \\ \text{0,294} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{G} \\ \text{0,615 ─ 0,257} \\ \text{└─ 0,128} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{0,175} \\ \text{C} \\ \text{└─ 0,629} \\ \text{0,196} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{0,079} \\ \text{D} \\ \text{0,567 ─ 0,236} \\ \text{└─ 0,118} \end{array}$$

Figura 15a, b, c

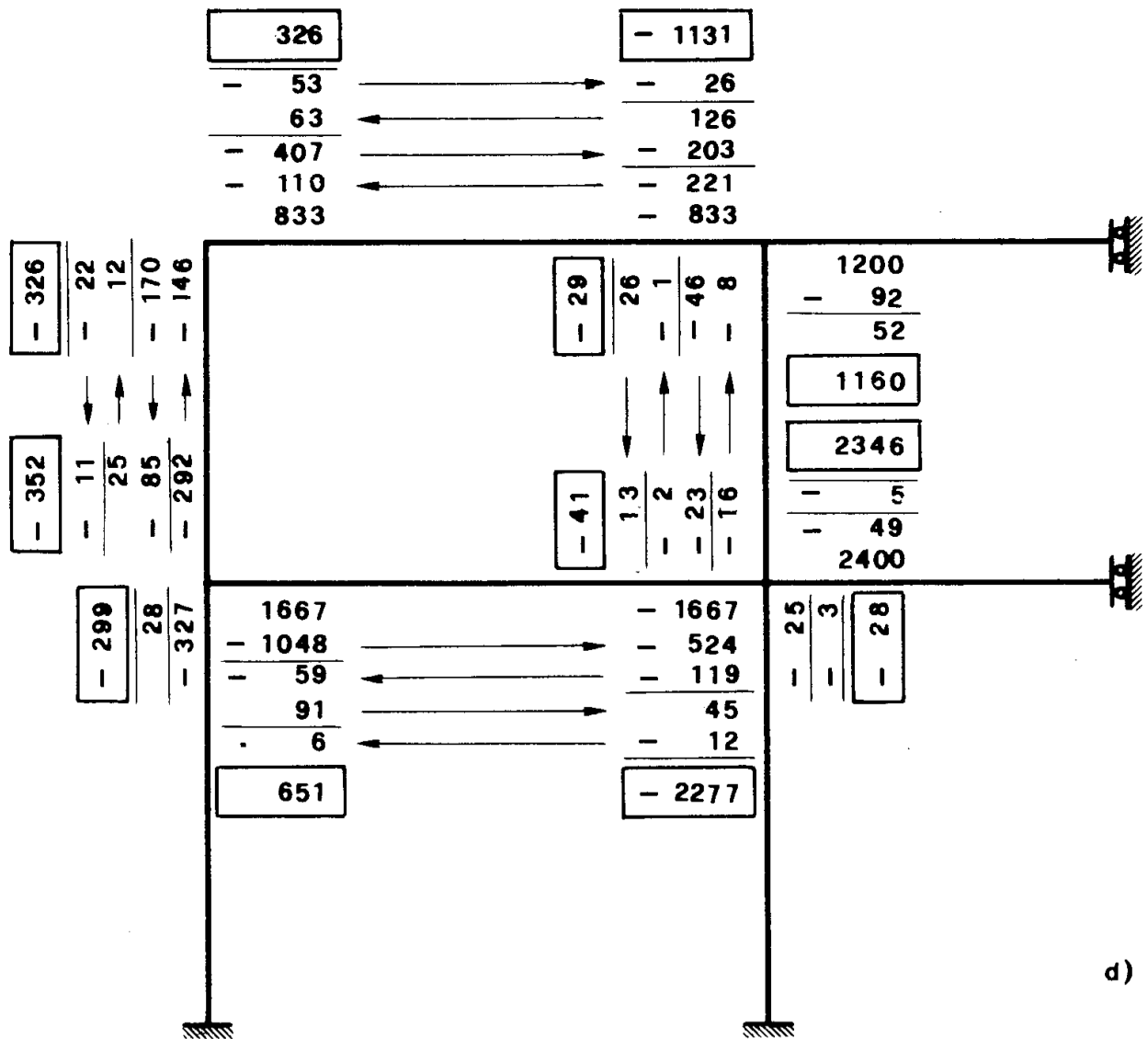


Figura 15d

$$m_{DE} = 23,46 qa^2 ;$$

$$m_{DG} = - 0,41 qa^2 ;$$

$$m_{GF} = - 11,31 qa^2 ;$$

$$m_{GD} = - 0,29 qa^2 ;$$

$$m_{GH} = 11,60 qa^2 .$$

Problema n. 16.

Il portale simmetrico della fig. 16a ( $EI = cost$ ) è antisimmetricamente

caricato, si sceglie come struttura isostatica quella ottenuta dalla ridotta sopprimendo l'appoggio, quindi l'incognita iperstatica  $X$  è la reazione dell'appoggio.

Si ha, per effetto di  $F$ ,

$$\varphi_B = -\frac{Fa^2}{2EI}$$

$$v_H^o = -\varphi_B \cdot b = \frac{Fa^2 b}{2EI}$$

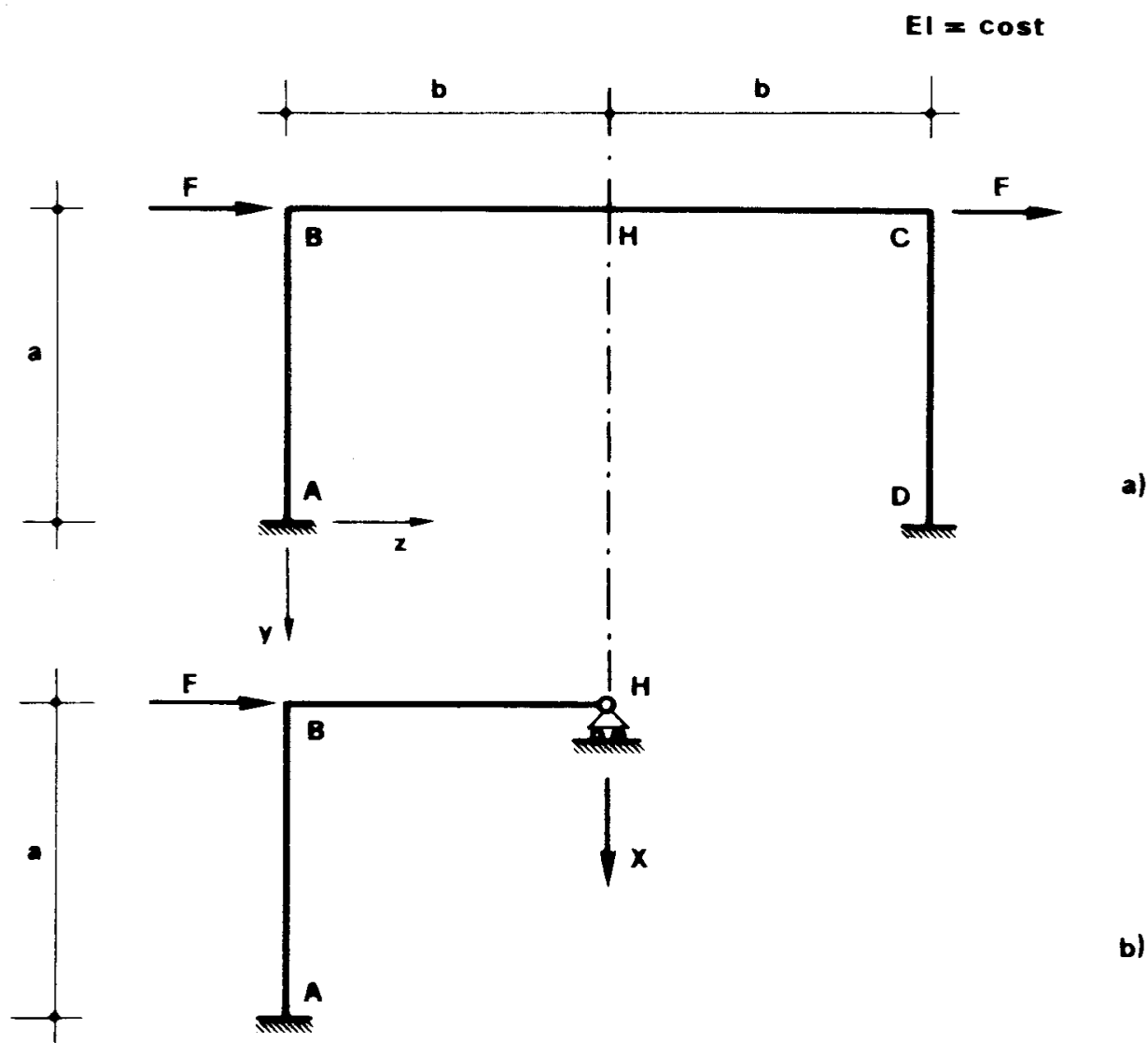


Figura 16

e, per effetto di  $X = 1$ ,

$$\varphi_B = -\frac{ba}{EI}$$

$$v'_H = -\varphi_B \cdot b + \frac{b^3}{3EI} = \frac{3ab^2 + b^3}{3EI} .$$

L'equazione di congruenza

$$v_H^0 + v'_H \cdot X = 0$$

fornisce

$$X = -\frac{3}{2} F \frac{a^2 b}{3ab^2 + b^3} ;$$

si ha perciò (l'asse  $t$  è diretto secondo  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ )

$$M_B = -Xb = \frac{3}{2} F \frac{a^2 b^2}{3ab^2 + b^3}$$

$$M_A = -Xb - Fa = -\frac{F}{2} \frac{3a^2 b^2 + 2ab^3}{3ab^2 + b^3}$$

Si osservi che per  $b \rightarrow 0$  (trave  $AB$  incastrata in  $A$  e vincolata in  $B$  con un bipendolo a scorrimento orizzontale) si ha

$$M_B \rightarrow \frac{Fa}{2}$$

$$M_A \rightarrow -\frac{Fa}{2} ;$$

per  $b \rightarrow \infty$  (trave  $AB$  incastrata in  $A$  e libera in  $B$ ) si ha invece

$$M_B \rightarrow 0$$

$$M_A \rightarrow -Fa .$$

### Problema n. 17.

Il telaio della fig. 17a è fisicamente e geometricamente simmetrico

rispetto alla retta  $BE$ ; le sollecitazioni sono antisimmetriche rispetto alla stessa retta.

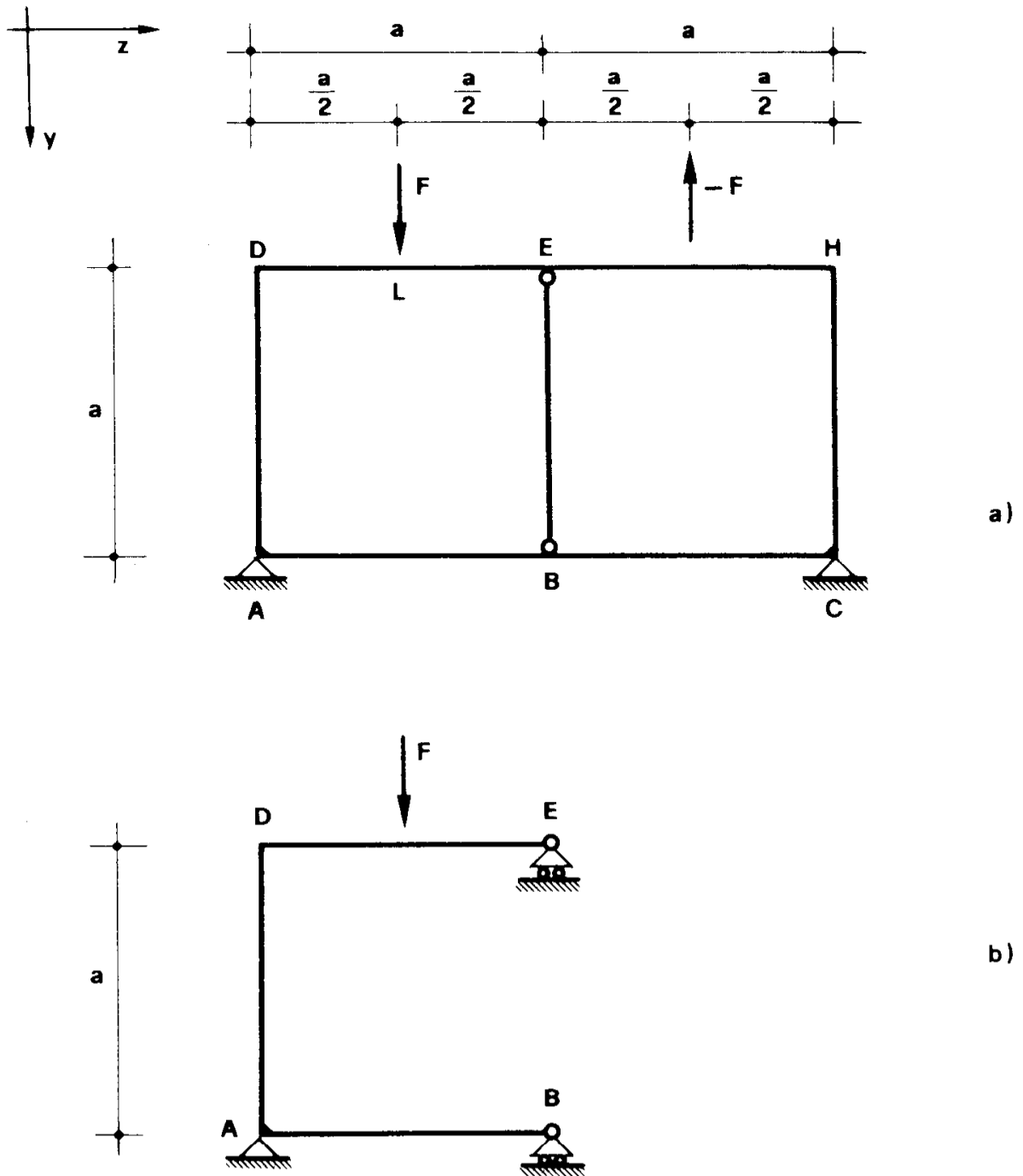


Figura 17a, b

Quindi è, per i traversi,

$$v_B = v_E = 0$$

$$M_B = M_E = 0$$

$$N_B = N_E = 0 ;$$

dalla condizione  $v_B = v_E = 0$  si trae anche

$$N_{BE} = 0 ,$$

e quindi il pendolo  $BE$  è praticamente inesistente. La struttura ridotta (fig. 17b) è una volta iperstatica; si sceglie come incognita iperstatica la reazione dell'appoggio in  $E$ . Per effetto della  $F$  si ha (fig. 17c)

$$\begin{aligned} \varphi_A &= -\frac{Fa}{2} \frac{a}{3EI} = -\frac{Fa^2}{6EI} \\ \varphi_D &= \varphi_A - \frac{Fa}{2} \frac{a}{EI} = -\frac{2}{3} \frac{Fa^2}{EI} \\ \varphi_L &= \varphi_D - \frac{F}{2EI} \frac{a^2}{2} = -\frac{19}{24} \frac{Fa^2}{EI} \\ v_L &= -\varphi_D \frac{a}{2} + \frac{F}{3EI} \frac{a^3}{2} = \frac{3}{8} \frac{Fa^3}{EI} \\ v_E^o &= -\varphi_L \frac{a}{2} + v_L = \frac{37}{48} \frac{Fa^3}{EI} \end{aligned}$$

Per effetto di  $X = 1$  si ha (fig. 17d)

$$\begin{aligned} \varphi_A &= -a \frac{a}{3EI} = -\frac{a^2}{3EI} \\ \varphi_D &= \varphi_A - a \frac{a}{EI} = -\frac{4}{3} \frac{a^2}{EI} \\ v_E' &= -\varphi_D a + \frac{a^3}{3EI} = \frac{5}{3} \frac{a^3}{EI} . \end{aligned}$$

La relazione di congruenza

$$v_E^o + X v_E' = 0$$

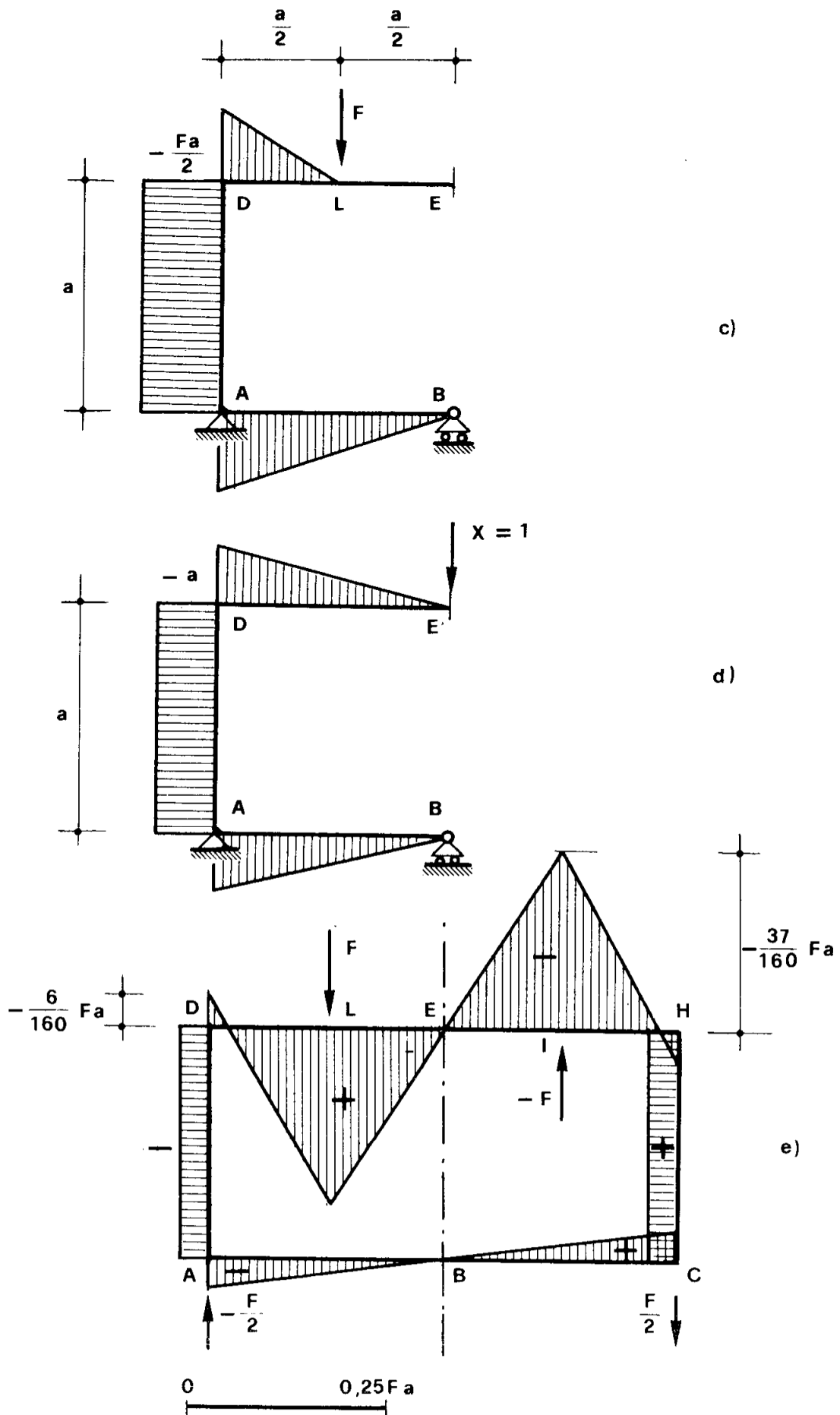


Figura 17b, c, d, e



fornisce

$$X = -\frac{37}{80} F .$$

Nella fig. 17 è disegnato il diagramma dei momenti, per definirne i segni, si assume che il verso di  $t$  nelle quattro travi corrisponde al verso orario lungo il telaio (momento positivo se tende le fibre interne). E' così

$$M_D = - Xa - F \frac{a}{2} = -\frac{3}{80} Fa$$

$$M_L = - X \frac{a}{2} = \frac{37}{160} Fa ;$$

si verifica che

$$M_L - \frac{M_D}{2} = 0,25 Fa .$$

pari all'ordinata della superficie semplice dei momenti su  $DE$ .

E' poi

$$M_A = M_D$$

$$M_C = - M_A$$

$$M_H = - M_D$$

$$M_I = - M_L .$$

### Problema n. 18.

Il telaio della fig. 18a è geometricamente e fisicamente simmetrico rispetto alla retta  $BE$ ; le sollecitazioni sono antisimmetriche. Per definire il segno del momento flettente si adottano i versi di  $t$  che appaiono nella stessa fig. 18a. Il momento di inerzia è lo stesso per tutte le travi del telaio, e pari ad  $I$ ;  $E$  è costante.

Il ritto  $BE$  può, senza alterare nulla, essere sostituito da due ritti ad esso paralleli, vicinissimi, e simmetrici rispetto alla retta  $BE$ , purchè tali ritti abbiano ciascuno momento d'inerzia  $\frac{I}{2}$ , pari cioè alla metà del

momento d'inerzia di  $BE$ ; infatti, assegnando a ciascuno dei due ritti fittizi sollecitazioni pari alla metà di quelle (interne, ed eventualmente esterne) che competono al ritto reale, gli spostamenti dei due ritti fittizi coincidono con quelli del ritto reale<sup>(\*)</sup>.

La struttura ridotta è perciò quella della fig. 18b. Si assumono come incognite iperstatiche  $X_1 X_2 X_3$  rispettivamente i momenti in  $D$ ,  $E$  ed  $A$ ; quindi la struttura isostatica da considerare è quella della fig. 18c.

Le rotazioni relative in  $D$ ,  $E$  ed  $A$  saranno calcolate considerandole come distorsioni; quindi esse sono positive se le caratteristiche (momenti flettenti) positive compiono per esse lavoro positivo, e cioè, ancora, se camminando nel verso di  $t$  si vede la sezione (dalla parte delle  $t$  positive)

Per effetto di  $F$  è (fig. 18 c)

$$D\varphi_D^\circ = \frac{Fa^2}{16 EI}$$

$$D\varphi_E^\circ = \frac{Fa^2}{16 EI}$$

$$D\varphi_A^\circ = 0 .$$

Per effetto di  $X_1 = 1$  è (fig. 18d)

$$\varphi_{AB} = - \frac{a}{6 EI}$$

$$\varphi_B = \frac{a}{3 EI}$$

$$\varphi_{EB} = \varphi_B + \frac{1}{a} \frac{a^2}{2E \cdot 0,5 l} = \frac{4}{3} \frac{a}{EI}$$

---

(\*) È questo un caso particolare di una prassi generale, che si segue quando in una struttura simmetrica, soggetta a sollecitazioni applicate simmetriche o antisimmetriche, esiste una trave sull'asse di simmetria. In tal caso la trave è sostituita da altre due, in cui, ad ogni ascissa, il prodotto  $EI$  e quello  $EA$  sono dimezzati; così pure sono dimezzati i carichi eventualmente applicati sulla trave. È chiaro che, se le sollecitazioni applicate sono simmetriche, interessa solo dimezzare  $EA$ , se sono antisimmetriche interessa invece solo dimezzare  $EI$ . È altresì chiaro che le sollecitazioni interne nelle due travi vanno sommate, per ottenere alla fine quelle nella trave reale.

$$\varphi_{ED} = \frac{1}{6} \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_{DE} = -\frac{1}{3} \frac{a}{EI}$$

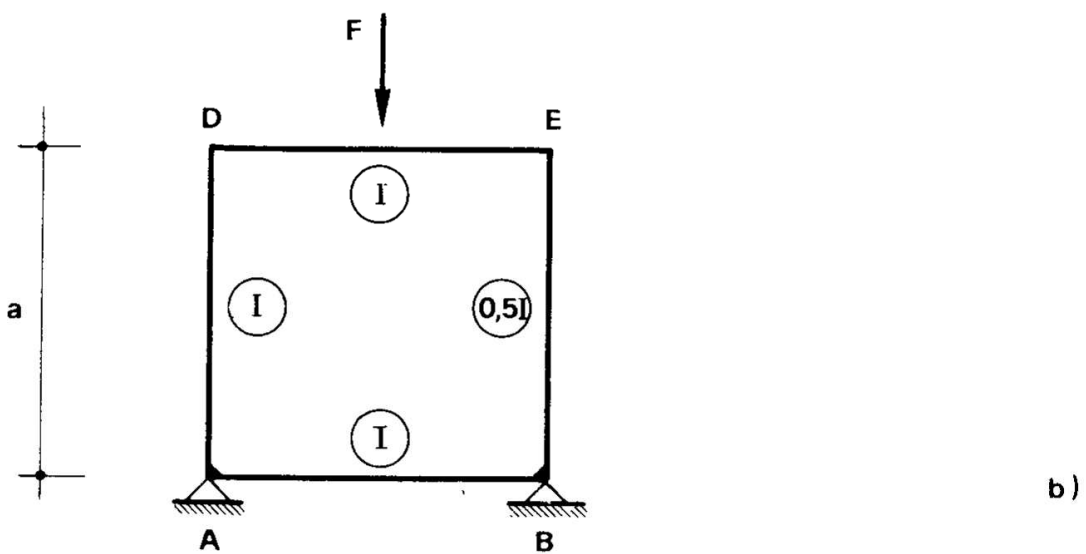
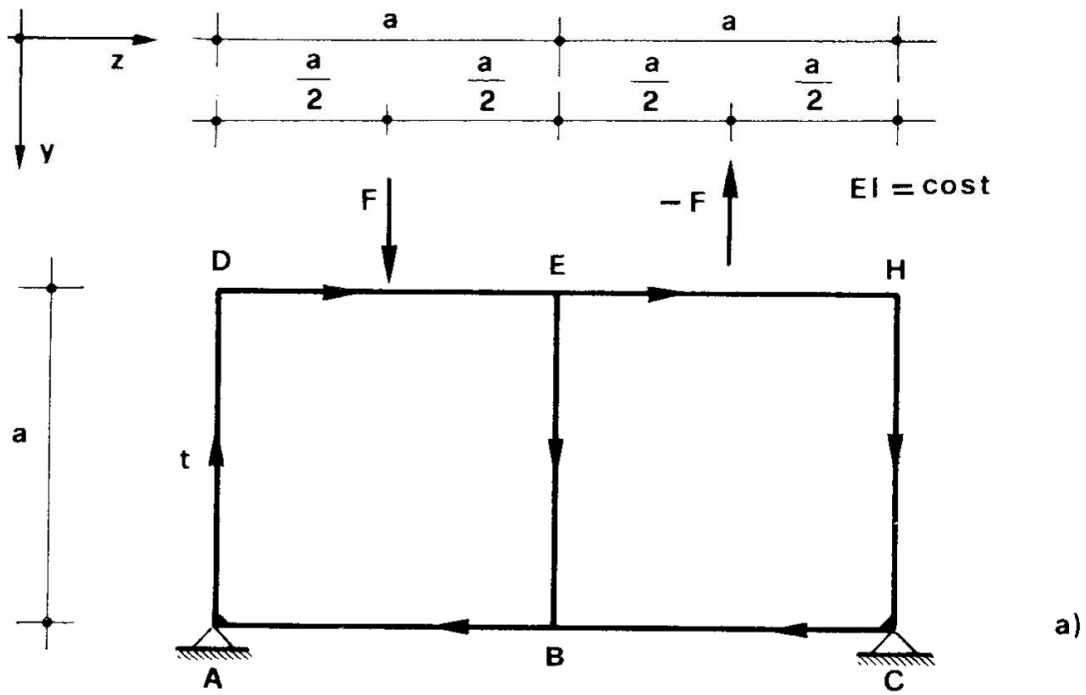
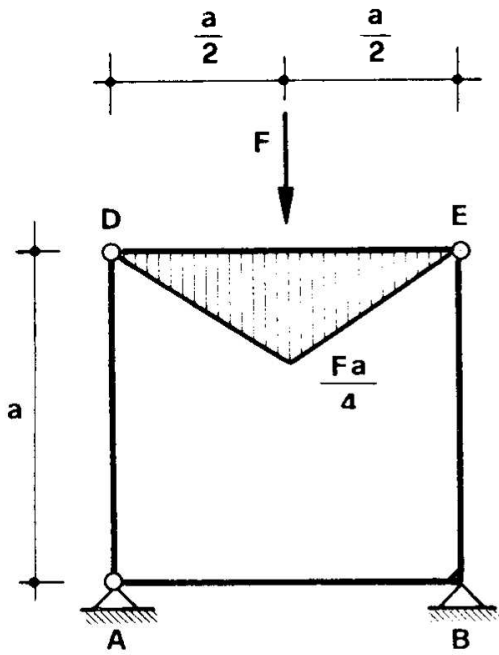
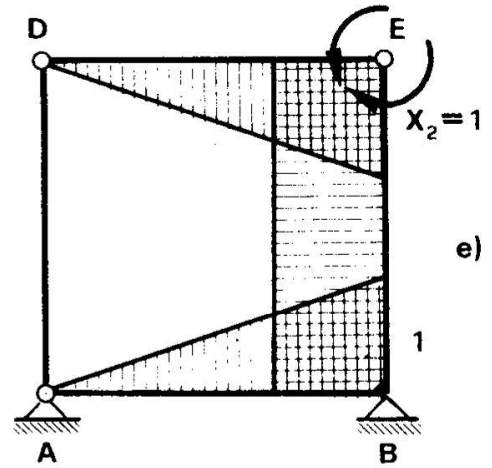


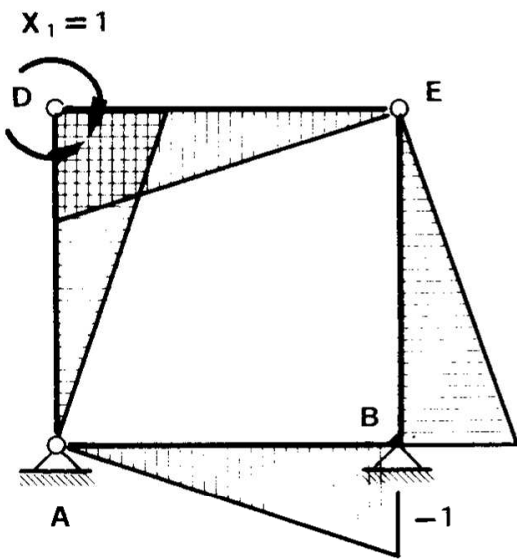
Figura 18a, b



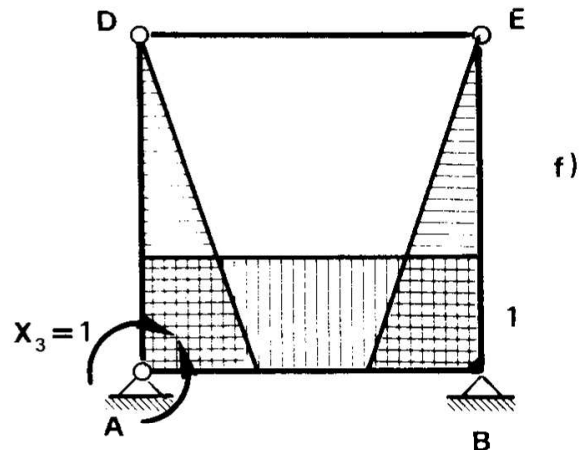
c)



e)



d)



f)

Figura 18c, d, e, f

$$w_E = -\varphi_B a - \frac{1}{a} \frac{a^3}{3E \cdot 0,5 I} = -\frac{a^2}{EI}$$

$$\varphi_{DA} = -\frac{w_E}{a} + \frac{a}{3EI} = \frac{4}{3} \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_{AD} = -\frac{w_E}{a} - \frac{a}{6EI} = \frac{5}{6} \frac{a}{EI}$$

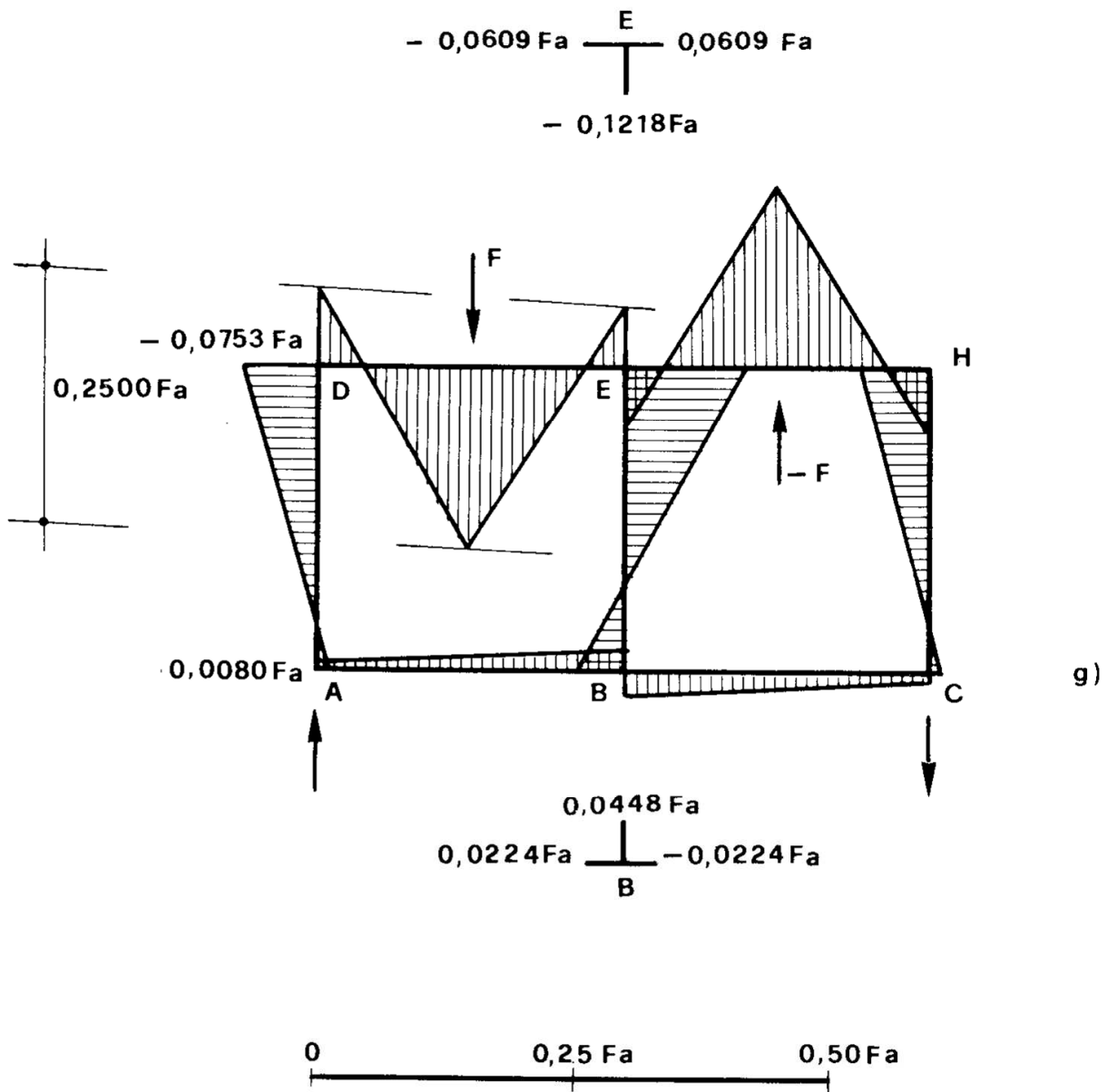


Figura 18g

e quindi

$$D\varphi'_D = \varphi_{DA} - \varphi_{DE} = \frac{5}{3} \frac{a}{EI}$$

$$D\varphi'_E = \varphi_{ED} - \varphi_{EB} = -\frac{7}{6} \frac{a}{EI}$$

$$D\varphi'_A = \varphi_{AB} - \varphi_{AD} = -\frac{a}{EI}$$

Per effetto di  $X_2 = 1$  è fig. 18e)

$$\varphi_{AB} = \frac{1}{6} \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_B = -\frac{1}{3} \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_{EB} = \varphi_B - \frac{1}{a} \frac{a}{E \cdot 0,5 I} = -\frac{7}{3} \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_{ED} = \frac{1}{3} \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_{DE} = -\frac{1}{6} \frac{a}{EI}$$

$$w_E = -\varphi_B a + \frac{a^2}{2E \cdot 0,5 I} = \frac{4}{3} \frac{a^2}{EI}$$

$$\varphi_{DA} = -\frac{w_E}{a} = -\frac{4}{3} \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_{AD} = -\frac{w_E}{a} = -\frac{4}{3} \frac{a}{EI}$$

e quindi

$$D\varphi_D'' = \varphi_{DA} - \varphi_{DE} = -\frac{7}{6} \frac{a}{EI}$$

$$D\varphi_E'' = \varphi_{ED} - \varphi_{EB} = \frac{8}{3} \frac{a}{EI}$$

$$D\varphi_A'' = \varphi_{AB} - \varphi_{AD} = \frac{3}{2} \frac{a}{EI}$$

Per effetto di  $X_3 = 1$  (fig. 18f) si ha

$$\varphi_{AB} = \frac{1}{2} \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_B = -\frac{1}{2} \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_{EB} = \varphi_B - \frac{a^2}{2E \cdot 0,5I} = -\frac{3}{2} \frac{a}{EI}$$

$$\varphi_{ED} = \varphi_{DE} = 0$$

$$w_E = -\varphi_B a + \frac{a^3}{3E \cdot 0,5I} = \frac{7}{6} \frac{a^2}{EI}$$

$$\varphi_{DA} = -\frac{w_E}{a} + \frac{a}{6EI} = -\frac{a}{EI}$$

$$\varphi_{AD} = -\frac{w_E}{a} - \frac{a}{3EI} = -\frac{3}{2} \frac{a}{EI}$$

e quindi

$$D\varphi_D'' = \varphi_{DA} - \varphi_{DE} = - \frac{a}{EI}$$

$$D\varphi_E'' = \varphi_{ED} - \varphi_{EB} = \frac{3}{2} \frac{a}{EI}$$

$$D\varphi_A''' = \varphi_{AB} - \varphi_{AD} = 2 \frac{a}{EI} .$$

Le tre condizioni, di congruenza in  $D$ ,  $E$  ed  $A$ , esprimenti l'annullarsi delle rotazioni relative, sono

$$D\varphi_D^{\circ} + X_1 D\varphi_D' + X_2 D\varphi_D'' + X_3 D\varphi_D''' = 0$$

$$D\varphi_E^{\circ} + X_1 D\varphi_E' + X_2 D\varphi_E'' + X_3 D\varphi_E''' = 0$$

$$D\varphi_A^{\circ} + X_1 D\varphi_A' + X_2 D\varphi_A'' + X_3 D\varphi_A''' = 0 ;$$

esplicitando, e dividendo per  $\frac{a}{EI}$ , si ha

$$\frac{5}{3} X_1 - \frac{7}{6} X_2 - X_3 = - \frac{Fa}{16}$$

$$- \frac{7}{6} X_1 + \frac{8}{3} X_2 + \frac{3}{2} X_3 = - \frac{Fa}{16}$$

$$- X_1 + \frac{3}{2} X_2 + 2 X_3 = 0$$

la cui soluzione è

$$X_1 = M_D = - \frac{47}{8 \cdot 78} Fa = - 0,0753 Fa$$

$$X_2 = M_{ED} = - \frac{38}{8 \cdot 78} Fa = - 0,0609 Fa$$



$$X_3 = M_A = \frac{5}{8 \cdot 78} Fa = 0,0080 Fa .$$

Si ha poi

$$M_{BA} = - X_1 + X_2 + X_3 = 0,0224 Fa .$$

Così pure è

$$w_E = 0,00343 \frac{Fa^3}{EI} .$$

Nella fig. 18g sono disegnati i momenti flettenti lungo tutto il telaio.

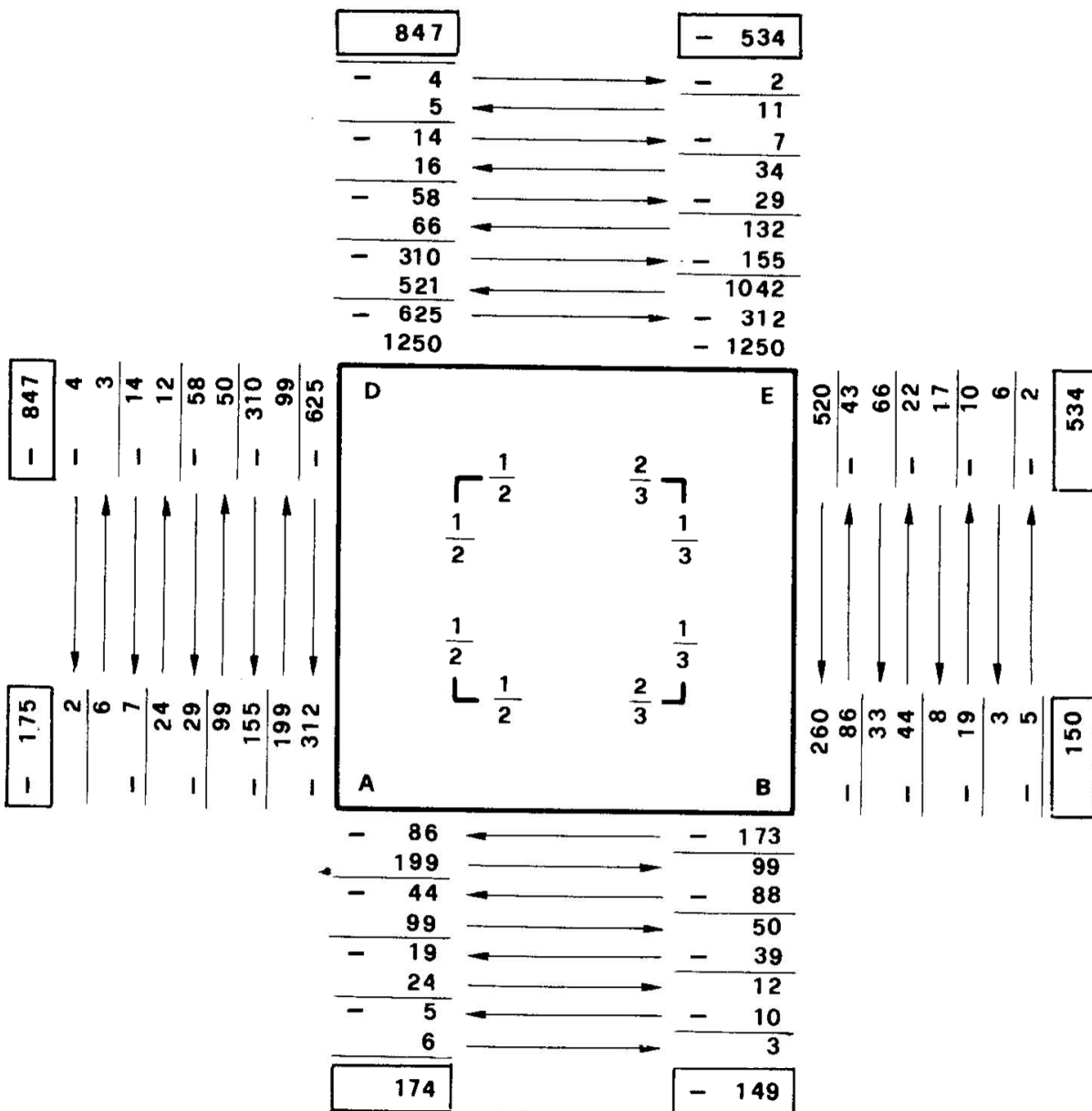


Figura 19a

## Problema n. 19.

La stessa struttura del problema precedente si risolve con il metodo di Cross. Si opera sullo schema della fig. 18b; coefficienti di ripartizione sono indicati nella fig. 19a; le coppie di incastro perfetto sono

$$\overline{m}_{DE} = \frac{Fa}{8} = 0,1250 Fa$$

$$\overline{m}_{ED} = -\frac{Fa}{8} = -0,1250 Fa .$$

Le diffusioni alla Cross, nell'ipotesi di nodi fissi (e ciò è ottenuto ponendo in  $E$  un appoggio fittizio a piano di scorrimento verticale) sono riportate nella fig. 19a; l'ordine dei nodi è  $DEBA$ . La non perfetta verifica dell'equilibrio alla rotazione in  $A$  e  $B$  è dovuta al fatto che ci si è

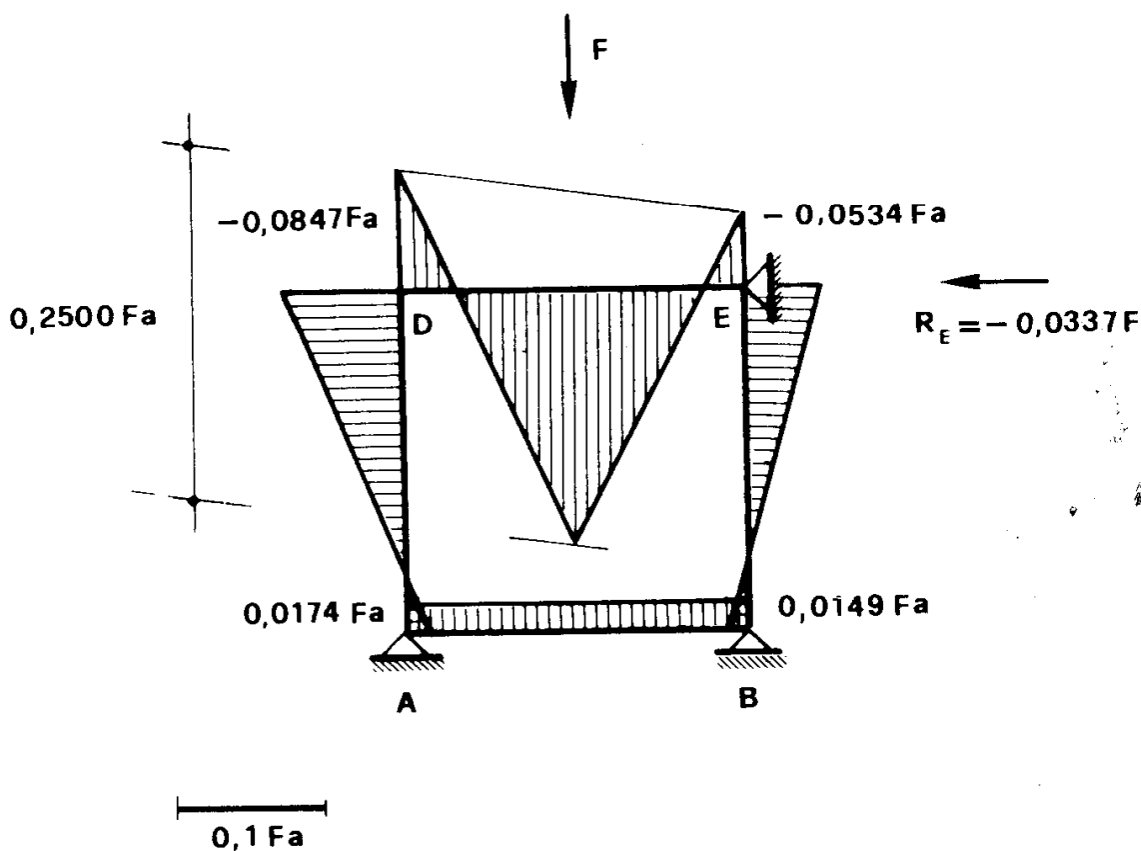


Figura 19b

volutamente fermati alla quarta cifra significativa, e che in  $A$  e in  $D$  le coppie vanno comunque ripartite in parti uguali.

Risulta così (fig. 19b)

$$T_{AD} = \frac{M_D - M_A}{a} = - 0,1021 F$$

$$T_{BE} = \frac{M_B - M_E}{a} = 0,0684 F$$

e quindi, dalla

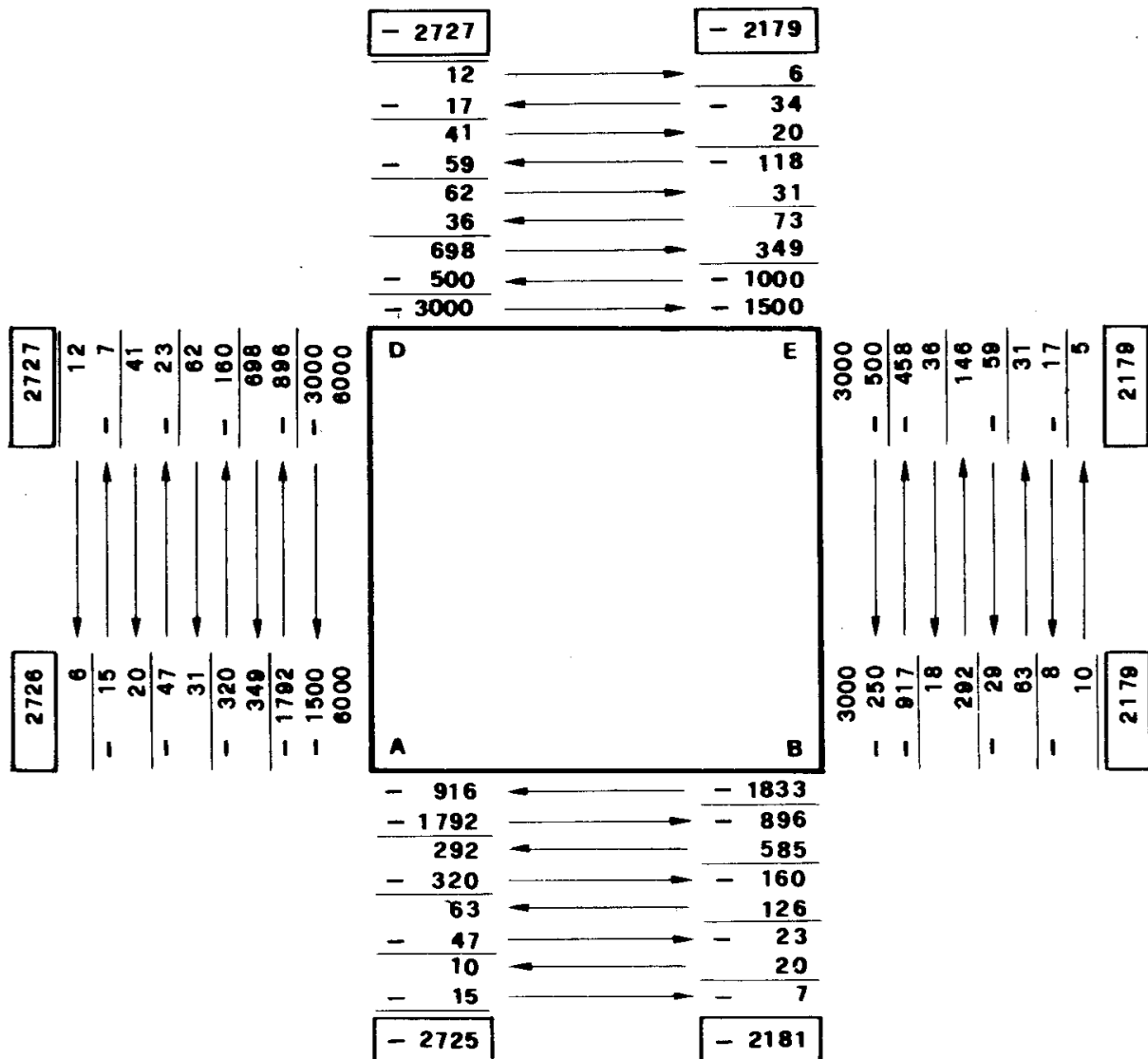


Figura 19c

$$R_E - T_{AD} - T_{BE} = 0 ,$$

si ha

$$R_E = - 0,0337 F .$$

Si imprime poi all'appoggio fittizio un cedimento  $\Delta_E$  unitario positivo: vengono fuori le coppie di incastro perfetto

$$\bar{m}_{AB} = \bar{m}_{DA} = \frac{6EI}{a^2}$$

$$\bar{m}_{BE} = \bar{m}_{EB} = \frac{3EI}{a^2}$$

La diffusione alla Cross è riportata nella fig. 19c; i momenti finali nella fig. 19d. Risulta

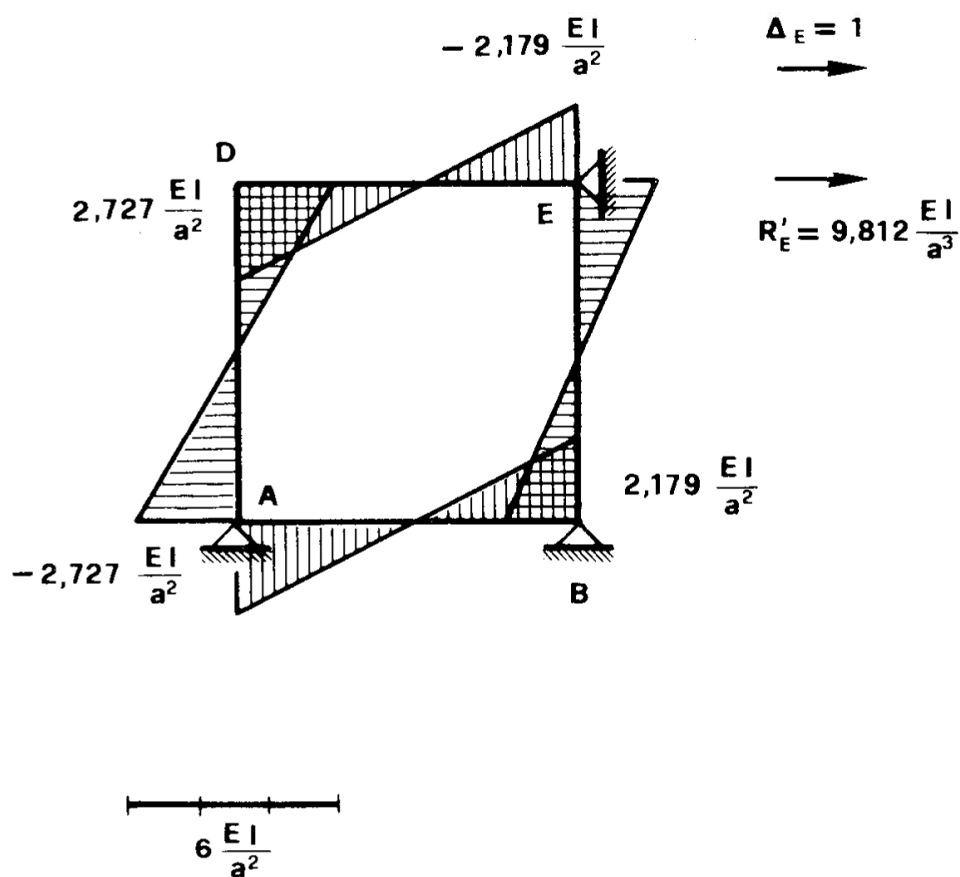


Figura 19d

$$T_{AD} = 5,454 \frac{EI}{a^3}$$

$$T_{BE} = 4,358 \frac{EI}{a^3}$$

e quindi

$$R'_E = 9,812 \frac{EI}{a^3} .$$

Dalla relazione

$$R_E + \Delta_E R'_E = 0$$

si ha il valore di  $\Delta_E$  che annulla la reazione dell'appoggio fittizio:

$$\Delta_E = - \frac{R_E}{R'_E} = 0,00343 \frac{Fa^3}{EI} .$$

E' interessante osservare che tale valore coincide con il valore reale di  $w_E$  calcolato nel problema precedente.

La somma dei momenti della fig. 19b, e di quelli della fig. 19d moltiplicati per  $\Delta_E$ , fornisce il diagramma dei momenti reali, già riportato nella fig. 18g.