

CAPITOLO TERZO

IL METODO DEL RILASSAMENTO

Premessa.

In questo insieme di problemi sono trattati alcuni esempi del metodo di Southwell, o dei successivi rilassamenti, più noto nell'ambito delle travi come metodo di Hardy Cross.

Si tratta di operare non più su strutture rese isostatiche, come si fa quando si scrivono le classiche equazioni di congruenza, ma su strutture rese più iperstatiche delle reali, mediante l'aggiunta di opportuni vincoli. E' evidente che occorre ricondursi a strutture il cui quadro tensionale sia già noto, per esempio a un insieme di travi perfettamente incastrate agli estremi. Per tornare alla situazione reale basta imprimere ai vincoli fittizi un insieme di distorsioni (cedimenti) tale da annullare le reazioni dei vincoli stessi; il metodo di Southwell opera, in questo stadio, per successive approssimazioni, annullando le reazioni dei vincoli una alla volta, con un certo numero di cicli. Annullare la reazione R_i di un vincolo equivale a rimuovere il vincolo, facendo agire sulla struttura una forza uguale e contraria alla reazione prima esercitata dal vincolo stesso. La situazione reale si ottiene — è valido il principio di sovrapposizione degli effetti — sommando quella relativa alla struttura ipervincolata soggetta alle forze applicate, e quella relativa alla struttura ipervincolata soggetta ai cedimenti (e cioè alla struttura reale soggetta alle $-R_i$).

Il metodo di Hardy Cross si suppone noto; si indicano con soprassegno le *coppie di incastro perfetto*, con un asterisco quelle risultanti da una ripartizione, con due asterischi quelle cosiddette *trasmesse*; si indicano poi con ρ_{ih} il rapporto tra la coppia applicata all'estremo i della trave ih appoggiata in i e perfettamente incastrata in h , e la rotazione φ_i da essa provocata (*rigidità* in i della trave ih); e con τ_{ih} e t_{ih} i coefficienti *di ripartizione* in i e *di trasmissione* da i ad h . Per una trave con $EI = cost$ è (cap. 2, for. 6), nell'ipotesi di incastro ai due estremi,

$$\rho = \frac{4 EI}{l} \quad (1)$$

$$t = \frac{1}{2} . \quad (2)$$

Problema n. 1.

La trave della fig. 1a è incastrata perfettamente in A e appoggiata in B . Si aggiunge in B un vincolo perfetto alla rotazione (un *morsetto*, come spesso si usa dire), con questa operazione la trave diviene perfettamente incastrata in A e B (fig. 1b), e risulta

$$\bar{m}_A = \frac{q l^2}{12}$$

$$\bar{m}_B = -\frac{q l^2}{12}$$

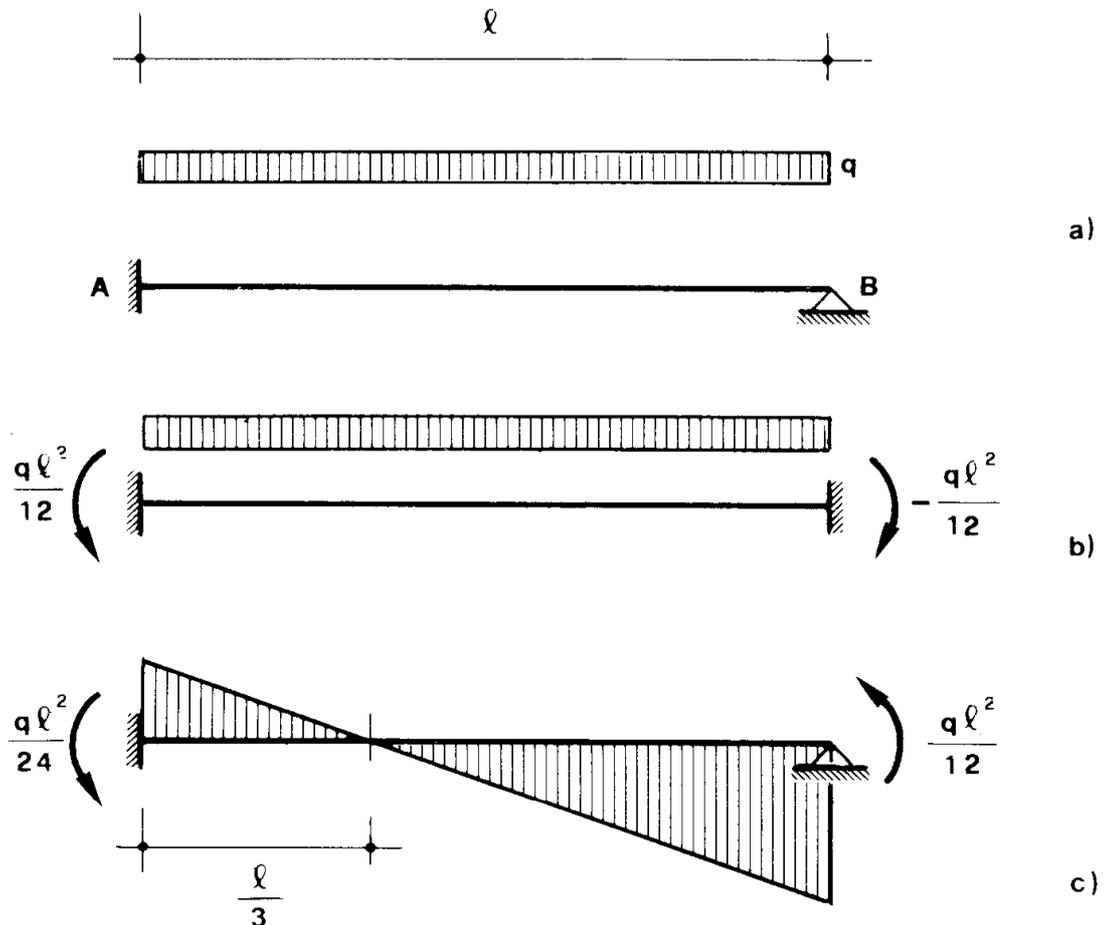


Figura 1

Si rimuove poi il morsetto in B , facendo agire in B sulla trave la coppia $-\bar{m}_B = \frac{q l^2}{12}$. Poichè l'elemento che concorre in B è unico, non c'è

da fare ripartizione, e quindi

$$\mathfrak{m}_B^* = - \bar{\mathfrak{m}}_B = \frac{ql^2}{12} .$$

Si ha poi, per trasmissione,

$$\mathfrak{m}_A^{**} = \frac{\mathfrak{m}_B^*}{2} = \frac{ql^2}{24} .$$

Qui ci si ferma, infatti A è un incastro reale perfetto, e non un morsetto fittizio.

In definitiva si scrive

$$\mathfrak{m}_A = \bar{\mathfrak{m}}_A + \mathfrak{m}_A^{**} = \frac{ql^2}{8}$$

$$\mathfrak{m}_B = \bar{\mathfrak{m}}_B + \mathfrak{m}_B^* = 0 .$$

Problema n. 2.

La trave della fig. 2, su due luci a e $2a$, presenta $EI = cost$; un carico q uniforme grava su tutta la struttura.

Si risolva prima con il procedimento della congruenza, assumendo come struttura isostatica le due travi appoggiate AB e BC . Si ha così

$$\varphi_B^s = \varphi_B^d$$

e cioè

$$\frac{qa^3}{24EI} + \frac{M_B a}{3EI} = - \frac{q(2a)^3}{24EI} - \frac{M_B 2a}{3EI}$$

da cui

$$M_B = - \frac{3}{8} qa^2 . \quad (3)$$

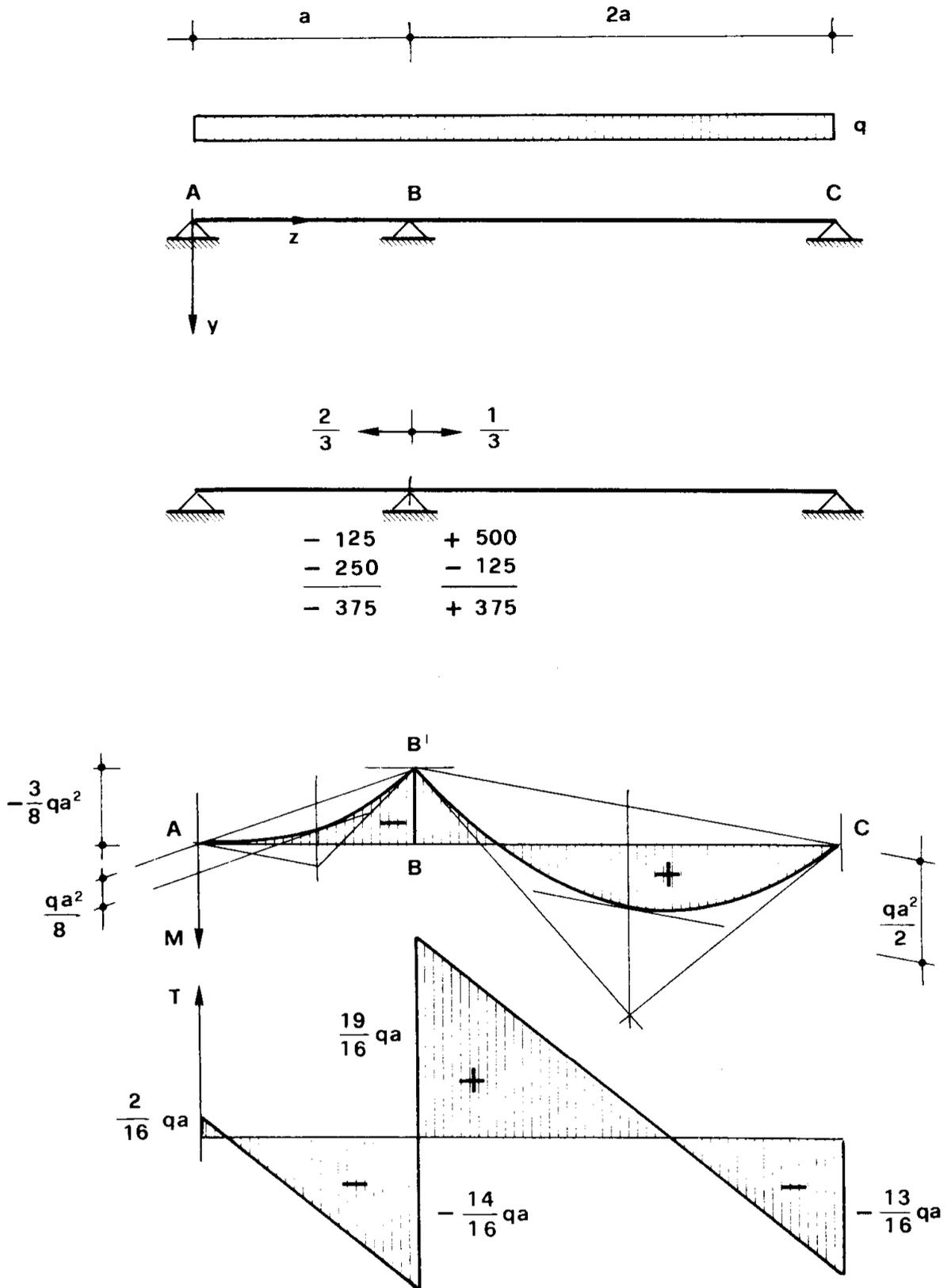


Figura 2

Il diagramma dei momenti si costruisce disegnando in B il segmento $BB' = -\frac{3}{8} qa^2$, e congiungendo B' con A e con C ; su AB' e $B'C$ si disegnano poi, al modo ormai ben noto al lettore, le due parabole (superfici semplici dei momenti) di freccia rispettivamente

$$q \frac{a^2}{8}$$

$$q \frac{(2a)^2}{8} = \frac{qa^2}{2} .$$

Per i tagli si ha poi

$$T_A = -R_A ;$$

l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a B per la trave AB porge

$$R_A \cdot a + \frac{qa^2}{2} + M_B = 0$$

da cui

$$R_A = -\frac{qa}{8} ,$$

$$T_A = \frac{qa}{8} .$$

L'equilibrio alla traslazione secondo y per la trave AB porge

$$R_A + qa + R_B^s = 0$$

da cui

$$R_B^s = -\frac{7}{8} qa = T_B^s .$$

L'equilibrio alla rotazione intorno a B per la trave BC porge

$$-R_C \cdot 2a - \frac{q(2a)^2}{2} - M_B = 0$$

da cui

$$R_C = -\frac{13}{16} q a = T_C$$

L'equilibrio alla traslazione secondo y per la trave BC fornisce

$$R_B^d + 2 q a + R_C = 0$$

da cui

$$R_B^d = -\frac{19}{16} q a$$

$$T_B^d = \frac{19}{16} q a .$$

Si risolva adesso il problema con il procedimento di Cross. Si ha^(*)

$$\rho_{BA} = \frac{3 EI}{a}$$

$$\rho_{BC} = \frac{3 EI}{2 a}$$

e quindi

$$\tau_{BA} = \frac{\rho_{BA}}{\rho_{BA} + \rho_{BC}} = \frac{2}{3}$$

$$\tau_{BC} = \frac{\rho_{BC}}{\rho_{BA} + \rho_{BC}} = \frac{1}{3}$$

Le coppie di incastro perfetto sono (cap. 2, for. 4)

(*) Poiché la trave AB è appoggiata in A , e la trave BC è appoggiata in C , le rigidità in B delle due travi non sono più fornite dalla (1), ma da

$$\rho = \frac{3 EI}{l} \quad (4)$$

$$\bar{m}_{BA} = -\frac{qa^2}{8} = -0,125 qa^2$$

$$\bar{m}_{BC} = \frac{q(2a)^2}{8} = \frac{qa^2}{2} = 0,500 qa^2 .$$

Si ha in B quindi

$$\Sigma \bar{m}_{Bi} = 0,375 qa^2 ;$$

la $-\Sigma \bar{m}_{Bi}$ va ripartita in BA e BC , ottenendosi

$$m_{BA}^* = -0,250 qa^2$$

$$m_{BC}^* = -0,125 qa^2$$

e quindi

$$m_{BA} = \bar{m}_{BA} + m_{BA}^* = -0,375 qa^2$$

$$m_{BC} = \bar{m}_{BC} + m_{BC}^* = +0,375 qa^2 .$$

Problema n. 3.

Si considera la stessa trave del problema precedente, soggetta su tutta la luce ad una variazione termica alla Navier (fig. 3).

Si risolva prima con il procedimento della congruenza, assumendo come struttura isostatica le due travi appoggiate AB e BC . Si ha così

$$\frac{\alpha \Delta t a}{2h} + \frac{M_B a}{3EI} = -\frac{\alpha \Delta t \cdot 2a}{2h} - \frac{M_B \cdot 2a}{3EI}$$

da cui

$$M_B = -\frac{3}{2} \frac{\alpha \Delta t EI}{h} .$$

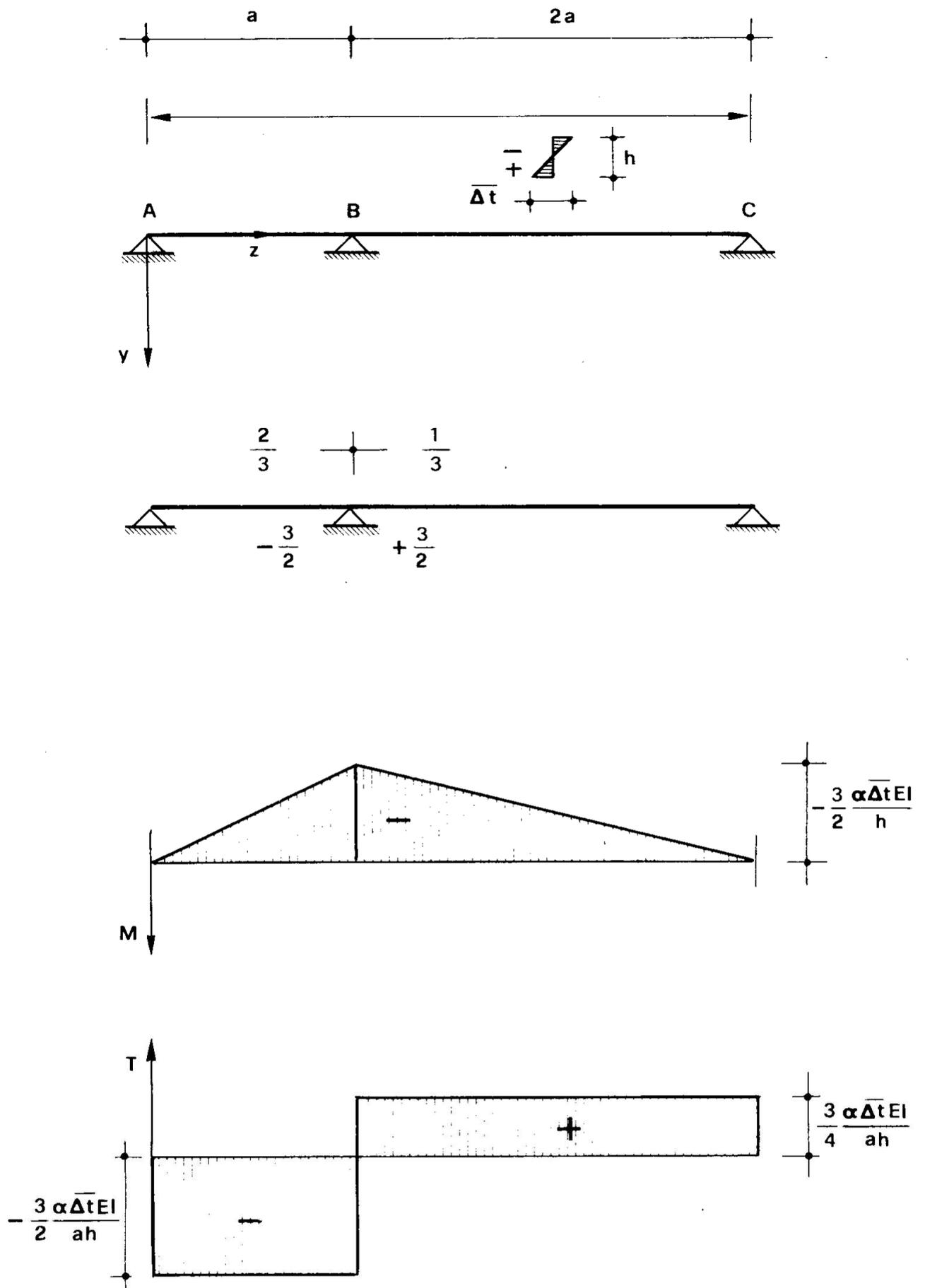


Figura 3

I diagrammi del momento e del taglio, di immediata costruzione, sono disegnati nella stessa fig. 3.

Procedendo alla Cross, è (cap. 2, for. 18)

$$\bar{m}_{BA} = -\frac{3}{2} \frac{\alpha \bar{\Delta t} EI}{h}$$

$$\bar{m}_{BC} = \frac{3}{2} \frac{\alpha \bar{\Delta t} EI}{h} ;$$

quindi

$$\Sigma \bar{m}_{Bi} = 0$$

e non si dà luogo a ripartizione.

Problema n. 4.

La trave della fig. 4, con $EI = cost$, è incastrata in A ed appoggiata in B e C ; un carico q uniforme agisce su tutta la struttura. Si è in presenza quindi della stessa trave della fig. 2, in cui soltanto il vincolo in A è variato da appoggio ad incastro.

La struttura è due volte iperstatica, come struttura isostatica si assume sempre l'insieme delle due travi AB e BC appoggiate agli estremi, le incognite iperstatiche sono perciò

$$X_1 = M_A$$

$$X_2 = M_B .$$

Le condizioni di congruenza

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B^s = \varphi_B^d$$

si scrivono esplicitamente come segue:

$$-\frac{qa^3}{24EI} - \frac{X_1 a}{3EI} - \frac{X_2 a}{6EI} = 0$$

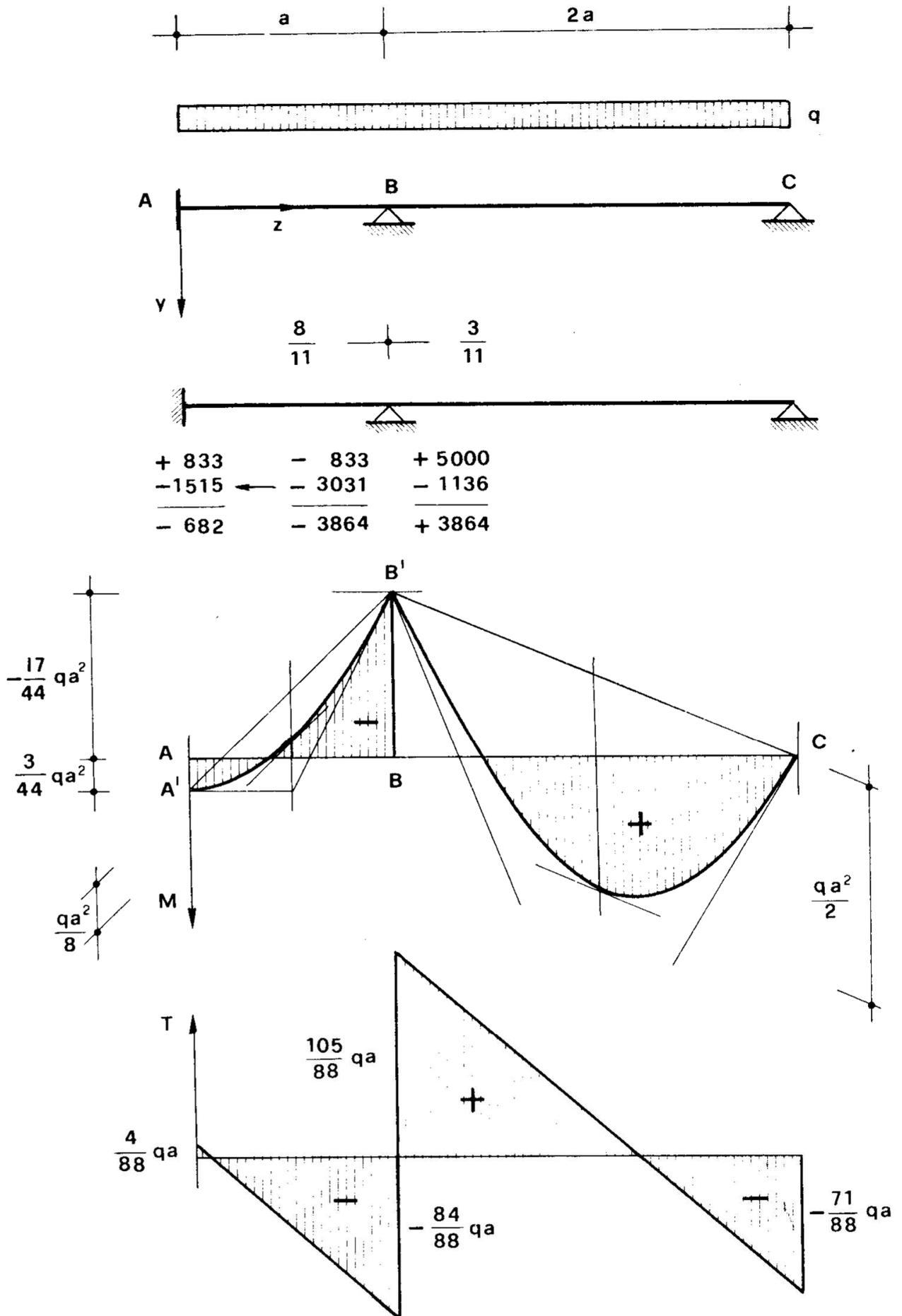


Figura 4

$$\frac{qa^3}{24EI} + \frac{X_1 a}{6EI} + \frac{X_2 a}{3EI} = -\frac{q(2a)^3}{24EI} - \frac{X_2 \cdot 2a}{3EI}$$

da cui

$$8X_1 + 4X_2 = -qa^2$$

$$4X_1 + 24X_2 = -9qa^2$$

la cui soluzione è

$$X_1 = \frac{3}{44} qa^2$$

$$X_2 = -\frac{17}{44} qa^2 .$$

Il diagramma del momento si costruisce disegnando i due segmenti $AA' = X_1$, $BB' = X_2$, e tracciando sulle due corde $A'B'$ e $B'C$ le due parabole di freccia rispettivamente $\frac{qa^2}{8}$ e $\frac{qa^2}{2}$

La reazione R_A si ottiene sfruttando la condizione di equilibrio alla rotazione intorno a B della trave AB :

$$R_A a + \frac{qa^2}{2} - \frac{3}{44} qa^2 - \frac{17}{44} qa^2 = 0$$

da cui

$$R_A = -\frac{1}{22} qa$$

$$T_A = \frac{1}{22} qa .$$

Per l'equilibrio alla traslazione secondo y della trave AB si ha poi

$$-\frac{1}{22} qa + qa + R_B^s = 0$$

da cui

$$R_B^s = T_B^s = -\frac{21}{22} qa .$$

Per l'equilibrio alla rotazione intorno a B della trave BC si ha

$$-R_C \cdot 2a - \frac{q(2a)^2}{2} + \frac{17}{44} qa^2 = 0$$

da cui

$$R_C = T_C = -\frac{71}{88} qa .$$

Per l'equilibrio alla traslazione secondo y della trave BC può scriversi

$$R_B^d + 2qa - \frac{71}{88} qa = 0$$

da cui

$$R_B^d = -\frac{105}{88} qa$$

$$T_B^d = \frac{105}{88} qa .$$

Seguendo Cross si ha

$$\rho_{BA} = \frac{4EI}{a}$$

$$\rho_{BC} = \frac{3EI}{2a}$$

e quindi

$$\tau_{BA} = \frac{\rho_{BA}}{\rho_{BA} + \rho_{BC}} = \frac{8}{11}$$

$$\tau_{BC} = \frac{\rho_{BC}}{\rho_{BA} + \rho_{BC}} = \frac{3}{11} .$$

Le coppie d'incastro perfetto sono

$$\bar{m}_{AB} = \frac{qa^2}{12} = 0,0833 qa^2$$

$$\bar{m}_{BA} = -\frac{qa^2}{12} = -0,0833 qa^2$$

$$\bar{m}_{BC} = \frac{q \cdot (2a)^2}{8} = 0,5000 qa^2$$

In B si ha

$$\Sigma \bar{m}_{Bi} = 0,4167 qa^2$$

e, ripartendo la $-\Sigma \bar{m}_{Bi}$,

$$m_{BA}^* = -0,3031 qa^2$$

$$m_{BC}^* = -0,1136 qa^2 .$$

La m_{BA}^* trasmette in A una coppia

$$m_{AB}^{**} = -0,1515 qa^2 .$$

Le operazioni qui hanno termine, poichè A è un incastro perfetto; si ha perciò

$$m_A = \bar{m}_A + m_A^{**} = -0,6820 qa^2$$

$$m_{BA} = \bar{m}_{BA} + m_{BA}^* = -0,3864 qa^2$$

$$\mathfrak{m}_{BC} = \overline{\mathfrak{m}}_{BC} + \mathfrak{m}_{BC}^* = 0.3864 qa^2$$

in accordo con i valori già ottenuti.

Problema n. 5.

La trave continua della fig. 5 è tre volte iperstatica; si assume come struttura isostatica l'insieme delle tre travi AB , BC e CD appoggiate alle estremità. Le tre incognite sono quindi

$$X_1 = M_A$$

$$X_2 = M_B^s$$

$$X_3 = M_C .$$

Le condizioni di congruenza

$$\varphi_A = 0$$

$$\varphi_B^s = \varphi_B^d$$

$$\varphi_C^s = \varphi_C^d$$

si scrivono, avendo chiamato X_2 il momento M_B^s immediatamente a sinistra di B , e quindi $X_2 - \mathfrak{m}$ il momento M_B^d immediatamente a destra^(*),

$$-\frac{X_1 a}{3EI} - \frac{X_2 a}{6EI} = 0$$

$$\frac{X_1 a}{6EI} + \frac{X_2 a}{3EI} = -\frac{X_2 - \mathfrak{m}}{3EI} \frac{3}{2} a - \frac{X_3}{6EI} \frac{3}{2} a$$

(*) La coppia \mathfrak{m} agisce sulla sezione d'appoggio B , quindi la condizione di equilibrio alla rotazione dell'elemento di trave in B si scrive

$$\mathfrak{m} + M_B^d - M_B^s = 0,$$

e cioè

$$\mathfrak{m} + M_B^d - X_2 = 0 .$$

$$\frac{X_2 - m}{6EI} \frac{3}{2} a + \frac{X_3}{3EI} \frac{3}{2} a = - \frac{X_3 a}{3EI}$$

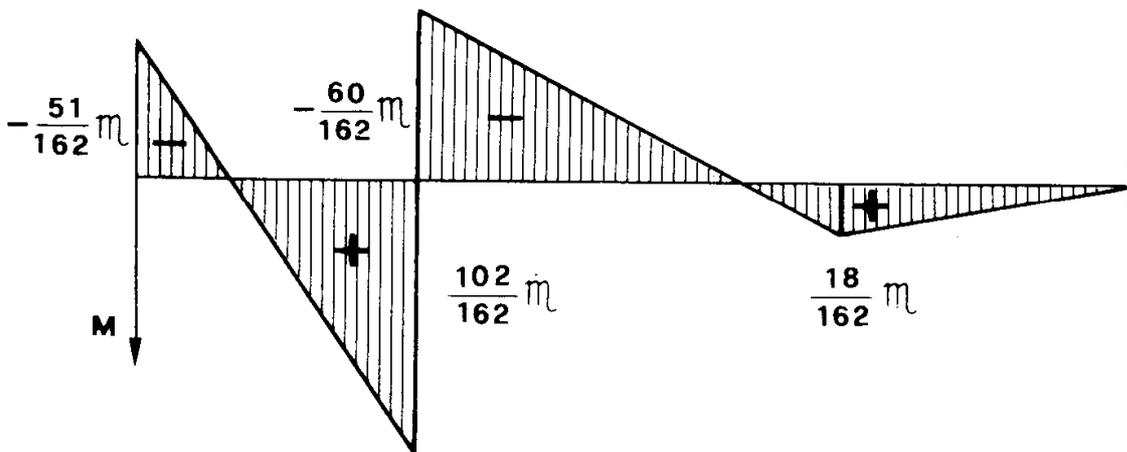
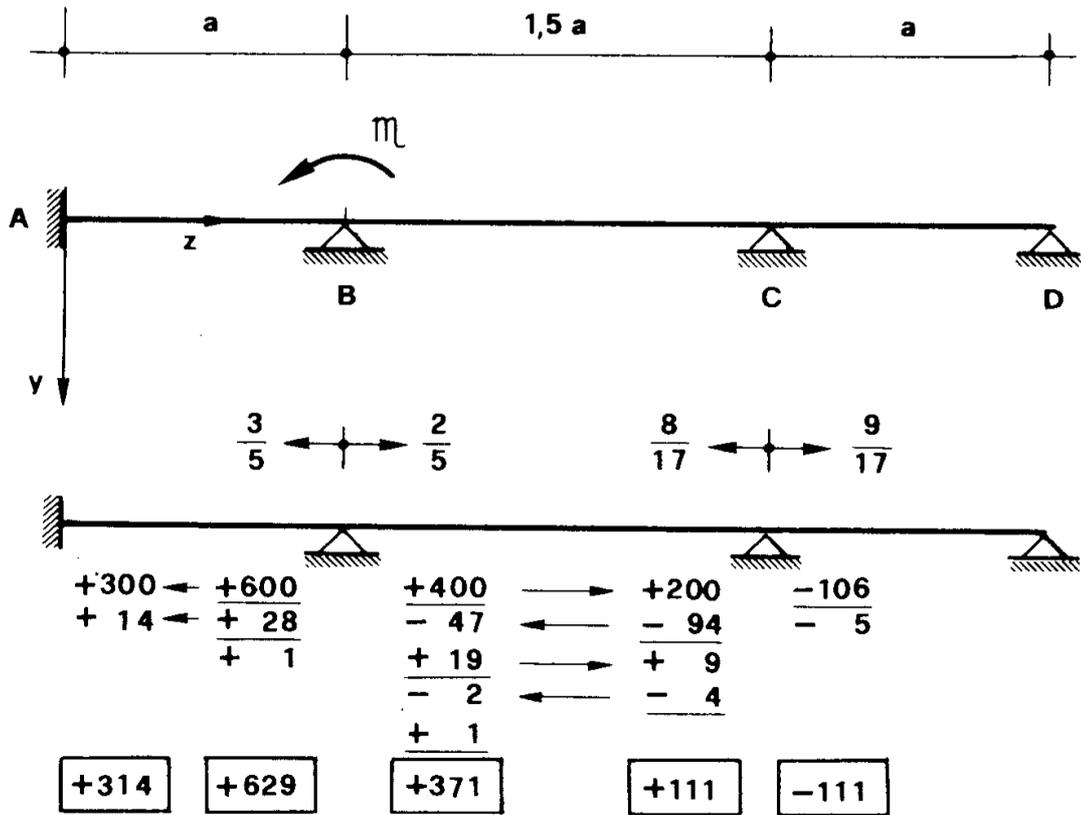


Figura 5

Semplificando si ha

$$2X_1 + X_2 = 0$$

$$2X_1 + 10X_2 + 3X_3 = 6 \mathfrak{m}$$

$$3X_2 + 10X_3 = 3 \mathfrak{m}$$

si fa notare che, per verificare formalmente la proprietà di simmetria del determinante dei coefficienti (Betti), occorre moltiplicare per due i due membri della prima equazione. La soluzione del sistema può ottenersi ponendo

$$X_1 = -\frac{X_2}{2}$$

$$X_3 = \frac{3 \mathfrak{m} - 3X_2}{10}.$$

per cui la seconda equazione si scrive

$$-X_2 + 10X_2 + \frac{9}{10} \mathfrak{m} - \frac{9}{10} X_2 = 6 \mathfrak{m}$$

che porge

$$X_2 = \frac{51}{81} \mathfrak{m},$$

da cui

$$X_1 = \frac{51}{162} \mathfrak{m}$$

$$X_2 = -\frac{51}{81} \mathfrak{m}$$

$$X_3 = -\frac{3}{10} (X_2 - \mathfrak{m}) = \frac{9}{81} \mathfrak{m}.$$

Operando alla Cross si ha

$$\rho_{BA} = \frac{4EI}{a}.$$

$$\rho_{BC} = \frac{4EI}{1,5a} = \rho_{CB}$$

$$\rho_{CD} = \frac{3EI}{a},$$

e quindi

$$\tau_{BA} = \frac{\rho_{BA}}{\rho_{BA} + \rho_{BC}} = \frac{3}{5}$$

$$\tau_{BC} = \frac{\rho_{BC}}{\rho_{BA} + \rho_{BC}} = \frac{2}{5}$$

$$\tau_{CD} = \frac{\rho_{CD}}{\rho_{CB} + \rho_{CD}} = \frac{9}{17}.$$

Le coppie d'incastro perfetto sono nulle, perchè lungo le travi non insistono carichi ad eccezione della coppia \mathfrak{M} , e quest'ultima è sorretta dal morsetto fittizio in B . Sbloccando questo morsetto, la \mathfrak{M} si ripartisce in

$$\mathfrak{M}_{BA}^* = \tau_{BA} \mathfrak{M} = 0,6$$

$$\mathfrak{M}_{BC}^* = \tau_{BC} \mathfrak{M} = 0,4$$

La successione delle operazioni alla Cross (ripartizione alla Cross per successive approssimazioni) è riportata nella fig. 5; ogni operazione di trasmissione (con coefficiente $\frac{1}{2}$) è indicata da una freccia; dopo ogni operazione di ripartizione nel nodo generico si segnano due tratti orizzontali nelle colonne delle coppie, per indicare che al disopra di tali tratti l'equilibrio è rispettato.

Il procedimento è di rapida convergenza; la sua convenienza, in termini di tempo e di automatismo delle operazioni, appare già notevole nell'esempio esaminato. Tale convenienza aumenta all'aumentare del numero delle iperstatiche, quando la risoluzione delle operazioni di congruenza diviene proibitiva.

Il procedimento di Cross non sembra, a parere dello scrivente, superato dalle moderne tecniche degli elaboratori elettronici; esso conserva

tutto il suo carattere di rapida ed automatica calcolazione nei casi in cui sarebbe esagerato — o per altri versi impossibile — accedere al calcolatore.

Nel seguito saranno esposti altri esempi di applicazione del Cross per strutture a parecchie iperstatiche, laddove appunto le equazioni di congruenza mal si piegano all'elaborazione numerica.

Problema n. 6.

La struttura della fig. 6a è sei volte iperstatica; operando alla Cross, basta una semplice ripartizione della coppia esercitata sulla struttura da un morsetto in A per risolvere il problema.

Si ha ($EI = cost$ per tutta la struttura)

$$\rho_{AB} = \frac{4EI}{a} = \frac{EI}{a} \cdot \frac{12}{3}$$

$$\rho_{AC} = \frac{4EI}{a} = \frac{EI}{a} \cdot \frac{12}{3}$$

$$\rho_{AD} = \frac{4EI}{1,5a} = \frac{EI}{a} \cdot \frac{8}{3}$$

$$\rho_{AE} = \frac{3EI}{a} = \frac{EI}{a} \cdot \frac{9}{3}$$

e quindi

$$\tau_{AB} = \frac{12}{41}$$

$$\tau_{AC} = \frac{12}{41}$$

$$\tau_{AD} = \frac{8}{41}$$

$$\tau_{AE} = \frac{9}{41}$$

E' poi

$$\overline{m}_{AB} = -\frac{qa^2}{12} = -\overline{m}_{BA}$$

$$\overline{m}_{AD} = \frac{q(1,5a)^2}{12} = -\overline{m}_{DA}$$

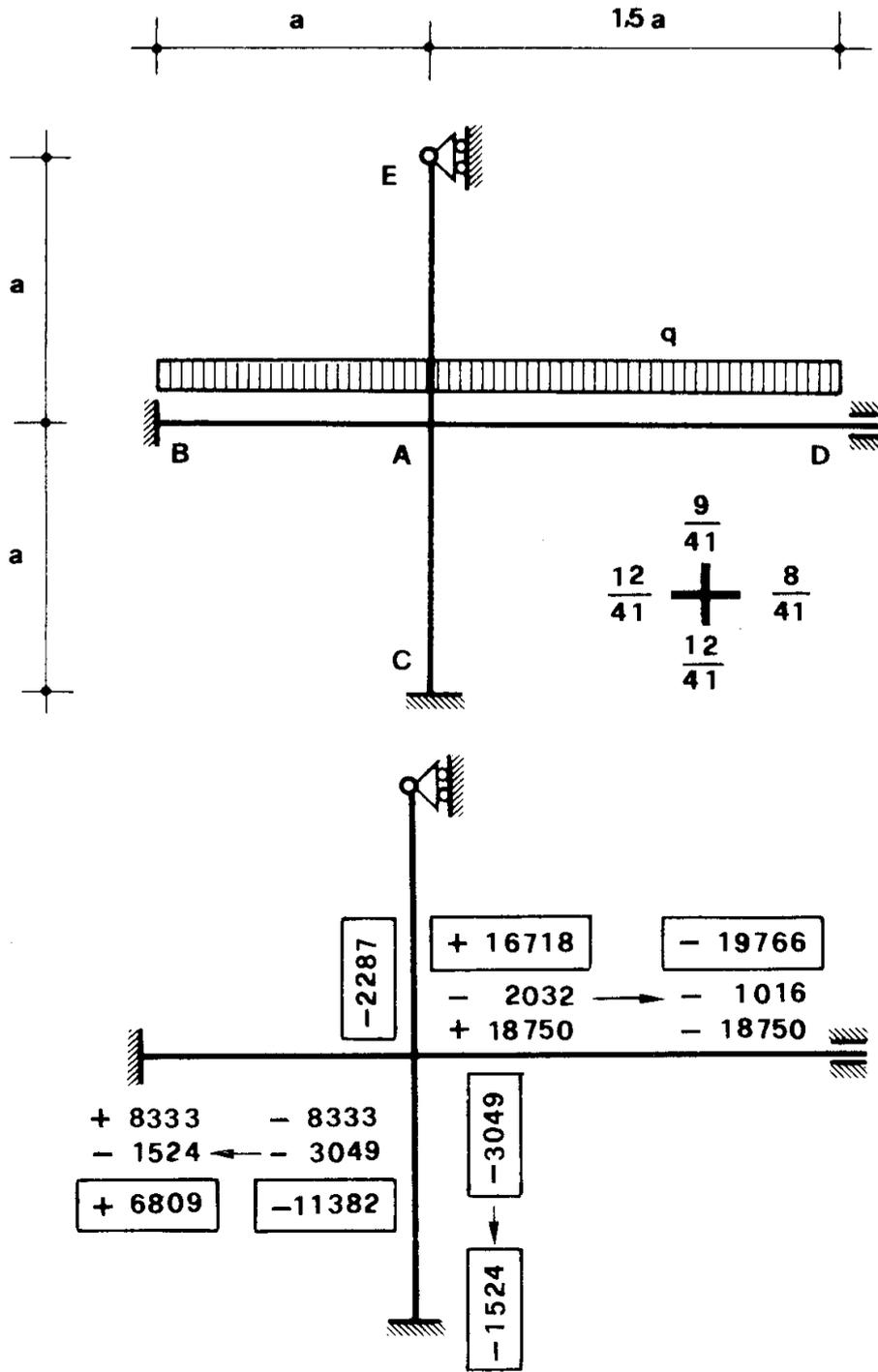


Figura 6a

e cioè

$$\overline{m}_{BA} = 0,08333 qa^2$$

$$\overline{m}_{AB} = - 0,08333 qa^2$$

$$\overline{m}_{AD} = 0,18750 qa^2$$

$$\overline{m}_{DA} = - 0,18750 qa^2$$

Il morsetto in A esercita sulla struttura una coppia pari a

$$\Sigma \overline{m}_{Ai} = \overline{m}_{AB} + \overline{m}_{AD} = 0,10417 qa^2 ;$$

quindi la coppia da distribuire in A tra le quattro travi è

$$- \Sigma \overline{m}_{Ai} = - 0,10417 qa^2$$

E' perciò

$$m_{AB}^* = - 0,03049 qa^2$$

$$m_{AC}^* = - 0,03049 qa^2$$

$$m_{AD}^* = - 0,02032 qa^2$$

$$m_{AE}^* = - 0,02287 qa^2$$

Si hanno poi le coppie trasmesse

$$m_{BA}^{**} = - 0,01524 qa^2$$

$$m_{CA}^{**} = - 0,01524 qa^2$$

$$m_{CD}^{**} = - 0,01016 qa^2$$

Non deve farsi altro, poichè esiste l'unico morsetto in A ; quindi in definitiva è

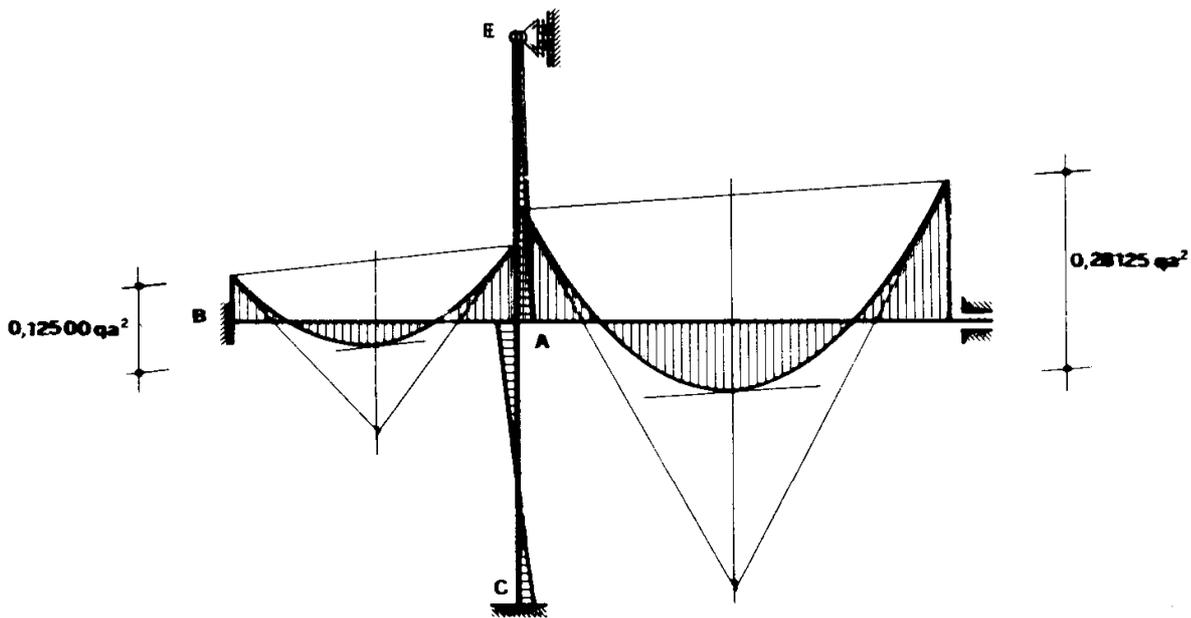


Figura 6

$$\begin{aligned}
 m_{BA} &= \overline{m}_{BA} + m_{BA}^{**} = 0,06809 qa^2 \\
 m_{AB} &= \overline{m}_{AB} + m_{AB}^* = -0,11382 qa^2 \\
 m_{AD} &= \overline{m}_{AD} + m_{AD}^* = 0,16718 qa^2 \\
 m_{DA} &= \overline{m}_{DA} + m_{DA}^{**} = -0,19766 qa^2 \\
 m_{AC} &= m_{AC}^{**} = -0,03049 qa^2 \\
 m_{CA} &= m_{CA}^* = -0,01524 qa^2 \\
 m_{AE} &= m_{AE}^* = -0,02287 qa^2
 \end{aligned}$$

L'intero procedimento è riassunto nella fig. 6a; nella fig. 6b invece è disegnato il diagramma dei momenti.

Problema n. 7.

La trave continua solidale con i ritti della fig. 7a è sette volte iperstatica. In questa struttura, come in quelle dell'esercizio precedente, i no-

di sono fissi; questa locuzione, come è noto, significa che per effetto delle sole deformazioni di tipo flessionale (trascorrendo cioè quelle da sforzo assiale) le coordinate dei nodi non variano sensibilmente. E' noto che, per riconoscere se una struttura è a nodi *fissi* o *spostabili*, basta inserire cerniere alle estremità di ogni elemento rettilineo, e verificare se la struttura

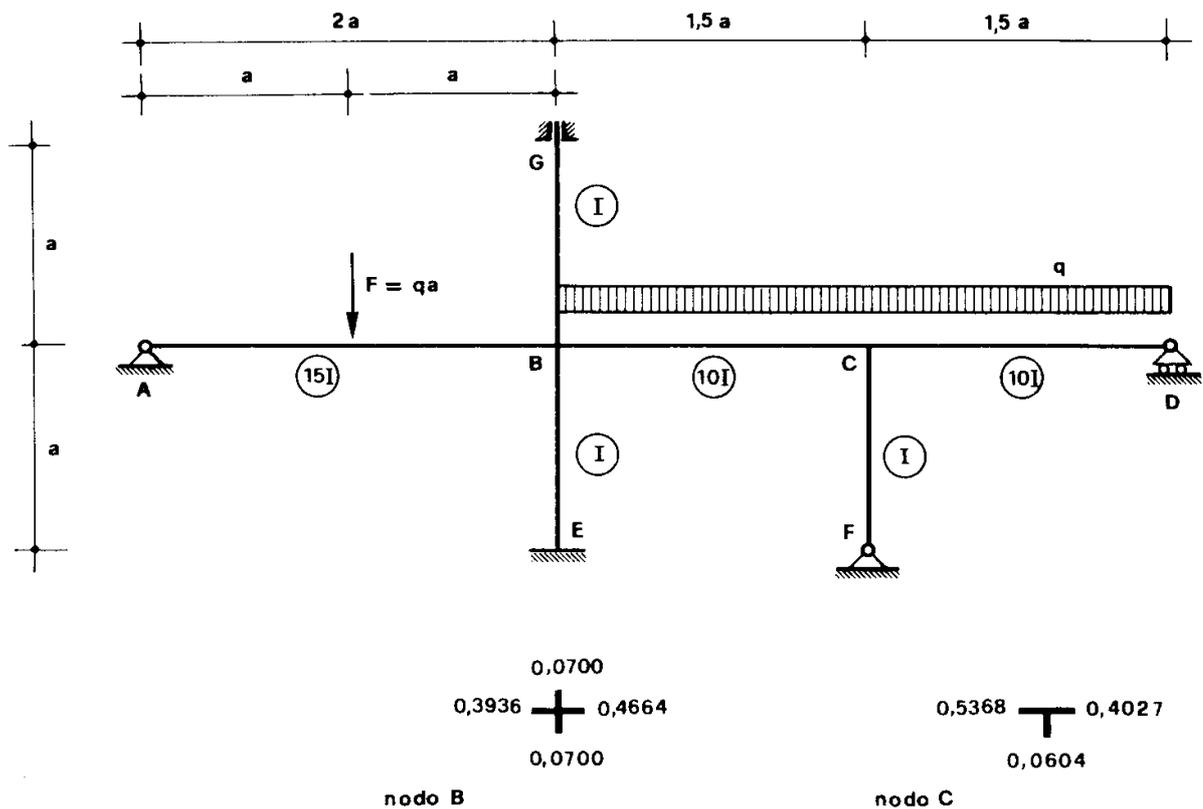


Figura 7a

così ottenuta è *non labile* o *labile*; è noto pure che, se la struttura è labile, con grado di labilità n , ci si può ricondurre alla struttura a nodi fissi con l'aiuto di n vincoli fittizi, in genere *appoggi supplementari*. Poichè il procedimento di Cross opera in sostanza su telai a nodi fissi, il problema dei telai a nodi spostabili può risolversi appunto riconducendo la struttura ai nodi fissi con dei vincoli supplementari, calcolandone le reazioni, ed imprimendo poi ai vincoli un insieme di distorsioni tali da annullare le suddette reazioni. E' quanto si farà nel problema seguente (n. 8).

Si riconosce facilmente, per quanto detto, che la struttura della fig. 7a è a nodi fissi. Si ha

$$\rho_{BA} = 3 \frac{15 EI}{2a} = 22,50 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{BE} = 4 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{BC} = 4 \frac{10EI}{1,5a} = 26,66 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{BG} = \quad = \quad 4 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{CB} = \rho_{BC} = 26,66 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{CF} = \quad = \quad 3 \frac{EI}{a}$$

$$\rho_{CD} = 3 \frac{10EI}{1,5a} = 20 \frac{EI}{a};$$

i coefficienti di ripartizione

$$\tau_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\sum_j \rho_{ij}}$$

sono consegnati nella stessa fig. 7a.

Le coppie di incastro perfetto sono (cap. 2, for. 1, 4 e 29)

$$\bar{m}_{BA} = - 0,3750 qa^2$$

$$\bar{m}_{BC} = 0,1875 qa^2$$

$$\bar{m}_{CB} = - 0,1875 qa^2$$

$$\bar{m}_{CD} = 0,2812 qa^2$$

Nella fig. 7b è riportato il Cross, che ha inizio dal nodo *B*; ci si è limitati a tre cicli, essendosi già raggiunta così una buona approssimazione.

In *B* è

$$\sum \bar{m}_{Bi} = - 0,1875 qa^2 ;$$

deve quindi ripartirsi la coppia

$$- \sum \mathfrak{m}_{Bi} = 0,1875 qa^2 .$$

ottenendosi le \mathfrak{m}_{Bi}^* .

La $\mathfrak{m}_{BC}^* = 0,0875 qa^2$ trasmette in C una

$$\mathfrak{m}_{CB}^{**} = 0,0437 qa^2 ;$$

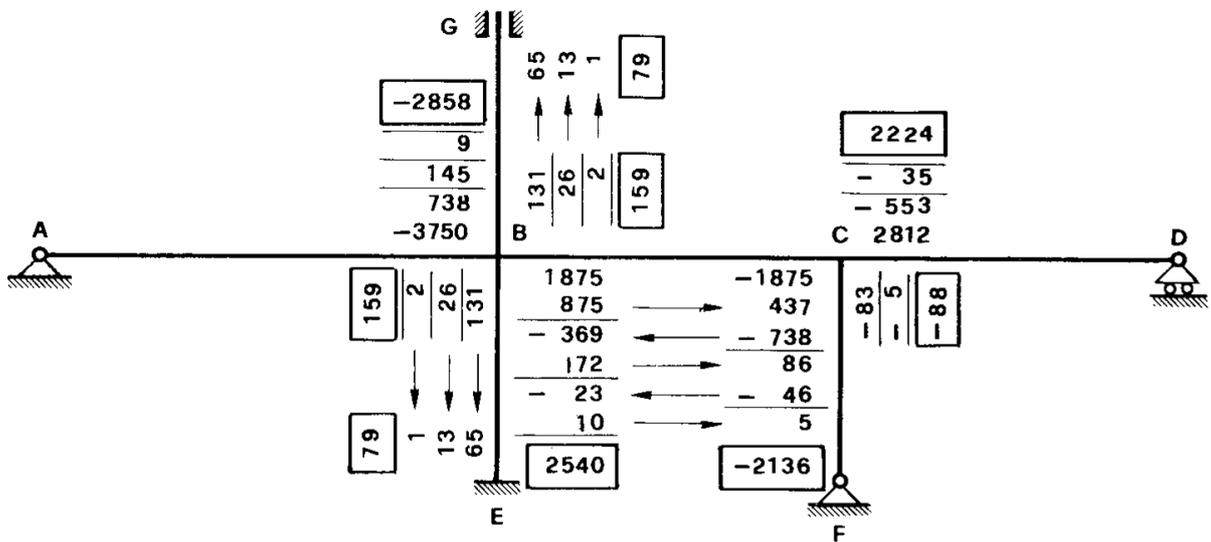


Figura 7b

quindi in C deve ripartirsi la coppia

$$- \sum \bar{\mathfrak{m}}_{Ci} - \mathfrak{m}_{CB}^{**}$$

e cioè la coppia

$$(0,1875 - 0,2812 - 0,0437) qa^2 = - 0,1374 qa^2 .$$

Alla fine del primo ciclo si ottiene perciò

$$\mathfrak{m}_{BA} = (- 0,3750 + 0,0738) qa^2 = - 0,3012 qa^2$$

$$\mathfrak{m}_{BE} = \quad \quad \quad = 0,0131 qa^2$$

$$\mathfrak{m}_{BC} = (0,1875 + 0,0875) qa^2 = 0,2750 qa^2$$

$$\begin{aligned}
 m_{BG} &= & &= 0,0131 qa^2 \\
 m_{CB} &= (-0,1875 + 0,0437 - 0,0738) & &= -0,2175 qa^2 \\
 m_{CF} &= & &= -0,0083 qa^2 \\
 m_{CD} &= (0,2812 - 0,0553) qa^2 & &= 0,2259 qa^2
 \end{aligned}$$

E' facile verificare che si ha $\Sigma m_{Bi} = 0$, e $\Sigma m_{Ci} = 0$; sono cioè rispettate le condizioni di equilibrio dei nodi.

Ogni volta che si è effettuata una ripartizione intorno ad un nodo, si disegna un tratto in ciascuna delle colonne delle coppie relative a quel nodo; tutte le coppie del nodo che precedono tali tratti sono equilibrati, e cioè danno per somma zero. Effettuato il primo ciclo, si osserva che in *B* esiste una coppia trasmessa da *C*

$$m_{BC}^{**} = -0,0369 qa^2$$

non ancora ripartita. Si effettua perciò (secondo ciclo) tale ripartizione, ottenendo

$$\begin{aligned}
 m_{BA}^* &= 0,0145 qa^2 \\
 m_{BE}^* &= 0,0026 qa^2 \\
 m_{BC}^* &= 0,0172 qa^2 \\
 m_{BG}^* &= 0,0026 qa^2 \quad ;
 \end{aligned}$$

la m_{BC}^* trasmette in *C* una coppia

$$m_{CB}^{**} = 0,0086 qa^2$$

che a sua volta, ripartita, genera le coppie

$$\begin{aligned}
 m_{CB}^* &= -0,0046 qa^2 \\
 m_{CF} &= -0,0005 qa^2
 \end{aligned}$$

$$m_{CD} = - 0,0035 qa^2$$

E' così terminato il secondo ciclo. Se ne effettua ancora un terzo; alla fine si ha, sommando i momenti di tutte le colonne precedenti l'ultimo tratto,

$$m_{BA} = - 0,2858 qa^2$$

$$m_{BE} = 0,0159 qa^2$$

$$m_{BC} = 0,2540 qa^2$$

$$m_{BG} = 0,0159 qa^2$$

$$m_{CB} = - 0,2136 qa^2$$

$$m_{CF} = - 0,0088 qa^2$$

$$m_{CD} = 0,2224 qa^2 .$$

Si verifica, come d'obbligo, $\Sigma m_{Bi} = 0$, e $\Sigma m_{Ci} = 0$.

In ogni ciclo si sono disegnate le coppie trasmesse in E e G ; ciò in realtà non è necessario, perchè basta alla fine scrivere

$$m_{EB} = \frac{m_{BE}}{2} = 0,0079 qa^2$$

$$m_{GB} = \frac{m_{BG}}{2} = 0,0079 qa^2$$

Nella fig. 7c è infine disegnato il diagramma dei momenti flettenti. Posto

$$BB' = M_{BA} = m_{BA} = - 0,2858 qa^2,$$

si disegna su AB' la superficie semplice dei momenti (momenti sulla trave AB appoggiata in A e B) dovuta alla forza F . Basta perciò riportare dalla

mezzeria H di AB' il segmento

$$HK = \frac{Fl}{4} = \frac{qa \cdot 2a}{4} = 0,5 qa^2 .$$

ed unire K con A e B' .

Posto poi

$$BB'' = M_{BC} = - m_{BC} = - 0,2540 qa^2$$

$$CC'' = M_{CB} = m_{CB} = - 0,2136 qa^2$$

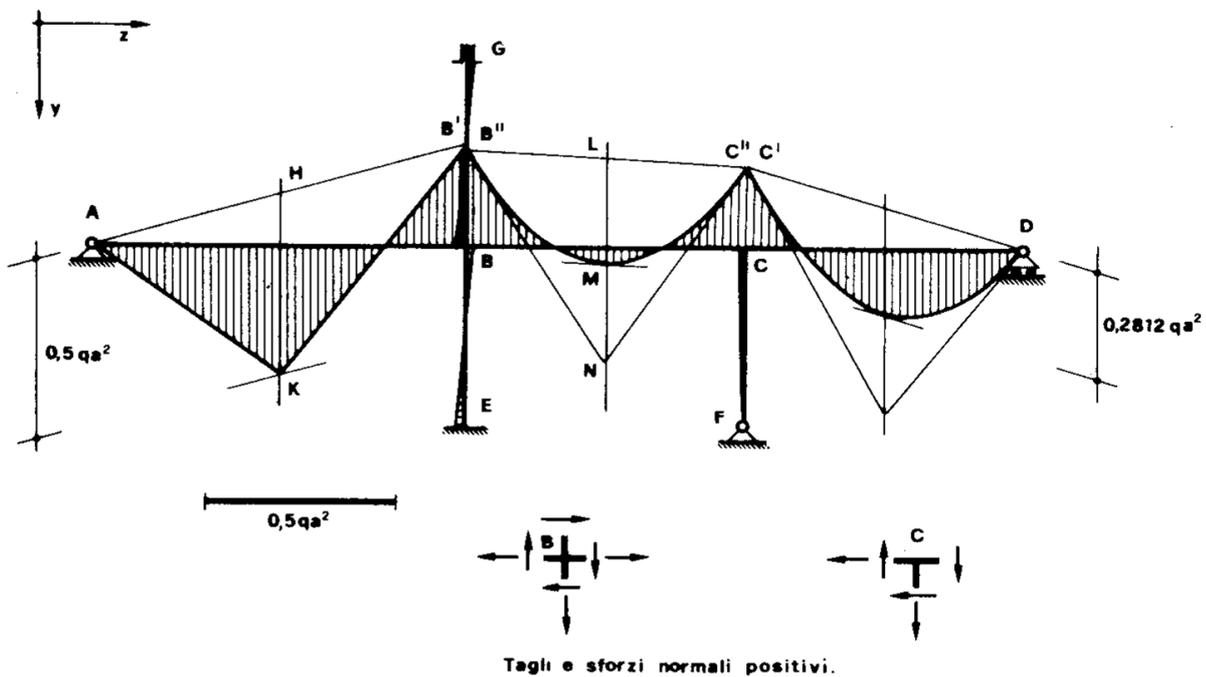


Figura 7c

si disegna su $B''C''$ la superficie semplice dei momenti dovuti al carico q , e cioè la parabola di freccia

$$f = \frac{q \cdot (1,5a)^2}{8} = 0,2812 qa^2 ;$$

se L è la mezzeria di $B''C''$, si riporta in L il segmento

$$LN = 2f ,$$

e si unisce N con B'' e C'' , ottenendo le tangenti in B'' e C'' . La parabola passa per M , punto medio di LN ($LM = f$), e la sua tangente in M è parallela a $B''C''$.

In modo perfettamente analogo si traccia il diagramma dei momenti relativo alla trave CD .

Si passi ora al calcolo dei tagli. Si scriveranno di seguito le equazioni di equilibrio alla rotazione e alla traslazione delle singole travi, ed i tagli che ne derivano.

Eq. rot. AB su B:

$$- T_A \cdot 2a + F \cdot a + \mathfrak{M}_{BA} = 0$$

$$- 2T_A a + qa^2 - 0,2858 qa^2 = 0$$

$$T_A = 0,3571 qa ;$$

Eq. transl. AB secondo y:

$$- T_A + F + T_{BA} = 0$$

$$- 0,3571 qa + qa + T_{BA} = 0$$

$$T_{BA} = - 0,6429 qa ;$$

Eq. rot. BC su C:

$$- T_{BC} \cdot 1,5a + \frac{q (1,5a)^2}{2} + \mathfrak{M}_{BC} + \mathfrak{M}_{CB} = 0$$

$$- 1,5 T_{BC} a + 1,125 qa^2 + 0,0404 qa^2 = 0$$

$$T_{BC} = 0,7769 qa ;$$

Eq. transl. BC secondo y:

$$- T_{BC} + 1,5 qa + T_{CB} = 0$$

$$- 0,7769 qa + 1,5 qa + T_{CB} = 0$$

$$T_{CB} = - 0,7231 qa ;$$

Eq. rot. CD su D:

$$\begin{aligned}
 - T_{CD} \cdot 1,5 a + \frac{q (1,5 a)^2}{2} + \mathfrak{M}_{CD} &= 0 \\
 - 1,5 T_{CD} a + 1,125 q a^2 + 0,2224 q a^2 &= 0 \\
 T_{CD} &= 0,8983 q a ;
 \end{aligned}$$

Eq. trasl. CD secondo y:

$$\begin{aligned}
 - T_{CD} + 1,5 q a + T_D &= 0 \\
 - 0,8983 q a + 1,5 q a + T_D &= 0 \\
 T_D &= - 0,6017 q a ;
 \end{aligned}$$

Eq. rot. BE su B:

$$\begin{aligned}
 - T_E a + \mathfrak{M}_{BE} + \mathfrak{M}_{EB} &= 0 \\
 - T_E a + 0,0238 q a^2 &= 0 \\
 T_E &= 0,0238 q a ;
 \end{aligned}$$

Eq. trasl. BE secondo z:

$$\begin{aligned}
 - T_E + T_{BE} &= 0 \\
 T_{BE} &= 0,0238 q a ;
 \end{aligned}$$

Eq. rot. CF su C:

$$\begin{aligned}
 - T_F a + \mathfrak{M}_{CF} &= 0 \\
 - T_F a - 0,0088 q a^2 &= 0 \\
 T_F &= - 0,0088 q a ;
 \end{aligned}$$

Eq. transl. CF secondo z:

$$- T_F + T_{CF} = 0$$

$$T_{CF} = - 0,0088 qa ;$$

Eq. rot. BG su G:

$$- T_{BG} a + \mathfrak{m}_{BG} + \mathfrak{m}_{GB} = 0$$

$$- T_{BG} a + 0,0238 qa^2 = 0$$

$$T_{BG} = 0,0238 qa ;$$

Eq. transl. BG secondo z:

$$- T_{BG} + T_G = 0$$

$$T_G = 0,0238 qa .$$

Ottenuti i tagli, si possono calcolare gli sforzi normali, costanti per ogni ritto e per ogni trasverso. Si ha, per l'equilibrio alla traslazione, secondo y del nodo C,

$$- T_{CB} + T_{CD} + N_{CF} = 0$$

da cui

$$N_{CF} = - 1,6214 qa .$$

Per l'equilibrio alla traslazione secondo z dello stesso nodo può scriversi

$$- N_{CB} - T_{CF} = 0$$

da cui

$$N_{CB} = 0,0088 qa .$$

Per l'equilibrio alla traslazione secondo y del nodo B può scriversi

$$- T_{BA} + T_{BC} + N_{BE} = 0$$

da cui

$$N_{BE} = -1,4198 qa .$$

Per l'equilibrio alla traslazione secondo z del nodo B può infine scriversi

$$T_{BG} - T_{BE} - N_{BA} + N_{BC} = 0$$

da cui ($N_{BC} = N_{CB}$)

$$N_{BA} = 0,0088 qa .$$

Problema n. 8.

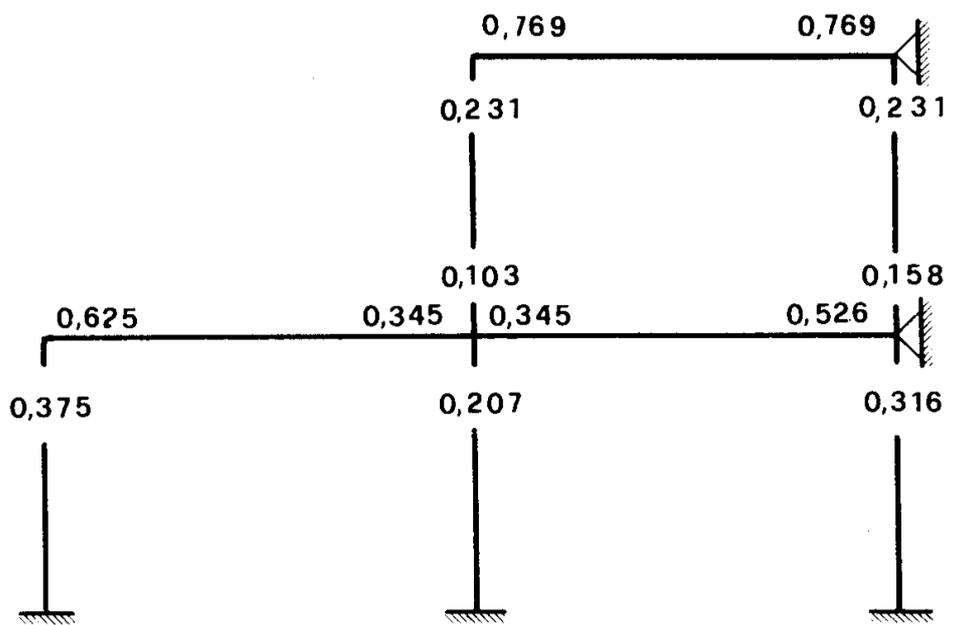
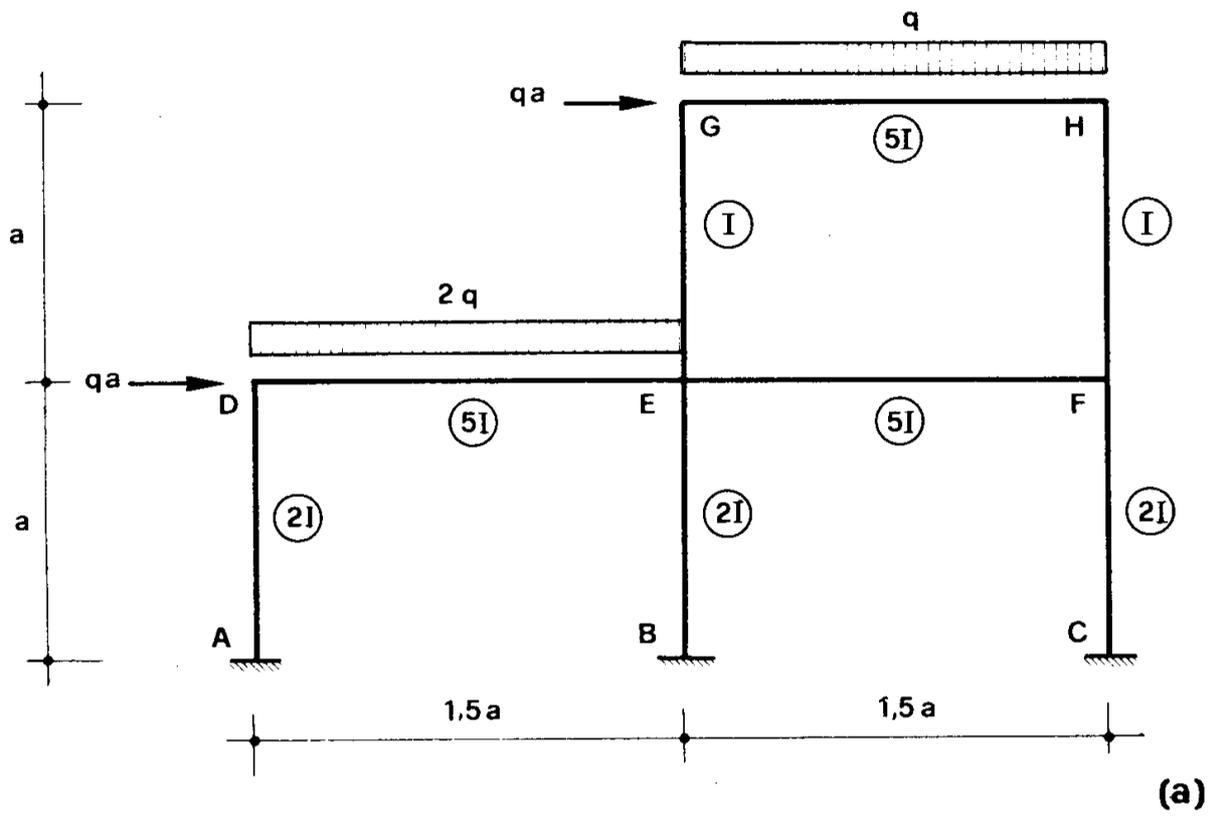
Il telaio della fig. 8a è a nodi spostabili, infatti, una volta inserite cerniere in tutte le estremità delle aste, esso diviene due volte labile (vedi es. 7, premessa). Basta introdurre due appoggi fittizi a piano di scorrimento verticale in H ed F (fig. 8b) per eliminare le labilità; dunque è su tale schema fondamentale che si opererà alla Cross, e su tale schema quindi si calcolano i coefficienti di ripartizione.

Si può scrivere

$$\begin{aligned} \rho_{DA} = \rho_{EB} = \rho_{FC} &= 4E \frac{2I}{a} = 8 \frac{EI}{a} \\ \rho_{EG} = \rho_{GE} = \rho_{FH} = \rho_{HF} &= 4 \frac{EI}{a} \\ \rho_{DE} = \rho_{ED} = \rho_{EF} = \rho_{FE} &= \\ &= \rho_{GH} = \rho_{HG} = 4E \frac{5I}{1,5a} = 13,333 \frac{EI}{a} . \end{aligned}$$

I coefficienti τ che vengono fuori da tali rigidità sono consegnati nella fig. 8b.

Si opera innanzitutto (fig. 8c) sulla struttura a nodi fissi, in tal caso le forze orizzontali agenti lungo i traversi sono assorbite dai vincoli fittizi, e non forniscono momenti, i carichi q invece provocano le coppie di incastro perfetto



(b)

Figura 8a, b

$$\overline{m}_{DE} = \frac{2q \cdot (1,5a)^2}{12} = 0,3750 qa^2$$

$$\overline{m}_{ED} = \phantom{\overline{m}_{DE}} = -0,3750 qa^2$$

$$\overline{m}_{GH} = \frac{q \cdot (1,5a)^2}{12} = 0,1875 qa^2$$

$$\overline{m}_{HG} = \phantom{\overline{m}_{GH}} = -0,1875 qa^2 .$$

La diffusione alla Cross di tali coppie appare nella fig. 8c; in ogni ciclo, i nodi in cui si eseguono le successive operazioni di disserraggio dei morsetti si susseguono nell'ordine *DEGHF*.

Nella fig. 8d sono disegnati i diagrammi dei momenti flettenti connessi con i valori finali del Cross della fig. 8c. Ci si è limitati ai ritti, poichè in questa fase i momenti lungo i traversi non interessano. Basta infatti calcolare le reazioni dei due appoggi fittizi. Per ciò fare, occorre conoscere i tagli nei ritti, di valore costante per ogni ritto.

Si ha per ogni ritto *ih*

$$-T_{ih} l_{ih} + m_i + m_h = 0$$

da cui

$$T_{ih} = \frac{m_i + m_h}{l_{ih}} .$$

E' perciò

$$T_{AD} = -\frac{0,0895 + 0,1791}{a} qa^2 = -0,2686 qa$$

$$T_{BE} = \frac{0,0622 + 0,1245}{a} qa^2 = 0,1867 qa$$

$$T_{CF} = -\frac{0,0224 + 0,0448}{a} qa^2 = -0,0672 qa$$

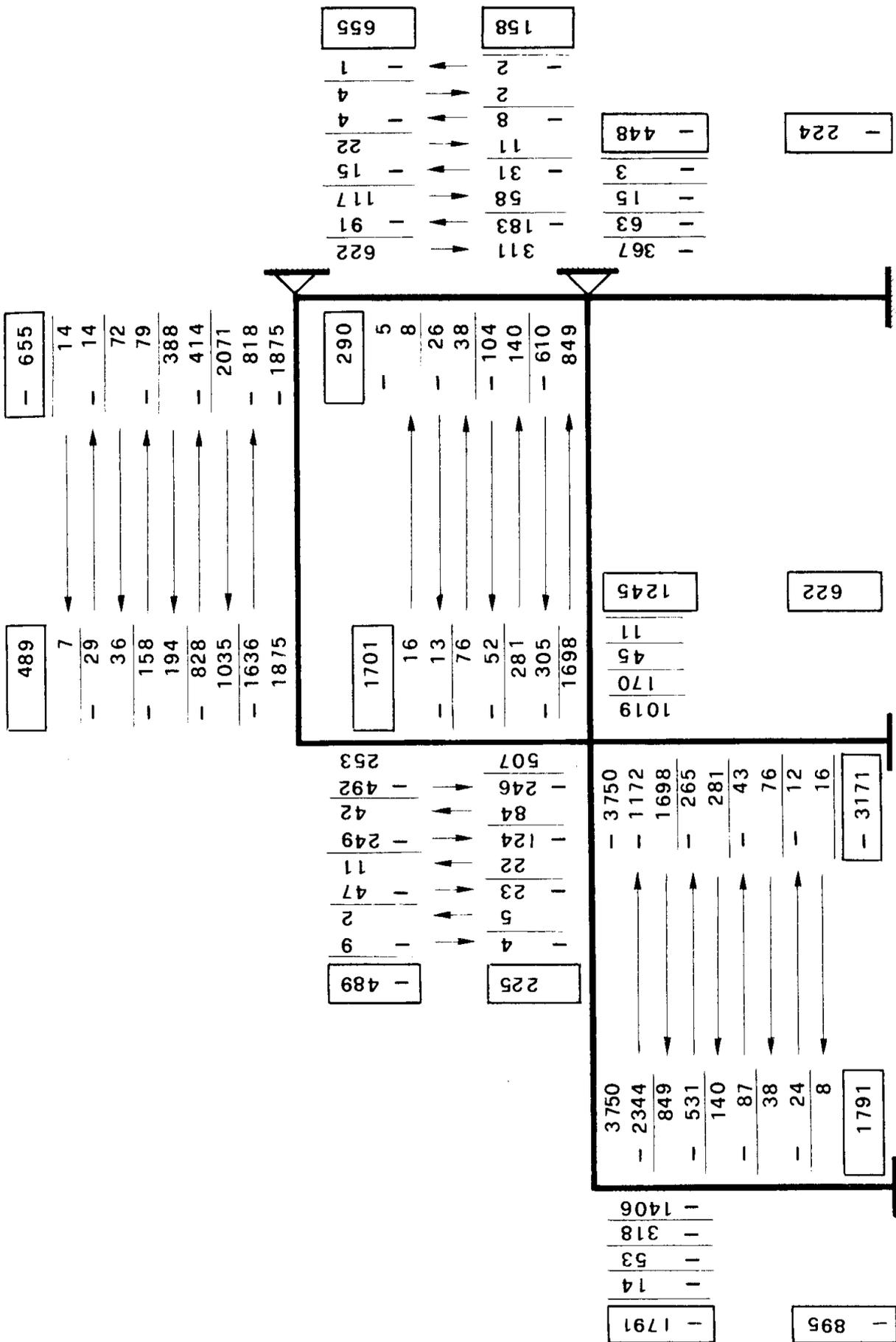


Figura 8c

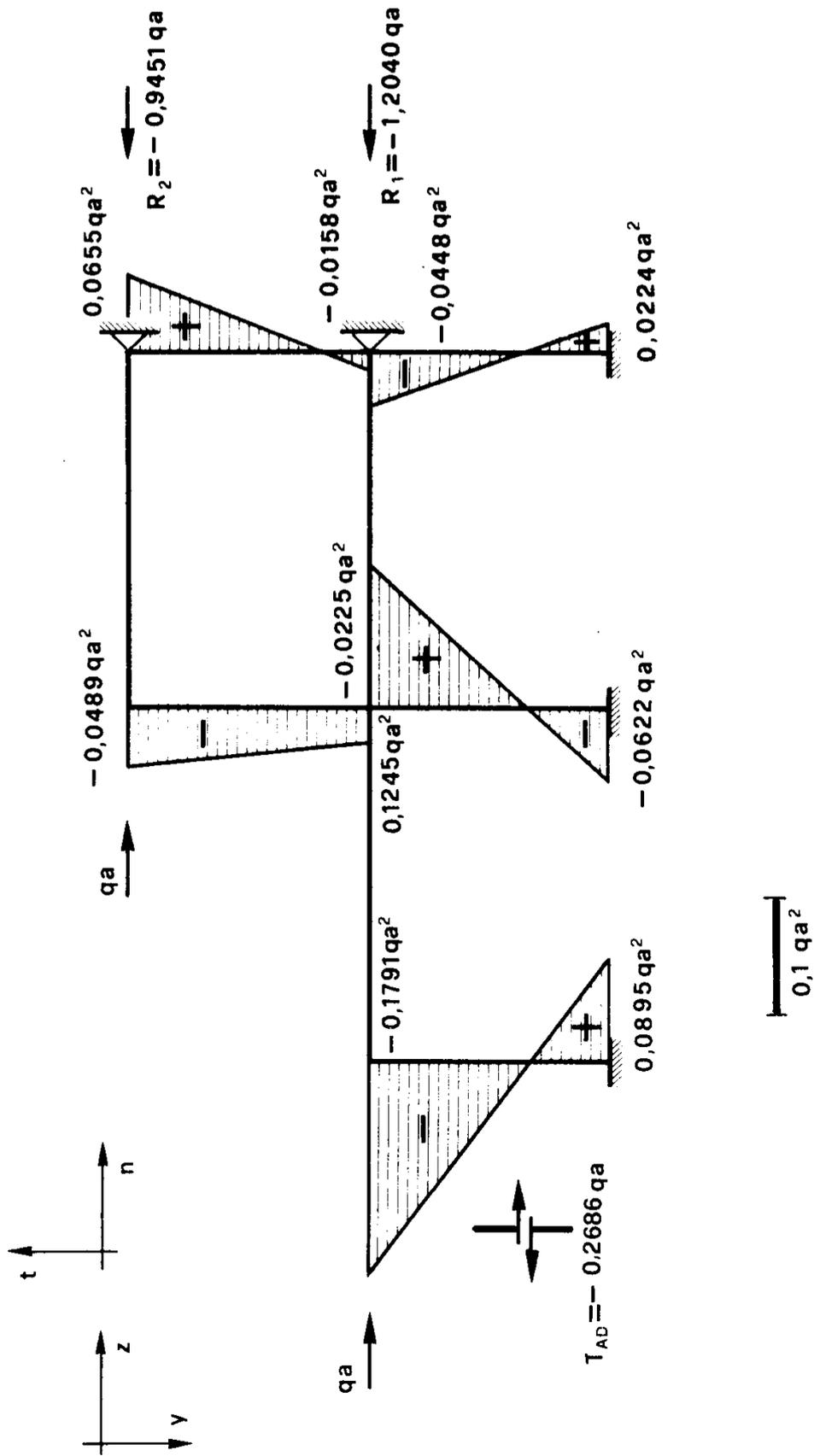


Figura 8d

$$T_{EG} = \frac{0,0225 - 0,0489}{a} qa^2 = - 0,0264 qa$$

$$T_{FH} = \frac{0,0158 + 0,0655}{a} qa^2 = 0,0813 qa .$$

Per l'equilibrio alla traslazione secondo z di ciascuno dei due traversi, si può scrivere:

$$\text{trav. DEF: } R_1 + \Sigma T_{sup} - \Sigma T_{inf} + qa = 0$$

$$\text{trav. GH: } R_2 - \Sigma T \quad + qa = 0$$

da cui

$$R_1 = \Sigma T_{inf} - \Sigma T_{sup} - qa$$

$$R_2 = \Sigma T \quad - qa ,$$

e quindi

$$R_1 = - 1,2040 qa \tag{5}$$

$$R_2 = - 0,9451 qa .$$

Occorre adesso imprimere ai due appoggi fittizi due distorsioni Δ_1 e Δ_2 tali da annullare le reazioni R_1 ed R_2 . Si opera, a ciò fare, come segue.

Si imprime (fig. 8c) una distorsione $\Delta_1 = 1$, mentre i soliti morsetti, che possono traslare ma non ruotare, garantiscono che le rotazioni dei nodi sono nulle. Si generano così (cap. 2, for. 31) le coppie d'incastro perfetto

$$\bar{m}_{EG} = \bar{m}_{GE} = \bar{m}_{FH} = \bar{m}_{HF} = - 6 \frac{EI}{a^2}$$

$$\begin{aligned} \bar{m}_{AD} = \bar{m}_{DA} = \bar{m}_{BE} = \bar{m}_{EB} = \\ = \bar{m}_{CF} = \bar{m}_{FC} = 12 \frac{EI}{a^2} . \end{aligned}$$

La diffusione di tali coppie si effettua (fig. 8f) sul telaio a nodi fissi, poichè Δ_1 è stato già dato, e si tratta soltanto di ridare ai nodi la possibilità

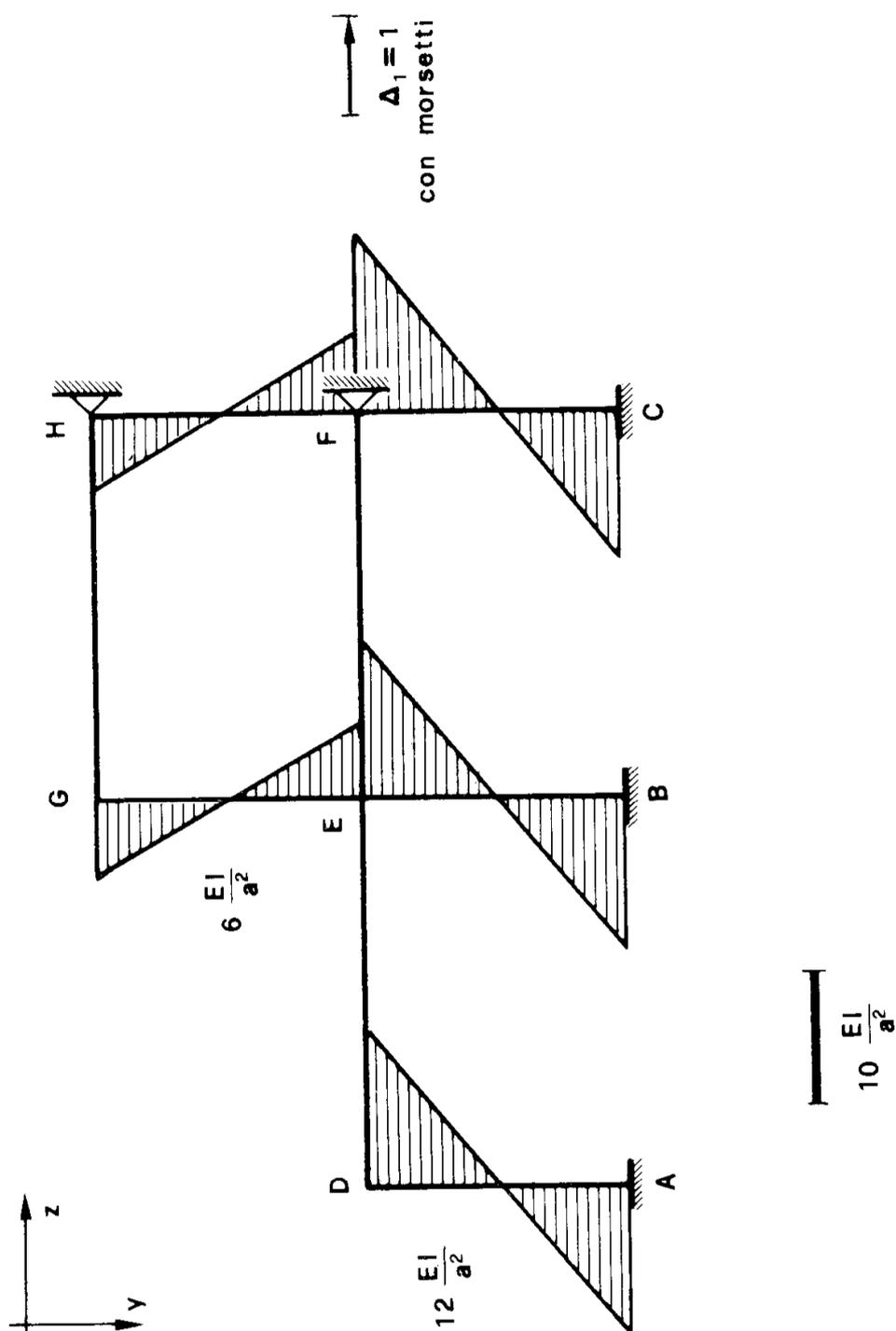


Figura 8e

di ruotare. Nella fig. 8g sono disegnati i momenti connessi con tale diffusione. Occorre calcolare le reazioni R_{11} ed R_{21} provocate da $\Delta_1 = 1$, e per fare ciò si è già visto che occorrono i tagli nei ritti, e solo nei ritti. Si ha

$$T_{AD} = \frac{9,79 + 7,60}{a} \frac{EI}{a^2} = 17,39 \frac{EI}{a^3}$$

$$T_{BE} = \frac{11,87 + 11,75}{a} \frac{EI}{a^2} = 23,62 \frac{EI}{a^3}$$

$$T_{CF} = \frac{11,01 + 10,01}{a} \frac{EI}{a^2} = 21,02 \frac{EI}{a^3}$$

$$T_{EG} = - \frac{5,58 + 5,09}{a} \frac{EI}{a^2} = - 10,67 \frac{EI}{a^3}$$

$$T_{FH} = - \frac{6,45 + 5,38}{a} \frac{EI}{a^2} = - 11,83 \frac{EI}{a^3}$$

e quindi

$$R_{11} = 84,53 \frac{EI}{a^3}$$

$$R_{21} = - 22,50 \frac{EI}{a^3}.$$

Si imprime poi (fig. 8h) una distorsione $\Delta_2 = 1$. Si generano le coppie di incastro perfetto

$$\bar{m}_{EG} = \bar{m}_{GE} = \bar{m}_{FH} = \bar{m}_{HF} = 6 \frac{EI}{a^2};$$

queste coppie si diffondono alla Cross (fig. 8i). Nella fig. 8i sono disegnati i momenti finali di tale stadio. Si ha

$$T_{AD} = \frac{0,14 + 0,28}{a} \frac{EI}{a^2} = 0,42 \frac{EI}{a^3}$$

$$T_{BE} = - \frac{0,46 + 0,93}{a} \frac{EI}{a^2} = - 1,39 \frac{EI}{a^3}$$

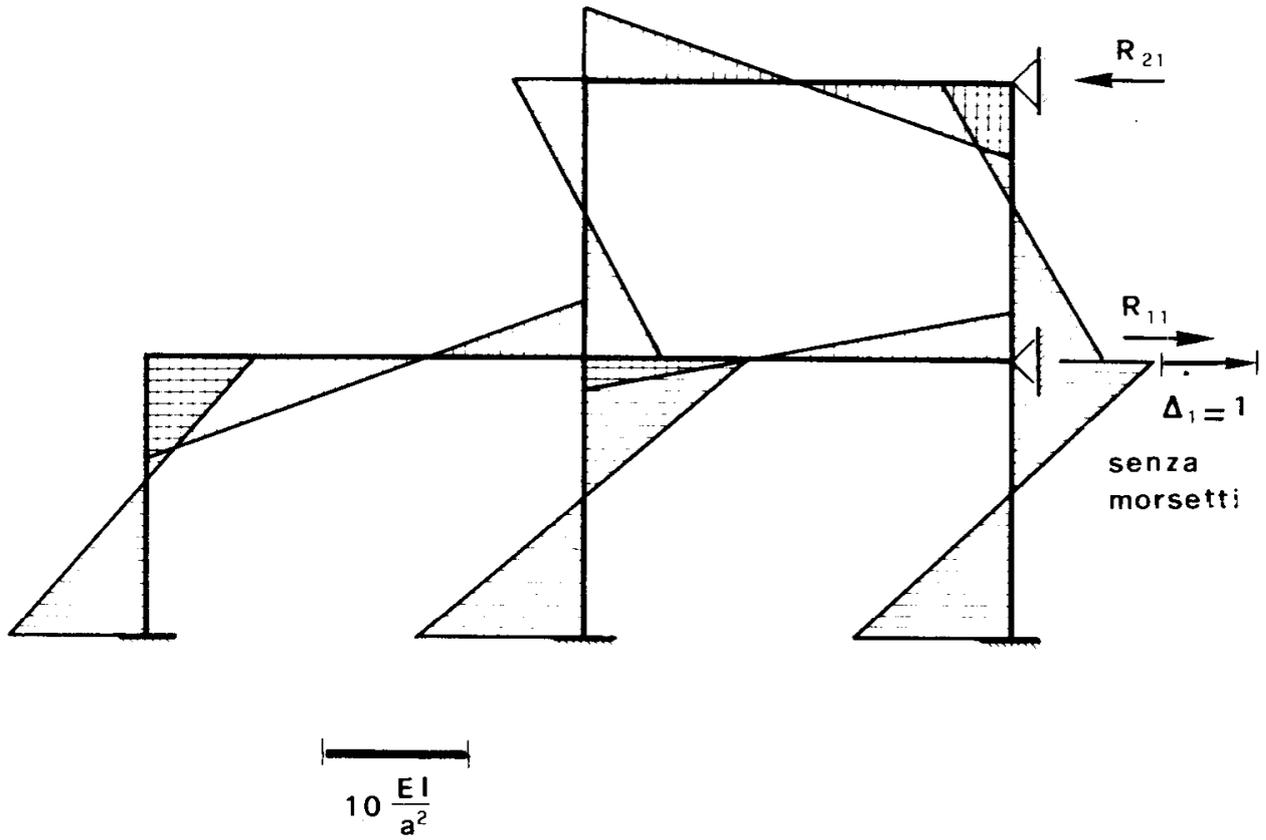


Figura 8g

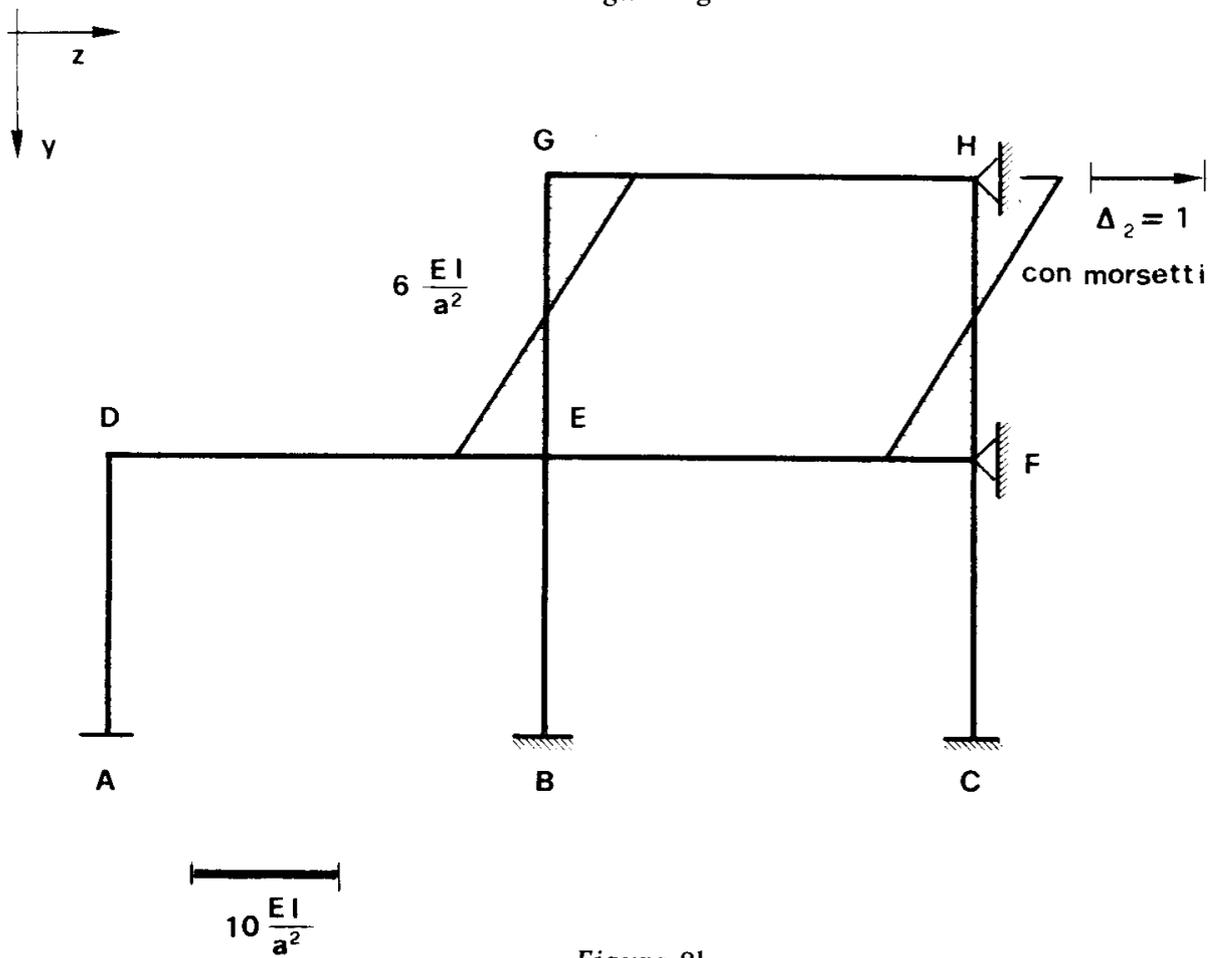


Figura 8h

$$T_{CF} = - \frac{0,76 + 1,53}{a} \frac{EI}{a^2} = - 2,29 \frac{EI}{a^3}$$

$$T_{EG} = \frac{5,03 + 4,77}{a} \frac{EI}{a^2} = 9,80 \frac{EI}{a^3}$$

$$T_{FH} = \frac{4,79 + 4,70}{a} \frac{EI}{a^2} = 9,49 \frac{EI}{a^3}$$

e quindi

$$R_{12} = - 22,55 \frac{EI}{a^3}$$

$$R_{22} = 19,29 \frac{EI}{a^3}$$

Si osservi che, per il teorema di Volterra, è

$$R_{12} = R_{21} ;$$

nel caso in esame questa relazione è verificata a meno del 0,22 %, e ciò è dovuto al fatto che il procedimento di Cross è per sua natura approssimato. Adotteremo

$$R_{12} = R_{21} = - 22,525 \frac{EI}{a^3} .$$

I valori Δ_1 e Δ_2 tali da annullare le reazioni (5) sono forniti da

$$\begin{aligned} R_{11} \Delta_1 + R_{12} \Delta_2 + R_1 &= 0 \\ R_{21} \Delta_1 + R_{22} \Delta_2 + R_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

e cioè dal sistema

$$84,53 \Delta_1 - 22,525 \Delta_2 = 1,2040 \frac{qa^4}{EI}$$

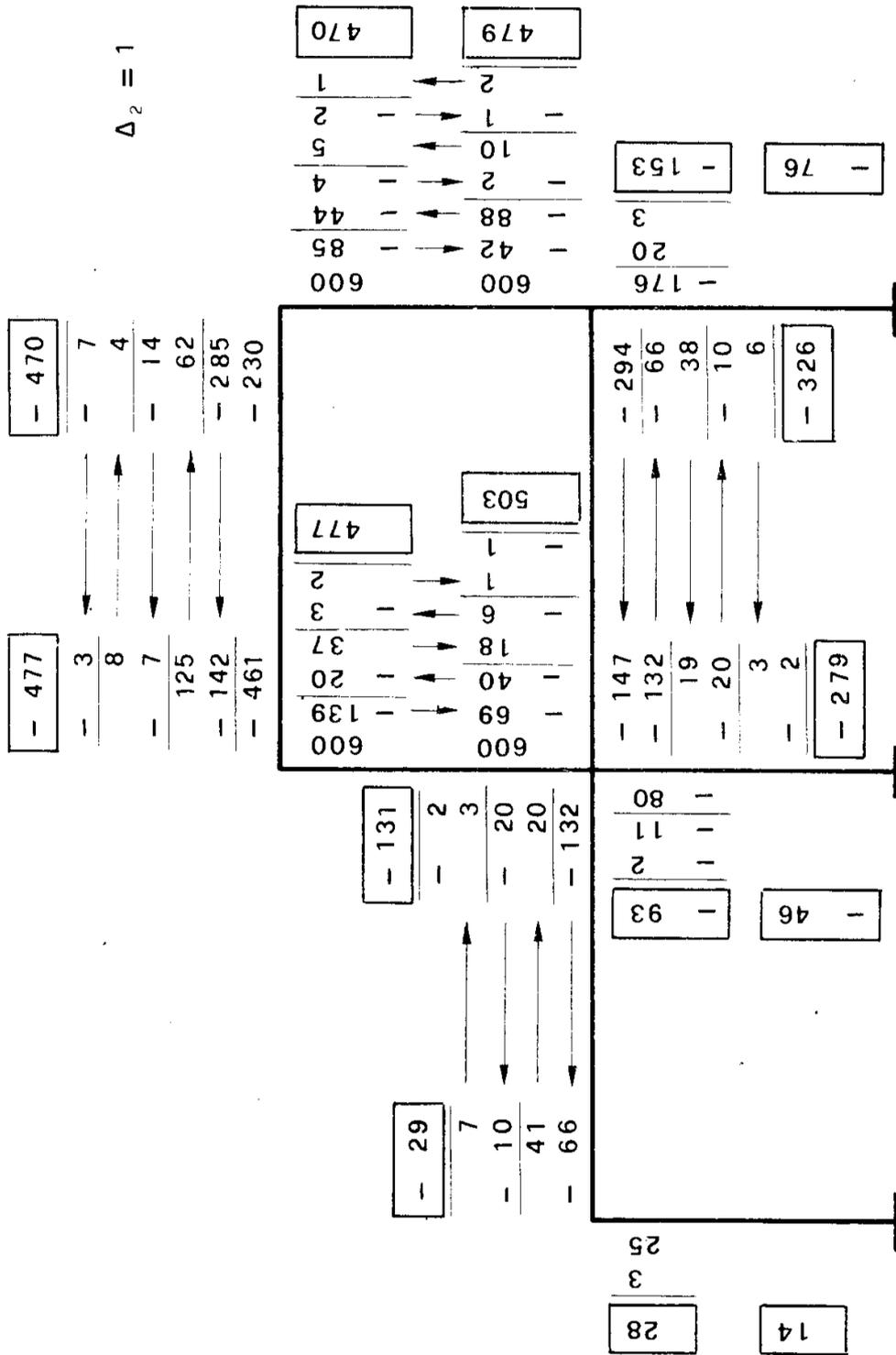


Figura 8i

$$- 22,525 \Delta_1 + 19,29 \Delta_2 = 0,9451 \frac{qa^4}{EI}$$

la cui soluzione è

$$\Delta_1 = 0,03963 \frac{qa^4}{EI} \quad (7)$$

$$\Delta_2 = 0,09527 \frac{qa^4}{EI}$$

Questi sono i valori reali delle traslazioni dei due traversi.

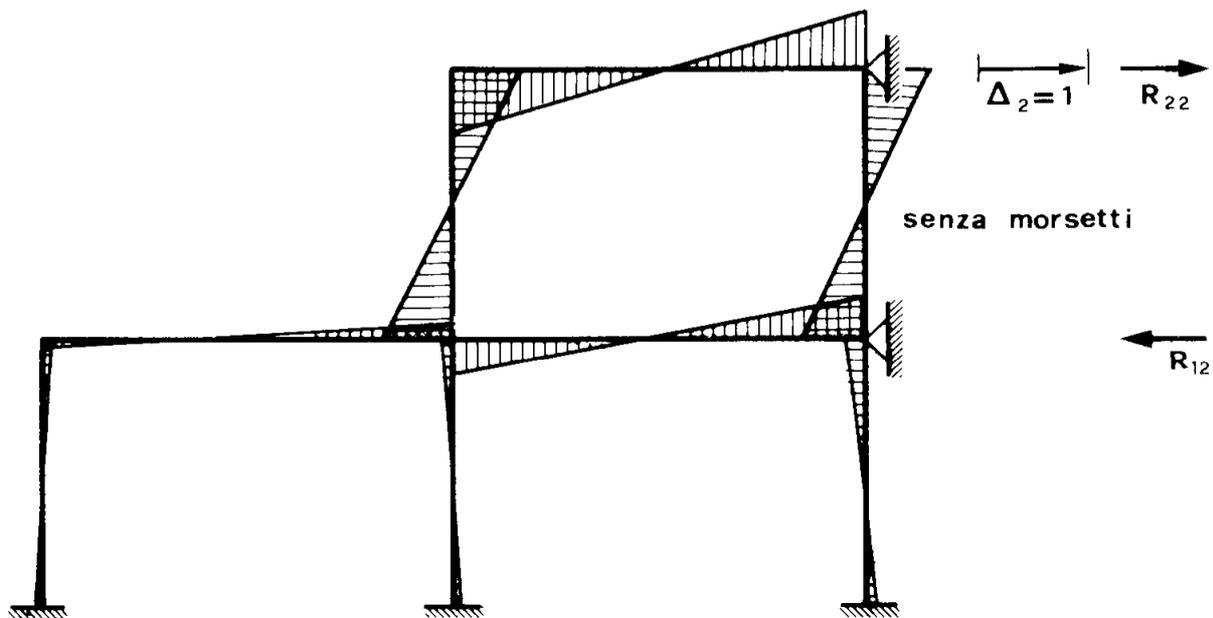


Figura 81

Lo stato tensionale è sovrapposizione di tre stati: quello della fig. 8d, dovuto alle forze applicate sul telaio reso a nodi fissi; quello della fig. 8g moltiplicato per Δ_1 , dovuto alla distorsione Δ_1 della (7); quello della fig. 81 moltiplicato per Δ_2 , dovuto alla distorsione Δ_2 della (7). Si osservi che tale somma è sicuramente congruente, quali che siano i valori di Δ_1 e Δ_2 , ma non equilibrata, perchè i vincoli fittizi sviluppano reazioni che in realtà non esistono; solo per i valori Δ_1 e Δ_2 della (7) la soluzione è equilibrata e congruente. Quindi il procedimento seguito è in un certo senso duale di quello delle forze, esposto in esempi nel capitolo secondo; il primo opera su una struttura resa isostatica, quindi meno vincolata, ed esplora fra tutte le situazioni equilibrate quella che è anche congruente;

il secondo opera su una struttura più vincolata, ed esplora fra tutte le situazioni congruenti quella che è anche equilibrata. Incognite, nel primo procedimento, sono le reazioni iperstatiche; nel secondo invece sono le distorsioni (rotazioni dei morsetti e spostamenti dei vincoli supplementari) in corrispondenza dei vincoli supplementari. Il primo metodo si chiama come già detto *metodo delle forze*, il secondo *metodo dei cedimenti*. Il metodo di Cross è un caso particolare di prassi nell'ambito del metodo *dei cedimenti*; in generale, tale metodo ricerca le distorsioni dei vincoli fittizi tramite un sistema di equazioni algebriche lineari, di cui sarà dato un esempio nel capitolo relativo all'energia potenziale totale. Nella tabella 1 sono riportate nella prima colonna le coppie \mathfrak{M}_0° relative alla fig. 8d, non direttamente ma attraverso i valori

$$\frac{\mathfrak{M}_0}{qa^2},$$

Tabella 1

	$\frac{\mathfrak{M}_0^\circ}{qa^2}$	$\mathfrak{M}_1 \frac{a^2}{EI}$	$\frac{\mathfrak{M}_1 \Delta_1}{qa^2}$	$\mathfrak{M}_2 \frac{a^2}{EI}$	$\frac{\mathfrak{M}_2 \Delta_2}{qa^2}$	$\frac{\mathfrak{M}}{qa^2}$
<i>AD</i>	-- 0,0895	9,79	0,3880	0,14	0,0133	0,3118
<i>DA</i>	-- 0,1791	7,60	0,3012	0,28	0,0267	0,1488
<i>BE</i>	0,0622	11,87	0,4704	-- 0,46	-- 0,0438	0,4888
<i>EB</i>	0,1245	11,75	0,4656	-- 0,93	-- 0,0886	0,5015
<i>CF</i>	-- 0,0224	11,01	0,4363	-- 0,76	-- 0,0724	0,3415
<i>FC</i>	-- 0,0448	10,01	0,3967	-- 1,53	-- 0,1458	0,2061
<i>EG</i>	0,0225	-- 5,58	-- 0,2211	5,03	0,4792	0,2806
<i>GE</i>	-- 0,0489	-- 5,09	-- 0,2017	4,77	0,4544	0,2038
<i>FH</i>	0,0158	-- 6,45	-- 0,2556	4,79	0,4564	0,2166
<i>HF</i>	0,0655	-- 5,38	-- 0,2132	4,70	0,4478	0,3001
<i>DE</i>	0,1791	-- 7,60	-- 0,3012	-- 0,28	-- 0,0267	-- 0,1488
<i>ED</i>	-- 0,3171	-- 4,10	-- 0,1625	-- 1,31	-- 0,1248	-- 0,6044
<i>EF</i>	0,1701	-- 2,07	-- 0,0820	-- 2,79	-- 0,2658	-- 0,1777
<i>FE</i>	0,0290	3,56	0,1411	-- 3,26	-- 0,3106	-- 0,4227
<i>GH</i>	0,0489	5,09	0,2017	-- 4,77	-- 0,4544	-- 0,2038
<i>HG</i>	-- 0,0655	5,38	0,2132	-- 4,70	-- 0,4478	-- 0,3001

$$\Delta_1 = 0,03963 \frac{qa^4}{EI}$$

$$\Delta_2 = 0,09527 \frac{qa^4}{EI}$$

che sono adimensionali. Nella seconda colonna sono riportate le coppie \mathfrak{M}_1 provocate da $\Delta_1 = 1$ (fig. 8g) attraverso i valori

$$\mathfrak{M}_1 \frac{a^2}{EI},$$

pur essi adimensionali. Nella quarta colonna sono riportate le coppie \mathfrak{M}_2 provocate da $\Delta_2 = 1$ (fig. 8l) attraverso i valori

$$\mathfrak{M}_2 \frac{a^2}{EI}.$$

Nella terza colonna sono consegnati i prodotti della seconda per 0,03963, e cioè (7) i valori

$$\mathfrak{M}_1 \frac{a^2}{EI} \frac{EI \Delta_1}{qa^4} = \frac{\mathfrak{M}_1 \Delta_1}{qa^2}.$$

Nella quinta colonna sono consegnati i prodotti della quarta per 0,09500, e cioè (7) i valori

$$\mathfrak{M}_2 \frac{a^2}{EI} \frac{EI \Delta_2}{qa^4} = \frac{\mathfrak{M}_2 \Delta_2}{qa^2}.$$

Nella sesta colonna infine appaiono le somme dei termini corrispondenti della prima, terza e quinta, e cioè i termini

$$\frac{\mathfrak{M}^0 + \mathfrak{M}_1 \Delta_1 + \mathfrak{M}_2 \Delta_2}{qa^2}$$

che sono, a meno di qa^2 , le coppie reali agli estremi di ogni trave.

Nella fig. 8m sono disegnati i momenti; dopo aver tracciato, in base ai valori della colonna sesta della tabella, le ordinate momento alle estremità delle travi, si inseriscono nel tratto DE e nel tratto GH le parabole di freccia rispettivamente

$$2q \frac{(1,5a)^2}{8} = 0,5625 qa^2$$

$$q \frac{(1,5a)^2}{8} = 0,2812 qa^2.$$

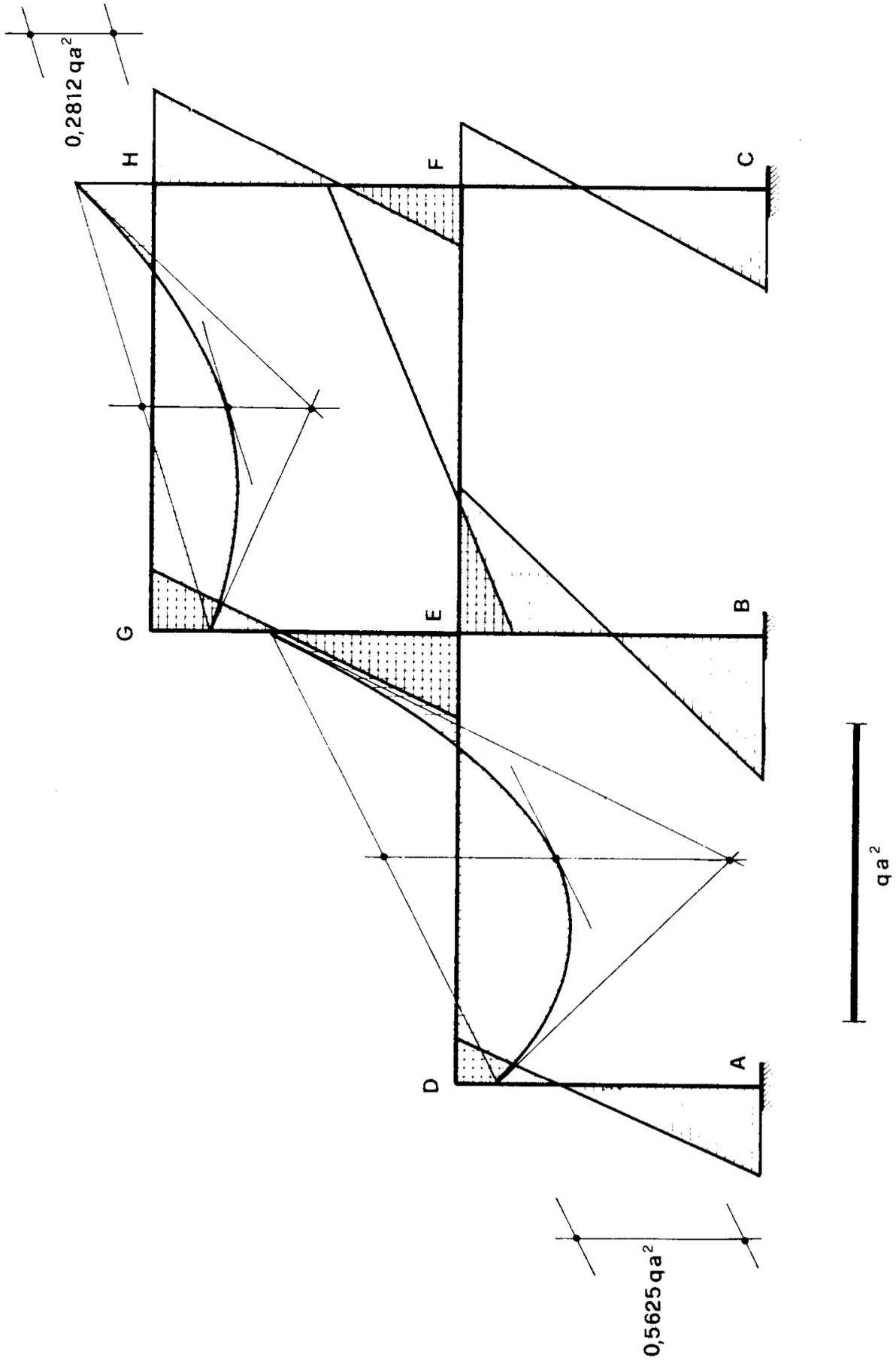


Figura 8m

Si passi ora al calcolo dei tagli. Risulta

$$T_A = T_{DA} = \frac{0,3118 + 0,1488}{a} qa^2 = 0,4606 qa$$

$$T_B = T_{EB} = \frac{0,4888 + 0,5015}{a} qa^2 = 0,9903 qa$$

$$T_C = T_{FC} = \frac{0,3415 + 0,2061}{a} qa^2 = 0,5476 qa$$

$$T_{EG} = T_{GE} = \frac{0,2806 + 0,2038}{a} qa^2 = 0,4844 qa$$

$$T_{FH} = T_{HF} = \frac{0,2166 + 0,3001}{a} qa^2 = 0,5167 qa$$

$$T_{DE} = - \frac{0,1488 + 0,6044}{1,5 a} qa^2 +$$

$$+ 0,5 \cdot 2q \cdot 1,5 a = (- 0,5021 + 1,5) qa =$$

$$T_{DE} = (- 0,5021 - 1,5) qa = 0,9979 qa$$

$$T_{EF} = T_{FE} = - \frac{0,1777 + 0,4227}{1,5 a} qa^2 = - 0,4003 qa$$

$$T_{GH} = - \frac{0,2038 + 0,3001}{1,5 a} qa^2 + 0,5 \cdot q \cdot 1,5 a =$$

$$= (- 0,3359 + 0,75) qa = 0,4141 qa$$

$$T_{HG} = (- 0,3359 - 0,75) qa = - 1,0859 qa$$

Gli sforzi normali sono

$$N_{AD} = N_{DA} = - T_{DE} = - 0,9979 qa$$

$$\begin{aligned}
 N_{ED} = N_{DE} &= -qa + T_{DA} &&= -0,5394 qa \\
 N_{EG} = N_{GE} &= -T_{GH} &&= -0,4141 qa \\
 N_{HG} = N_{GH} &= -qa + T_{GE} &&= -0,5166 qa \\
 N_{FH} = N_{HF} &= T_{HG} &&= -1,0859 qa \\
 N_{EF} = N_{FE} &= T_{FH} - T_{FC} &&= -0,0309 qa \\
 N_{CF} = N_{FC} &= N_{FH} + T_{FE} &&= -1,4862 qa \\
 N_{BE} = N_{EB} &= N_{EG} + T_{ED} + T_{EF} &&= -2,0159 qa
 \end{aligned}$$

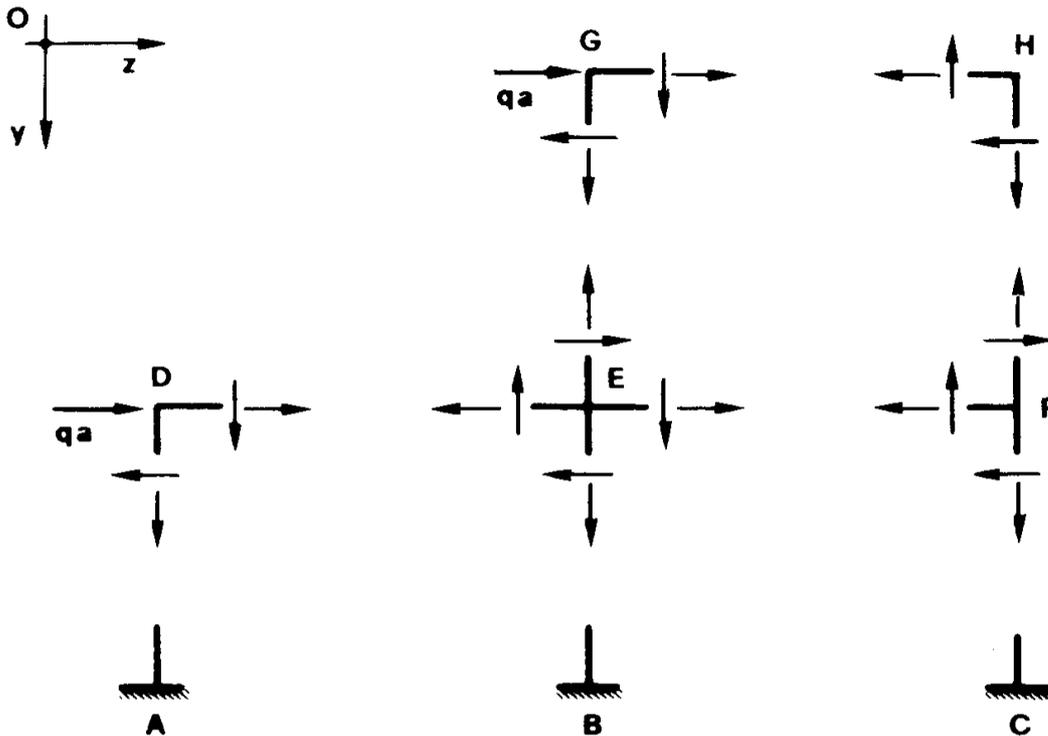


Figura 8n

Per la migliore comprensione delle soprascritte relazioni fra i tagli e gli sforzi normali, tali caratteristiche, relative ai singoli nodi, e con i versi che loro competono per segno positivo, sono riportate nella fig. 8n.

Si verifica facilmente (*equilibrio dei momenti*) che ogni nodo presenta

$$\sum_h m_{ih} = 0 \ ;$$

ciò era da attendersi, poichè in ciascuno dei tre schemi delle fig. 8c, 8f ed 8i si è esclusa, facendo la somma delle coppie delle singole colonne, l'ultima coppia eventualmente non riportata. Così pure risulta (*equilibrio dei tagli*)

$$\Sigma' T_{ih} = T_A + T_B + T_C = 1,9985 qa \cong 2 qa$$

$$\Sigma'' T_{ih} = T_{EG} + T_{FH} = 1,0011 qa \cong qa$$

ed ancora (*equilibrio degli sforzi assiali*)

$$N_{AD} + N_{BE} + N_{CF} = 4,5 qa$$

$$N_{EG} + N_{FH} = 1,5 qa$$

L'equilibrio dei tagli è soddisfatto nello stesso ordine di approssimazione con il quale sono state risolte le (6), e cioè nell'ordine dell'uno per mille (quarta cifra significativa).

Si osservi che la soluzione è certamente congruente; la verifica in tal senso (uguaglianza delle rotazioni delle estremità delle aste che concorrono nello stesso nodo) si lascia al lettore. Invece la soluzione è equilibrata nell'ordine di approssimazione delle coppie finali non equilibrate nei singoli Cross. Una verifica completa dei dati risultanti da un qualsiasi calcolo di un telaio non può limitarsi ai tre equilibri (dei momenti, dei tagli, e degli sforzi assiali), ma deve spingersi anche alla congruenza; a ciò fare, occorre calcolare per ogni elemento (trave o pilastro) le rotazioni alle estremità, funzioni dei Δ_i dei traversi, dei carichi applicati e delle coppie reattive agli estremi.

Nella tabella 2 sono riportati i dati di uscita ottenuti da un programma che si esporrà in dettaglio nel cap. 7.

Tabella 2

```

3930 DATA 2,2,1
3940 DATA 1,5,5,.00001,2,0
3950 DATA 1,5,5,5,0,1
3960 DATA 1,2,2,2,0,0,0,1
3970 DATA 1,.00001,1,1,0,0,0,1

```

```

rotazione in 1 =
-4.09085444425E-2

```

```

rotazione in 2 =
3.3541305007E-3

```

```

rotazione in 3 =
-3.34557543639E-2

```

```

rotazione in 4 =
-3.09497679161E-2

```

```

rotazione in 5 =
-3.36503983814E-2

```

```

rotazione in 6 =
8.4075822176E-3

```

```

spostamento trav. 1 =
3.96128058288E-2

```

```

spostamento trav. 2 =
9.51154846345E-2

```

```

coppia flettente alla base del
ritto 1 = .311719492174
coppia flettente alla base del
ritto 2 = .488770191947
coppia flettente alla base del
ritto 3 = .341530652488

```

```

coppia flettente sulla trave al
la sinistra di 1 = 0
coppia flettente sulla trave al
la destra di 1 = -.148086389228
coppia flettente sul ritto sotto
1 = .148085314404
coppia flettente sul ritto sopra
1 = 1.07482359232E-6

```

```

coppia flettente sulla trave al
la sinistra di 2 =
-.603001889607

```

COPPIA flettente sulla trave al
la destra di 2 = -.178316622417
COPPIA flettente sul ritto sotto
2 = 50218671395
COPPIA flettente sul ritto sopra
2 = 279131798074

COPPIA flettente sulla trave al
la sinistra di 3 =
-.423715854847
COPPIA flettente sulla trave al
la destra di 3 = 0
COPPIA flettente sul ritto sotto
3 = .207707635033
COPPIA flettente sul ritto sopra
3 = .216006219814

COPPIA flettente sulla trave al
la sinistra di 4 = 0
COPPIA flettente sulla trave al
la destra di 4 =
-1.27399912285E-6
COPPIA flettente sul ritto sotto
4 = 1.27399912284E-6
COPPIA flettente sul ritto sopra
4 = 0

COPPIA flettente sulla trave al
la sinistra di 5 =
-1.31000752905E-6
COPPIA flettente sulla trave al
la destra di 5 = -.2051214303
COPPIA flettente sul ritto sotto
5 = 20512274031
COPPIA flettente sul ritto sopra
5 = 0

COPPIA flettente sulla trave al
la sinistra di 6 =
- 299734892974
COPPIA flettente sulla trave al
la destra di 6 = 0
COPPIA flettente sul ritto sotto
6 = 299734892976
COPPIA flettente sul ritto sopra
6 = 0

taglio alla base del ritto 1 =
.459804806578
taglio alla base del ritto 2 =
.990956905897
taglio alla base del ritto 3 =
.549238287521

taglio alla sinistra di 1 = 0
taglio alla destra di 1 =
.999274480777
taglio sotto 1 = .459804806578
taglio sopra 1 =
2.34982271516E-6

taglio alla sinistra di 2 =
-2.00072551922

taglio alla destra di 2 =
 -.401354984843
 taglio sotto 2 = .990956905897
 taglio sopra 2 = .484254538384

taglio alla sinistra di 3 =
 -.401354984843
 taglio alla destra di 3 = 0
 taglio sotto 3 = .549238287521
 taglio sopra 3 = .51574311279

taglio alla sinistra di 4 = 0
 taglio alla destra di 4 =
 -1.72267110127E-6
 taglio sotto 4 =
 2.34882271516E-6
 taglio sopra 4 = 0

taglio alla sinistra di 5 =
 -1.72267110127E-6
 taglio alla destra di 5 =
 .413429117817
 taglio sotto 5 = .484254538384
 taglio sopra 5 = 0

taglio alla sinistra di 6 =
 -1.08657088218
 taglio alla destra di 6 = 0
 taglio sotto 6 = .51574311279
 taglio sopra 6 = 0

sforzo normale sulla trave della
 verticale 1 e del piano 1 =
 -.540197542245
 sforzo normale sulla trave della
 verticale 2 e del piano 1 =
 -.033495174732

sforzo normale sulla trave della
 verticale 1 e del piano 2 =
 -.999997651177
 sforzo normale sulla trave della
 verticale 2 e del piano 2 =
 -.515743112793

sforzo normale sul pilastro del
 piano 1 e del ritto 1 =
 -.999272758106
 sforzo normale sul pilastro del
 piano 2 e del ritto 1 =
 1.72267110127E-6

sforzo normale sul pilastro del
 piano 1 e del ritto 2 =
 -2.01280137487
 sforzo normale sul pilastro del
 piano 2 e del ritto 2 =
 -.413430840488

sforzo normale sul Pilastro del
Piano 1 e del ritto 3 =
-1.48792586702
sforzo normale sul Pilastro del
Piano 2 e del ritto 3 =
-1.08657088218

