

CAPITOLO PRIMO

LE DEFORMATE DELLE TRAVI

Premessa.

In questo capitolo si prendono in esame travi isostatiche ad asse rettilineo; la sezione, più precisamente la rigidità flessionale specifica EI , è in genere variabile. Struttura e carichi sono simmetrici rispetto ad un piano π ; si è quindi in presenza di sistemi monodimensionali piani ad asse rettilineo.

Il verso positivo delle rotazioni in π è quello antiorario.

L'origine del riferimento cartesiano ortogonale in π coincide in genere con il baricentro della sezione di sinistra della trave, l'asse z coincide con l'asse della trave, ed è orientato verso destra; l'asse y è orientato verso il basso.

Per le suddette ipotesi, l'elasticità della struttura consente alla generica sezione, considerata come rigida, soltanto rotazioni φ intorno ad un asse parallelo ad x .

Si trascurano le componenti w degli spostamenti secondo z dei punti dell'asse dovuti alla flessione. Gli spostamenti dei punti dell'asse della trave coincidono quindi con le loro componenti v secondo y .

Il diagramma degli spostamenti $v(z)$ dei punti dell'asse si chiama *deformata* della trave. Altro diagramma che si considera è quello delle rotazioni $\varphi(z)$; più precisamente, esso è il diagramma delle ampiezze delle rotazioni, in genere fornite in radianti, delle sezioni rette.

La conoscenza di v_S e φ_S per la generica sezione S definisce la posizione di S a deformazione avvenuta; essa deriva da una rotazione rigida di ampiezza φ_S (il cui vettore è ortogonale a π) intorno ad un punto di z posto alla distanza

$$d = \frac{v}{\varphi}$$

dalla parallela equiversa ad y per S ; ciò per l'ipotesi di piccolezza degli spostamenti, e per essere φ fornita in radianti.

Spesso si chiama l'asse z *orizzontale*, l'asse y *verticale*.

L'ipotesi di piccoli spostamenti, coerentemente seguita, importa l'obbligo di trascurare i momenti flettenti connessi con le eventuali componenti assiali delle forze esterne, momenti che sorgono al nascere degli spostamenti; ciò, unitamente a quanto già detto circa la trascurabilità delle w , consente di chiamare in gioco le sole componenti parallele ad y delle forze, oltre naturalmente le coppie.

Le relazioni differenziali alle quali si farà ricorso sono le ben note

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI} \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dz} = -\varphi \quad (2)$$

da cui si trae

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} \quad (3)$$

Se oltre alle forze agiscono distorsioni del tipo μ , le formule precedenti si completano in

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI} - \mu \quad (1')$$

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EI} + \mu \quad (3')$$

Nelle (1) (2) e (3), e così nelle (1') e (3'), si è tenuto conto delle sole deformazioni di tipo flessionale, trascurando l'effetto delle deformazioni di scorrimento (dovute al taglio T o alle distorsioni ϑ); esse saranno nel seguito sistematicamente ignorate, salvo esplicito avviso del contrario.

Il diagramma $\varphi(z)$ si ottiene per integrazione della funzione $\frac{M}{EI} - \mu$ (*curvatura*), e $v(z)$ a sua volta per integrazione di $\varphi(z)$. Quindi si devono fare $2n$ integrazioni in n intervalli consecutivi, i cui estremi sono ascisse di punti dove $\frac{M}{EI} - \mu$ cambia espressione; le costanti di integrazione sono $2n$, e di esse $2n - 2$ sono determinate dalla condizione che in ogni punto di frontiera comune a due intervalli consecutivi deve per congruen-

za interna verificarsi l'uguaglianza delle φ e delle v a destra e a sinistra.

Se la trave è costituita da un unico tratto, la fondamentale è unica, e le due costanti residue sono definite dalle due condizioni di vincolo; se è costituita da t tratti, collegati tra loro ed al suolo, per ogni tratto occorre fissare la fondamentale, e cioè due costanti; in tutto $2t$ costanti, pari in numero alle condizioni di vincolo (congruenza esterna).

Nel metodo della *doppia integrazione* (Saviotti) è consigliabile seguire la via analitica; esso quindi può presentarsi vantaggioso solo se la trave è ad una sola campata, e se la funzione $\frac{M}{EI} - \mu$ è fornita da un'unica espressione.

Paragonando le (1') e (2') con le note formule che legano T a q , ed M a T :

$$\frac{dT}{dz} = -q \quad (4)$$

$$\frac{dM}{dz} = T \quad (5)$$

$$\frac{d^2M}{dz^2} = -q, \quad (6)$$

ed in particolare la (3') con la (6), si osserva che il diagramma v , a meno di funzioni lineari, coincide

$$v = M^* \quad (7)$$

con quello M^* relativo ad un carico q^* fittizio fornito da

$$q^* = \frac{M}{EI} - \mu, \quad (8)$$

e può quindi essere ottenuto come funicolare di tale carico. Le funzioni lineari incognite, in numero di t , sono rappresentate dalle fondamentali, che si tracciano utilizzando le condizioni di vincolo.

E' evidente che, se si vuole estendere l'analogia al disegno delle fondamentali, una condizione di congruenza espressa in M^* invece che in v obbliga a variare il tipo di vincolo ad essa relativo; per esempio, su un appoggio è $v = M^* = 0$, e quindi l'appoggio diviene cerniera. Sorge così il concetto di *trave ausiliaria*, dove si scambiano appoggi e cerniere, bipen-

doli esterni ed interni, incastri e sezioni estreme libere.

Dal confronto tra la (2) e la (5) si ha poi

$$T^* = \frac{dM^*}{dz} = \frac{dv}{dz} = -\varphi$$

e quindi

$$\varphi = -T^* \quad (9)$$

Il *metodo del poligono funicolare* (Mohr) è in genere utilizzato per via grafica, se si vuole tutta la deformata. Più spesso però accade di dover conoscere soltanto i valori di φ o v per alcune sezioni particolari; in tal caso il metodo ben si presta all'utilizzazione analitica, attraverso il procedimento di Lagrange e la considerazione d'obbligo della trave ausiliaria.

Sovente, per ottenere sulle travi a più campate alcuni valori particolari di φ o v , sfruttando le conoscenze relative a schemi più semplici, si segue il *procedimento di composizione* degli spostamenti e delle rotazioni; anche di questo saranno forniti alcuni esempi elementari.

Per i segni si ricordi che le coppie sono positive se *antiorarie*, e così le rotazioni. Il momento flettente è positivo se sulla faccia di normale (esterna) equiversa all'asse t della trave è antiorario; ne consegue che, riportando il suo valore sull'asse orientato n , il diagramma $M(t)$ giace, rispetto all'asse t , *dalla parte delle fibre tese*. Ed infatti, la coppia nt è antioraria.

Il taglio è positivo se, sulla faccia di normale equiversa all'asse t , è diretto secondo n . Ne consegue che $T > 0$ quando sull'elemento di trave lungo ds esso dà luogo ad una coppia Tds *oraria*. Inoltre, nei tratti scarichi a $T > 0$ corrisponde un segmento di $M(s)$ ruotato in senso *orario*.

Problema n. 1.

Si desidera la deformata della trave della fig. 1; essa è di sezione e materiale indipendenti da z , appoggiata ai due estremi A e B , di luce l . Il carico è costituito da due stese uniformi di diverso valore, pari a q'

da 0 ad $\frac{l}{2}$, q'' da $\frac{l}{2}$ ad l :

$$q(z) = q' \quad \text{se } z \in \left[0, \frac{l}{2}\right]$$

$$q(z) = q'' \quad \text{se } z \in \left] \frac{l}{2}, l \right]$$

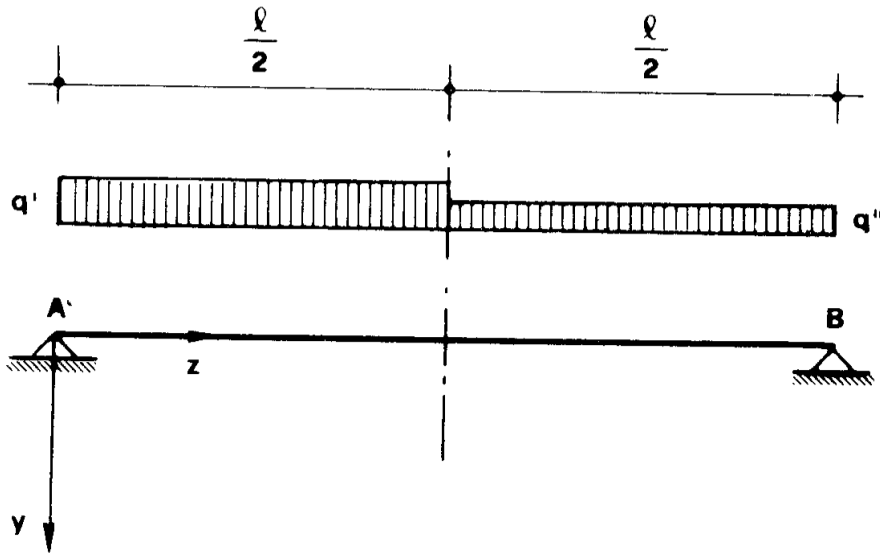


Figura 1

Chiamando T_0 e $T_{l/2}$ i valori del taglio in $z = 0$ e $z = \frac{l}{2}$, dalla (4) si trae

$$T(z) = T_0 - \int_0^z q' dz = T_0 - q'z \quad \text{se } z \in \left] 0, \frac{l}{2} \right],$$

$$T(z) = T_{l/2} - \int_{l/2}^z q'' dz = T_{l/2} - q'' \left(z - \frac{l}{2} \right) =$$

$$= T_0 - q' \frac{l}{2} - q'' \left(z - \frac{l}{2} \right), \quad \text{se } z \in \left[\frac{l}{2}, l \right[.$$

La funzione $T(z)$ è così definita a meno della costante T_0 .

Chiamando M_0 ed $M_{l/2}$ i valori del momento in $z = 0$ e $z = \frac{l}{2}$, dalla (5) si ottiene ($M_0 = 0$)

$$\begin{aligned}
 M(z) &= M_0 + \int_0^z T \, dz = \int_0^z (T_0 - q'z) \, dz = \\
 &= T_0 z - q' \frac{z^2}{2} \quad \text{se } z \in \left[0, \frac{l}{2}\right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M(z) &= M_{l/2} + \int_{l/2}^z T \, dz = T_0 \frac{l}{2} - q' \frac{l^2}{8} + \\
 &+ \left(T_0 - q' \frac{l}{2}\right) \int_{l/2}^z dz - q'' \int_{l/2}^z \left(z - \frac{l}{2}\right) dz = \\
 &= q' \frac{l^2}{8} - q'' \frac{l^2}{8} + \left(T_0 - q' \frac{l}{2} + q'' \frac{l}{2}\right) z - q'' \frac{z^2}{2} \\
 & \quad \text{se } z \in \left[\frac{l}{2}, l\right]
 \end{aligned}$$

Dalla condizione in B

$$M(l) = 0$$

si trae

$$T_0 = \frac{l}{8} (3q' + q'').$$

Le funzioni $T(z)$ ed $M(z)$ sono così definite, e si può scrivere

$$T(z) = \frac{l}{8} (3q' + q'') - q'z \quad \text{se } z \in \left]0, \frac{l}{2}\right[$$

$$T(z) = \frac{l}{8} (-q' + 5q'') - q''z \quad \text{se } z \in \left[\frac{l}{2}, l\right[$$

$$M(z) = \frac{l}{8} (3q' + q'') z - q' \frac{z^2}{2} \quad \text{se } z \in \left[0, \frac{l}{2}\right]$$

$$M(z) = \frac{l^2}{8} (q' - q'') - \frac{l}{8} (q' - 5q'') z - q'' \frac{z^2}{2} \quad \text{se } z \in \left[\frac{l}{2}, l \right]$$

(10)

Dalle prime delle (10) si ha

$$R_A = -T(0) = -\frac{l}{8} (3q' + q'')$$

(11)

$$R_B = T(l) = -\frac{l}{8} (q' + 3q'') .$$

Si osservi che, per $q' = q'' = q$, è

$$T(z) = \frac{q l}{2} - q z \quad z \in] 0, l [$$

$$M(z) = \frac{q z}{2} (l - z) \quad z \in [0, l]$$

$$R_A = -\frac{q l}{2}$$

$$R_B = -\frac{q l}{2} .$$

Si passi ora al calcolo di $\varphi(z)$ e $v(z)$.

Dalla (1) si trae

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_0 + \int_0^z \frac{M}{EI} dz = \\ &= \varphi_0 + \frac{l(3q' + q'')}{8EI} \int_0^z z dz - \frac{q'}{2EI} \int_0^z z^2 dz = \end{aligned}$$

$$= \varphi_0 + \frac{l(3q' + q'')}{16EI} z^2 - \frac{q'}{6EI} z^3 \quad \text{se } z \in \left[0, \frac{l}{2}\right];$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_{l/2} + \int_{l/2}^z \frac{M}{EI} dz = \\ &= \varphi_0 + \frac{l^3(5q' + 3q'')}{192EI} + \frac{l^2(q' - q'')}{8EI} \int_{l/2}^z dz - \\ &\quad - \frac{l(q' - 5q'')}{8EI} \int_{l/2}^z z dz - \frac{q''}{2EI} \int_{l/2}^z z^2 dz = \\ &= \varphi_0 - \frac{l^3(q' - q'')}{48EI} + \frac{l^2(q' - q'')}{8EI} z - \\ &\quad - \frac{l(q' - 5q'')}{16EI} z^2 - \frac{q''}{6EI} z^3 \quad \text{se } z \in \left[\frac{l}{2}, l\right]. \end{aligned}$$

La funzione $\varphi(z)$ è così definita a meno della costante φ_0 . Si ha poi dalla (2), ricordando che

$$v(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} v(z) &= - \int_0^z \varphi dz = \\ &= - \varphi_0 z - \frac{l(3q' + q'')}{48EI} z^3 + \frac{q'}{24EI} z^4 \quad \text{se } z \in \left[0, \frac{l}{2}\right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(z) &= v_{l/2} - \int_{l/2}^z \varphi dz = \\ &= - \varphi_0 \frac{l}{2} - \frac{2q' + q''}{384EI} l^4 - \varphi_0 \int_{l/2}^z dz + \end{aligned}$$

ed ancora

$$v(z) = \frac{9q' + 7q''}{384 EI} l^3 z - \frac{3q' + q''}{48 EI} l z^3 - \frac{q'}{24 EI} z^4 \quad \text{se } z \in \left[0, \frac{l}{2}\right];$$

$$v(z) = -\frac{q' - q''}{384 EI} l^4 + \frac{17q' - q''}{384 EI} l^3 z - \frac{q' - q''}{16 EI} l^2 z^2 + \frac{q' - 5q''}{48 EI} l z^3 + \frac{q''}{24 EI} z^4 \quad \text{se } z \in \left[\frac{l}{2}, l\right]$$

Si osservi che, per $q' = q'' = q$, dalle (12) e (13) si trae

$$\varphi = \frac{q}{24 EI} (-l^3 + 6lz^2 - 4z^3) \quad z \in [0, l]$$

$$v = \frac{q}{24 EI} (l^3 z - 2lz^3 + z^4) \quad z \in [0, l].$$

Si ha così

$$z = 0 \quad \varphi = -\frac{ql^3}{24 EI} \quad v = 0$$

$$z = \frac{l}{2} \quad \varphi = 0 \quad v = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

$$z = l \quad \varphi = \frac{ql^3}{24 EI} \quad v = 0.$$

Problema n. 2.

La trave della fig. 2a, di luce 3a, presenta EI indipendente da z ; essa è appoggiata in A e B , e soggetta ad una forza F all'ascissa $z = a$. Si ha:

$$T(z) = T_0 - \int_0^z q dz = T_0 \quad \text{se } z \in]0, a[$$

$$T(z) = T_a^d - \int_a^z q dz = T_a^d = T_0 - F \quad \text{se } z \in]a, 3[,$$

dove con T_a^d si è indicato il valore del taglio immediatamente a destra della sezione $z = a$. Se con T_a^s si indica il valore del taglio immediatamente a sinistra di $z = a$, l'equilibrio alla traslazione del tronco elementare compreso tra le due sezioni $a - dz$ ed $a + dz$ impone che sia

$$-T_a^s + F + T_a^d = 0$$

da cui

$$T_a^d = T_a^s - F = T_0 - F .$$

Per il momento può scriversi ($M_0 = 0$)

$$M(z) = M_0 + \int_0^z T dz = T_0 z \quad \text{se } z \in [0, a]$$

$$M(z) = M_a + \int_a^z T dz = T_0 a + (T_0 - F)(z - a) \quad \text{se } z \in [a, 3a].$$

Dalla condizione

$$M_{3a} = M(3a) = 0$$

si trae

$$T_0 a + (T_0 - F) 2a = 0$$

da cui

$$T_0 = \frac{2}{3} F .$$

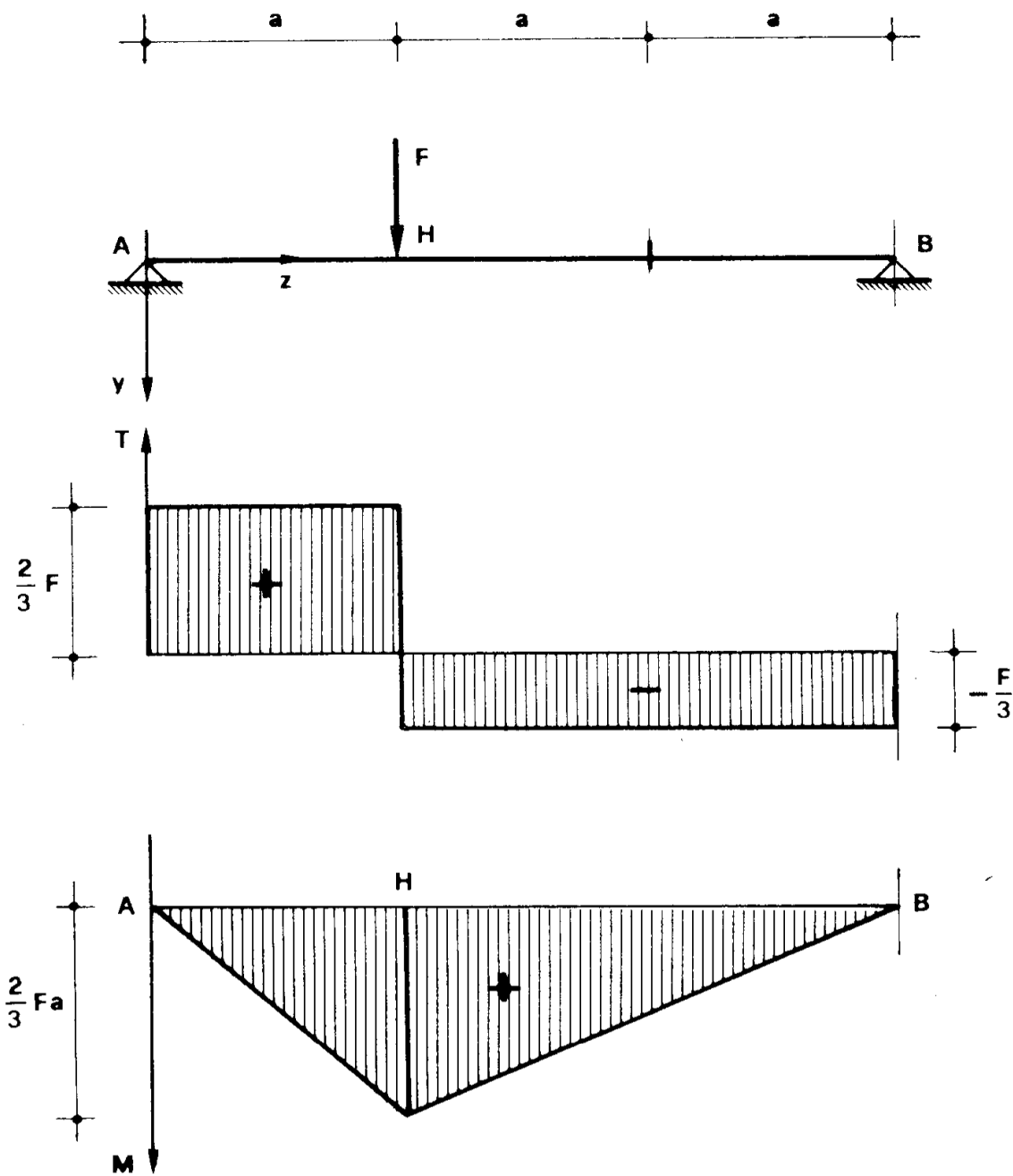


Figura 2a

Si ha quindi

$$T(z) = \frac{2}{3} F \quad \text{se } z \in] 0, a [$$

$$T(z) = -\frac{1}{3} F \quad \text{se } z \in] a, 3a [$$

$$M(z) = \frac{2}{3} Fz \quad \text{se } z \in [0, a]$$

$$M(z) = F \left(a - \frac{z}{3} \right) \quad \text{se } z \in [a, 3a]$$

Si ha pure

$$R_A = -T_A = -\frac{2}{3} F \quad (15)$$

$$R_B = T_B = -\frac{1}{3} F$$

Alle (14). e (15) può più immediatamente pervenirsi attraverso le equazioni della statica.

Si può adesso passare al calcolo di $\varphi(z)$ e $v(z)$:

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \int_0^z \frac{M}{EI} dz = \varphi_0 + \frac{2}{3} \frac{F}{EI} \int_0^z z dz =$$

$$= \varphi_0 + \frac{F}{3EI} z^2 \quad \text{se } z \in [0, a]$$

$$\varphi(z) = \varphi_a + \int_a^z \frac{M}{EI} dz = \varphi_0 + \frac{F}{3} \frac{a^2}{EI} + \frac{1}{EI} \int_a^z F \left(a - \frac{z}{3} \right) dz =$$

$$= \varphi_0 - \frac{Fa^2}{2EI} + \frac{Fa}{EI} z - \frac{F}{6EI} z^2 \quad \text{se } z \in [a, 3a]$$

ed ancora, per la condizione $v(0) = 0$,

$$v(z) = - \int_0^z \varphi \, dz = - \varphi_0 z - \frac{F}{9 EI} z^3 \quad \text{se } z \in [0, a].$$

$$\begin{aligned} v(z) &= v_a - \int_a^z \varphi \, dz = - \varphi_0 a - \frac{Fa^3}{9 EI} - \left(\varphi_0 - \frac{Fa^2}{2 EI} \right) \int_a^z dz - \\ &\quad - \frac{Fa}{EI} \int_a^z z \, dz + \frac{F}{6 EI} \int_a^z z^2 \, dz = \\ &= - \frac{Fa^3}{6 EI} - \varphi_0 z + \frac{Fa^2}{2 EI} z - \frac{Fa}{2 EI} z^2 + \frac{F}{18 EI} z^3 \quad \text{se } z \in [a, 3a] \end{aligned}$$

Dalla condizione

$$v_{3a} = 0$$

si trae

$$\varphi_0 = - \frac{5}{9} \frac{Fa^2}{EI}.$$

In definitiva si ha perciò

$$\varphi(z) = \frac{F}{EI} \left(- \frac{5}{9} a^2 + \frac{z^2}{3} \right) \quad \text{se } z \in [0, a]$$

$$\varphi(z) = \frac{F}{EI} \left(- \frac{19}{18} a^2 + az - \frac{z^2}{6} \right) \quad \text{se } z \in [a, 3a]. \quad (16)$$

$$v(z) = \frac{F}{EI} \left(\frac{5}{9} a^2 z - \frac{z^3}{9} \right) \quad \text{se } z \in [0, a]$$

$$v(z) = \frac{F}{EI} \left(- \frac{a^3}{6} + \frac{19}{18} a^2 z - \frac{az^2}{2} + \frac{z^3}{18} \right) \quad \text{se } z \in [a, 3a].$$

Nella fig. 2b sono stati disegnati i diagrammi $\varphi(z)$ e $v(z)$. I valori estremi di $\varphi(z)$ sono

$$\varphi_A = \varphi_0 = -\frac{5}{9} \frac{Fa^2}{EI}$$

$$\varphi_B = \varphi_{3a} = \frac{4}{9} \frac{Fa^2}{EI};$$

il diagramma è costituito da due archi di parabola quadratica, nei due intervalli $[0, a]$ ed $[a, 3a]$; in $z = 0$ ed in $z = 3a$ le tangenti sono parallele all'asse z , poichè $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI} = 0$. In $z = a$ non si hanno discontinuità, nè in φ nè in $\frac{d\varphi}{dz}$; quindi l'ordinata HK è unica, ed unica la tangente in K ; queste si ottengono congiungendo i punti L ed M dove le tangenti in $z = 0$ e $z = 3a$ incontrano le mezzerie di AH ed HB .

Il diagramma $v(z)$ è costituito da due archi di parabola cubica, sempre nei due intervalli $[0, a]$ ed $[a, 3a]$. L'ordinata HG è unica, e così la tangente in G ; le tangenti in A e B si incontrano in E . Poichè il diagramma $v(z)$ è poligono funicolare del carico $q^* = M$ (a meno di EI), il punto E deve appartenere alla retta d'azione della risultante del carico q^* , e cioè alla parallela ad y per il baricentro del triangolo $M(z)$ della fig. 2a. Dalla relazione di equilibrio alla traslazione secondo z si ha la risultante del carico q^*

$$F^* = \frac{3ah}{2},$$

dove con h si è indicata l'altezza del triangolo $M(z)$; dalla relazione di equilibrio intorno ad A si ottiene

$$\frac{ah}{2} \cdot \frac{2}{3} a + 2a \cdot \frac{h}{2} \left(a + \frac{2a}{3} \right) = F^* \cdot z_{F^*}$$

da cui

$$z_E = z_{F^*} = \frac{4}{3} a.$$

Tracciate le tangenti in A e B , si prendono in considerazione i due punti D e F ove queste incontrano le parallele ad y per i baricentri dei

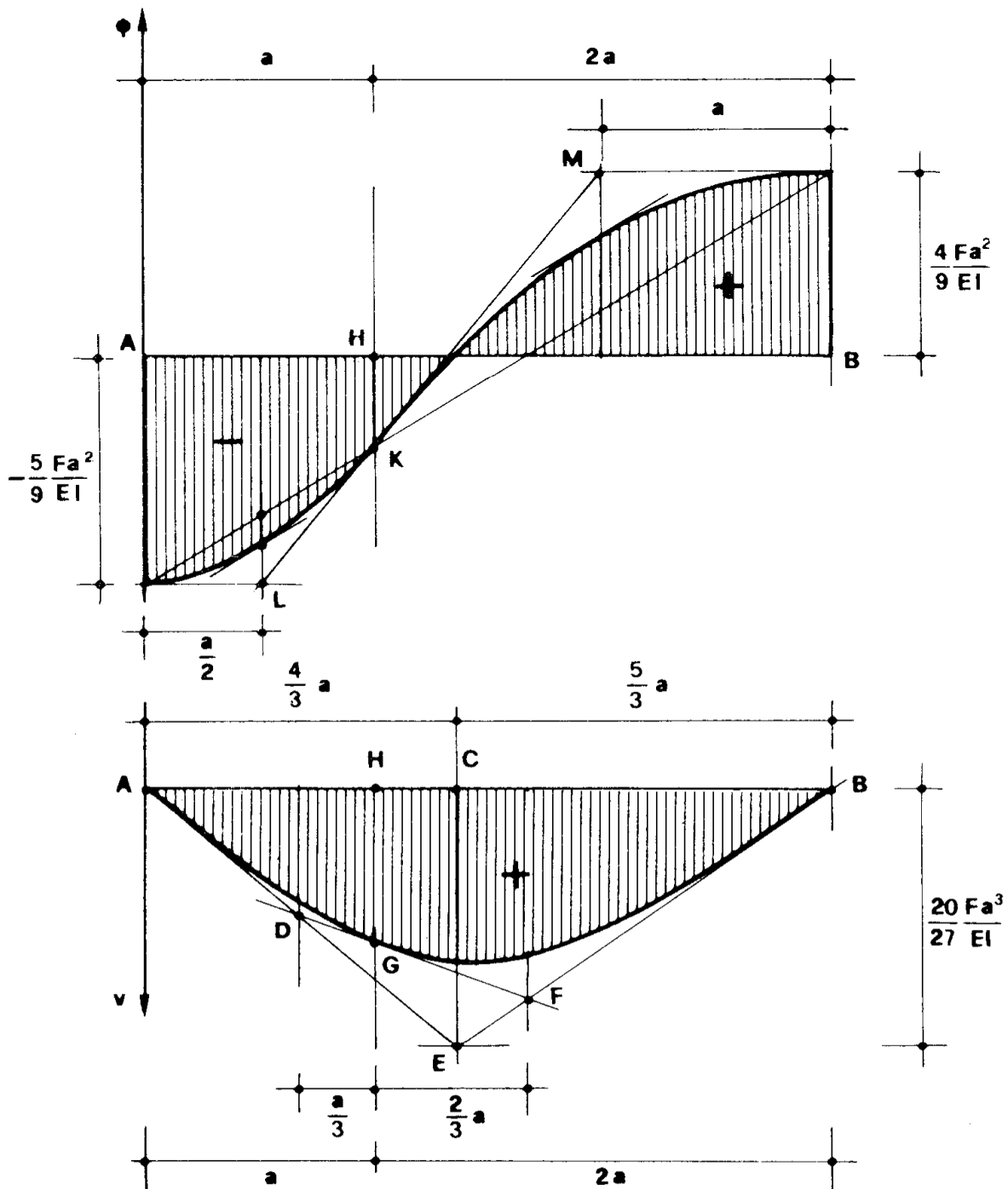


Figura 2b

due triangoli di base AH ed HB ; per le proprietà dei poligoni funicolari, la retta DF è la tangente al diagramma $v(z)$ in $z = a$.

Poichè la risultante del carico $q^* = M$ è Fa^2 , e le due reazioni ad esse relative sono

$$R_A^* = -\frac{5}{9} Fa^2$$

$$R_B^* = -\frac{4}{9} Fa^2 ,$$

risulta pure

$$CE = \frac{5}{9} Fa^2 \cdot \frac{4}{3} a = \frac{20}{27} \frac{Fa^3}{EI} .$$

Si osservi che il diagramma $\varphi(z)$ è stato costruito, come d'uso, con l'asse φ orientato alla sinistra dell'asse z , il diagramma $v(z)$ con l'asse v orientato alla destra dell'asse z .

Problema n. 3.

La trave della fig. 3a, identica a quella della fig. 2a, regge una coppia all'ascissa $z = 2a$. Si ha $M(0) = 0$, e quindi

$$T(z) = T_0 \quad \text{se} \quad z \in]0, 3a[$$

$$M(z) = \int_0^z T dz = T_0 z \quad z \in [0, 2a]$$

$$M(z) = M_{2a}^d + \int_{2a}^z T dz = 2 T_0 a - \epsilon + T_0 (z - 2a) \quad \text{se} \quad z \in]2a, 3a[.$$

Poichè è

$$M_{3a} = 0$$

è pure

$$T_0 = \frac{\mathfrak{M}}{3a} .$$

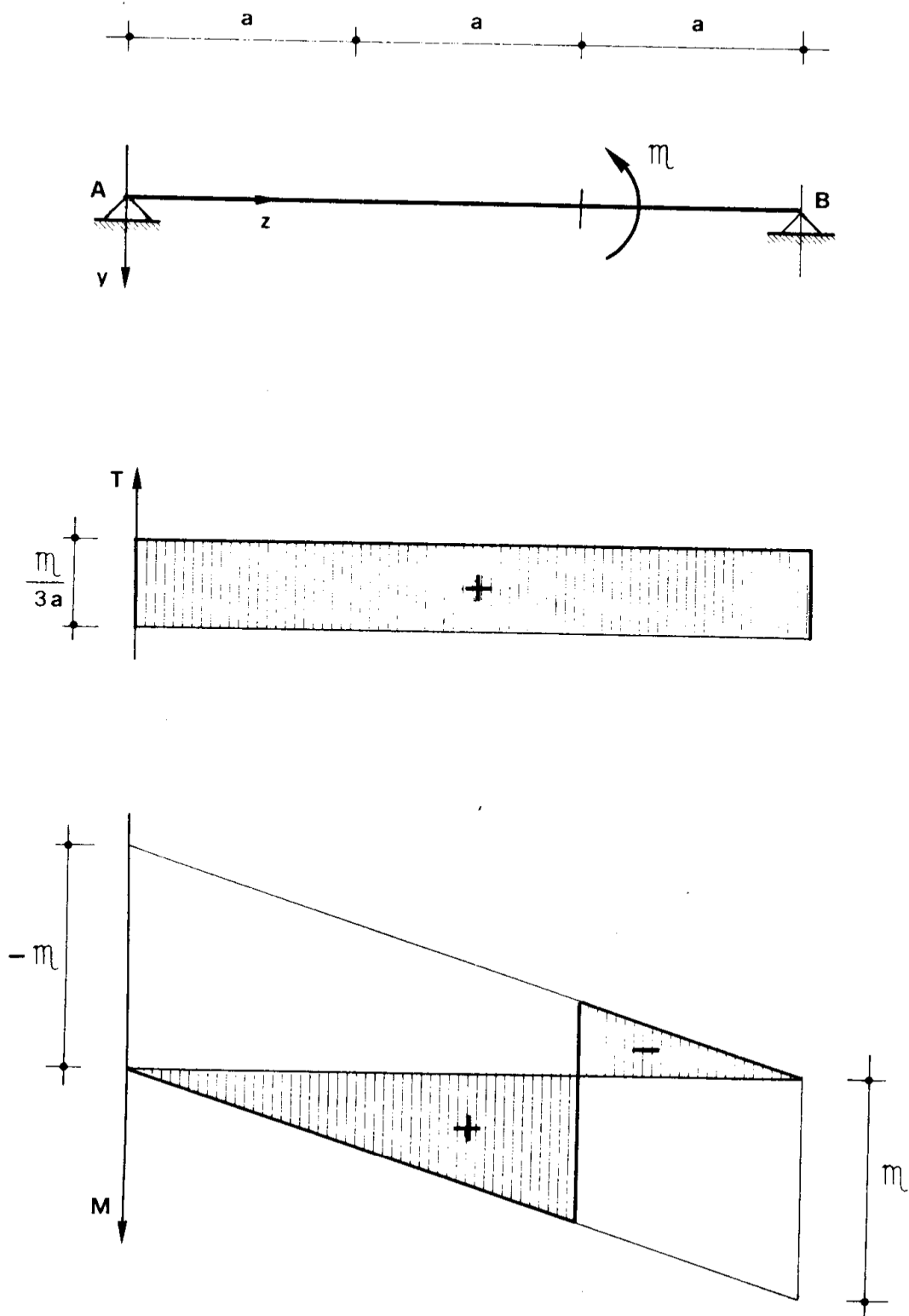


Figura 3a

Si può quindi scrivere

$$T(z) = \frac{\mathfrak{m}}{3a} \quad \text{se } z \in]0, 3a[$$

$$M(z) = \frac{\mathfrak{m}}{3a} z \quad \text{se } z \in [0, 2a]$$

$$M(z) = -\mathfrak{m} + \frac{\mathfrak{m}}{3a} z \quad \text{se } z \in]2a, 3a]$$

Si ha poi

$$\varphi(z) = \varphi_0 + \int_0^z \frac{M}{EI} dz = \varphi_0 + \frac{\mathfrak{m}}{3EIa} \int_0^z z dz =$$

$$= \varphi_0 + \frac{\mathfrak{m}}{6EIa} z^2 \quad \text{se } z \in [0, 2a]$$

$$\varphi(z) = \varphi_{2a} + \int_{2a}^z \frac{M}{EI} dz = \varphi_0 + \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{m}a}{EI} +$$

$$- \frac{\mathfrak{m}}{EI} \int_{2a}^z dz + \frac{\mathfrak{m}}{3EIa} \int_{2a}^z z dz =$$

$$= \varphi_0 + \frac{2}{3} \frac{a}{EI} - \frac{\mathfrak{m}}{EI} (z - 2a) + \frac{\mathfrak{m}}{6EIa} (z^2 - 4a^2) =$$

$$= \varphi_0 + 2 \frac{a}{EI} - \frac{\mathfrak{m}}{EI} z + \frac{\mathfrak{m}}{6EIa} z^2 \quad \text{se } z \in [2a, 3a].$$

Così pure si ha, essendo $v(0) = 0$,

$$v(z) = - \int_0^z \varphi dz = -\varphi_0 z - \frac{\mathfrak{m}}{18EIa} z^3 \quad \text{se } z \in [0, 2a]$$

$$\begin{aligned}
v(z) &= v_{2a} - \int_{2a}^z \varphi \, dz = -2a\varphi_0 - \frac{4}{9} \frac{\mathfrak{M}a^2}{EI} + \\
&\left(-\varphi_0 - 2 \frac{\mathfrak{M}a}{EI}\right) \int_{2a}^z dz + \frac{\mathfrak{M}}{EI} \int_{2a}^z z \, dz - \frac{\mathfrak{M}}{6E Ia} \int_{2a}^z z^2 \, dz = \\
&= 2 \frac{\mathfrak{M}a^2}{EI} - \varphi_0 z - 2 \frac{\mathfrak{M}a}{EI} z + \\
&+ \frac{\mathfrak{M}}{2EI} z^2 - \frac{\mathfrak{M}}{18E Ia} z^3 \qquad \text{se } z \in [2a, 3a].
\end{aligned}$$

La condizione

$$v_{3a} = 0$$

importa

$$\varphi_0 = -\frac{\mathfrak{M}a}{3EI},$$

Si ha quindi

$$\varphi(z) = \frac{\mathfrak{M}}{EI} \left(-\frac{a}{3} + \frac{z^2}{6a}\right) \qquad \text{se } z \in [0, 2a]$$

$$\varphi(z) = \frac{\mathfrak{M}}{EI} \left(\frac{5}{3}a - z + \frac{z^2}{6a}\right) \qquad \text{se } z \in [2a, 3a]$$

$$v(z) = \frac{\mathfrak{M}}{EI} \left(\frac{az}{3} - \frac{z^3}{18a}\right) \qquad \text{se } z \in [0, 2a]$$

$$v(z) = \frac{\mathfrak{M}}{EI} \left(2a^2 - \frac{5}{3}az + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{18a}\right) \qquad \text{se } z \in [2a, 3a].$$

(18)

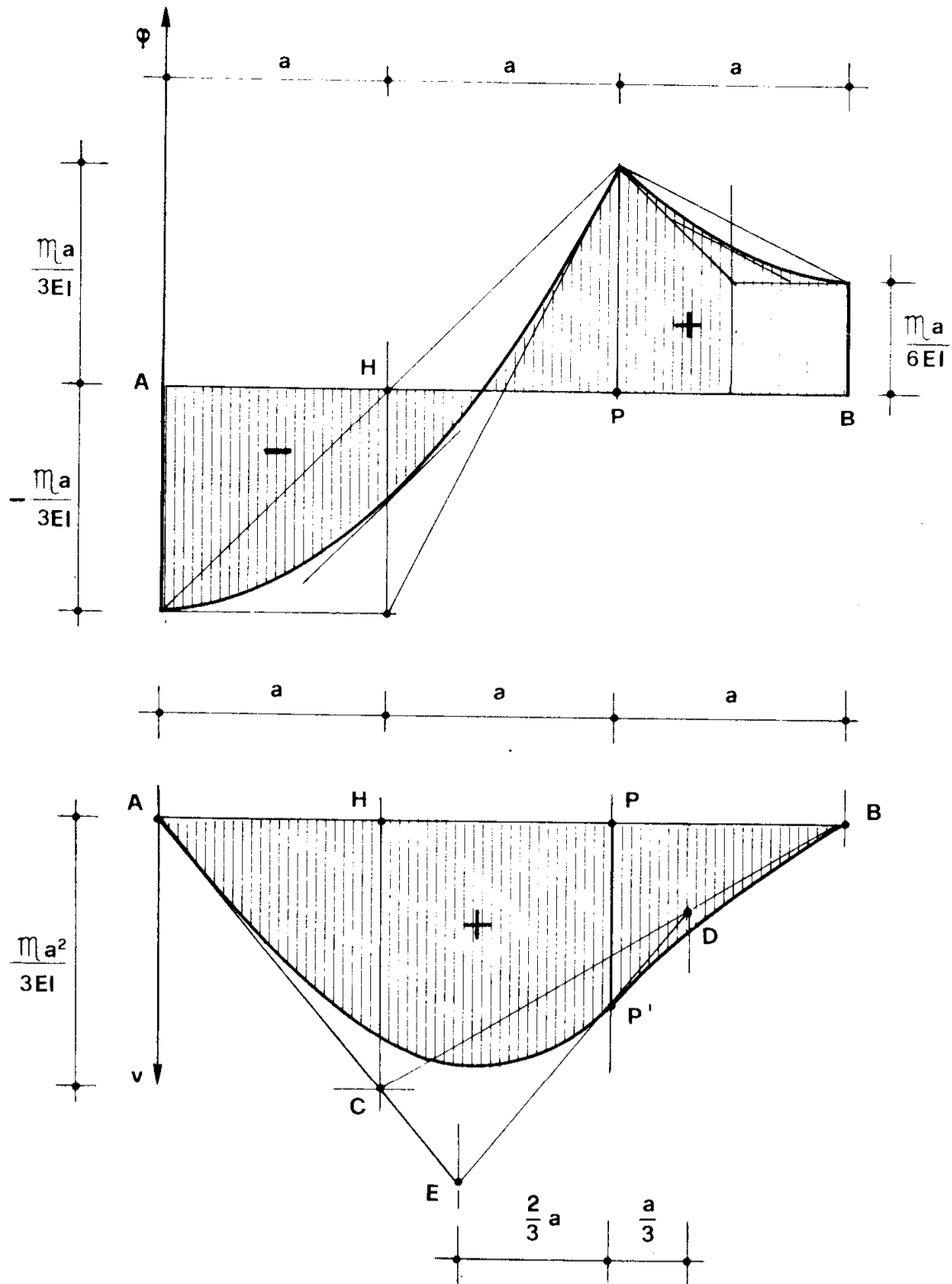


Figura 3b

Si verifica

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= -\frac{\mathfrak{M}a}{3EI} \\ \varphi_{2a} &= \frac{\mathfrak{M}a}{3EI} \\ \varphi_{3a} &= \frac{\mathfrak{M}a}{6EI};\end{aligned}\tag{19}$$

in $z = 2a$ la $\frac{d\varphi}{dz}$ si presenta discontinua, così come $M(z)$.

Nella fig. 3b sono riportati i diagrammi $\varphi(z)$ e $v(z)$. Il diagramma $\varphi(z)$ è costituito da due archi di parabola quadratica, vevoli negli intervalli $[0, 2a]$ e $[2a, 3a]$; le tangenti negli estremi A e B sono orizzontali, poichè $M = 0$ e quindi $\frac{d\varphi}{dz} = 0$; riportate le ordinate φ_0 , φ_{2a} , φ_{3a} in A , P e B , la costruzione risulta ovvia.

Il diagramma $v(z)$ è costituito da due archi di parabola cubica, validi negli stessi intervalli $[0, 2a]$ e $[2a, 3a]$. Esso è funicolare del carico $q^* = \frac{M}{EI}$, e quindi le tangenti in A e B devono incontrarsi sulla retta d'azione della risultante di tale carico. Poichè è

$$\begin{aligned}R_A^* &= -\frac{\mathfrak{M}a}{3EI} \\ R_B^* &= -\frac{\mathfrak{M}a}{6EI}\end{aligned}$$

(ciò si evince con ragionamenti elementari di statica, ma più direttamente dal fatto che

$$\begin{aligned}\varphi_A &= -T_A^* = R_A^* \\ \varphi_B &= -T_B^* = -R_B^*,\end{aligned}$$

l'ordinata HC definita in $z = a$ dalle due tangenti in A e B è la stessa, e pari a

$$HC = \frac{\mathfrak{M} a}{3 EI} \cdot a = \frac{\mathfrak{M} a}{6 EI} \cdot 2a = \frac{\mathfrak{M} a^2}{3 EI} ;$$

quindi le due tangenti sono definite dalle rette AC e BC .

Le verticali rette d'azione del triangolo positivo e del triangolo negativo del diagramma $\frac{M}{EI}$ (meglio, delle risultanti F_1^* ed F_2^* dei due triangoli di carico) sono ubicate alle ascisse

$$z_1 = 2a - \frac{2a}{3}$$

$$z_2 = 2a + \frac{a}{3} ;$$

il poligono funicolare di F_1^* ed F_2^* è quindi la spezzata $AEDB$. Esso coincide, come ordinate ed inclinazioni, con il poligono funicolare di q^* alle ascisse A , P e B , poichè F_1^* è la risultante del carico da A a P , F_2^* da P a B . Quindi PP' è una ordinata reale, e la retta ED è la tangente reale in P' .

Problema n. 4.

Attraverso il procedimento di Mohr si vogliono ottenere le rotazioni in A e B per le due travi già studiate negli esercizi 2 e 3.

Per la trave caricata dalla forza F all'ascissa $z = a$ si ha (fig. 4a)

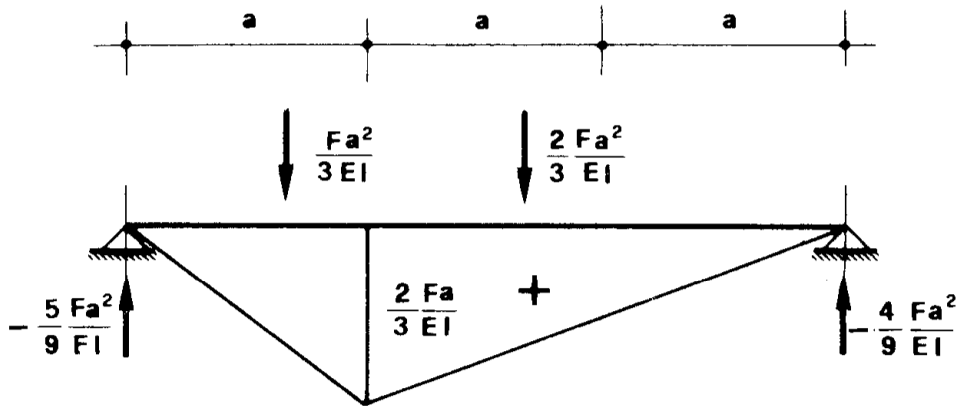
$$F_1^* = \frac{F a^2}{3 EI}$$

$$F_2^* = \frac{2}{3} \frac{F a^2}{EI},$$

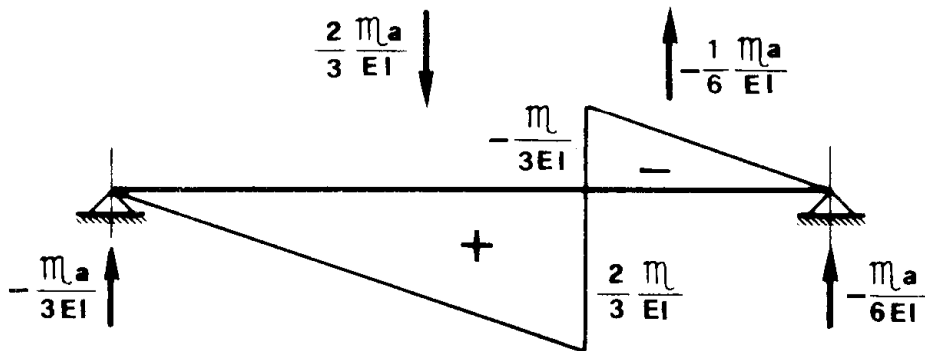
dove con F_1^* ed F_2^* si sono indicate le risultanti del carico $q^* = \frac{M}{EI}$

per i due intervalli $[0, a]$ ed $[a, 3a]$. Per l'equilibrio alla rotazione intorno ad A si può scrivere

$$-\frac{F}{3} \frac{a^2}{EI} \frac{2}{3} a - \frac{2}{3} \frac{Fa^2}{EI} \left(a + \frac{2a}{3} \right) - 3a R_B^* = 0$$



a)



b)

Figura 4

da cui

$$R_B^* = -\frac{4}{9} \frac{Fa^2}{EI}.$$

Per l'equilibrio alla traslazione si ha poi

$$\frac{Fa^2}{3EI} + \frac{2}{3} \frac{Fa^2}{EI} - \frac{4}{9} \frac{Fa^2}{EI} + R_A^* = 0$$

da cui

$$R_A^* = - \frac{5}{9} \frac{Fa^2}{EI} .$$

E' perciò

$$\varphi_A = R_A^* = - \frac{5}{9} \frac{Fa^2}{EI}$$

$$\varphi_B = - R_B^* = \frac{4}{9} \frac{Fa^2}{EI} .$$

Per la trave caricata dalla coppia \mathfrak{M} all'ascissa $z = 2a$ si ha (fig. 4b) sostituendo le risultanti al carico $q^* = \frac{M}{EI}$ relativo ai due intervalli $[0, 2a]$ e $[2a, 3a]$

$$F_1^* = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{M}a}{EI}$$

$$F_2^* = - \frac{\mathfrak{M}a}{6EI} .$$

Per l'equilibrio alla rotazione intorno ad A si ha

$$- \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{M}a}{EI} \cdot \frac{2}{3} 2a + \frac{\mathfrak{M}a}{6EI} \left(2a + \frac{a}{3} \right) - 3a R_B^* = 0$$

da cui

$$R_B^* = - \frac{\mathfrak{M}a}{6EI} .$$

Per l'equilibrio alla traslazione si ha poi

$$\frac{2}{3} \frac{\mathfrak{M}a}{EI} - \frac{\mathfrak{M}a}{6EI} - \frac{\mathfrak{M}a}{6EI} + R_A^* = 0 ,$$

da cui

$$R_A^* = - \frac{\mathfrak{M}a}{3EI}.$$

Si ha perciò

$$\varphi_A = R_A^* = - \frac{\mathfrak{M}a}{3EI}$$

$$\varphi_B = - R_B^* = \frac{\mathfrak{M}a}{6EI}.$$

Il metodo di Mohr si presta anche al calcolo rapido dell'ascissa dove si verifica il massimo spostamento, nonchè del valore di quest'ultimo. La ascissa z_m di v_{max} corrisponde a quella dove $\varphi = - T^* = 0$; nel caso della fig. 2a, si osserva che essa si ha tra H e B . Convien perciò porre $3a - z_m = t_m$, e cioè valutare l'ascissa di v_{max} da B verso sinistra. In corrispondenza di t_m si ha $T^* = 0$, e quindi il carico applicato da tale ascissa fino a B deve essere uguale in modulo e opposto in segno alla reazione R_B^* . Si può quindi scrivere (fig. 2a)

$$M(t_m) = \frac{2}{3} Fa \frac{t_m}{2a} = \frac{1}{3} Ft_m$$

$$q^*(t_m) = \frac{M(t_m)}{EI} = \frac{1}{3} \frac{Ft_m}{EI}$$

$$\frac{Ft_m}{3EI} \frac{t_m}{2} = - R_B^* \frac{4}{9} \frac{Fa^2}{EI}$$

$$t_m = a \sqrt{\frac{8}{3}} = 1,63299 a,$$

ed infine

$$v_{max} = M^*(t_m) = \frac{4}{9} \frac{Fa^2}{EI} \frac{2}{3} t_m =$$

$$= \frac{8}{27} \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{Fa^3}{EI} = 0,48385 \frac{Fa^3}{EI}.$$

Analogamente si può procedere nel caso della fig. 3a, dove invece v_{max} si verifica nell'intervallo AP ; chiamando z_m l'ordinata di v_{max} , è

$$M(z_m) = \frac{2}{3} \mathfrak{M} \frac{z_m}{2a}$$

$$q^*(z_m) = \frac{\mathfrak{M} z_m}{3EI a}$$

$$\frac{\mathfrak{M} z_m}{3EI a} \frac{z_m}{2} = \frac{\mathfrak{M} a}{3EI}$$

$$z_m = a \sqrt{2}$$

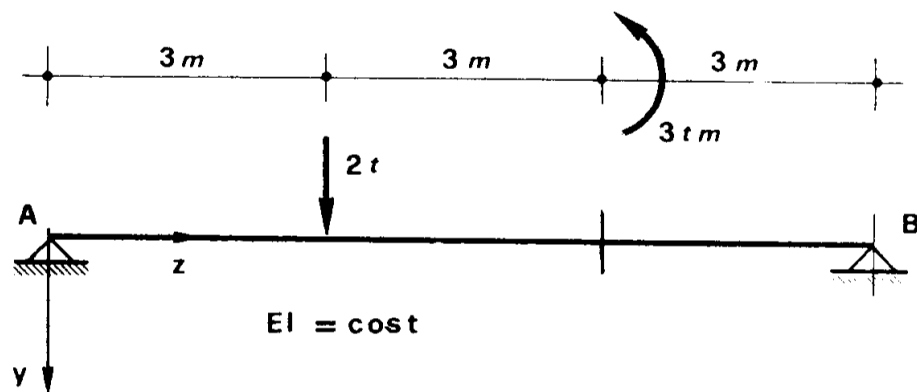
$$v_{max} = \frac{\mathfrak{M} a}{3EI} \cdot \frac{2}{3} z_m =$$

$$= \frac{2}{9} \sqrt{2} \frac{\mathfrak{M} a^2}{EI} = 0,31427 \frac{\mathfrak{M} a^2}{EI}.$$

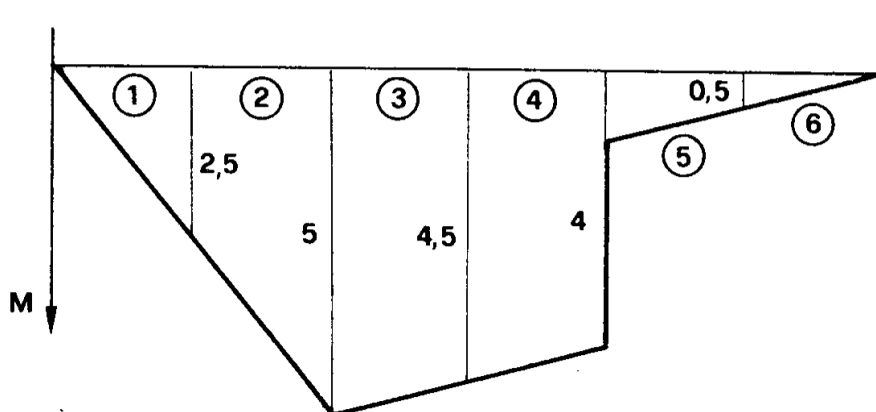
Problema n. 5.

Si risolve attraverso il procedimento grafico di Mohr la struttura della fig. 5, costruendo così tutta la deformata. Disegnato il diagramma $M(z)$ si è diviso tale diagramma in sei parti; nei baricentri di tali parti (triangoli o trapezi) si sono applicate le forze F_i^* pari alle aree divise per EI . È noto che

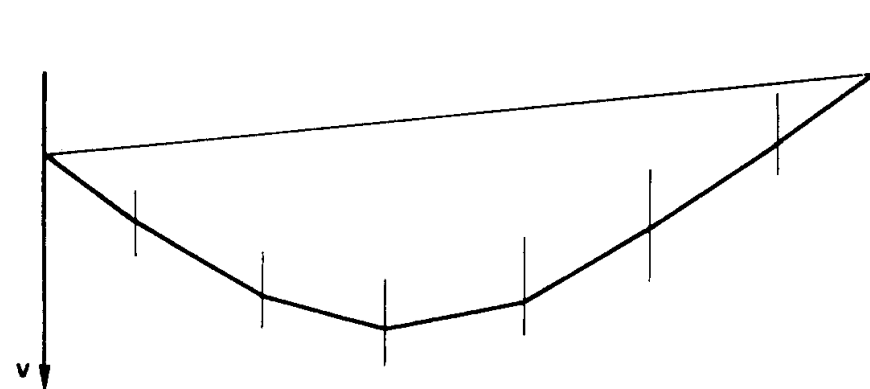
$$[F_i^*] = [1].$$



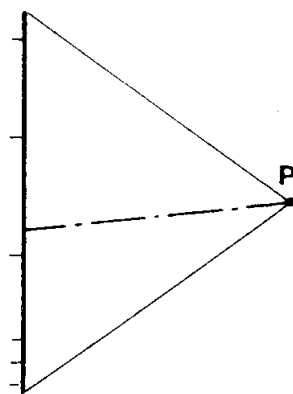
$$S_\ell = \frac{3}{4} \frac{m}{u}$$



$$S_M = 1 \frac{tm}{u}$$



$$\bar{\lambda} = 4u$$



$$S_{EIF^*} = 4 \frac{tm^2}{u}$$

$$S_{EIV} = 12 \frac{tm^3}{u}$$

$$S_v = \frac{12}{EI} \frac{m}{u}$$

Figura 5

Si è costruito il poligono delle forze $EI F_i^*$, nella scala

$$S_{EIF^*} = 4 \frac{tm^2}{u} ;$$

i valori delle $EI F_i^*$ con cui si è costruito tale poligono sono i seguenti:

$$EI F_1^* = \frac{2,5 \cdot 1,5}{2} = 1,875 \quad tm^2$$

$$EI F_2^* = \frac{7,5 \cdot 1,5}{2} = 5,625 \quad ''$$

$$EI F_3^* = \frac{9,5 \cdot 1,5}{2} = 7,125 \quad ''$$

$$EI F_4^* = \frac{8,5 \cdot 1,5}{2} = 6,375 \quad ''$$

$$EI F_5^* = \frac{1,5 \cdot 1,5}{2} = 1,125 \quad ''$$

$$EI F_6^* = \frac{0,5 \cdot 1,5}{2} = 0,375 \quad ''$$

Si ha

$$\Sigma EI F_i = 22,5 \quad tm^2 ;$$

quindi la rotazione relativa tra A e B è pari a

$$\Delta \varphi_{AB} = \frac{22,5}{EI}$$

dove EI è espresso in tm^2 .

Si è poi costruito il poligono funicolare delle $EI F_i^*$ con base

$$\lambda = 16 \text{ tm}^2 ;$$

la retta di chiusa è definita dalle due condizioni

$$M_A^* = M_B^* = 0 .$$

Tale poligono rappresenta v nella scala

$$S_{EI v} = S_{EIF^*} \cdot \bar{\lambda} \cdot S_l = 12 \frac{\text{tm}^2}{u}$$

$$S_v = \frac{12}{EI} \frac{m}{u} ,$$

dove EI è espresso in tm .

Dal grafico si trae

$$\varphi_A = R_A^* = - \frac{3,250 \cdot 4}{EI} = - \frac{13}{EI}$$

$$\varphi_B = - R_B^* = \frac{2,375 \cdot 4}{EI} = \frac{9,5}{EI}$$

$$v_a = M_a^* = \frac{2,625 \cdot 12}{EI} = \frac{31,5}{EI} m .$$

Utilizzando i risultati degli esercizi 2 e 3 si può effettuare un'utile verifica. E' così (fig. 4)

$$\varphi_A = - \frac{ma}{3EI} - \frac{5}{9} \frac{Fa^2}{EI} = - \frac{13}{EI}$$

$$\varphi_B = \frac{ma}{6EI} + \frac{4}{9} \frac{Fa^2}{EI} = \frac{9,5}{EI}$$

$$\begin{aligned}
 v(a) &= \frac{Ma^2}{3EI} + \frac{5 \cdot Fa^3}{9EI} \\
 &= \frac{Ma^2}{18EI} + \frac{1}{9} \frac{Fa^3}{EI} = \\
 &= \frac{10,5}{EI} a = \frac{31,5}{EI} m .
 \end{aligned}$$

Problema n. 6.

La trave della fig. 6a, con EI costante su z , è soggetta ad una distribuzione di coppie $m(z)$ variabili linearmente, da 0 in $z = 0$, ad m in $z = 5a$. Si vuole pervenire, per integrazione, alla deformata $v(z)$.

L'espressione di $m(z)$ è

$$m(z) = \frac{m}{5a} z \quad z \in [0, 5a[.$$

Si può scrivere

$$T(z) = T_0 - \int_0^z q dz = T_0 , \quad \text{se } z \in]0, 3a [$$

$$\begin{aligned}
 M(z) &= \int_0^z [T - m(z)] dz = \int_0^z \left(T_0 - \frac{m}{5a} z \right) dz = \\
 &= T_0 z - \frac{m}{10a} z^2 \quad \text{se } z \in [0, 3a] .
 \end{aligned}$$

Dalla condizione

$$M_{2a} = 2T_0 a - \frac{2}{5} m a = 0$$

si trae

$$T_0 = \frac{m}{5} .$$

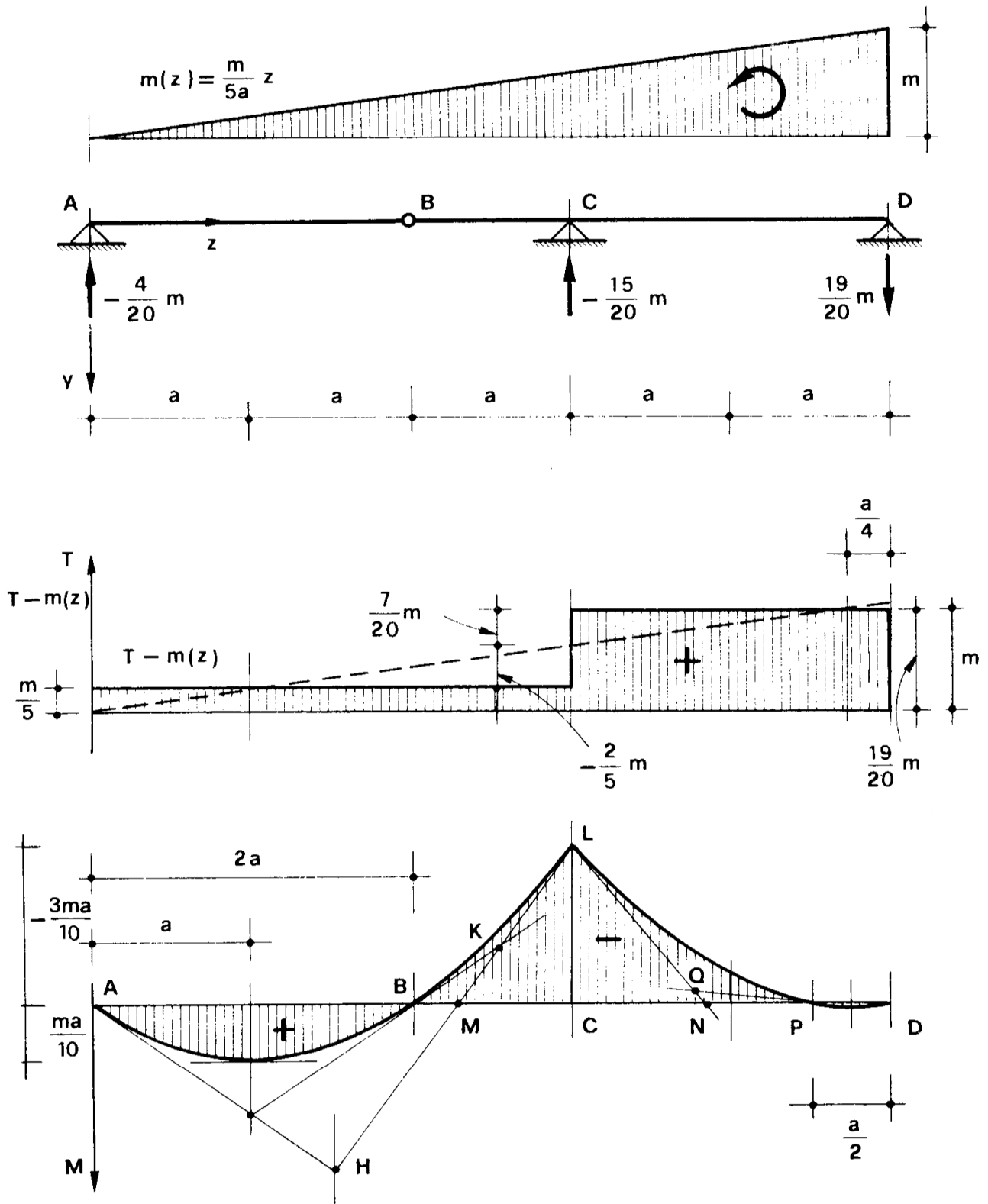


Figura 6a

E' perciò

$$T(z) = \frac{m}{5} \quad \text{se } z \in]0, 3a[\quad (20)$$

$$M(z) = \frac{mz}{5} - \frac{m}{10a} z^2 = \frac{m}{5} \left(z - \frac{z^2}{2a} \right) \quad \text{se } z \in [0, 3a] .$$

Dalle (20) si trae

$$M_{3a} = - \frac{3}{10} m a ;$$

è incognito invece T_{3a}^d , valore del taglio immediatamente a destra dell'appoggio C.

Può quindi scriversi

$$T(z) = T_{3a}^d \quad \text{se } z \in]3a, 5a[$$

$$\begin{aligned} M(z) &= M_{3a} + \int_{3a}^z [T - m(z)] dz = \\ &= - \frac{3}{10} ma + \left[T_{3a}^d z - \frac{m}{10a} z^2 \right]_{3a}^z = \\ &= \frac{6}{10} ma - 3T_{3a}^d a + T_{3a}^d z - \frac{m}{10a} z^2 \quad \text{se } z \in [3a, 5a] . \end{aligned}$$

Dalla condizione

$$M_{5a} = - \frac{19}{10} ma + 2 T_{3a}^d a = 0$$

si trae

$$T_{3a}^d = \frac{19}{20} m$$

e perciò

$$T(z) = \frac{19}{20} m \quad \text{se } z \in]3a, 5a[\quad (21)$$

$$M(z) = \frac{m}{20a} (-45a^2 + 19az - 2z^2) \quad \text{se } z \in [3a, 5a].$$

Nella fig. 6a si è disegnato il diagramma $T(z)$ e quello $T(z) - m(z)$, per avere indicazioni sulla pendenza del diagramma del momento, che è appunto fornita da $T - m$. Poichè $T - m$ si annulla in $z = a$ ed in $z = 5a - \frac{a}{4}$, è in tali punti che il momento è stazionario. Il momento è una funzione quadratica di z , cioè $M(z)$ è un arco di parabola tra A e C , un altro arco tra C e D ; se ne trae che, essendo i punti ove $M = 0$ simmetrici rispetto ai punti di stazionarietà, M si annulla alle ascisse $z = 2a$ e $z = 5a - \frac{a}{2}$, oltre che naturalmente ai due estremi A e D . Conoscendo il valore

$$M_{1a} = \frac{ma}{10},$$

sono note le tangenti in A e B ; conoscendo il valore CL

$$M_{3a} = -\frac{3ma}{10},$$

la tangente in L è fornita dalla congiungente L con il punto H dove la tangente in A incontra la verticale di mezzzeria di AC . Le due tangenti in B ed L devono per verifica incontrarsi in un punto K della verticale di mezzzeria di BC .

In C si ha

$$\left(\frac{dM}{dz}\right)^s = T_{3a}^s - \frac{2}{5} m = -\frac{8}{20} m$$

$$\left(\frac{dM}{dz}\right)^d = T_{3a}^d - \frac{2}{5} m = \frac{7}{20} m ,$$

e quindi

$$\frac{CN}{CM} = \frac{8}{7} ;$$

è nota perciò la tangente in L a destra (retta LN). La tangente in P si ottiene unendo P con il punto Q dove la retta LN incontra la mezzeria di CP ; quella in D unendo D con il punto dove la QP incontra la mezzeria di PD . Il massimo momento in PD vale la sedicesima parte di quello in AB , poichè $AB = 4 PD$, e cioè è pari ad $\frac{ma}{160}$.

Si passa adesso al calcolo della deformata. Si ha (20)

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \int_0^z \frac{M}{EI} dz = \varphi_0 + \frac{m}{5EI} \int_0^z \left(z - \frac{z^2}{2a} \right) dz = \\ &= \varphi_0 + \frac{m}{30EIa} (3az^2 - z^3) \quad \text{se } z \in [0, 2a[. \end{aligned}$$

La condizione $v(0) = 0$ permette di scrivere

$$v = - \int_0^z \varphi dz = - \varphi_0 z - \frac{m}{120EIa} (4az^3 - z^4) , \quad \text{se } z \in [0, 2a].$$

Dalle precedenti relazioni si trae

$$\varphi_{2a}^s = \varphi_0 + \frac{2}{15} \frac{ma^2}{EI}$$

$$v_{2a} = - 2\varphi_0 a - \frac{2}{15} \frac{ma^3}{EI} .$$

Si integra adesso nell'intervallo $2a, 3a$; infatti mentre in $z = 2a$ si ha una discontinuità di φ , in $z = 3a$ l'espressione di M cambia. Si ha così (20)

$$\begin{aligned}
\varphi &= \varphi_{2a}^s + \Delta\varphi_{2a} + \int_{2a}^z \frac{M}{EI} dz = \\
&= \varphi_0 + \Delta\varphi_{2a} + \frac{2}{15} \frac{ma^2}{EI} + \frac{m}{10Ela} \int_{2a}^z (2az - z^2) dz = \\
&= \varphi_0 + \Delta\varphi_{2a} + \frac{2}{15} \frac{ma^2}{EI} + \frac{m}{30Ela} (3az^2 - z^3) \quad \text{se } z \in [2a, 3a]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v &= v_{2a} - \int_{2a}^z \varphi dz = 2a \Delta\varphi_{2a} + \frac{4}{15} \frac{ma^3}{EI} - \\
&- \left(\varphi_0 + \Delta\varphi_{2a} - \frac{2}{15} \frac{ma^2}{EI} \right) z - \frac{m}{120Ela} (4az^3 - z^4), \text{ se } z \in [2a, 3a].
\end{aligned}$$

Dalle precedenti relazioni si trae

$$v_{3a} = -3\varphi_0 a - a \Delta\varphi_{2a} - \frac{43}{120} \frac{ma^3}{EI},$$

e dalla condizione

$$v_{3a} = 0$$

si ottiene

$$\Delta\varphi_{2a} = -3\varphi_0 - \frac{43}{120} \frac{ma^2}{EI}.$$

Si può perciò scrivere

$$\varphi = -2\varphi_0 - \frac{9}{40} \frac{ma^2}{EI} + \frac{m}{30Ela} (3az^2 - z^3) \quad \text{se } z \in]2a, 3a]$$

$$v = -6a\varphi_0 - \frac{9}{20} \frac{ma^3}{EI} + \left(2\varphi_0 + \frac{9}{40} \frac{ma^2}{EI} \right) z -$$

$$-\frac{m}{120EIa} (4az^3 - z^4) \quad \text{se } z \in [2a, 3a].$$

Si ha così

$$\varphi_{3a} = -2\varphi_0 - \frac{9}{40} \frac{ma^2}{EI}.$$

Occorre adesso integrare nell'intervallo $3a, 5a$. Si ha (21)

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_{3a} + \int_{3a}^z \frac{M}{EI} dz = -2\varphi_0 + \frac{63}{20} \frac{ma^2}{EI} + \\ &+ \frac{m}{120EIa} (-270a^2z + 57az^2 - 4z^3) \quad \text{se } z \in [3a, 5a] \\ v &= v_{3a} - \int_{3a}^z \varphi dz = - \int_{3a}^z \varphi dz = -6\varphi_0 a + \frac{351}{120} \frac{ma^3}{EI} + \\ &+ \left(2\varphi_0 - \frac{63}{20} \frac{ma^2}{EI} \right) z + \frac{m}{120EIa} (135a^2z^2 - 19az^3 + z^4) \\ &\quad \text{se } z \in [3a, 5a]. \end{aligned}$$

Dalla relazione ora scritta si ha

$$v_{5a} = 4\varphi_0 a + \frac{43}{60} \frac{ma^3}{EI},$$

e dalla condizione

$$v_{5a} = 0$$

si ottiene

$$\varphi_0 = -\frac{43}{240} \frac{ma^2}{EI}.$$

Adesso è possibile esplicitare $\varphi(z)$ e $v(z)$:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{m}{240 EI a} (-43a^3 + 24az^2 - 8z^3) && \text{se } z \in [0, 2a[\\ & \frac{m}{240 EI a} (32a^3 + 24az^2 - 8z^3) && \text{se } z \in]2a, 3a] \\ & \frac{m}{240 EI a} (842a^3 - 540a^2z + 114az^2 - 8z^3) && \text{se } z \in [3a, 5a] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} v(z) &= \frac{m}{240 EI a} (43a^3z - 8az^3 + 2z^4) && \text{se } z \in [0, 2a] \\ & \frac{m}{240 EI a} (150a^4 - 32a^3z - 8az^3 + 2z^4) && \text{se } z \in [2a, 3a] \\ & \frac{m}{240 EI a} (960a^4 - 842a^3z + 270a^2z^2 - 38az^3 + 2z^4) && \text{se } z \in [3a, 5a]. \end{aligned} \quad (23)$$

Dalle (23) si verifica, in ogni intervallo, $\frac{dv}{dz} = -\varphi$. Inoltre si ha dalle (23)

$$\varphi_A = \varphi_0 = -\frac{43}{240} \frac{ma^2}{EI}$$

$$\varphi_B^s = \varphi_{2a}^s = -\frac{11}{240} \frac{ma^2}{EI}$$

$$\varphi_B^d = \varphi_{2a}^d = \frac{64}{240} \frac{ma^2}{EI}$$

$$\varphi_C = \varphi_{3a} = \frac{32}{240} \frac{ma^2}{EI}$$

$$\varphi_D = \varphi_{5a} = -\frac{8}{240} \frac{ma^2}{EI}$$

ed ancora

$$v_B = v_{2a} = \frac{54}{240} \frac{ma^3}{EI} . \quad (25)$$

Nella figura 6b sono tracciati i diagrammi $\varphi(z)$ e $v(z)$. In $z=0$ è $\frac{d\varphi}{dz} = 0$, e quindi la tangente a $\varphi(z)$ è orizzontale; in $z=2a$ è $\frac{d\varphi}{dz} = 0$ a sinistra ed a destra, e quindi le due tangenti a sinistra e a destra sono ancora orizzontali. Così pure sono orizzontali le tangenti in $z = 5a - \frac{a}{2}$

(punto P) e $z = 5a$ (punto D).

Il diagramma $\varphi(z)$ è quello di una parabola cubica. Le tangenti in $z=0$ e quella in $z=a$ si incontrano in H ; H deve appartenere alla verticale passante per il baricentro del carico $T = m(z)$ nell'intervallo $]0, a]$, e quindi

$$z_H = \frac{a}{3} .$$

Analogamente (fig. 6b)

$$z_K = 2a - \frac{a}{3} .$$

La tangente a destra in $z=2a$ e quella in $z=3a$ si incontrano in S ;

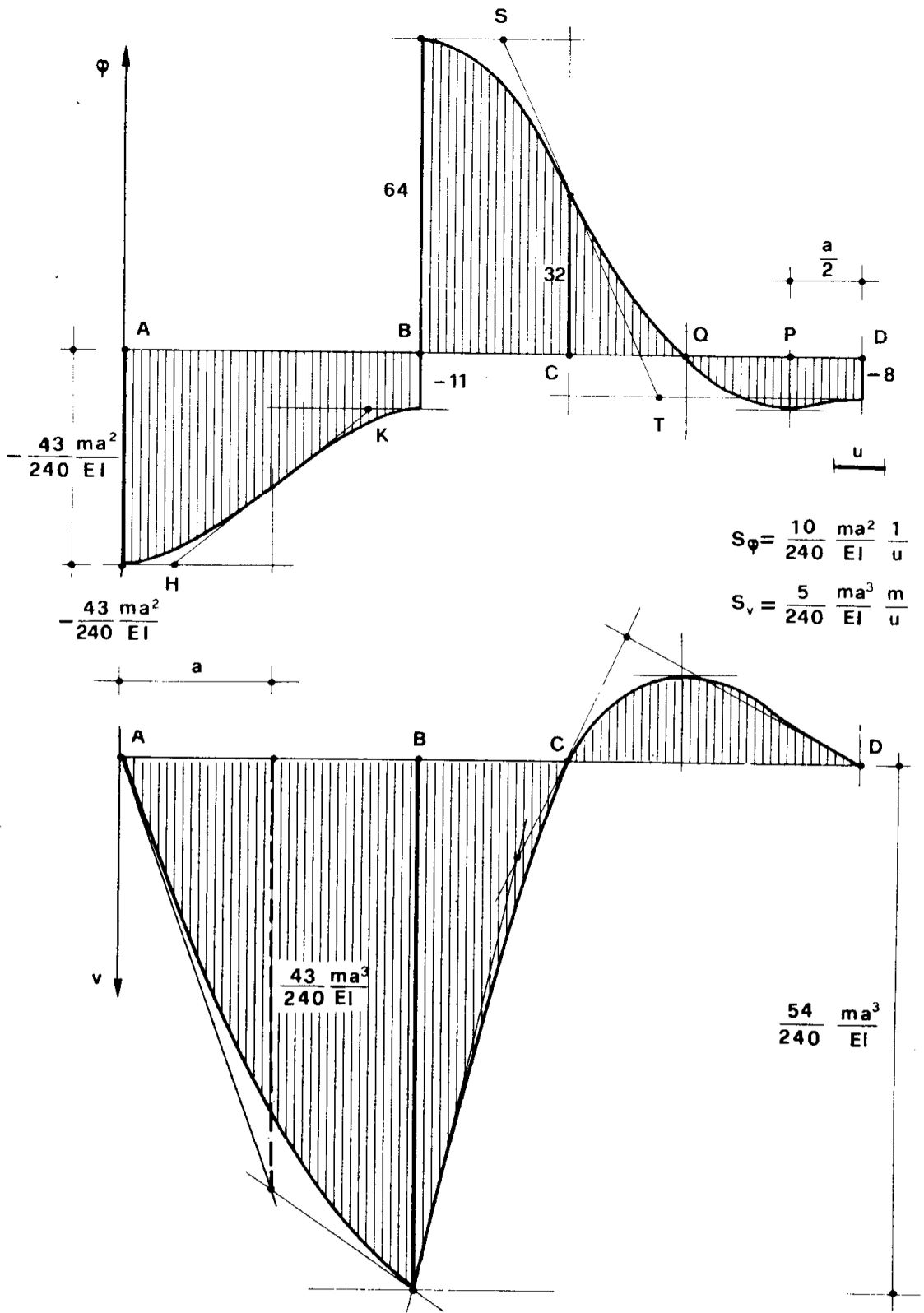


Figura 6b

S deve appartenere alla verticale passante per il baricentro del carico $T - m(z)$ nell'intervallo $[2a, 3a[$. Così pure le tangenti in $z = 3a$ e $z = 5a$ si incontrano in T , appartenente alla verticale passante per il baricentro del carico $T - m(z)$ nell'intervallo $]3a, 5a]$.

Il diagramma $v(z)$ è quello di una parabola di quarto grado; le tangenti possono costruirsi (come del resto si poteva anche nel diagramma $\varphi(z)$) sfruttando la conoscenza di A, B, C e D dei valori di φ . In Q , dove $\varphi = 0$, è $\frac{dv}{dz} = 0$, e quindi la tangente è orizzontale (v_{min}).

Problema n. 7.

Nella fig. 7a è disegnata di nuovo la trave del problema precedente; essa sarà studiata attraverso il procedimento di Mohr. Non si tratterà tutto il poligono funicolare del carico $q^* = \frac{M}{EI}$, ma si ricaveranno soltanto alcuni valori caratteristici di φ e di v , utilizzando il procedimento di Lagrange. Si ricavano prima i diagrammi $T(z)$ ed $M(z)$; come è noto, $M(z)$ è il momento di un carico $\bar{q}(z)$ pari a

$$\bar{q}(z) = \frac{dm}{dz}; \quad (26)$$

nei punti S di discontinuità della funzione $m(z)$ occorre introdurre una forza concentrata

$$\bar{F}_s = m_c^d - m_s^s.$$

E' altresì noto che, se $\bar{T}(z)$ è il taglio dovuto a tali carichi, risulta

$$T(z) = \bar{T}(z) + m(z). \quad (27)$$

Si prende in esame prima la trave AB , appoggiata in A al suolo ed in B sulla trave BCD . Si ha così

$$m(z) = \frac{m}{5a} z$$

$$\bar{q} = \frac{dm}{dz} = \frac{m}{5a},$$

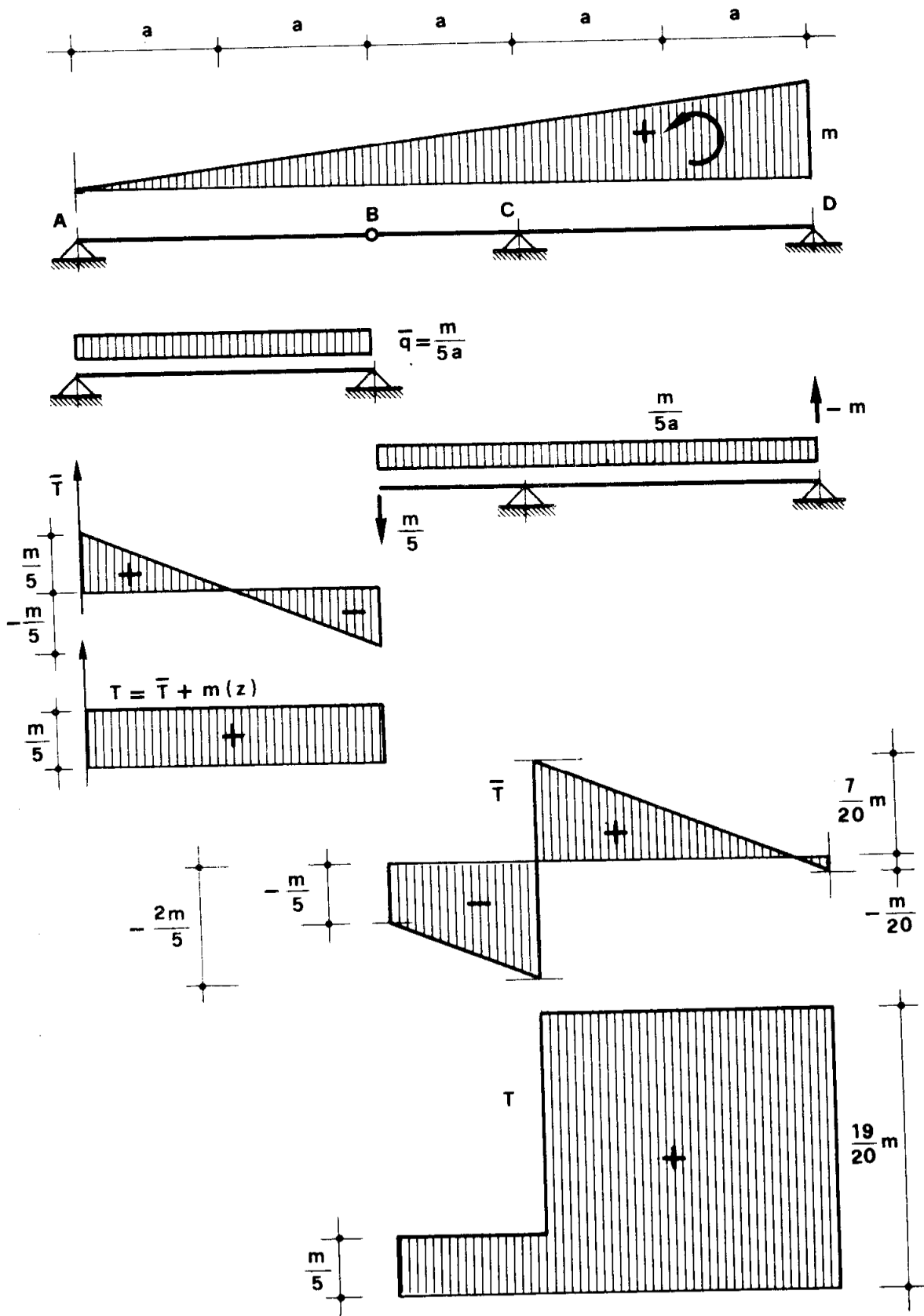


Figura 7a

e perciò

$$\bar{R}_A = -\frac{m}{5}$$

$$\bar{R}_B = -\frac{m}{5}.$$

Si studia poi la trave BD , appoggiata al suolo in C e D ; essa è soggetta al carico $\bar{q} = \frac{m}{5a}$, uniforme; inoltre in D agisce una forza

$$\bar{F}_D = m_D^d - m_D^s = -m,$$

ed in B una forza trasmessa dalla trave AB , pari a

$$\bar{F}_B = \frac{m}{5}.$$

Si ha

$$\bar{R}_C = -\frac{15}{20} m$$

$$\bar{R}_D = \frac{19}{20} m.$$

Nella fig. 7a sono riportati i diagrammi $\bar{T}(z)$ e $T(z)$ per le due travi AB e BD . Nella fig. 7b sono disegnati i diagrammi $M(z)$, suddivisi nei segmenti di parabola relativi ai tratti AB , BC , CD , e nei diagrammi lineari che, sommati ai segmenti di parabola, forniscono il momento effettivo in BC e CD . In AB è

$$\begin{aligned} M_{AB \max} &= \bar{q} \frac{(2a)^2}{8} = \\ &= \frac{m}{5a} \frac{a^2}{2} = \frac{ma}{10}; \end{aligned}$$

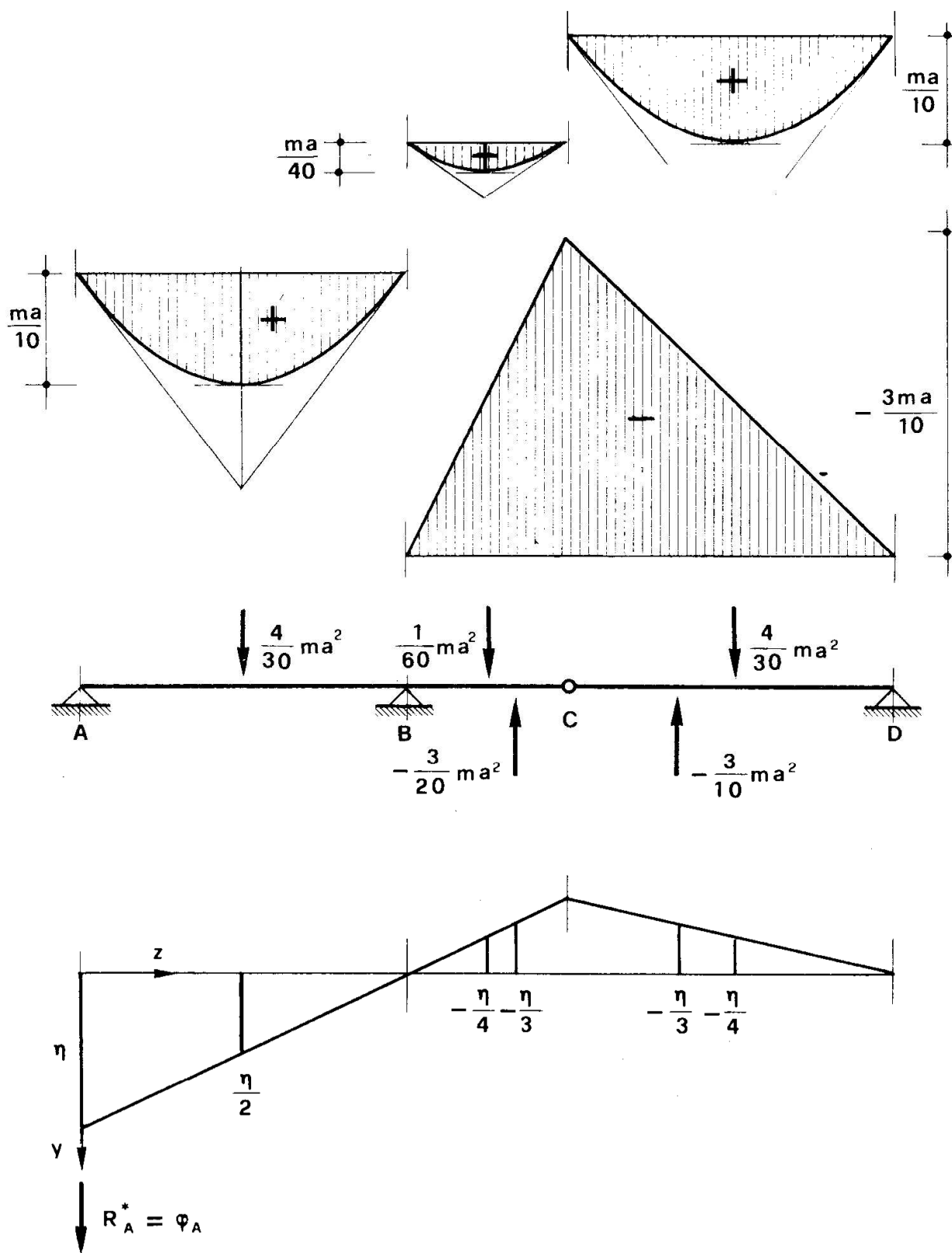


Figura 7b

in C è

$$M_C = -\frac{m}{5} a - \frac{m}{5a} \frac{a^2}{2} = -\frac{3}{10} ma ;$$

la freccia della parabola relativa a BC è data da

$$\frac{m}{5a} \frac{a^2}{8} = \frac{ma}{40} ;$$

la freccia della parabola relativa a CD è data a sua volta da

$$\frac{m}{5a} \frac{(2a)^2}{8} = \frac{ma}{10} .$$

Nella fig. 7b sono disegnate le risultanti dei carichi parziali prima descritti, e cioè

$$AB \quad EI F_1^* = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{ma}{10} = \frac{4}{30} ma^2$$

$$BC \quad EI F_2^* = \frac{2}{3} \cdot a \cdot \frac{ma}{40} = \frac{1}{60} ma^2$$

$$EI F_3^* = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{3ma}{10} = -\frac{3}{20} ma^2$$

$$CD \quad EI F_4^* = -\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{3ma}{10} = -\frac{3}{10} ma^2$$

$$EI F_5^* = \frac{2}{3} \cdot 2a \cdot \frac{ma}{10} = \frac{4}{30} ma^2 ,$$

Le F_1^* , F_2^* , F_5^* sono applicate nelle mezzerie di AB , BC , CD , e sono dirette verso il basso; F_3^* ed F_4^* sono applicate rispettivamente alle distanze $\frac{a}{3}$ e $\frac{2a}{3}$ da C , e sono dirette verso l'alto.

Si voglia calcolare il valore di φ_A . Si ha, come noto, $\varphi_A = -T_A^* = R_A^*$.

Seguendo il procedimento di Lagrange, si elimina nella trave ausiliaria (fig. 7b) l'appoggio A , e si traccia la conseguente deformata; può così scriversi la condizione di lavoro nullo:

$$\begin{aligned}
 EI R_A^* \cdot \eta + \frac{4}{30} ma^2 \cdot \frac{\eta}{2} - \frac{1}{60} ma^2 \cdot \frac{\eta}{4} + \\
 + \frac{3}{20} ma^2 \cdot \frac{\eta}{3} + \frac{3}{10} ma^2 \cdot \frac{\eta}{3} - \\
 - \frac{4}{30} ma^2 \cdot \frac{\eta}{4} = 0
 \end{aligned}$$

da cui

$$\varphi_A = R_A^* = - \frac{43}{240} \frac{ma^2}{EI}.$$

Si passi a calcolare il valore di $\varphi_B^s = - T_B^{s*}$. La sconnessione da effettuare (fig. 7c) sulla trave ausiliaria è quella corrispondente a T_B^s , e cioè un bipendolo immediatamente a sinistra di B ; la deformata è la prima della fig. 7c, e presenta una discontinuità in B , più precisamente alla sinistra di B ; i tratti relativi ad AB ed a BC sono paralleli. La condizione di lavoro nullo fa scrivere

$$\begin{aligned}
 EI T_B^{s*} \cdot \eta + ma^2 \left(\frac{4}{30} \cdot \frac{\eta}{2} + \frac{1}{60} \frac{\eta}{4} - \frac{3}{20} \cdot \frac{\eta}{3} - \right. \\
 \left. - \frac{3}{10} \cdot \frac{\eta}{3} + \frac{4}{30} \cdot \frac{\eta}{4} \right) = 0
 \end{aligned}$$

da cui

$$\varphi_B^s = - T_B^{s*} = - \frac{11}{240} \frac{ma^2}{EI}.$$

Per il calcolo di $\varphi_B^d = - T_B^{d*}$ si inserisce un bipendolo immediata-

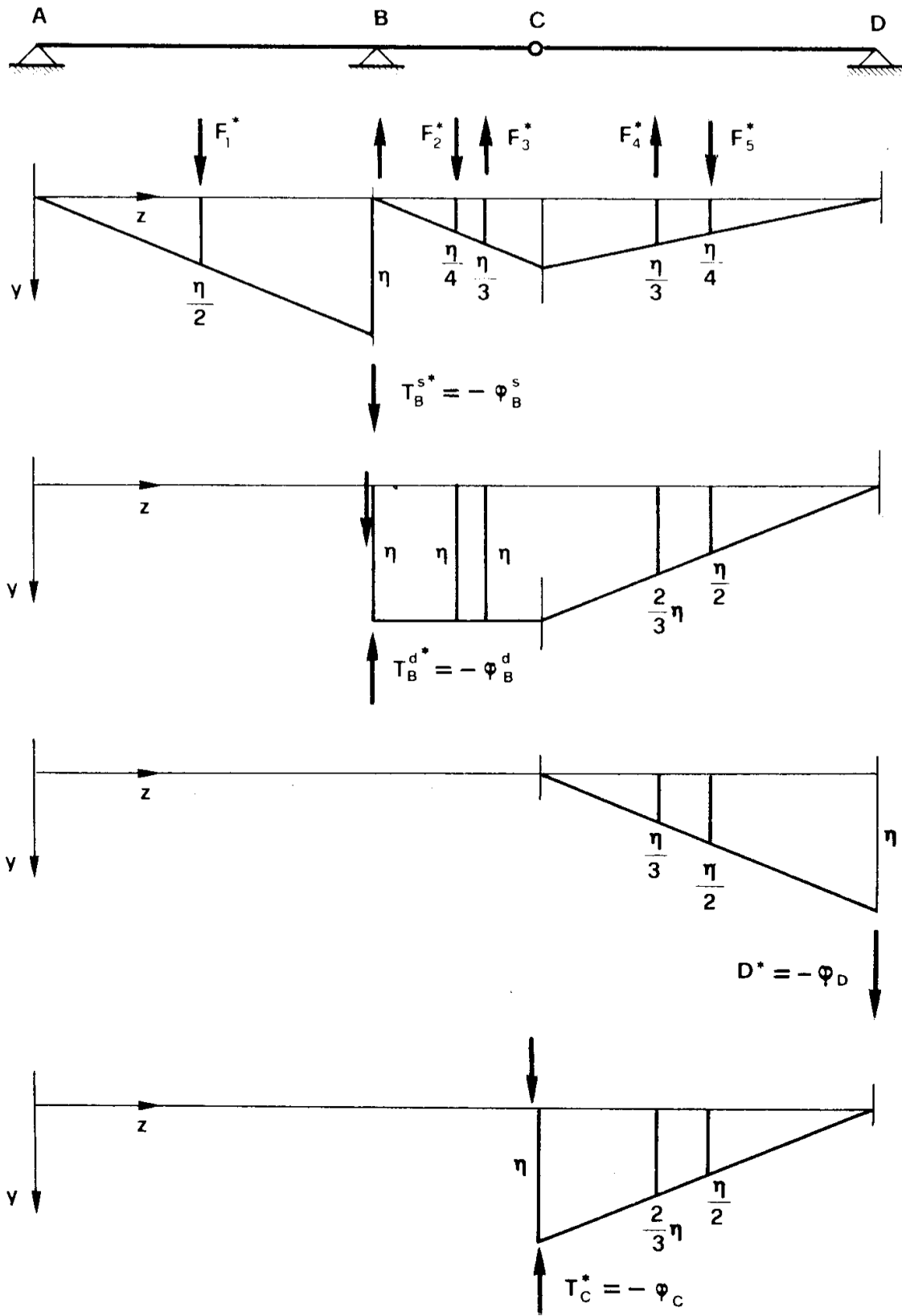


Figura 7c

mente a destra di B ; la deformata è la seconda della fig. 7c. Si ha così

$$-EI T_B^{d*} \cdot \eta + ma^2 \left(\frac{1}{60} \cdot \eta - \frac{3}{20} \cdot \eta - \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} \eta + \frac{4}{30} \cdot \frac{\eta}{2} \right) = 0$$

da cui

$$\varphi_B^d = -T_B^{d*} = \frac{4}{15} \frac{ma^2}{EI} = \frac{64}{240} \frac{ma^2}{EI}.$$

Per il calcolo di $\varphi_D = -T_D^* = -R_D^*$ la deformata è la terza della fig. 7c. Si ha

$$EI R_D^* \cdot \eta + ma^2 \left(-\frac{3}{10} \cdot \frac{\eta}{3} + \frac{4}{30} \cdot \frac{\eta}{2} \right) = 0$$

da cui

$$\varphi_D = -R_D^* = -\frac{1}{30} \frac{ma^2}{EI} = -\frac{8}{240} \frac{ma^2}{EI}.$$

Per il calcolo di $\varphi_C = -T_C^*$ si elimina la cerniera in C ; la deformata è la quarta della fig. 7c. Si ha

$$-EI T_C^* \cdot \eta + ma^2 \left(-\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} \eta + \frac{4}{30} \cdot \frac{\eta}{2} \right) = 0$$

da cui

$$\varphi_C = -T_C^* = \frac{4}{30} \frac{ma^2}{EI} = \frac{32}{240} \frac{ma^2}{EI}.$$

Per il calcolo di $\varphi_E = -T_E^*$ la deformata da prendere in considerazione è la prima della fig. 7d. Si ha^(*)

$$EI T_E^* \cdot 2\eta + ma^2 \left(-\frac{3}{10} \cdot \frac{2}{3} \eta + \frac{1}{4} \frac{3}{10} \cdot 2\eta \right) = 0$$

da cui

$$\varphi_E = - T_E^* = - \frac{1}{40} \frac{ma^2}{EI} = - \frac{6}{240} \frac{ma^2}{EI} .$$

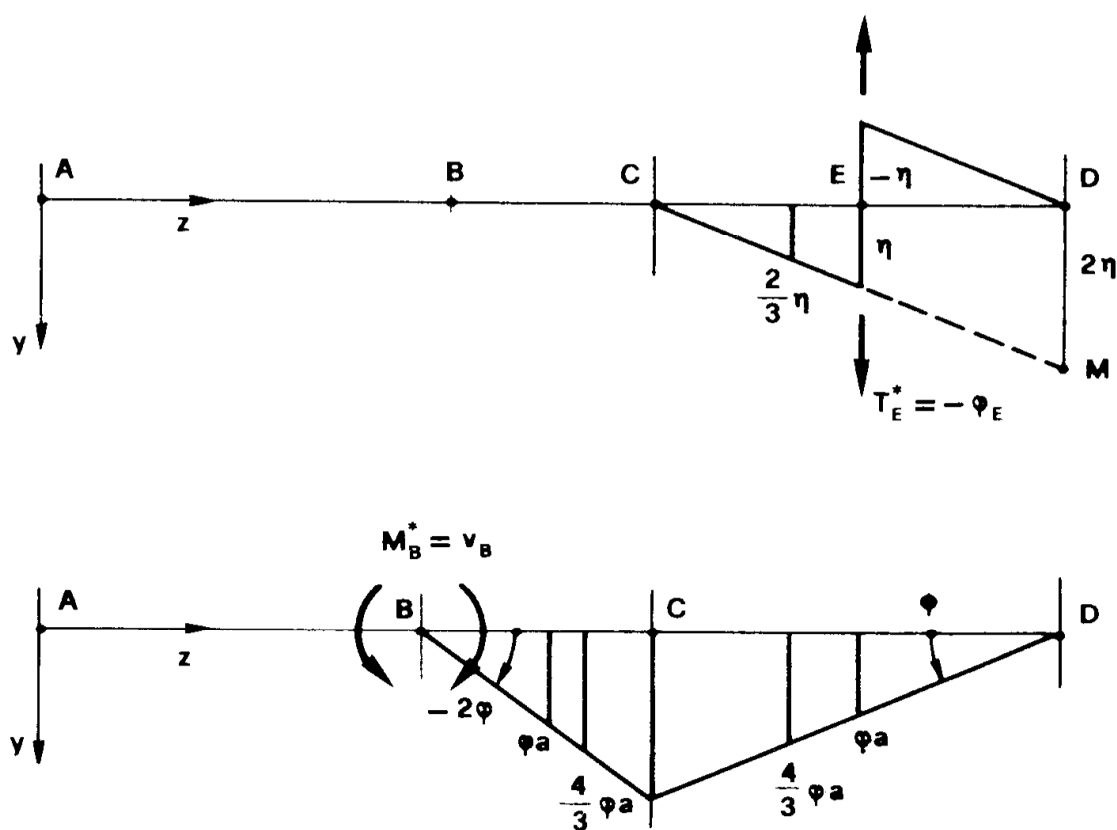


Figura 7d

Per il calcolo di $v_B = M_B^*$ la deformata da utilizzare è la seconda della fig. 7d. Si ha

$$EI M_B^* \cdot 2\varphi + ma^2 \left(\frac{1}{60} \cdot \varphi a - \frac{3}{20} \cdot \frac{4}{3} \varphi a - \right. \\ \left. - \frac{3}{10} \cdot \frac{4}{3} \varphi a + \frac{4}{30} \varphi a \right) = 0$$

da cui

$$v_B = M_B^* = \frac{27}{120} \frac{ma^3}{EI} = \frac{54}{240} \frac{ma^3}{EI}.$$

Problema n. 8.

Nei problemi dal n. 8 al n. 13 si ricavano con il procedimento di Mohr, su alcuni schemi fondamentali, i dati necessari per potere poi utilizzare, su schemi più complessi, il procedimento di composizione. Si tratta, in sostanza, di determinare le rotazioni alle estremità di una trave appoggiata, e rotazione e spostamento all'estremità di una mensola, per forze e coppie applicate in una generica sezione della trave appoggiata, o per forze e coppie applicate all'estremità della mensola. Qualsiasi altra condizione di carico è riducibile ad una sovrapposizione dei suddetti casi; il carico uniforme su tutta la luce è stato trattato direttamente (prob. 10 e 13). Ci si limita alle travi di prodotto EI costante, ma il procedimento è banalmente estensibile al caso di EI variabile.

La fig. 8 mostra una mensola AB soggetta ad una coppia \mathfrak{M} in corrispondenza dell'estremo libero B . Si ha

$$M(z) = \mathfrak{M}$$

$$q^*(z) = \frac{\mathfrak{M}}{EI};$$

la trave ausiliaria è una mensola libera in A ed incastrata in B . Risulta:

$$\varphi_B = -R_B^* = \frac{\mathfrak{M}l}{EI} \quad (28)$$

$$v_B = M_B^* = -\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EI} \quad (29)$$

Nella fig. 3 sono anche disegnati i diagrammi

$$M^*(z) = v(z)$$

$$T^*(z) = -\varphi(z)$$

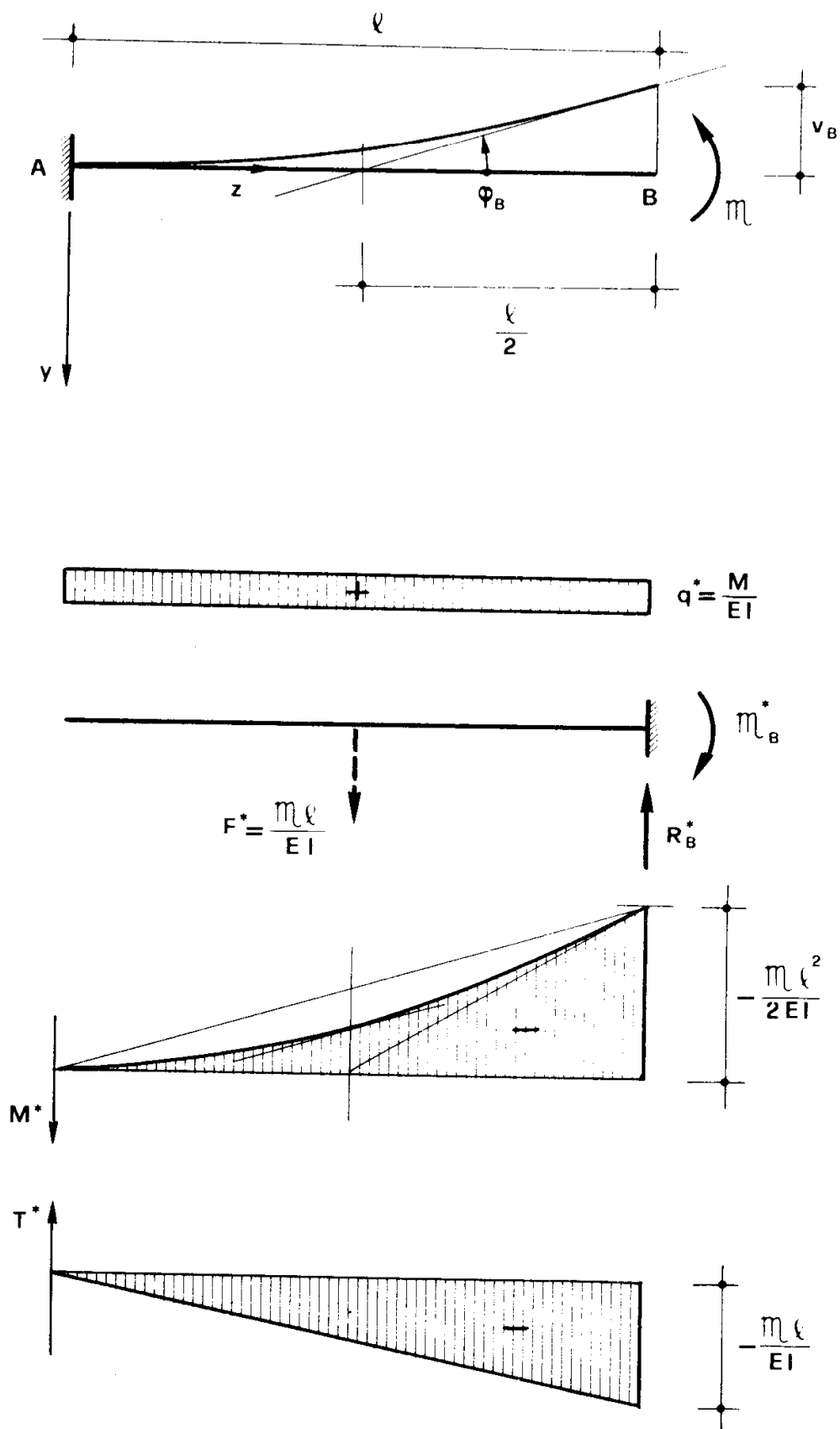


Figura 8

Problema n. 9.

La mensola AB della fig. 9 è caricata da una forza F all'estremo li-

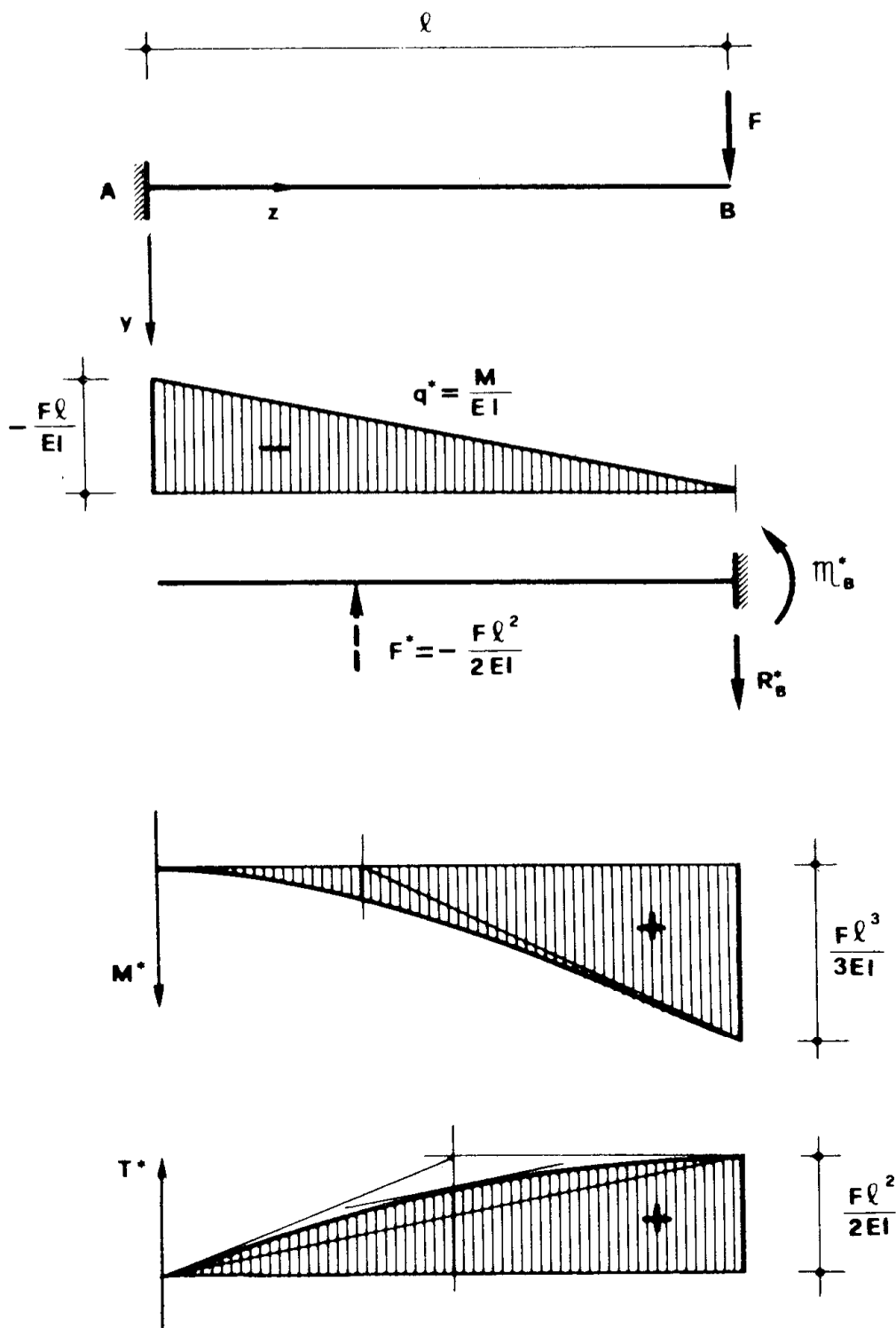


Figura 9

bero B ; si ha che il carico q^* è lineare, e varia da

$$q_A^* = \frac{M_A}{EI} = -\frac{Fl}{EI}$$

in A , a zero in B . La risultante di tale carico è

$$F^* = -\frac{Fl^2}{2EI},$$

ed è applicata a $z = \frac{l}{3}$ da A . Si ha perciò

$$\begin{aligned} \varphi_B &= -R_B^* = -\frac{Fl^2}{2EI} \\ v_B &= M_B^* = \frac{Fl^2}{2EI} \cdot \frac{2}{3}l \end{aligned} \quad (30)$$

e quindi

$$v_B = \frac{Fl^3}{3EI}. \quad (31)$$

Il diagramma $v(z) = M^*(z)$ è una parabola cubica; le due tangenti in corrispondenza di A e B si incontrano sulla verticale di F^* . La tangente in A è orizzontale perchè $T_A^* = 0$.

Il diagramma $T^*(z) = -\varphi(z)$ è una parabola quadratica; la tangente in corrispondenza di B è orizzontale, perchè $q_B^* = 0$; le due tangenti in corrispondenza di A e B si incontrano sulla verticale di mezzeria di AB .

Problema n. 10.

La mensola AB della fig. 10 è soggetta ad un carico uniforme q ; il carico q^* è una parabola quadratica, di valore

$$q_A^* = -\frac{ql^2}{2EI}$$

in A , e nullo in B ; la tangente in B è orizzontale, e le due tangenti in corrispondenza di A e B si incontrano sulla verticale di mezzeria di AB . Il diagramma $q^*(z)$ si può scomporre in un diagramma triangolare ed uno

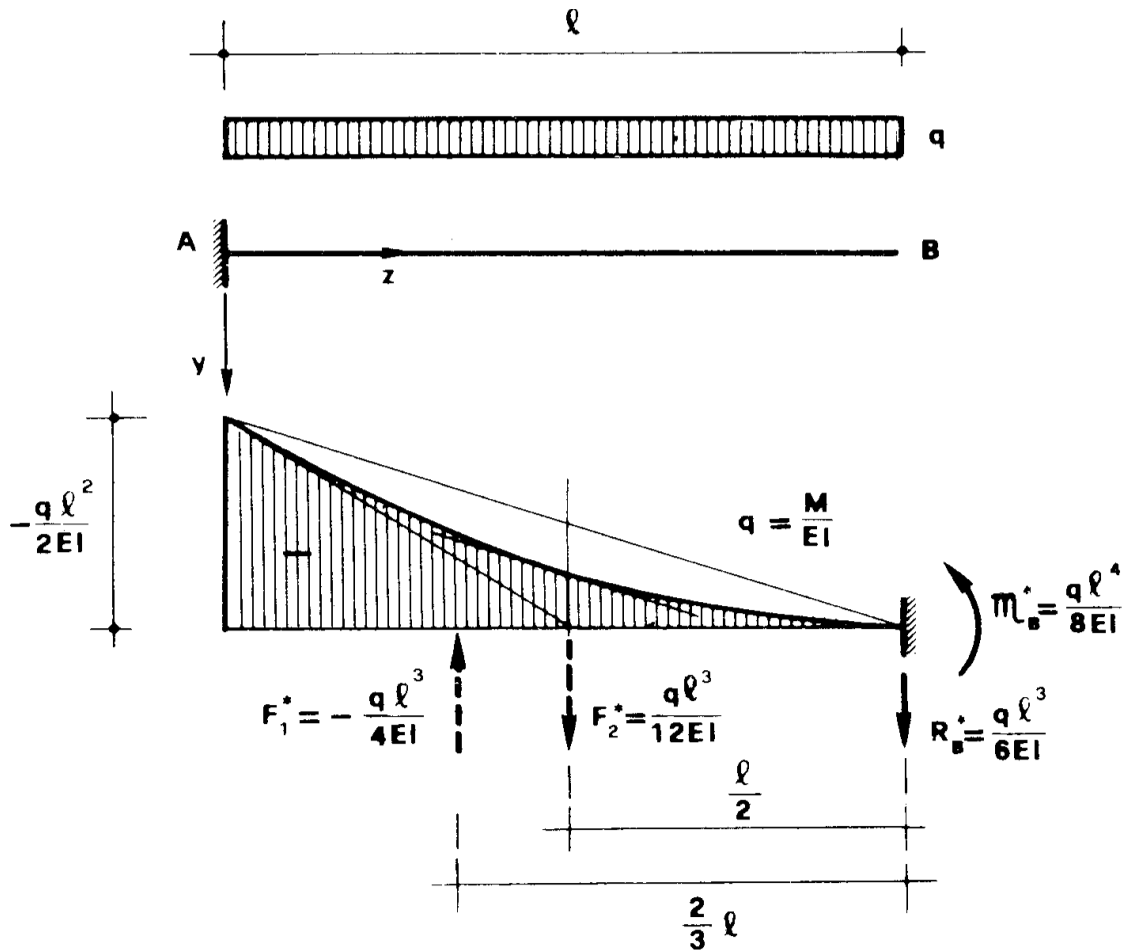


Figura 10

parabolico; il primo è ad ordinate negative, pari a q_A^* in A e nullo in B ; il secondo è ad ordinate positive, nulle in A e B , simmetrico rispetto alla mezzeria di AB , di valore massimo

$$\frac{q\ell^2}{8EI}$$

Le risultanti dei due insiemi di carichi distribuiti $q^*(z)$ sono rispettivamente

$$F_1^* = -\frac{q\ell^3}{4EI}$$

$$F_2^* = \frac{ql^3}{12EI}.$$

E' quindi

$$\varphi_B = -R_B^* = F_1^* + F_2^*$$

da cui

$$\varphi_B = -\frac{ql^3}{6EI}, \quad (32)$$

ed ancora

$$v_B = M_B^* = -\frac{2}{3} F_1^* l - \frac{1}{2} F_2^* l$$

da cui

$$v_B = \frac{ql^4}{8EI}. \quad (33)$$

Problema n. 11.

La trave appoggiata AB della fig. 11 sorregge una forza F all'ascissa

$$z_F = \alpha l;$$

si pone

$$l - z_F = \beta l.$$

Le due reazioni sono

$$R_A = -\beta F$$

$$R_B = -\alpha F$$

ed il momento sotto F è fornito da

$$M_F = \alpha\beta Fl;$$

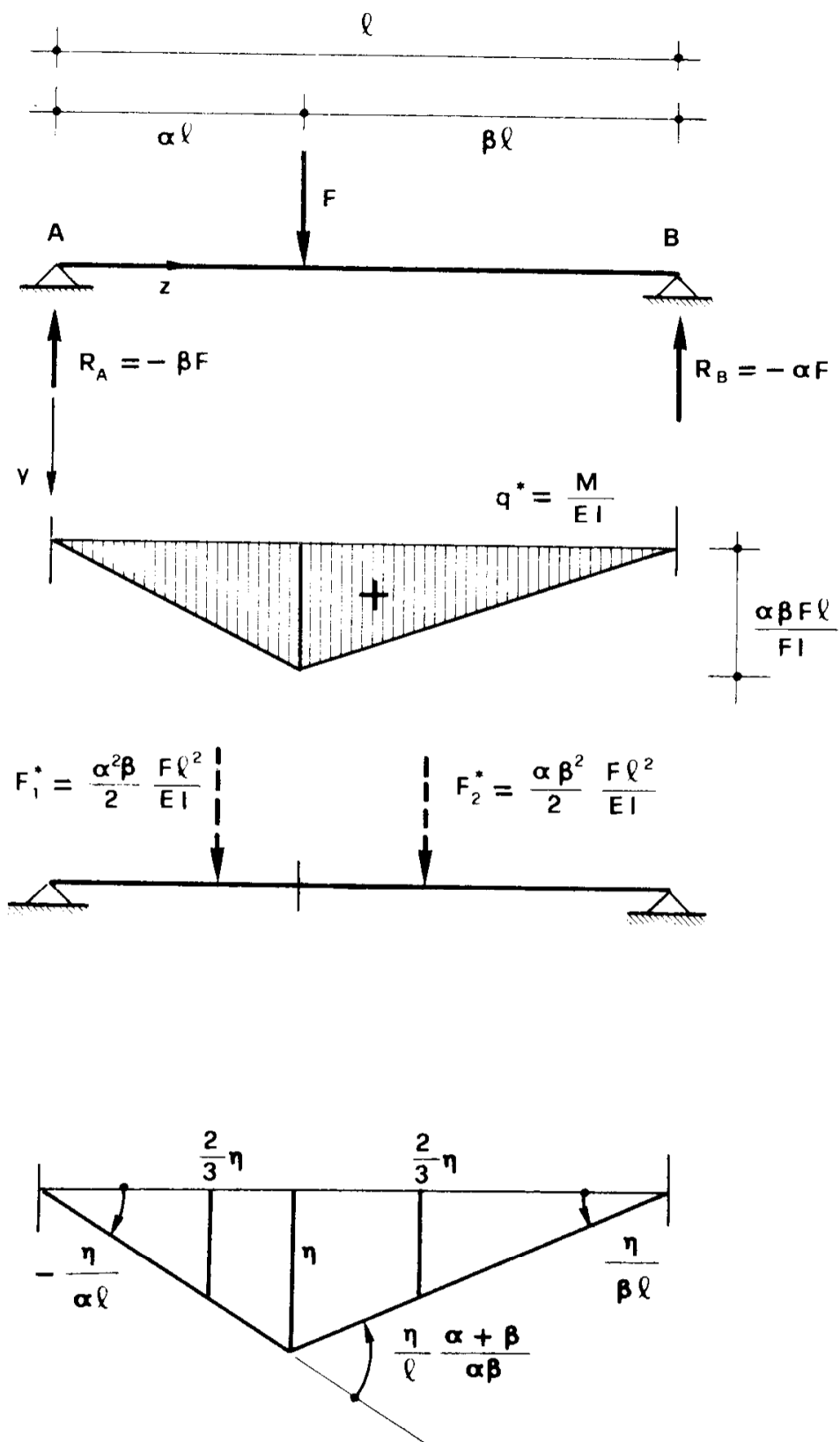


Figura 11

il diagramma q^* si presenta quindi con. nella fig. 11; le risultanti dei due carichi triangolari sono

$$F_1^* = \frac{\alpha^2 \beta}{2} \frac{Fl^2}{EI}$$

$$F_2^* = \frac{\alpha \beta^2}{2} \frac{Fl^2}{EI}$$

applicate alle ascisse

$$z_1 = \frac{2}{3} \alpha l$$

$$z_2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{3} \right) l.$$

L'equilibrio alla rotazione intorno ad A si traduce nella relazione

$$- R_B^* l - \frac{\alpha^2 \beta}{2} \frac{Fl^2}{EI} \cdot \frac{2}{3} \alpha l - \frac{\alpha \beta^2}{2} \frac{Fl^2}{EI} \cdot \left(\alpha + \frac{\beta}{3} \right) l = 0$$

da cui si ottiene

$$R_B^* = - \frac{Fl^2}{EI} \frac{\alpha \beta (2\alpha^2 + 3\alpha\beta + \beta^2)}{6}.$$

Analogamente l'equilibrio alla rotazione intorno a B permette di scrivere

$$R_A^* l + \frac{\alpha^2 \beta}{2} \cdot \frac{Fl^2}{EI} \left(\beta + \frac{\alpha}{3} \right) l + \frac{\alpha \beta^2}{2} \frac{Fl^2}{EI} \cdot \frac{2}{3} \beta l = 0$$

da cui

$$R_A^* = - \frac{Fl^2}{EI} \frac{\alpha \beta (2\beta^2 + 3\alpha\beta + \alpha^2)}{6}$$

Poichè è

$$\alpha = 1 - \beta$$

si ha

$$\alpha\beta (2\beta^2 + 3\alpha\beta + \alpha^2) = (1 - \beta)\beta (1 + \beta) = \beta (1 - \beta^2)$$

e quindi

$$R_A^* = - \frac{Fl^2}{EI} \frac{\beta (1 - \beta^2)}{6}$$

Analogamente si ha

$$R_B^* = - \frac{Fl^2}{EI} \frac{\alpha (1 - \alpha^2)}{6}$$

E' perciò

$$\varphi_A = R_A^* = - \frac{\beta (1 - \beta^2)}{6} \frac{Fl^2}{EI}$$

(34)

$$\varphi_B = - R_B^* = \frac{\alpha (1 - \alpha^2)}{6} \frac{Fl^2}{EI}$$

L'abbassamento v_F sotto F è pari ad M_F^* ; per ricavarlo si ricorre al procedimento di Lagrange. Si inserisce sotto F una cerniera (fig. 11), e si costruisce la deformata. La condizione di lavoro nullo permette di scrivere

$$- M_F^* \cdot \frac{\eta}{l} \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + F_1^* \cdot \frac{2}{3} \eta + F_2^* \cdot \frac{2}{3} \eta = 0$$

da cui si trae

$$v_F = M_F^* = \frac{\alpha^2 \beta^2}{3} \frac{Fl^3}{EI} . \quad (35)$$

Dalle (34) e (35) si ha, per $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, e cioè per forza applicata in mezzeria,

$$\begin{aligned}\varphi_A &= -\frac{Fl^2}{16EI} \\ \varphi_B &= \frac{Fl^2}{16EI} \\ v_{l/2} &= \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{8}{384} \frac{Fl^3}{EI}.\end{aligned}\quad (36)$$

Problema n. 12.

La trave appoggiata AB della fig. 12 è soggetta ad una coppia \mathfrak{M} all'ascissa

$$z_m = \alpha l ;$$

si pone

$$l - z_m = \beta l .$$

Le due reazioni sono

$$R_A = -\frac{\mathfrak{M}}{l}$$

$$R_B = \frac{\mathfrak{M}}{l} ;$$

il diagramma $M(z)$ è costituito da due rette parallele, una valevole nell'intervallo $[0, z_m[$, con ordinata nulla in $z = 0$, l'altra valevole nell'intervallo $]z_m, l]$, con ordinata nulla in $z = l$. In $z = z_m$ il momento è pari ad $\alpha \mathfrak{M}$ a sinistra, a $-\beta \mathfrak{M}$ a destra. Il diagramma q^* si presenta quindi come nella fig. 12; le risultanti dei due carichi triangolari sono

$$F_1^* = \frac{\alpha^2}{2} \frac{l}{EI}$$

$$F_2^* = -\frac{\beta^2}{2} \frac{l}{EI},$$

applicate alle ascisse

$$z_1 = \frac{2}{3} \alpha l$$

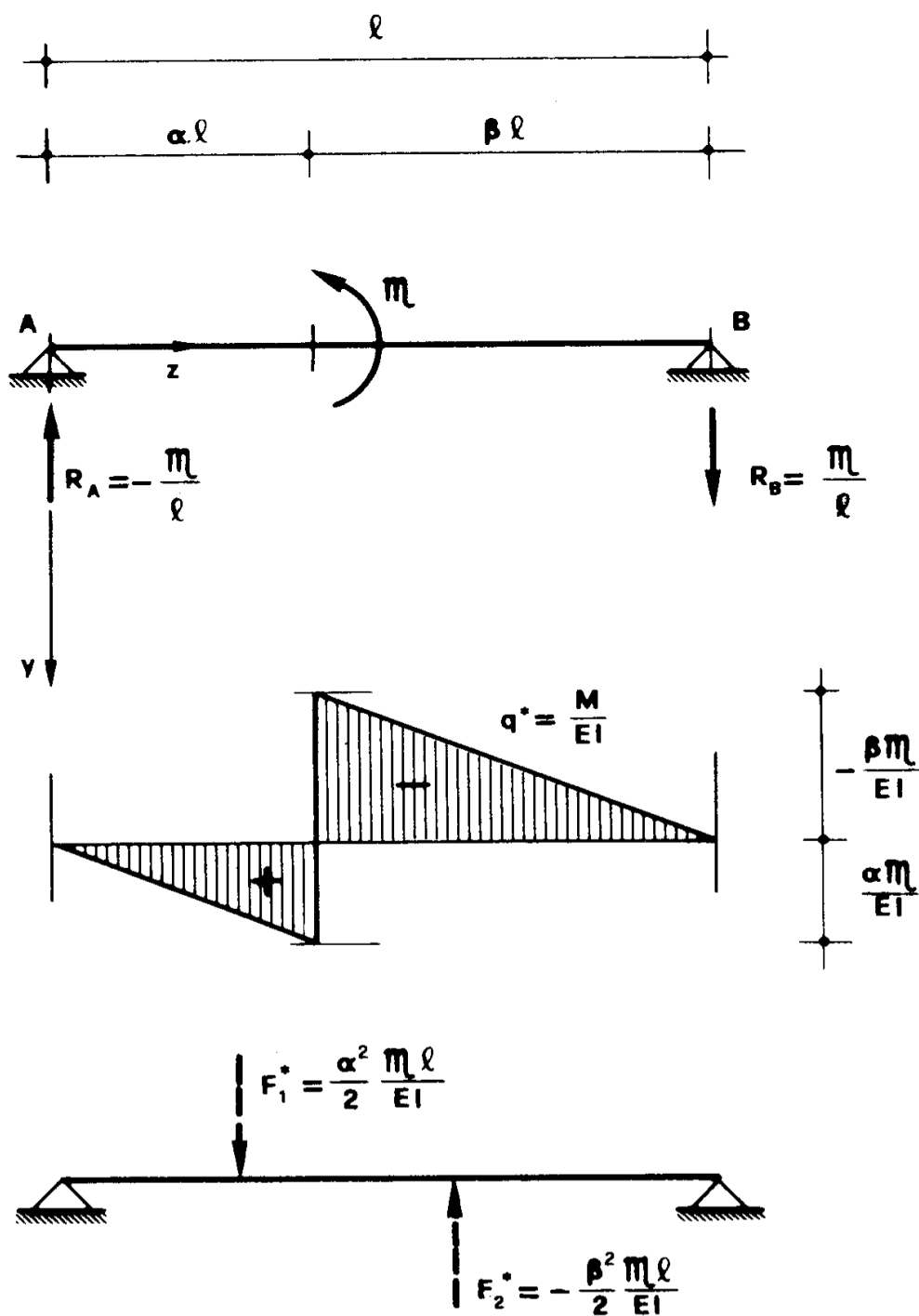


Figura 12

$$z_2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{3} \right) l .$$

L'equilibrio alla rotazione intorno ad A si traduce nella relazione

$$- R_B^* l - \frac{\alpha^2}{2} \frac{\mathfrak{M}l}{EI} \cdot \frac{2}{3} \alpha l + \frac{\beta^2}{2} \frac{\mathfrak{M}l}{EI} \left(\alpha + \frac{\beta}{3} \right) l = 0$$

da cui si ottiene

$$R_B^* = \frac{\mathfrak{M}l}{EI} \frac{-2\alpha^3 + 3\beta^2\alpha + \beta^3}{6} .$$

Analogamente, l'equilibrio alla rotazione intorno a B permette di scrivere

$$R_A^* l + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\mathfrak{M}l}{EI} \left(\beta + \frac{\alpha}{3} \right) l - \frac{\beta^2}{2} \frac{\mathfrak{M}l}{EI} \cdot \frac{2}{3} \beta l = 0$$

da cui

$$R_A^* = - \frac{\mathfrak{M}l}{EI} \frac{-2\beta^3 + 3\alpha^2\beta + \alpha^3}{6} .$$

Poichè è

$$\alpha = 1 - \beta$$

si ha

$$-2\beta^3 + 3\alpha^2\beta + \alpha^3 = 1 - 3\beta^2$$

e quindi

$$R_A^* = - \frac{\mathfrak{M}l}{EI} \frac{1 - 3\beta^2}{6} .$$

Analogamente si ha

$$R_B^* = \frac{\mathfrak{M}l}{EI} \frac{1 - 3\alpha^2}{6} .$$

E' perciò

$$\varphi_A = R_A^* = \frac{3\beta^2 - 1}{6} \frac{\mathfrak{M}l}{EI} \tag{37}$$

$$\varphi_B = R_B^* = \frac{3\alpha^2 - 1}{6} \frac{\mathfrak{M}l}{EI} .$$

Dalle (37), per $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ (coppia \mathfrak{M} applicata in A) si ha

$$\varphi_A = \frac{\mathfrak{M}l}{3EI} \tag{38}$$

$$\varphi_B = -\frac{\mathfrak{M}l}{6EI} ;$$

per $\alpha = 1$ e $\beta = 0$ (coppia \mathfrak{M} applicata in B)

$$\varphi_A = -\frac{\mathfrak{M}l}{6EI} \tag{39}$$

$$\varphi_B = \frac{\mathfrak{M}l}{3EI} ;$$

per $\alpha = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{2}$ (coppia \mathfrak{M} applicata in mezzeria)

$$\varphi_A = \varphi_B = -\frac{\mathfrak{M}l}{24EI} . \tag{40}$$

Problema n. 13.

La trave appoggiata della fig. 13 è soggetta ad un carico q uniforme-

mente distribuito su tutta la luce. Il momento $M(z)$ è una parabola quadratica, con ordinate nulle sotto A e B , simmetrica rispetto alla mezzeria, di

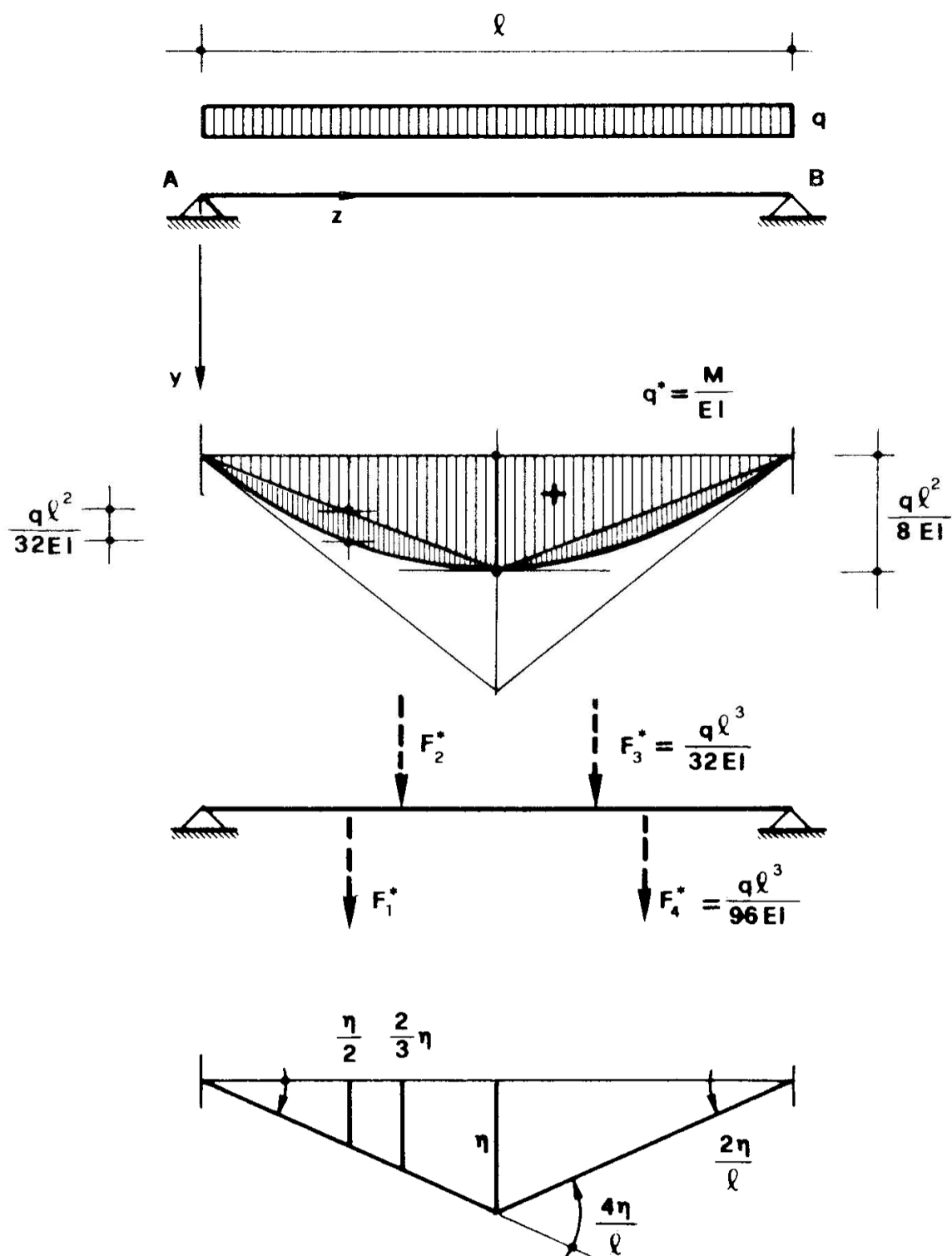


Figura 13

ordinata massima $\frac{ql^2}{8}$: quindi il carico q^* si presenta come nella fig. 13.

Esso è scomponibile in due diagrammi parabolici e due triangolari; le rispettive risultanti, limitandosi alla parte sinistra rispetto alla mezzeria, sono

$$F_1^* = \frac{ql^3}{96EI}$$

$$F_2^* = \frac{ql^3}{32EI}.$$

Risulta

$$\varphi_A = R_A^* = -\frac{ql^3}{24EI} \tag{41}$$

$$\varphi_B = -R_B^* = \frac{ql^3}{24EI}.$$

Per ottenere l'abbassamento in mezzeria si usa il procedimento di Lagrange, inserendo in mezzeria una cerniera; si ha così (fig. 13)

$$-M_{l/2}^* \cdot \frac{4\eta}{l} + 2 \left(\frac{ql^3}{96EI} \cdot \frac{\eta}{2} + \frac{ql^3}{32EI} \cdot \frac{2}{3} \eta \right) = 0$$

da cui

$$v_{l/2} = M_{l/2}^* = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}. \tag{42}$$

Problema n. 14.

Si studia la trave Gerber della fig. 14; nella stessa figura è disegnato il diagramma $q^* = \frac{M}{EI}$. Si vuole la rotazione relativa tra le due facce unite dalla cerniera C .

La trave ausiliaria si ottiene sostituendo l'appoggio in B con una cerniera, la cerniera in C con un appoggio. Poichè è

$$\varphi_C^s = - T_C^{s*}$$

$$\varphi_C^d = - T_C^{d*}$$

è pure

$$\Delta \varphi_C = \varphi_C^d - \varphi_C^s = T_C^{s*} - T_C^{d*} .$$

Poichè dalla relazione di equilibrio alla traslazione verticale del tronco sull'appoggio C si ha

$$R_C^* - T_C^{s*} + T_C^{d*} = 0 ,$$

da cui

$$R_C^* = T_C^{s*} - T_C^{d*} ,$$

è pure

$$\Delta \varphi_C = R_C^* . \quad (43)$$

Occorre perciò nella trave ausiliaria sopprimere il vincolo in C , e scrivere la relazione di Lagrange. Si ha così, chiamando F_1^* F_2^* F_3^* le risultanti dei carichi q^* relative ai tratti AB , BC e CD ,

$$F_1^* = - \frac{F a^2}{4 E I}$$

$$F_2^* = - \frac{F a^2}{4 E I}$$

$$F_3^* = \frac{F a^2}{8 E I} ;$$

le ascisse di queste risultanti sono

$$z_1 = \frac{2}{3} a$$

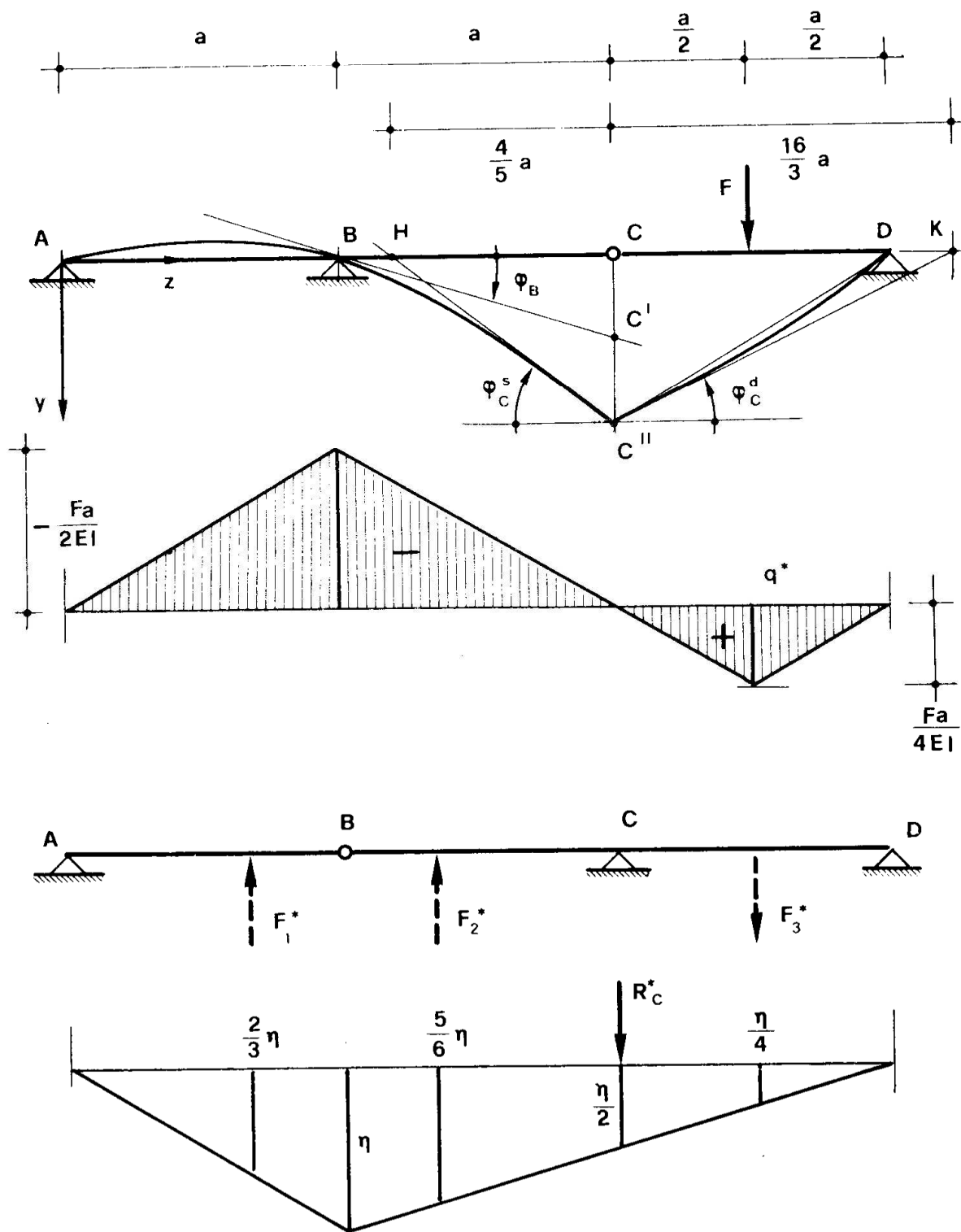


Figura 14

$$z_2 = a + \frac{1}{3} a$$

$$z_3 = 2a + \frac{a}{2} .$$

L'equazione di Lagrange è (fig. 14)

$$R_C^* \cdot \frac{\eta}{2} - \frac{F a^2}{4 E I} \cdot \frac{2}{3} \eta - \frac{F a^2}{4 E I} \cdot \frac{5}{6} \eta + \frac{F a^2}{8 E I} \cdot \frac{\eta}{4} = 0$$

da cui

$$\Delta \varphi_C = R_C^* = \frac{33}{48} \frac{F a^2}{E I} . \quad (44)$$

Allo stesso risultato può giungersi con il metodo di composizione. La trave della fig. 14 è composta di una trave AC appoggiata in A e B al suolo, e di una trave CD appoggiata in C sulla trave AC , e in D al suolo. Le reazioni in C e D sulla trave CD sono pari a $-\frac{F}{2}$; quindi la trave ABC è soggetta in C alla forza $\frac{F}{2}$. La rotazione della sezione B può ottenersi in questa maniera: si trasporta $\frac{F}{2}$ in B , accompagnandola con la coppia di trasporto $-\frac{F a}{2}$; ciò non altera le deformazioni della parte AB , poichè non ne altera i momenti. Quindi è (39)

$$\varphi_B = -\frac{F a}{2} \frac{a}{3 E I} = -\frac{F a^2}{6 E I} .$$

Gli spostamenti di BC sono quelli di una mensola BC incastrata in B e soggetta ad una rotazione anelastica φ_B in B , e ad una forza $\frac{F}{2}$ in C . La rotazione provoca gli spostamenti rigidi forniti dalla retta BC' , e quindi uno spostamento v'_C fornito da

$$v'_C = -\varphi_B a = \frac{F a^3}{6 E I} ;$$

la forza $\frac{F}{2}$ provoca gli spostamenti elastici ben noti, forniti dal diagramma $BC'C''$, e quindi uno spostamento v_C'' dato da (31)

$$v_C'' = \frac{F}{2} \frac{a^3}{3EI} = \frac{Fa^3}{6EI}.$$

In totale è

$$v_C = v_C' + v_C'' = \frac{Fa^3}{3EI};$$

si osservi che $v_C' = v_C''$.

La rotazione della sezione immediatamente a sinistra di C è somma di quella connessa al diagramma di spostamenti rigidi BCC' , e di quella connessa al diagramma di spostamenti elastici $BC'C''$; è perciò

$$\varphi_C^{s'} = \varphi_B = -\frac{Fa^2}{6EI}$$

ed ancora (30)

$$\varphi_C^{s''} = -\frac{F}{2} \frac{a^2}{2EI} = -\frac{Fa^2}{4EI},$$

e quindi

$$\varphi_C^s = -\frac{5}{12} \frac{Fa^2}{EI}.$$

Si passi adesso alla trave CD . I suoi spostamenti sono quelli relativi al cedimento v_C di C , che si leggono sulla retta $C''D$, e quelli ben noti provocati da una forza F agente in mezzeria. Quindi è (36)

$$\varphi_C^{d'} = \frac{v_C}{a} = \frac{Fa^2}{3EI}$$

$$\varphi_C^{d''} = -\frac{Fa^2}{16EI}$$

$$\varphi_C^d = \frac{13}{48} \frac{Fa^2}{EI}$$

Si ha così

$$\Delta\varphi_C = \varphi_C^d - \varphi_C^s = \frac{Fa^2}{EI} \left(\frac{13}{48} + \frac{5}{12} \right)$$

e cioè

$$\Delta\varphi_C = \frac{33}{48} \frac{Fa^2}{EI},$$

in accordo con la (44).

Il metodo di composizione permette di disegnare con buona approssimazione una deformata, poichè fornisce i valori degli abbassamenti e delle inclinazioni in corrispondenza di ogni vincolo. Nel caso in esame, disegnata la tangente BC' in B , si ottiene C'' raddoppiando CC' . Poichè è

$$\varphi_C^s = \frac{CC''}{HC}$$

si ottiene (in modulo)

$$HC = \frac{v_C}{\varphi_C^s} = \frac{Fa^3}{3EI} \cdot \frac{12}{5} \frac{EI}{Fa^2} = \frac{4}{5} a.$$

La tangente a sinistra in C'' si ha congiungendo H con C'' . Analogamente è

$$\varphi_C^d = \frac{CC''}{CK}$$

da cui

$$CK = \frac{v_C}{\varphi_C^d} = \frac{Fa^3}{3EI} \cdot \frac{48 EI}{13 Fa^2} = \frac{16}{13} a;$$

la tangente a destra in C'' si ottiene congiungendo K con C'' .

Problema n. 15.

Si studia la trave Gerber della fig. 15; il diagramma $M(z)$, e quindi quello $q^*(z)$, è di immediata costruzione. Si vuole l'abbassamento v_E dell'estremo E .

Risulta

$$F_1^* = F_2^* = \frac{Fa^2}{2EI}$$

$$F_3^* = F_4^* = -\frac{Fa^2}{2EI}$$

alle ascisse

$$z_1 = \frac{2}{3} a$$

$$z_2 = a + \frac{1}{3} a$$

$$z_3 = 2a + \frac{2}{3} a$$

$$z_4 = 3a + \frac{1}{3} a.$$

La trave ausiliaria si ottiene sostituendo in B e D l'appoggio con una cerniera, in C la cerniera con un appoggio, ed incastrando la sezione E . Poichè è

$$v_E = M_E^*,$$

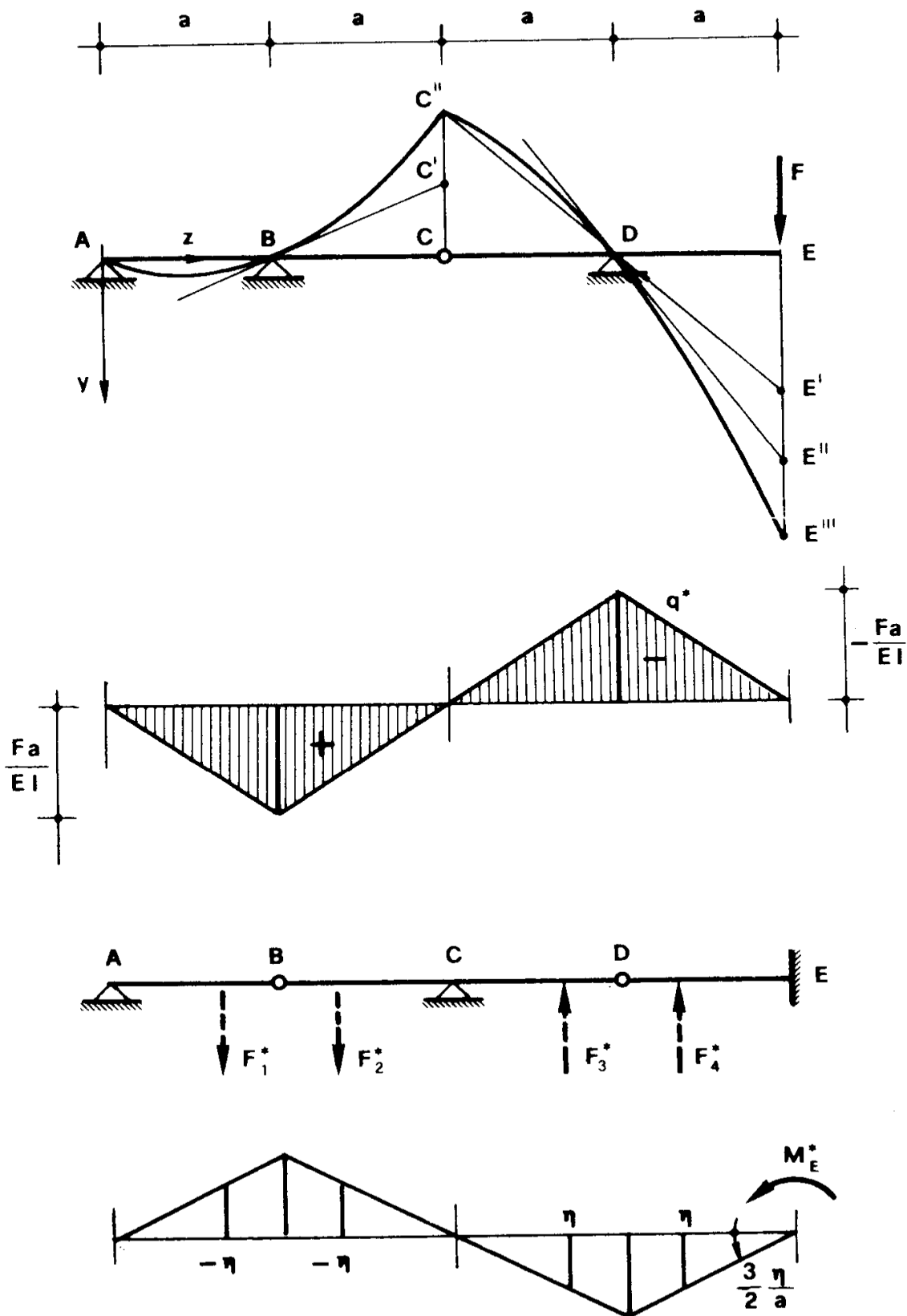


Figura 15

si sopprime il vincolo alla rotazione baricentrica in E e si determina la conseguente deformata; l'equazione di Lagrange è

$$M_E^* \cdot \frac{3}{2} \frac{\eta}{a} - 4 \cdot \frac{Fa^2}{2EI} \cdot \eta = 0$$

da cui

$$v_E = M_E^* = \frac{4}{3} \frac{Fa^3}{EI} .$$

Seguendo il metodo di composizione, si deve considerare la trave AC appoggiata in A e B al suolo, e la trave CE appoggiata in C sulla trave AC , in D al suolo. Si ha (39)

$$\varphi_B = Fa \frac{a}{3EI} = \frac{Fa^2}{3EI} .$$

Per la rotazione di B l'estremità della mensola BC si sposta di

$$v'_C = CC' = - \frac{Fa^3}{3EI} ;$$

per fatto elastico, l'estremità della mensola BC soggetta in C alla forza $-F$ trasmessa dalla trave CE è (31)

$$v''_C = C'C'' = - \frac{Fa^3}{3EI} ,$$

e quindi

$$v_C = - \frac{2}{3} \frac{Fa^3}{EI} .$$

Per effetto dello spostamento v_C , il punto E della trave CE si sposta di

$$v'_E = EE' = \frac{2}{3} \frac{Fa^3}{EI} ;$$

per effetto della deformazione della parte CD la sezione D ruota ulteriormente (39) di

$$- Fa \cdot \frac{a}{3EI} = - \frac{Fa^2}{3EI},$$

e quindi l'estremo E si sposta ulteriormente di

$$v_E'' = E'E'' = \frac{Fa^3}{3EI};$$

per effetto della deformazione della parte DE si ha poi (31)

$$v_E''' = E''E''' = \frac{Fa^3}{3EI}.$$

Quindi può scriversi

$$v_E = \frac{4}{3} \frac{Fa^3}{EI}.$$

Problema n. 16.

La trave Gerber della fig. 16, su tre luci, è soggetta sulla terza campata ad un carico q uniforme. La trave CD trasmette alla AC una forza pari a $\frac{qa}{2}$ in C ; quindi in B è

$$M_B^d = - \frac{qa^2}{2}.$$

Poichè il diagramma $M(z)$ in AC è costituito da due rette parallele passanti per A e C (T è costante in tutta la trave, e pari a $\frac{qa}{2}$) è pure

$$M_B^s = \frac{qa^2}{2}.$$

Il diagramma q^* si presenta perciò come nella fig. 16.

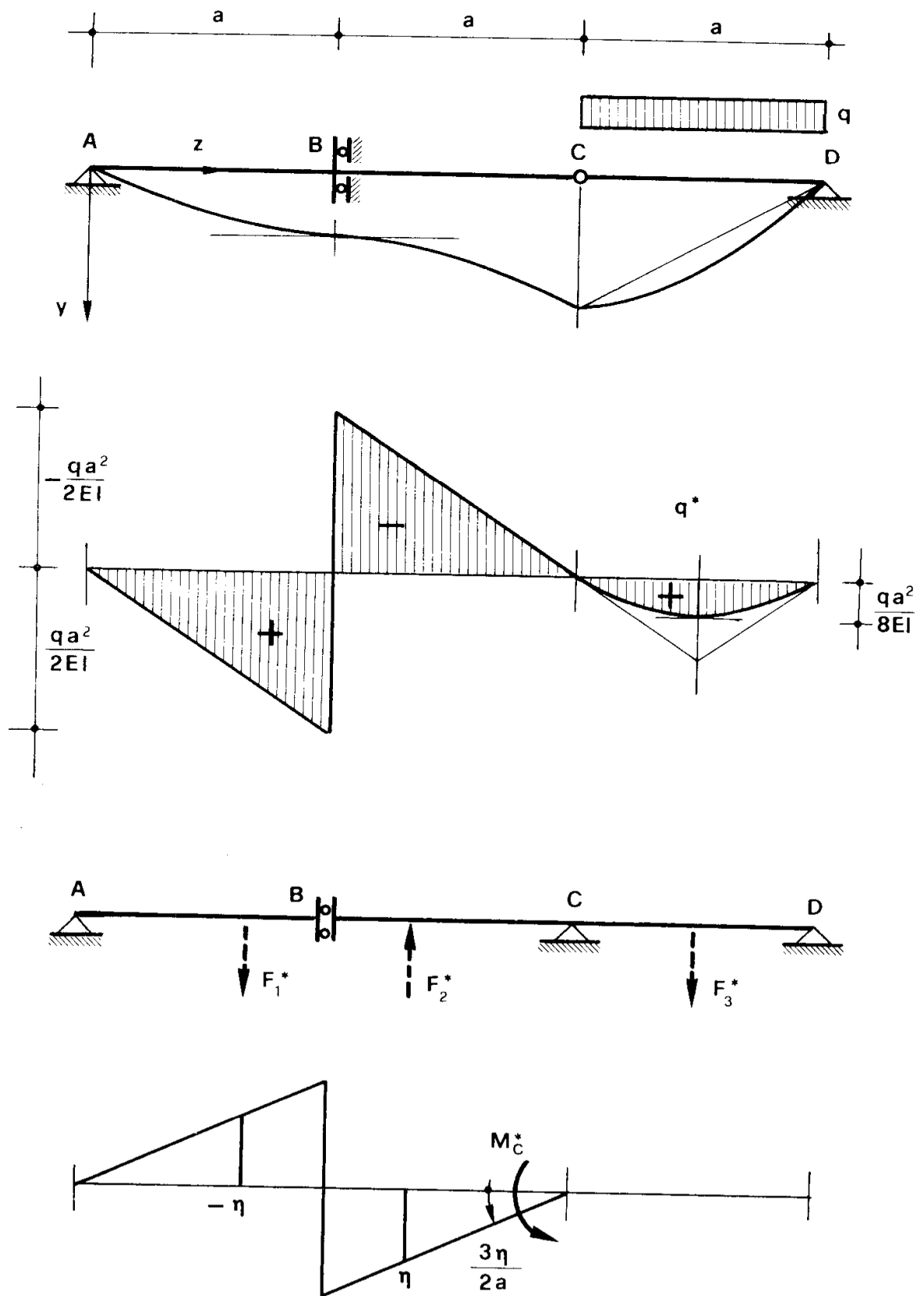


Figura 16

Si vuole lo spostamento del punto C . La trave ausiliaria si ha sostituendo il bipendolo esterno in B con un bipendolo interno, la cerniera in C con un appoggio. Le risultanti dei carichi q^* nei tre tratti AB , BC e CD sono

$$F_1^* = \frac{qa^3}{4EI}$$

$$F_2^* = -\frac{qa^3}{4EI}$$

$$F_3^* = \frac{qa^3}{12EI},$$

alle ascisse

$$z_1 = \frac{2}{3}a$$

$$z_2 = a + \frac{1}{3}a$$

$$z_3 = 2a + \frac{1}{2}a.$$

Si inserisce in C una cerniera; si determina la deformata e si scrive l'equazione di Lagrange

$$M_C^* \cdot \frac{3}{2} \frac{\eta}{a} - 2 \cdot \frac{qa^3}{4EI} \eta = 0$$

da cui

$$v_C = M_C^* = \frac{qa^4}{3EI}.$$

Si operi adesso con il procedimento di composizione. Lo spostamento di B è uguale e contrario a quello dell'estremo A della mensola AB incastrata in B e soggetta alla forza $-\frac{qa}{2}$ in A :

$$v_B = \frac{qa}{2} \frac{a^3}{3EI} = \frac{qa^4}{6EI} ;$$

lo spostamento di C rispetto a B è quello dell'estremo C di una mensola BC incastrata in B e soggetta alla forza $\frac{qa}{2}$ in C :

$$v_{CB} = \frac{qa^4}{6EI} .$$

Quindi

$$v_C = v_B + v_{BC} = \frac{qa^4}{3EI} .$$

Problema n. 17.

Nella trave Gerber della fig. 17 si desidera ottenere lo spostamento relativo Δv_C tra le due facce unite dal bipendolo C . Poichè è

$$\Delta v_C = v_C^d - v_C^s = M_C^{d*} - M_C^{s*} = \Delta M_C^*$$

$$\mathfrak{m}_C^* = M_C^{s*} - M_C^{d*}$$

si può scrivere

$$\Delta v_C = - \mathfrak{m}_C^* , \tag{45}$$

dove \mathfrak{m}_C^* è la coppia svolta dal bipendolo C sulla trave ausiliaria. Occorre perciò in quest'ultima sopprimere il bipendolo C , e scrivere, sulla deformata che ne consegue, l'equazione di Lagrange.

Il carico q^* si ottiene considerando che nella trave reale il vincolo C trasmette da AC a CD una coppia pari a

$$- qa \cdot \frac{a}{2} = - \frac{qa^2}{2} ;$$

la trave AC è soggetta in C ad una coppia $\frac{qa^2}{2}$, e quindi M è pari al valore $\frac{qa^2}{2}$ su tutto BC , e varia linearmente da tale valore in B al valore nullo in A . La tangente al diagramma M in C è unica, poichè in C non agiscono forze esterne; quindi il diagramma parabolico in CD è determinato.

Il carico q^* su AC è stato sostituito dalle due risultanti F_1^* ed F_2^* relative alle parti AB e BC , mentre il carico q^* su CD è stato sostituito dalle due risultanti F_3^* ed F_4^* del carico triangolare CKD , e del carico parabolico residuo. Si ha così

$$F_1^* = \frac{qa^3}{4EI}$$

$$F_2^* = \frac{qa^3}{2EI}$$

$$F_3^* = \frac{qa^3}{4EI}$$

$$F_4^* = \frac{qa^3}{12EI},$$

alle ascisse

$$z_1 = \frac{2}{3} a$$

$$z_2 = a + \frac{a}{2}$$

$$z_3 = 2a + \frac{a}{3}$$

$$z_4 = 2a + \frac{a}{2}.$$

L'equazione di Lagrange è

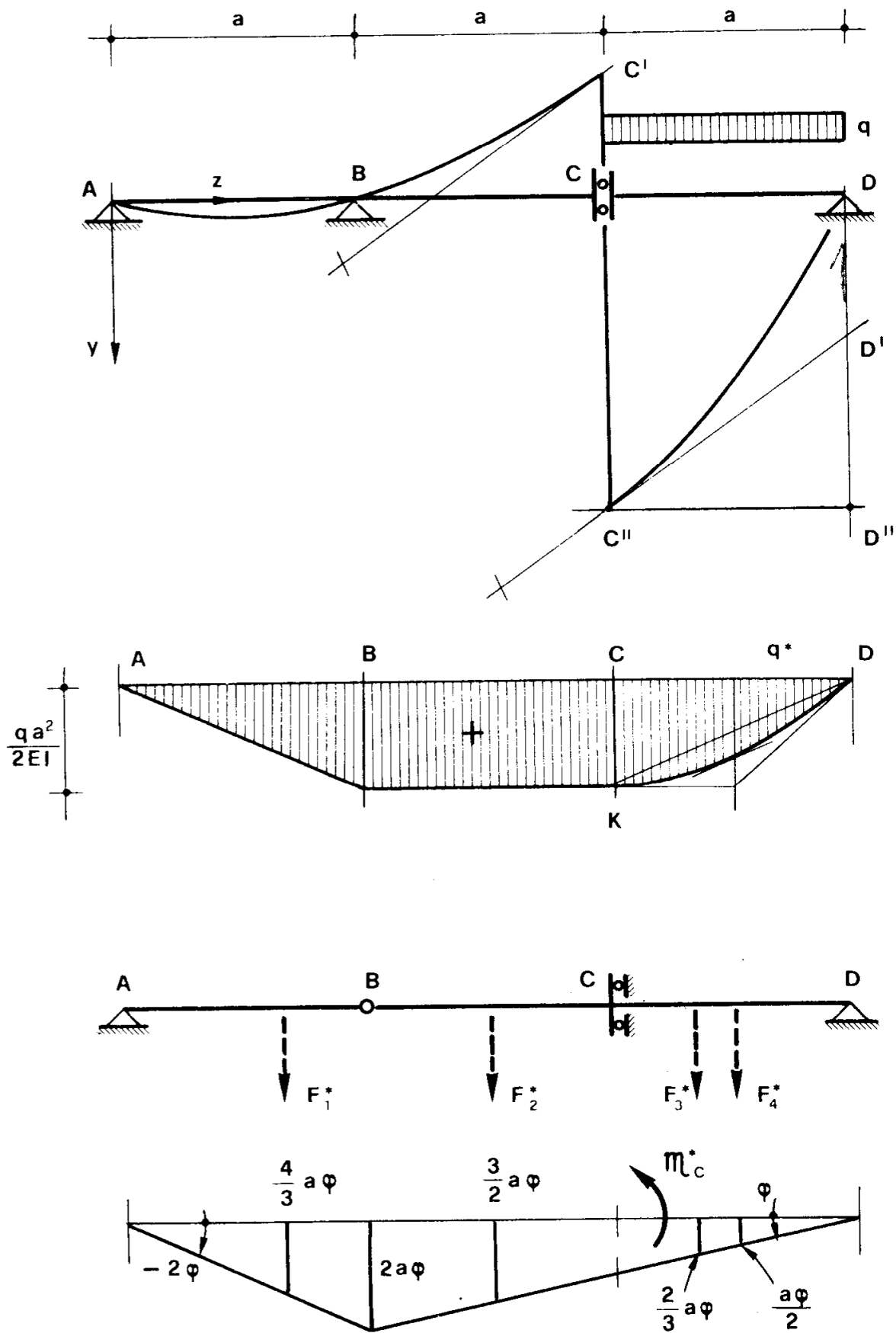


Figura 17

$$\begin{aligned} m_C^* \cdot \varphi &+ \frac{qa^3}{4EI} \cdot \frac{4}{3} a\varphi + \frac{qa^3}{2EI} \cdot \frac{3}{2} a\varphi + \\ &+ \frac{qa^3}{4EI} \cdot \frac{2}{3} a\varphi + \frac{qa^3}{12EI} \cdot \frac{a\varphi}{2} = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$m_C^* = - \frac{31}{24} \frac{qa^4}{EI}$$

$$\Delta v_C = \frac{31}{24} \frac{qa^4}{EI}.$$

Si segua adesso il procedimento di composizione. Si ha

$$\varphi_B = \frac{qa^2}{2} \frac{a}{3EI} = \frac{qa^3}{6EI}$$

$$v_C^{s'} = - \frac{qa^3}{6EI} a = - \frac{qa^4}{6EI}$$

$$v_C^{s''} = - \frac{qa^2}{2} \frac{a^2}{2EI} = - \frac{qa^4}{4EI}$$

$$\varphi_C^s = \frac{qa^3}{6EI} + \frac{qa^2}{2} \frac{a}{EI} = \frac{2}{3} \frac{qa^3}{EI}.$$

Per ottenere v_C^d si osservi che la deformata in CD è, riferita alla $C''D''$, somma di quella dovuta alla rotazione $\varphi_C^d = \varphi_C$ in C (diagramma triangolare $C''D''D'$), e di quella di una mensola CD incastrata in C , e soggetta al carico q distribuito ed alla forza $-qa$ in D . E' perciò

$$D''D' = - \frac{2}{3} \frac{qa^4}{EI}$$

$$D'D = \frac{qa^4}{8EI} - qa \frac{a^3}{3EI} = -\frac{5}{24} \frac{qa^4}{EI}.$$

In definitiva è

$$v_C^s = v_C^{s'} + v_C^{s''} = -\frac{5}{12} \frac{qa^4}{EI}$$

$$v_C^d = \left(\frac{2}{3} + \frac{5}{24} \right) \frac{qa^4}{EI} = \frac{21}{24} \frac{qa^4}{EI}$$

$$\Delta v_C = v_C^d - v_C^s = \frac{31}{24} \frac{qa^4}{EI},$$

Problema n. 18.

La mensola della fig. 18 è sottoposta ad una variazione termica alla Navier pari a $\overline{\Delta t}$; è

$$\mu = -\frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} \tag{46}$$

$$q^* = \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h}.$$

La μ è costante lungo z ; la trave ausiliaria è la mensola libera in A ed incastrata in B . Si ha

$$\varphi_B = -R_B^* = \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} a \tag{47}$$

$$v_B = M_B^* = -\frac{\alpha \overline{\Delta t}}{2h} a^2.$$

La deformata è il diagramma del momento $M^*(z)$ generato da q^* sulla trave ausiliaria, e cioè una parabola quadratica; le due tangenti estreme si incontrano sulla verticale di mezzeria.

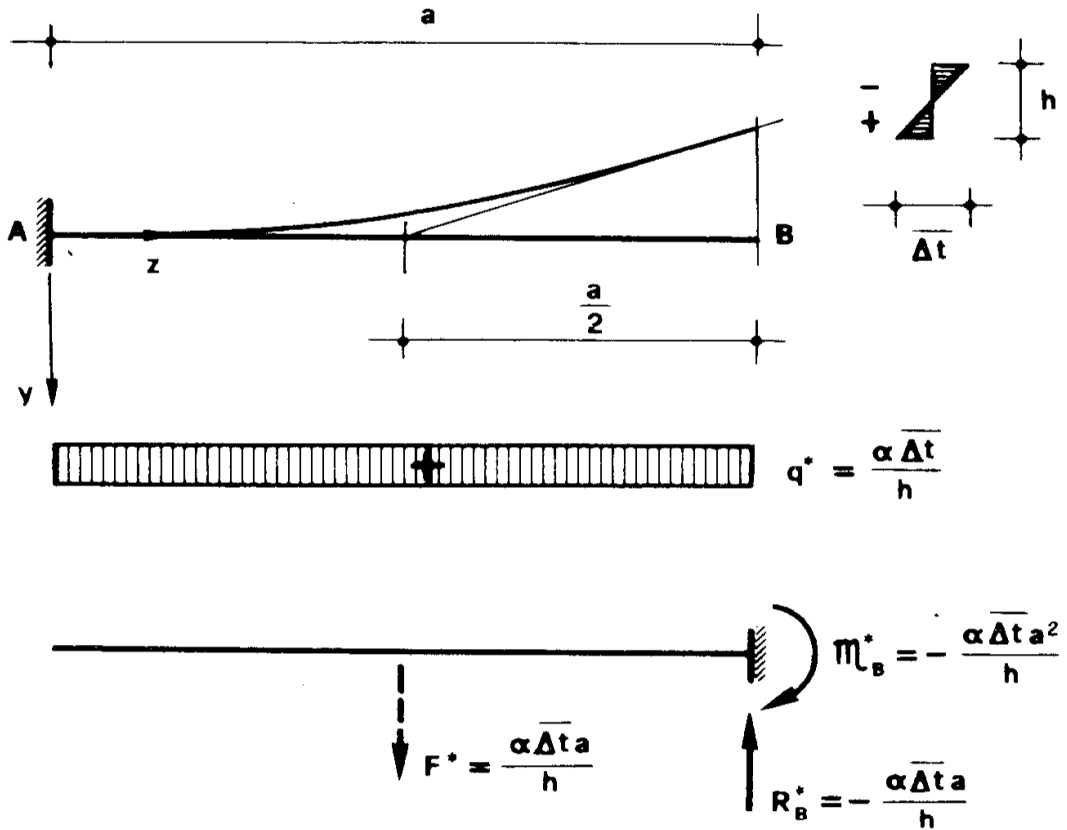


Figura 18

Problema n. 19.

Anche la trave della fig. 19, appoggiata in A e B , è sottoposta ad una variazione termica alla Navier pari a $\overline{\Delta t}$, con μ costante lungo z . Risultata

$$\varphi_A = R_A^* = -\frac{\overline{\alpha \Delta t}}{2h} a$$

$$\varphi_B = -R_B^* = \frac{\overline{\alpha \Delta t}}{2h} a$$

$$v_{a/2} = M_{a/2}^* = \frac{\overline{\alpha \Delta t}}{8h} a^2 \tag{48}$$

La deformata è una parabola quadratica.

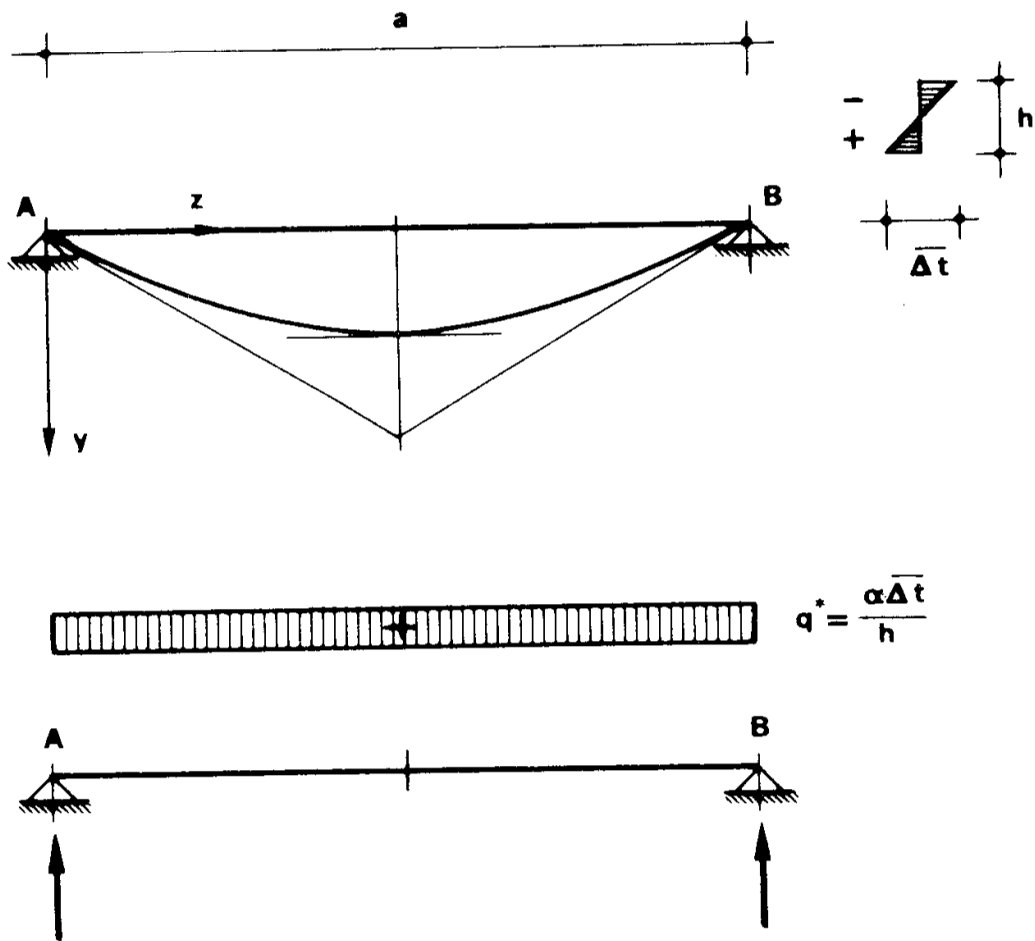


Figura 19

Problema n. 20.

La trave Gerber della fig. 20 sopporta una variazione termica alla Navier $\Delta t = -30^\circ$; h è costante. Si ha perciò

$$q^* = -\frac{30\alpha}{h}$$

La trave ausiliaria si ha sostituendo la cerniera in C con un appoggio, l'appoggio in B con una cerniera. La deformata $v = M^*$ è costituita da due archi di parabola quadratica, uno valido in AC , l'altro in CD . Si ha

$$-T_A^* = T_B^* = \frac{30\alpha}{h} \frac{a}{2}$$

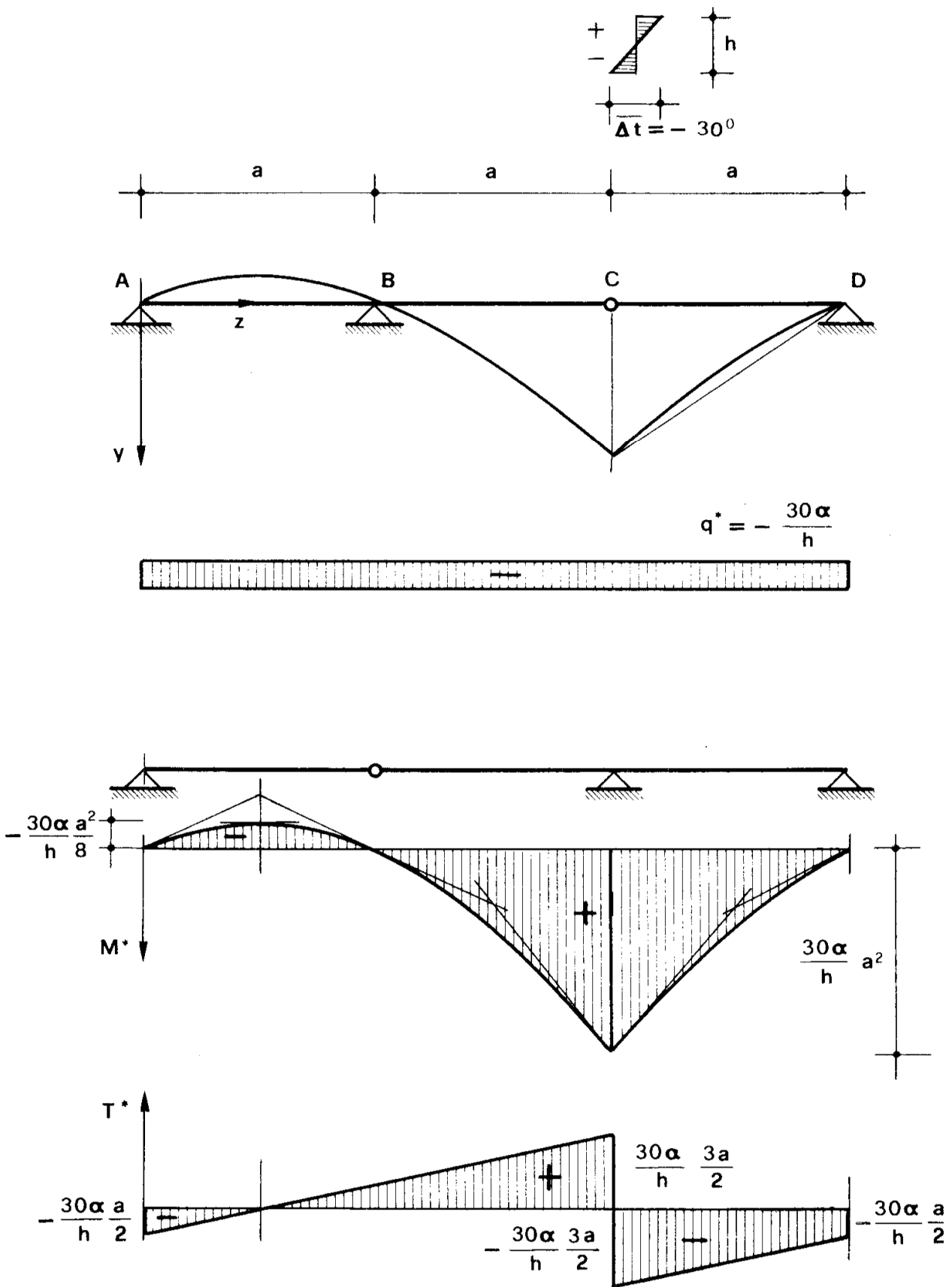


Figura 20

e, all'ascissa $z = \frac{a}{2}$,

$$T_{a/2}^* = 0$$

$$M_{a/2}^* = -\frac{30\alpha}{h} \frac{a^2}{8}.$$

Si ha poi

$$M_C^* = \frac{30\alpha}{h} \frac{a}{2} a + \frac{30\alpha}{h} \frac{a^2}{2} = \frac{30\alpha}{h} a^2$$

$$T_C^* = \frac{30\alpha}{h} \frac{a}{2} + \frac{30\alpha}{h} a = \frac{30\alpha}{h} \frac{3}{2} a.$$

Dall'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a D si ha

$$q^* \frac{a}{2} \cdot 2a + 2q^* a \cdot a + R_C^* a = 0$$

da cui

$$R_C^* = -3q^* a = 3 \cdot \frac{30\alpha}{h} \cdot a.$$

E' perciò

$$T_C^{d*} = -R_C^* + T_C^s = -3 \frac{30\alpha}{h} a + \frac{30\alpha}{h} \frac{3}{2} a = -\frac{30\alpha}{h} \frac{3}{2} a.$$

E' poi anche

$$R_D^* + \frac{q^* a}{2} + 2q^* a - 3q^* a = 0$$

da cui

$$R_D^* = \frac{q^* a}{2} = - \frac{30\alpha}{h} \frac{a}{2} .$$

Dai suddetti valori è immediato tracciare i diagrammi di $M^*(z)$ e $T^*(z)$, pari a $v(z)$ e $-\varphi(z)$.