

CAPITOLO IX

TRAVI AD ASSE CURVILINEO: ANELLI ED ARCHI

1. L'equazione della linea elastica di una trave il cui asse è un arco di cerchio.

Si consideri una trave AB (fig. 9-1) il cui asse sia un arco di cerchio; il piano di questo arco contenga una delle direzioni principali di inerzia

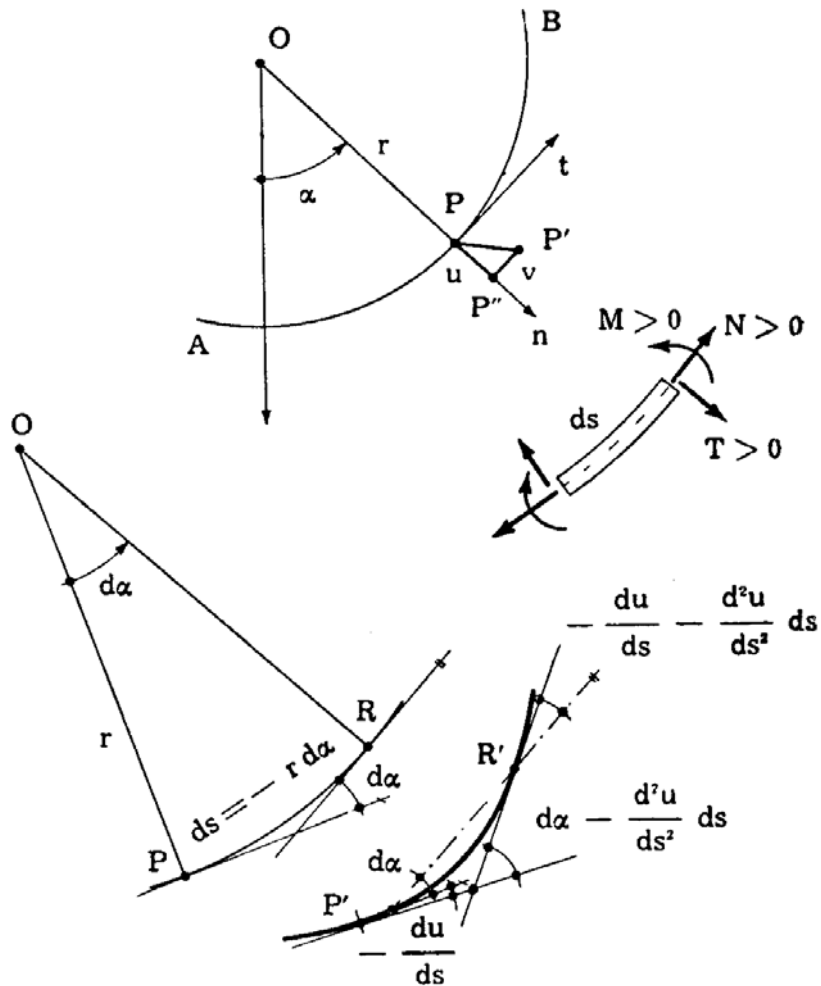


FIG. 9-1

della sezione retta, e le forze applicate siano simmetriche rispetto a questo piano. L'altezza  $h$  della sezione retta, intersezione della sezione stessa

con il piano dell'arco, sia tanto piccola rispetto al raggio  $r$  dell'asse ( $h/r \ll \ll 1$ ) da rendere utilizzabili i risultati della teoria del *De Saint-Venant* (*trave a piccola curvatura*). Si chiami  $\alpha$  l'anomalia del punto generico dell'asse,  $n$  e  $t$  rispettivamente la normale e la tangente all'asse in tale punto,  $s$  l'ascissa curvilinea; l'angolo  $\widehat{nt}$  sia positivo, cioè antiorario, e la normale  $n$  diretta verso l'esterno. Le caratteristiche positive sono quelle della fig. 9-1; la componente  $PP''$  dello spostamento  $PP'$  del punto generico  $P$  secondo la normale  $n$  si chiami  $u$ .

Sia  $PR$  un tratto elementare di asse prima della deformazione, e  $P'R'$  il deformato; nell'ipotesi di piccoli spostamenti ( $du/ds$  e  $dv/ds$  trascurabili) risulta ( $r < 0$ )

$$ds' = \frac{-r + u}{-r} ds = \left(1 - \frac{u}{r}\right) ds .$$

Così pure è

$$\frac{1}{r} = - \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\frac{1}{r'} = - \frac{d\alpha - \frac{d^2u}{ds^2} ds}{ds \left(1 - \frac{u}{r}\right)} \approx - \left(\frac{d\alpha}{ds} - \frac{d^2u}{ds^2}\right) \left(1 + \frac{u}{r}\right) \approx \frac{1}{r} + \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} .$$

Dalla relazione

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = - \frac{M}{EI}$$

si trae

$$\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} = - \frac{M}{EI} . \quad (1)$$

## 2. L'anello circolare ed il tubo, di spessore uniforme, sottoposti a pressione esterna uniforme: il metodo euleriano.

Nella fig. 9-2 è rappresentata la metà dell'anello (o della sezione del tubo) rispetto all'asse  $AB$  di massimo accorciamento radiale. Nelle sezioni  $A$  e  $B$  le caratteristiche della sollecitazione sono lo sforzo normale

$N_o$  ed il momento flettente  $M_o$ . Può porsi ( $q$  è positivo se diretto verso l'esterno)

$$N_o = q \cdot \overline{OA} \quad (a)$$

e perciò risulta nella sezione S generica dell'anello

$$M = M_o - q \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AD} + q \frac{\overline{AS}^2}{2} ; \quad (b)$$

la formula (b) è approssimata perchè assimila l'arco AS già deformato ad un arco di cerchio, ma l'errore così commesso è del secondo ordine negli

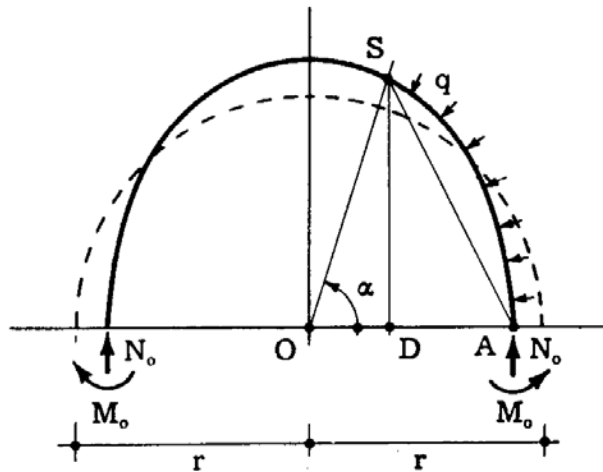


FIG. 9-2

spostamenti mentre  $M$  è del primo ordine negli stessi. Poichè risulta

$$\overline{SD}^2 = \overline{OS}^2 - \overline{OD}^2 = \overline{AS}^2 - \overline{AD}^2$$

è pure

$$\overline{OS}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 ;$$

dalle relazioni

$$\overline{OA} - \overline{AD} = \overline{OD}$$

$$\overline{OA}^2 + \overline{AD}^2 - 2 \overline{OA} \cdot \overline{AD} = \overline{OD}^2$$

$$\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{OA}^2 - 2 \overline{OA} \cdot \overline{AD}$$

si trae poi

$$\begin{aligned}\overline{OS}^2 &= \overline{AS}^2 + \overline{OA}^2 - 2 \overline{OA} \cdot \overline{AD} \\ \frac{1}{2} \overline{AS}^2 - \overline{OA} \cdot \overline{AD} &= \frac{1}{2} (\overline{OS}^2 - \overline{OA}^2).\end{aligned}$$

Poichè, per piccoli spostamenti,

$$\overline{OA} = r + u_0$$

$$\overline{OS} = r + u$$

la (b) si scrive

$$M = M_0 + \frac{q}{2} [(r + u)^2 - (r + u_0)^2]$$

e, per piccoli spostamenti,

$$M = M_0 + q r (u - u_0). \quad (c)$$

La (9-1) si può scrivere

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} \left( \frac{d\alpha}{ds} \right)^2 + \frac{u}{r^2} = - \frac{M}{EI}$$

da cui

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + u = - \frac{M r^2}{EI};$$

questa, per la (c), porge

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + u \left( 1 - \frac{q r^3}{EI} \right) = - \frac{M_0 r^2 + q r^3 u_0}{EI}. \quad (d)$$

Con la posizione

$$k^2 = 1 - \frac{q r^3}{EI}$$

la (d) si scrive

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + k^2 u = - \frac{M_0 r^2 + q r^3 u_0}{EI}$$

il cui integrale generale è

$$u = A \operatorname{sen} k\alpha + B \operatorname{cos} k\alpha + \frac{M_0 r^2 - q r^3 u_0}{EI + q r^3} \quad (e)$$

Per  $\alpha = 0$  ed  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  è  $\frac{du}{d\alpha} = 0$ ; e cioè

$$0 = kA$$

$$0 = -kB \operatorname{sen} k \frac{\pi}{2}.$$

La soluzione della seconda di queste relazioni è

$$k \frac{\pi}{2} = n \pi;$$

da essa si trae

$$k^2 = 4 n^2$$

$$1 - \frac{q r^3}{EI} = 4 n^2$$

da cui, per  $n = 1$ ,

$$q_c = - \frac{3 EI}{r^3}. \quad (2)$$

Per il valore (9-2) la (e) porge

$$u = B \operatorname{cos} 2\alpha + \frac{M_0 r^2}{4 EI} + \frac{3}{4} u_0.$$

Per  $\alpha = 0$  è  $u = u_0$ , da cui

$$B = \frac{1}{4} \left( u_0 - \frac{M_0 r^2}{EI} \right).$$

Si imponga alla deformata la *condizione di inestensibilità*; essa si esprime come segue:

$$\varepsilon = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r} = 0$$

e cioè

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} + u = 0 . \quad (3)$$

Da tale condizione risulta

$$u = \frac{1}{4} \left( u_0 - \frac{M_0 r^2}{EI} \right) \cos 2\alpha + \frac{M_0 r^2}{4EI} + \frac{3}{4} u_0$$

$$v = -\frac{1}{8} \left( u_0 - \frac{M_0 r^2}{EI} \right) \sin 2\alpha - \left( \frac{M_0 r^2}{4EI} + \frac{3}{4} u_0 \right) \alpha .$$

Per  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  (come per  $\alpha = 0$ ) deve essere  $v = 0$ , e perciò

$$\frac{M_0 r^2}{4EI} + \frac{3}{4} u_0 = 0$$

$$M_0 = -\frac{3 u_0 EI}{r^2} = u_0 q_c .$$

E' quindi

$$u = u_0 \cos 2\alpha$$

$$v = -\frac{1}{2} u_0 \sin 2\alpha .$$

Se si supera la soglia di proporzionalità, si opera al solito alla *Shanley* ponendo nella (9-2) il modulo tangente al posto del modulo normale; in tal caso è giocoforza procedere per tentativi.

### 3. Espressioni delle componenti del secondo ordine della deformazione in una struttura sottile a superficie media cilindrica.

Si consideri una struttura bidimensionale, in cui cioè una dimensione sia trascurabile rispetto alle altre due; tale può essere una volta sottile, un serbatoio, un tubo. La geometria di una struttura bidimensionale è quindi definita da una *superficie media* e da uno *spessore*, in genere variabile; gli spostamenti sono definiti dalle solite tre componenti; le tensioni e le deformazioni invece, in regime di *membrana*, sono definite dalle

sole tre componenti relative al piano tangente alla superficie media nel punto generico.

Si consideri il caso della superficie media *cilindrica* (fig. 9-3) la cui

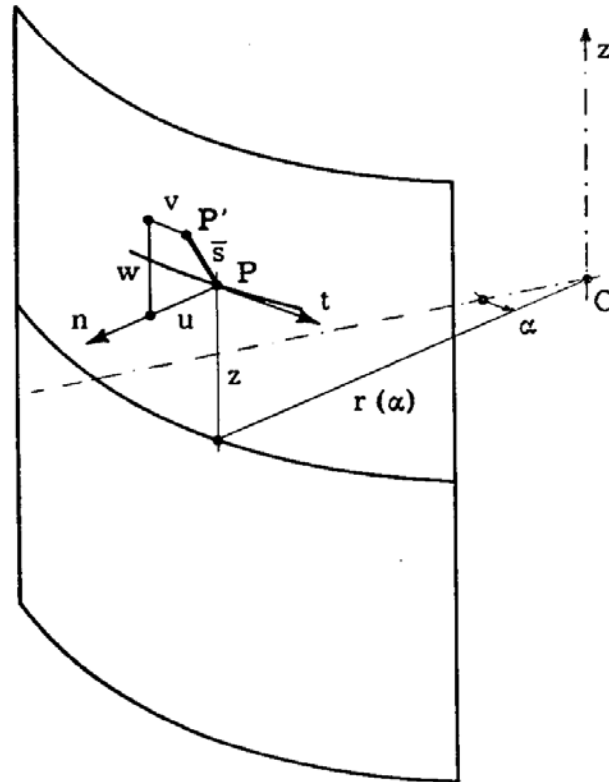


FIG. 9-3

direttrice sia fornita in forma intrinseca:

$$r = r(\alpha),$$

dove  $r$  è il raggio di curvatura, variabile con l'anomalia  $\alpha$ . Un punto generico  $P$  sulla superficie media è definito dall'anomalia  $\alpha$ , e dalla ascissa  $z$  secondo la generatrice presa a partire da una direttrice di riferimento. È questo un caso particolare di *coordinate cilindriche*, come quello delle coordinate polari già studiate nel Cap. VII del primo volume; rispetto alle coordinate cilindriche più generali  $r\alpha z$ , nel caso in esame non compare  $r$  che è funzione di  $\alpha$  e non può variare indipendentemente, nel caso delle coordinate polari non compare  $z$  che è nullo.

Siano  $u v w$  le componenti dello spostamento del punto generico  $P$  secondo il raggio  $r$  ( $u$  positivo se  $P$  si allontana dal centro  $O$ ), secondo la tangente  $t$  in  $P$  alla direttrice, e secondo l'asse  $z$ ; la terna  $u v w$  positiva è destrorsa. Siano inoltre  $\epsilon_t, \epsilon_z, \gamma_{tz}$  le componenti di deformazione, prese con riferimento agli assi  $t$  e  $z$ .

Si prendano in esame due segmenti elementari PR e PU secondo gli assi  $t$  e  $z$  (fig. 9-4); poichè PR è elementare, può essere confuso con il segmen-

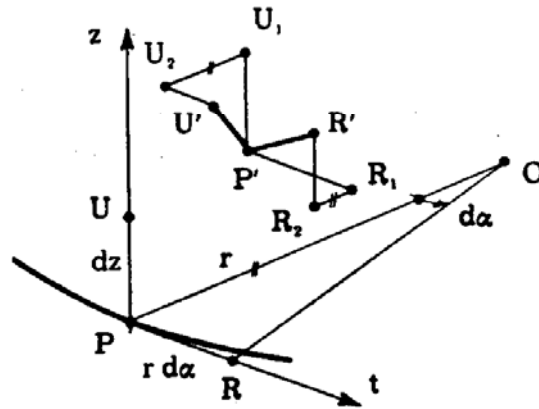
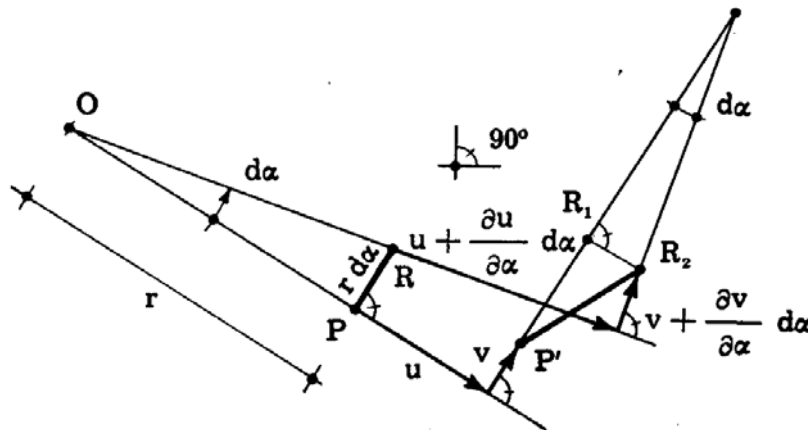


FIG. 9-4

to  $r d\alpha$  di direttrice in P. A deformazione avvenuta, i due segmenti si portano in P'R' e P'U'. Si considerino le proiezioni di P'R' e P'U' se-



$$R_1 R_2 = \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v \right) d\alpha$$

$$P' R_1 = \left( r + u + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) d\alpha$$

$$R_2 R' = \frac{\partial w}{\partial \alpha} d\alpha$$

FIG. 9-5

condo il raggio e la tangente in P, e secondo l'asse  $z$ . Si ha così (fig. 9-5), tenendo conto dei soli termini in  $d\alpha$ ,

$$(P' R')_r = R_1 R_2 = s_{R_1 R_2} - s_{P R} =$$

$$= u + \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha - \left( v + \frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\alpha - u = \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v \right) d\alpha;$$



$$\begin{aligned}
 (P' R')_t &= P' R_1 = r d\alpha + s_{Rt} - s_{Pt} = \\
 &= r d\alpha + \left( u + \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha \right) d\alpha + v + \frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha - v = \\
 &= \left( r + u + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) d\alpha ;
 \end{aligned}$$

$$(P' R')_z = R_2 R' = \frac{\partial w}{\partial \alpha} d\alpha ;$$

$$(P' U')_r = U_1 U_2 = \frac{\partial u}{\partial z} dz ;$$

$$(P' U')_t = U_2 U' = \frac{\partial v}{\partial z} dz ;$$

$$(P' U')_z = P' U_1 = \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz .$$

Si ottiene così, per il calcolo di  $\varepsilon_t$ ,

$$\overline{P' R'}^2 = \overline{R_1 R_2}^2 + \overline{P' R_1}^2 + \overline{R_2 R'}^2 ;$$

$$r^2 d\alpha^2 (1 + \varepsilon_t)^2 = \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v \right)^2 d\alpha^2 + \left( r + u + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 d\alpha^2 ;$$

$$\begin{aligned}
 r^2 (1 + \varepsilon_t^{(1)2} + 2 \varepsilon_t^{(1)} + 2 \varepsilon_t^{(2)}) &= \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + v^2 - 2 v \frac{\partial u}{\partial \alpha} + r^2 + u^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right)^2 + \\
 &\quad + 2 r \frac{\partial v}{\partial \alpha} + 2 u \frac{\partial v}{\partial \alpha} + 2 r u + \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2
 \end{aligned}$$

da cui

$$\varepsilon_t^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_t^{(2)} = \frac{1}{2 r^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{2 r^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{v^2}{2 r^2} - \frac{v}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha}$$

Per ottenere  $\varepsilon_z$  si opera analogamente:

$$\overline{P'U'}^2 = \overline{U_1U_2}^2 + \overline{U_2U'}^2 + \overline{P'U_1}^2 ;$$

$$dz^2 (1 + \varepsilon_z)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 dz^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 dz^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 dz^2 ;$$

$$1 + \varepsilon_z^{(1)2} + 2\varepsilon_z^{(1)} + 2\varepsilon_z^{(2)} = 1 + 2\frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2$$

da cui

$$\varepsilon_z^{(1)} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 \right].$$

Per giungere alla  $\gamma_{tz}$  si procede utilizzando le due espressioni del prodotto scalare:

$$\overline{P'R'} \times \overline{P'U'} = r d\alpha dz (1 + \varepsilon_t) (1 + \varepsilon_z) \cos (90^\circ - \gamma_{tz}) ;$$

$$\overline{P'R'} \times \overline{P'U'} = d\alpha dz \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - v\right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left(r + u + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) \frac{dv}{dz} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \right].$$

Si ha così, ponendo  $\cos (90^\circ - \gamma_{tz}) = \gamma_{tz}$ ,

$$\gamma_{tz} (1 + \varepsilon_t) (1 + \varepsilon_z) = \gamma_{tz} (1 + \varepsilon_t^{(1)} + \varepsilon_z^{(1)}) ;$$

$$\begin{aligned} \gamma_{tz} &= \frac{1}{r} \left[ \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - v\right) \frac{\partial u}{\partial z} + \left(r + u + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial v}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial w}{\partial \alpha} \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \right] (1 - \varepsilon_t^{(1)} - \varepsilon_z^{(1)}) = \\ &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \\ &\quad - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{1}{r} v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha}. \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\gamma_{tz}^{(1)} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\ \gamma_{tz}^{(2)} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - \\ &\quad - \frac{1}{r} v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha}.\end{aligned}$$

Riassumendo, le componenti del primo ordine sono:

$$\begin{aligned}\varepsilon_t^{(1)} &= \frac{1}{r} \left( u + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\ \varepsilon_z^{(1)} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{tz}^{(1)} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \alpha},\end{aligned}\tag{4}$$

e quelle del secondo

$$\begin{aligned}\varepsilon_t^{(2)} &= \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 - 2v \frac{\partial u}{\partial \alpha} + v^2 \right] \\ \varepsilon_z^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] \\ \gamma_{tz}^{(2)} &= - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - u \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z}.\end{aligned}\tag{5}$$

#### 4. Espressione del lavoro del secondo ordine compiuto in una struttura sottile cilindrica da forze superficiali normali alla superficie.

Sulla superficie della struttura sottile cilindrica agisca una forza superficiale  $p$  normale alla superficie stessa, e che resta tale durante gli

spostamenti. Si è in presenza di un caso di forze non conservative. Si calcoli il lavoro del secondo ordine  $L_{2s} = \frac{1}{2} \Sigma F_s \delta s$ , dove  $F_s$  sono i valori finali (a spostamenti avvenuti) delle forze che sorgono con gli spostamenti. Nel caso in esame le  $F_s$  sono le componenti di  $p$  (a spostamenti avvenuti) secondo la tangente  $t$  e secondo l'asse  $z$ .

Il lavoro  $L_{2s}$  è quello che le forze  $F_s$  compirebbero se durante la variazione di configurazione le coordinate lagrangiane dc mantenessero inalterati i mutui rapporti. Di tale lavoro, in genere privo di utilità, ci si potrà invece servire, come già noto (Cap. I) ogni qualvolta le  $F_s$  risultano funzioni dei corrispondenti spostamenti. In tal caso infatti il sistema va considerato come quelli soggetti a forze conservative, e risulta

$$\delta_2 E = - L_2 - L_{2s} + L_2^* + W .$$

Quanto sopra si verifica sempre, se  $u v w$  dipendono da una sola variabile lagrangiana.

Si tenga pure conto che gli spostamenti fanno variare la superficie elementare iniziale  $dS = r d\alpha dz$ , che diviene  $dS'$ , e su  $dS'$  agisce sempre la forza  $p$ ; si è avuta cioè una variazione di forza  $p$  ( $dS' - dS$ ), che rientra anch'essa nelle  $F_s$ , completandole.

Si ha perciò

$$dS = r d\alpha dz$$

$$dS' = r \left( 1 + \frac{u}{r} \right) d\alpha \left( 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) dz \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \right) =$$

$$= r d\alpha dz \left( 1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

$$dS' - dS = r d\alpha dz \left( \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) .$$

D'altro canto (fig. 9-6) l'angolo che  $p$  forma con la tangente in  $t$  è fornito da

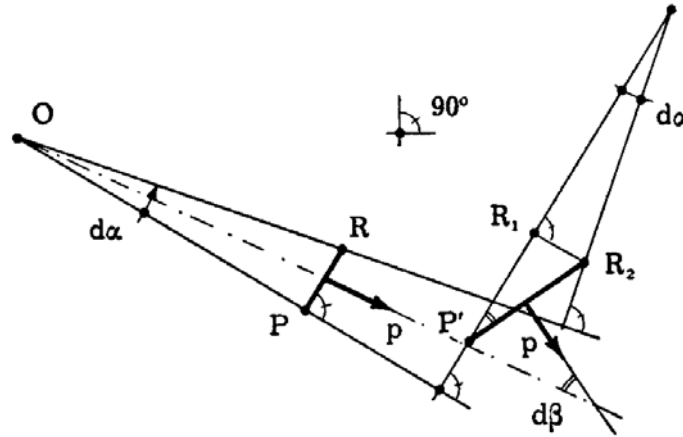
$$d\beta = - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v \right)$$

e quello con l'asse  $z$  da

$$d\gamma = - \frac{\partial u}{\partial z} .$$

E' perciò

$$L_{23} = \frac{1}{2} r d\alpha dz [p (dS' - dS) u + p d\beta v + p d\gamma w]$$



$$d\beta = R_1 \widehat{P' R_2} = \frac{R_1 R_2}{P' R_1} \approx \frac{R_1 R_2}{r d\alpha} = -\frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} - v \right)$$

FIG. 9-6

da cui

$$L_{23} = \frac{p}{2} d\alpha dz \left( u^2 + u \frac{\partial v}{\partial \alpha} + r u \frac{\partial w}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial \alpha} + v^2 - r w \frac{\partial u}{\partial z} \right). \quad (6)$$

### 5. L'anello circolare ed il tubo di spessore uniforme sottoposti a pressione esterna uniforme: il metodo energetico.

Si riprende il caso già trattato nel § 9-2 per via euleriana. Si assuma la deformata secondaria nella forma

$$u = -A \cos 2\alpha$$

$$v = \frac{A}{2} \sin 2\alpha \quad (f)$$

$$w = 0.$$

Nel caso in esame è diversa da zero la sola  $\sigma_t$ , pari a  $qr/h\delta$  ( $\sigma_t > 0$  se  $q > 0$ ), ove  $\delta$  è lo spessore,  $h$  l'altezza, e  $q$  il valore della pressione per

unità di lunghezza. Interessa perciò la sola  $\varepsilon_t^{(2)}$ , che è fornita (9-5) da

$$\varepsilon_t^{(2)} = \frac{1}{2r^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 - 2v \frac{\partial u}{\partial \alpha} + v^2 \right]. \quad (7)$$

La (9-7) è identica alla seconda delle (7-5) del primo volume. Per le (f) si ha

$$\varepsilon_t^{(2)} = \frac{9}{8} \frac{A^2}{r^2} \operatorname{sen}^2 2\alpha$$

e perciò

$$\begin{aligned} L_2^* &= \int_v \sigma_t \varepsilon_t^{(2)} dV = \frac{qr}{h\delta} \int_0^{2\pi} \frac{9}{8} \frac{A^2}{r^2} \operatorname{sen}^2 2\alpha \cdot h\delta r d\alpha = \\ &= \frac{9}{8} q A^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2\alpha d\alpha = \frac{9}{8} \pi q A^2. \end{aligned} \quad (g)$$

Nel caso che si tratta è  $w=0$ , e per la (9-3) la  $u$  è legata alla  $v$ ; e infatti le (f) rispettano la condizione  $\partial v / \partial \alpha + u = 0$ . Quindi la sola  $A$  regola la deformata, e la componente di  $p$  secondo la tangente è proporzionale a  $v$ .

Dalla (9-6) si ricava perciò

$$\begin{aligned} L_{23} &= \frac{q}{2} \int_0^{2\pi} \left( u^2 + u \frac{\partial v}{\partial \alpha} - v \frac{\partial u}{\partial \alpha} + v^2 \right) d\alpha = \\ &= -\frac{3}{8} A^2 q \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2\alpha d\alpha = -\frac{3}{8} \pi A^2 q. \end{aligned} \quad (h)$$

L'energia  $W$  è fornita da

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^{2\pi} M^2 r d\alpha.$$

Dalla (9-1) si trae

$$\begin{aligned} M &= -EI \left( \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{u}{r^2} \right) = -\frac{EI}{r^2} \left( \frac{d^2 u}{d\alpha^2} + u \right) = \\ &= -\frac{EI}{r^2} (4A \cos 2\alpha - A \cos 2\alpha) = -\frac{3EI}{r^2} A \cos 2\alpha \end{aligned}$$

e quindi

$$W = \frac{9\pi}{2} \frac{EI A^2}{r^3} \quad (i)$$

E' inoltre  $L_2 = 0$ .

Dall'espressione

$$\delta_2^* E = -L_2 - L_{23} + L_2^* + W = \frac{3}{2} \pi A^2 q + \frac{9}{2} \pi \frac{EI A^2}{r^3} = 0$$

si trae

$$q_c = -\frac{3EI}{r^3}$$

### 6. L'arco e la volta ad asse circolare soggetti a carico radiale.

Si consideri l'arco ad asse circolare della fig. 9-7, soggetto al carico  $q$  uniforme radiale diretto verso il centro; l'ampiezza dell'arco sia  $2\beta$ .

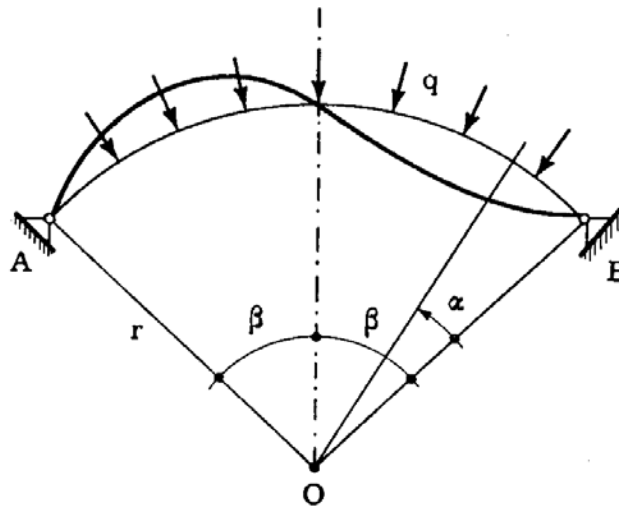


FIG. 9-7

Se si trascura la variazione di forma dell'asse dovuta agli spostamenti, la sollecitazione in regime stabile si limita allo sforzo normale, e l'equazione di equilibrio variato è la (9-1) scritta in termini di  $\alpha$

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} + u = -\frac{r^2 M}{EI} \quad (l)$$

Poichè nella suddetta ipotesi di invarianza di forma l'asse dell'arco coincide con il poligono delle successive risultanti, risulta

$$N = q r$$

$$M = - N u = - q r u$$

e quindi la (l) si scrive

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} + u \left( 1 - \frac{q r^3}{EI} \right) = 0 . \quad (m)$$

Posto

$$k^2 = 1 - \frac{q r^3}{EI}$$

la (m) si scrive

$$\frac{d^2 u}{d\alpha^2} + k^2 u = 0$$

il cui integrale generale è

$$u = A \operatorname{sen} k\alpha + B \operatorname{cos} k\alpha .$$

Le condizioni

$$\alpha = 0 \quad u = 0$$

$$\alpha = 2\beta \quad u = 0$$

porgono il sistema in A e B

$$0 = B$$

$$0 = A \operatorname{sen} 2 k\beta + B \operatorname{cos} 2 k\beta$$

la cui condizione di compatibilità è

$$\operatorname{sen} 2 k\beta = 0 ;$$

le radici sono

$$2 k\beta = n \pi ,$$



la più piccola che soddisfa anche la condizione di inestensibilità (9-3) è

$$2 k\beta = 2 \pi ,$$

cui corrisponde

$$k^2 = 1 - \frac{q_c r^3}{EI} = \frac{\pi^2}{\beta^2}$$

$$q_c = - \frac{EI}{r^3} \left( \frac{\pi^2}{\beta^2} - 1 \right) \quad (8)$$

e la deformata a due onde, con punto di nullo in mezzeria,

$$u = A \operatorname{sen} \frac{\pi}{\beta} \alpha . \quad (9)$$

Si è dovuto scegliere tra le sole deformate inestensibili perchè si è fatta l'ipotesi che lo sforzo normale sia pari, nella configurazione variata, a quello della configurazione originaria, mentre le deformazioni estensionali in genere importano forti variazioni dello sforzo normale.

Per passare dall'anello alla volta occorre tener conto dell'impedita contrazione trasversale; in tal caso è, con i simboli usati:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \frac{\sigma_y}{m} \right) = 0$$

$$\sigma_z = \frac{\sigma_y}{m}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_z}{m} \right) = \frac{\sigma_y}{E} \left( 1 - \frac{1}{m^2} \right)$$

e quindi basta sostituire ad  $E$  l'espressione

$$E_i = \frac{E}{1 - \frac{1}{m^2}} . \quad (10)$$

In realtà la flessione ha luogo fin dal sorgere dei carichi  $q$ , quindi

il diagramma  $qu$  (dove  $u$  è lo spostamento in una qualsiasi sezione di-

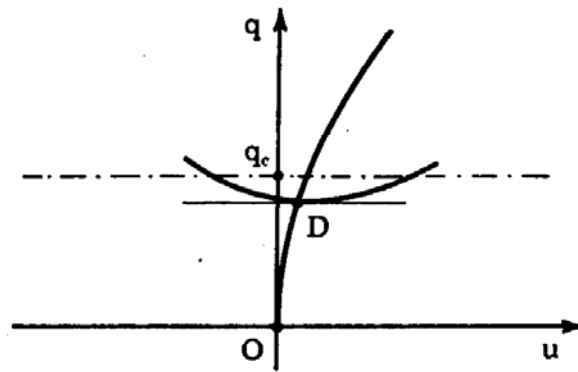


FIG. 9-8

versa da  $\alpha = \beta$ ) si presenta come nella fig. 9-8.

### 7. Archi a carico verticale con asse funicolare del carico.

Più interessante, ai fini pratici, dell'arco ad asse circolare è quello soggetto a carichi verticali, sagomato in modo che l'asse coincida con una funicolare del peso proprio; questa si discosta in genere poco dalla parabola, poichè il peso proprio complessivo (arco e sovrastruttura) è prossimo all'uniforme.

L'equazione della linea elastica di un arco si ottiene facilmente, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, se si suppone che la lunghezza di ogni elemento sia invariabile, se si trascurano cioè le deformazioni da sforzo assiale. L'elemento  $PQ$  si porta in  $P'Q'$  ruotando ma conservandosi inalterato; si faccia traslare  $P'Q'$  in modo che  $P'$  si porti in  $P$  (fig. 9-9) e  $Q'$  in  $Q''$ ;  $QQ''$  risulta normale a  $PQ$ .

La rotazione  $\varphi$  è fornita da

$$\varphi = - \frac{QQ''}{PQ}$$

ma è pure

$$QQ'' = \frac{dv}{\cos \alpha} = \frac{dw}{\sin \alpha}$$

$$PQ = \frac{dz}{\cos \alpha} = - \frac{dy}{\sin \alpha}$$

e perciò

$$\varphi = - \frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy}$$

$$d\varphi = - \frac{d^2v}{dz^2} dz = \frac{d^2w}{dy^2} dy$$

Se si trascurano le deformazioni da taglio, si ha

$$d\varphi = \frac{M ds}{EI}$$

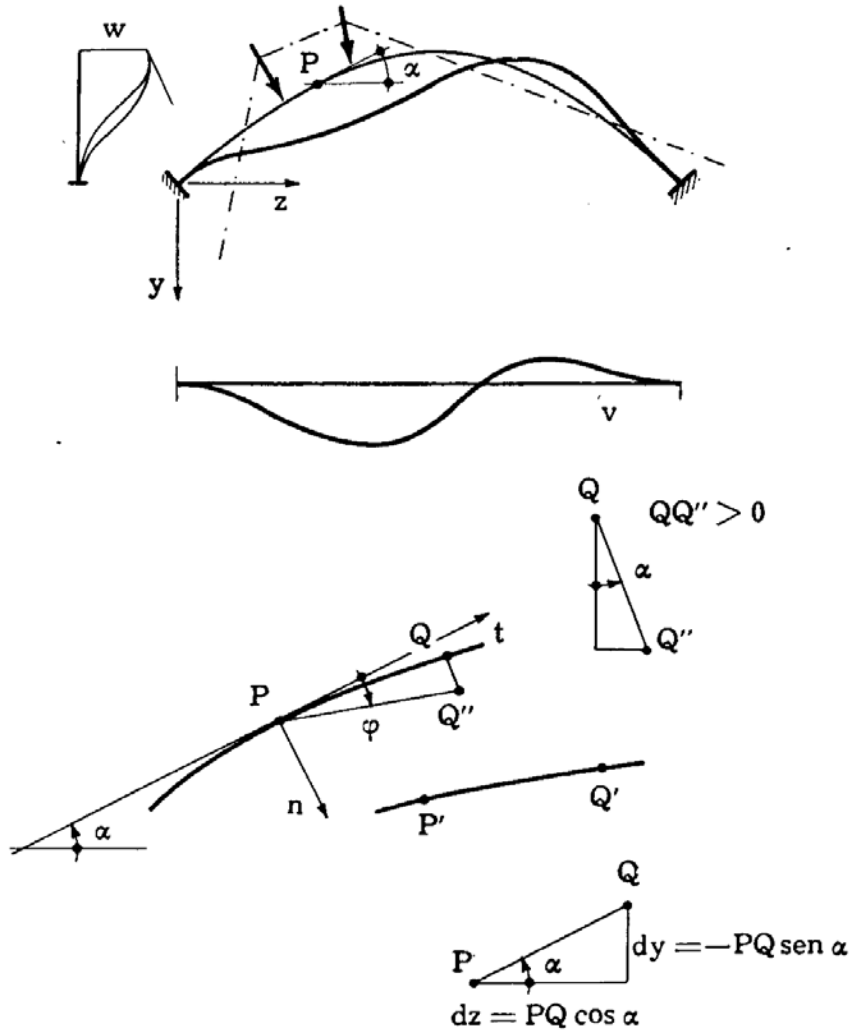


FIG. 9-9

si ha quindi

$$\frac{d^2v}{dz^2} = - \frac{M}{EI \cos \alpha} \tag{11}$$

$$\frac{d^2w}{dy^2} = - \frac{M}{EI \sin \alpha}$$

Il legame tra  $v$  e  $w$  è fornito da

$$\frac{d^2w}{dy^2} = \frac{d^2v}{dz^2} \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \tag{12}$$

La coincidenza dell'asse con una funicolare del carico riduce di molto i momenti flettenti dovuti a tale carico; in genere ci si riferisce al peso proprio, oppure (*metodo di Tolkmitt*) al peso proprio più metà del carico accidentale disposto uniformemente su tutta la luce.

Si consideri innanzitutto un arco AB a due cerniere, il cui asse coincide con una funicolare del carico (fig. 9-10).

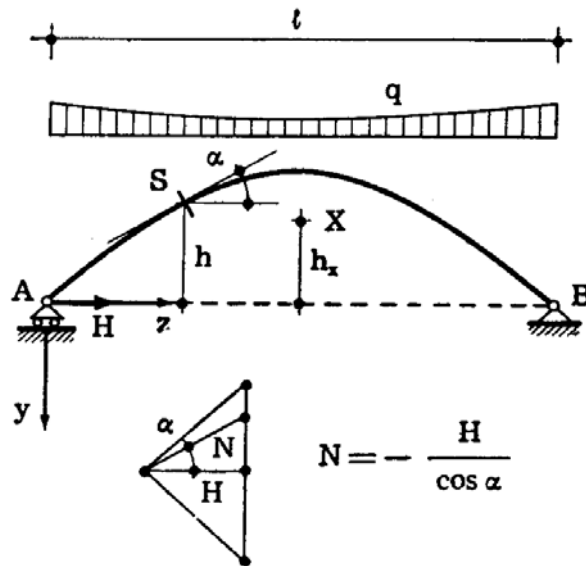


FIG. 9-10

Se si trascura la deformazione da sforzo assiale, l'energia di deformazione è fornita da

$$L = \int_s \frac{M^2 ds}{2 EI}$$

ove  $M$  è funzione della spinta  $H$ :

$$M = M_0 - Hh$$

( $M_0$  momento di trave appoggiata,  $h$  altezza del baricentro della sezione rispetto alla congiungente  $AB$  le imposte). Per il teorema di *Menabrea* il valore di  $H$  è tale da minimizzare  $L$ , e ciò si ottiene (trascurando lo sforzo assiale) se è ovunque  $M = 0$ , e cioè  $M_0 = Hh$ ; questo significa che il poligono delle successive risultanti coincide con l'asse dell'arco, ed è reso possibile proprio dal fatto che l'asse è una delle funicolari del carico.

In realtà  $L$  non può essere nullo, e infatti non è trascurabile l'accorciamento assiale; questo importa una variazione di spinta  $\Delta H$  (*caduta di spinta*, perchè di segno contrario ad  $H$ ) e quindi momenti flettenti.

Il valore di  $\Delta H$  si calcola [metodo di *Mörsch* o *della spinta addizionale* (1906)] ricavando prima lo spostamento  $AA'$  di  $A$  per effetto dello sforzo normale e di tutte le distorsioni del tipo  $\lambda$ , e poi la spinta  $\Delta H$  capace di annullare tale spostamento.

L'elemento  $ds$  di arco varia di (fig. 9-11)

$$dds = \frac{N ds}{EA} = - \frac{H}{\cos \alpha EA} ds ;$$

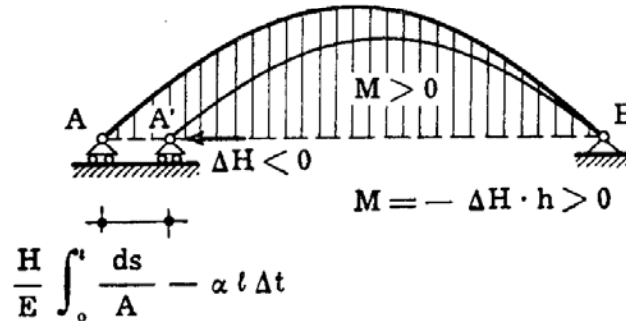


FIG. 9-11

la proiezione  $dz$  di  $ds$  sulla  $AB$  varia di

$$ddz = dds \cos \alpha = - \frac{H}{EA} ds ;$$

quindi

$$AA' = \frac{H}{E} \int_0^l \frac{ds}{A} .$$

Se esiste anche una variazione termica è

$$dds = \alpha \Delta t ds$$

$$ddz = \alpha \Delta t ds \cos \alpha = \alpha \Delta t dz$$

e quindi

$$AA' = \frac{H}{E} \int_0^l \frac{ds}{A} - \alpha l \Delta t .$$

Lo spostamento di  $A$  provocato da  $\Delta H$  è dato a sua volta da

$$AA' = \Delta H I_{AB} = \Delta H h_c \Sigma w'$$

dove  $h_x$  è la distanza dalla retta  $AB$ , del centro  $X$  relativo alla stessa retta, rispetto ai pesi elastici  $w$  dell'arco, e  $w'$  i momenti statici dei pesi elastici rispetto alla  $AB$  stessa.

Perciò risulta

$$\Delta H = - \frac{\frac{H}{E} \int_0^l \frac{ds}{A} - \alpha l \Delta t}{h_x \Sigma w'} . \quad (13)$$

Se l'arco è incastrato, (fig. 9-12) la  $\Delta H$  deve agire secondo l'orizzontale DE per il baricentro elastico O, poichè non deve indurre rotazione relativa tra A e B

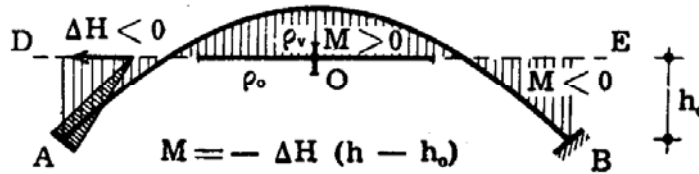


FIG. 9-12

(rotazione relativa a sua volta nulla per effetto degli accorciamenti assiali). Lo spostamento di A provocato da  $\Delta H$  è

$$AA' = \Delta H I_{DE} = \Delta H \rho_v^2 \Sigma w ,$$

dove  $\rho_v$  è il semiasse verticale dell'ellisse di elasticità; e quindi

$$\Delta H = - \frac{\frac{H}{E} \int_0^l \frac{ds}{A} - \alpha l \Delta t}{\rho_v^2 \Sigma w} . \quad (14)$$

A parità di luce la  $\Delta H$  cresce linearmente con la rigidità flessionale, e cioè con il momento d'inerzia  $I$  della sezione retta, ed inversamente al quadrato della montatura  $f/l$ ; i momenti relativi crescono linearmente con  $I$  ed inversamente ad  $f/l$ . E' questo il motivo per cui spesso un arco in conglomerato armato si esegue in fasi successive. In una prima fase una parte di scarsissima rigidità, che si carica con carichi provvisori che riconducono al peso proprio totale; così l'accorciamento assiale da peso proprio, il ritiro ed i primi cedimenti da peso proprio sono assorbiti nelle condizioni ideali. La parte suddetta, cui si affidano le citate sollecitazioni è, per esempio, la volta di un ponte *Maillart* a volta sottile e trave irrigidente, o la parte centrale di un ponte *Nielsen* ad impalcato sospeso su tiranti obliqui, o la soletta d'intradosso di un ponte Risorgimento tipo Africa (*Krall*), o ancora la centina di un ponte *Melan*; esse devono essere sagomate con l'asse coincidente con una funicolare dei carichi, appunto per ridurre i momenti flettenti a quelli della caduta di spinta. A ritiro e cedimento avvenuti si completa il getto rimuovendo, man mano che questo procede, gli equivalenti carichi zavorra; la struttura completa affronta i carichi accidentali e, purtroppo, le variazioni termiche. Il calcolo dei carichi critici è da eseguirsi in ambedue le fasi, e soprattutto nella prima, in cui è affidata la totalità del peso proprio ad una struttura di limitata rigidità flessionale.

Si consideri innanzitutto (fig. 9-13) un arco AB simmetrico a due cerniere; il suo asse sia disegnato come la funicolare del peso  $q$ , passante per le imposte AB e la chiave C. Per un valore  $q_c$  di  $q$ , cui corrisponde un valore  $H_c$  di  $H$ , accanto alla configurazione soggetta a soli accorciamenti ne compaia un'altra inflessa; siano  $v$  le corrispondenti

componenti verticali degli spostamenti. Si faccia l'ipotesi che nel passaggio tra le due configurazioni non si abbiano variazioni di lunghezza,

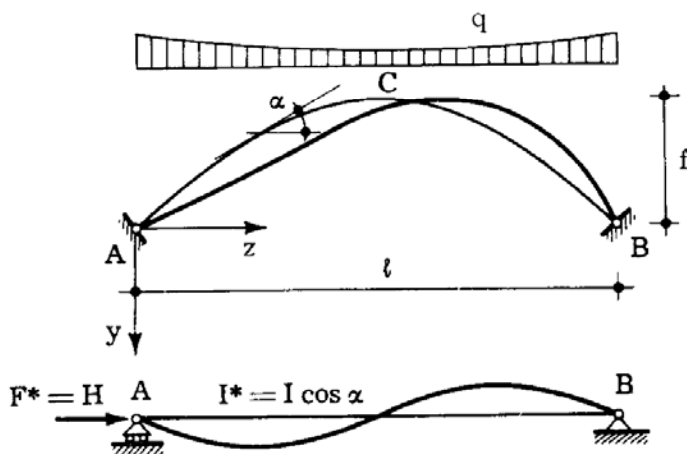


FIG. 9-13

e cioè che la deformata diramata sia *inestensionale*; deve essere invariato anche lo sforzo normale, e cioè  $H$ . Il poligono delle successive risultanti è ancora l'asse dell'arco, e si ha

$$M = H v .$$

Dalla prima delle (9-11) si ha quindi l'equazione di equilibrio variato, utilizzabile perchè si fa riferimento a deformata inestensionale:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{H}{EI \cos \alpha} v = 0 \quad (n)$$

con le condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad v = 0 \\ z = l & \quad v = 0 . \end{aligned}$$

La spinta critica si calcola perciò come carico assiale critico  $F_c^*$  di una trave fittizia appoggiata, di luce  $l$ , e di momento d'inerzia  $I^* = I \cos \alpha$ ; deve essere però scartato il primo carico critico, cui corrisponde una deformata variata ad una sola onda, alla quale nell'arco sono associate estensioni, e si deve far riferimento al secondo carico critico (deformata emisimmetrica a due onde).

Se per esempio risulta

$$I \cos \alpha = \text{cost.}$$

e cioè

$$I = \frac{I_c}{\cos \alpha}$$

dove  $I_c$  è il momento d'inerzia in chiave, risulta

$$H_c = \frac{4 \pi^2 EI_c}{l^2}.$$

Dalla relazione, valida per carico uniforme,

$$\frac{q_c l^2}{8 f} = \frac{4 \pi^2 EI_c}{l^2}$$

si trae

$$q_c = 32 \pi^2 \frac{f}{l} \frac{EI_c}{l^3}. \tag{15}$$

L'ipotesi che la deformata diramata parta da una configurazione senza flessione non è in realtà rispettata, poichè si è visto che la caduta di spinta provoca sempre dei momenti flettenti; si può quindi ripetere

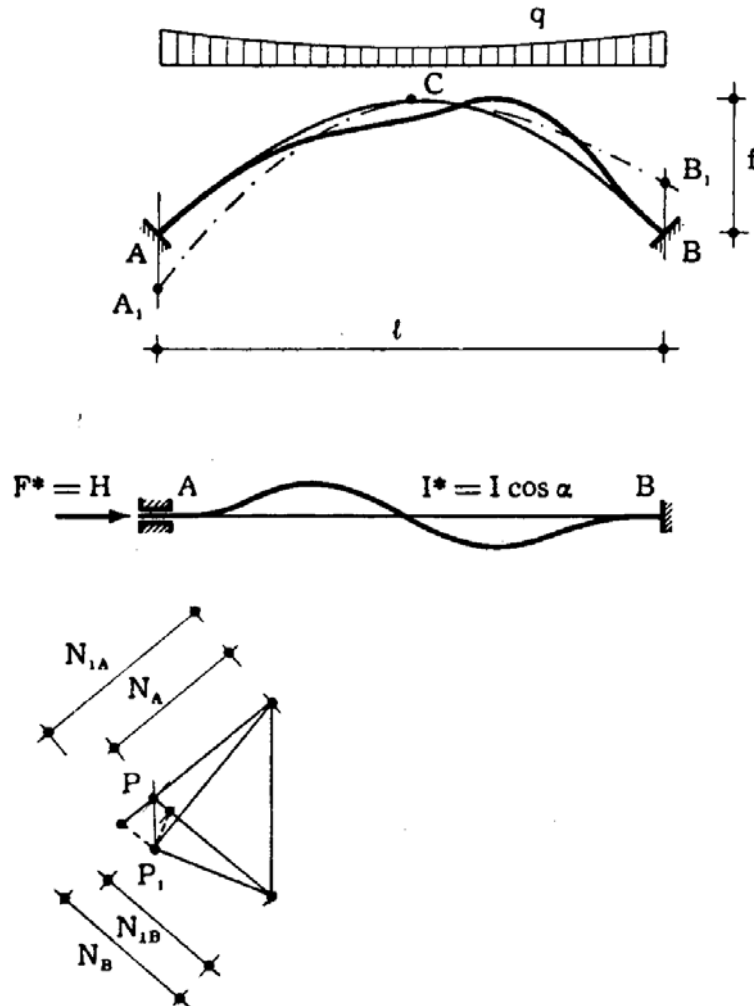


FIG. 9-14

quanto già detto in tema di archi ad asse circolare (fig. 9-8). Si consideri ora un arco simmetrico incastrato (fig. 9-14). La deformata emisimme-



trica a due onde importa, per il sorgere dei momenti alle estremità, uno spostamento del poligono delle successive risultanti; questo, data l'ipotesi di inestensibilità, passa sempre per la chiave C, ma alle imposte inizia in  $A_1$  e  $B_1$ . Per  $H$  inalterato, le  $N$  variano, ma in complesso la variazione di lunghezza dell'asse è nulla.

Il momento è

$$M = H \left[ v - \overline{AA_1} \left( 1 - 2 \frac{z}{l} \right) \right] = H v + M_A \left( 1 - 2 \frac{z}{l} \right)$$

e quindi l'equazione di equilibrio variato è

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{H}{EI \cos \alpha} v = - \frac{M_A}{EI \cos \alpha} \left( 1 - 2 \frac{z}{l} \right) \quad (o)$$

con le condizioni ai limiti

$$\begin{array}{ll} z = 0 & v = 0 \\ & v' = 0 \\ z = l & v = 0 \\ & v' = 0 \end{array}$$

La spinta critica si calcola come secondo carico assiale critico della trave a due incastri di luce  $l$  e momento d'inerzia  $I^* = I \cos \alpha$ .

Nello stesso caso prima esaminato di  $I \cos \alpha = \text{cost}$ , si ottiene

$$H_c = \frac{8 \pi^2 EI_c}{l^2}$$

e quindi

$$q_c = 64 \pi^2 \frac{f}{l} \frac{EI_c}{l^3} \quad (16)$$

Si prenda in esame adesso un arco  $AB$  simmetrico a tre cerniere, e si consideri la deformata diramata simmetrica (fig. 9-15). Se  $v_c$  è l'abbassamento in chiave, la spinta  $H$  varia; la nuova spinta è

$$H + dH = \frac{M_o}{f - v_c} = \frac{M_o}{f (1 - v_c/f)} \approx \frac{M_o}{f} \left( 1 + \frac{v_c}{f} \right)$$

e cioè

$$dH \approx H \frac{v_c}{f}.$$

Assimilando a lineare la legge di variazione lungo  $z$  delle ordinate

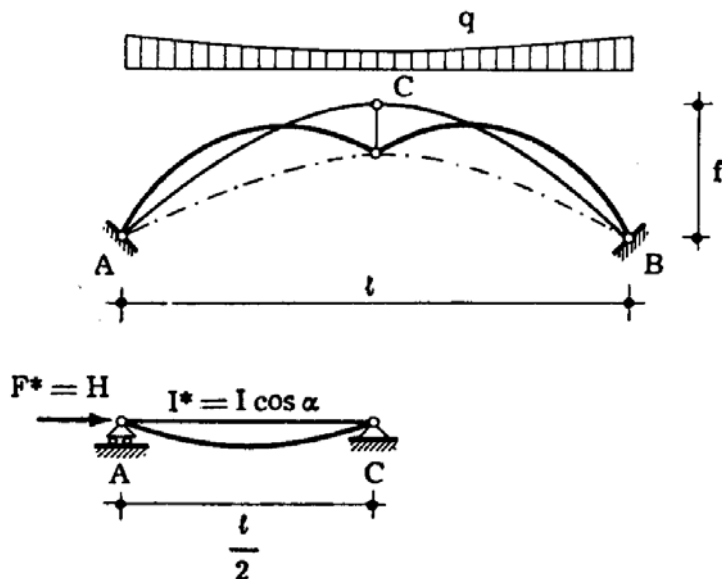


FIG. 9-15

comprese tra i due poligoni funicolari passanti per  $C$  e  $C'$ , il momento è

$$M = H \left( 1 + \frac{v_c}{f} \right) \left( v - 2 \frac{v_c}{l} z \right) \approx H v - 2 H \frac{v_c}{l} z$$

e, chiamando  $v^*$  la quantità  $v - 2 \frac{v_c}{l} z$ ,

$$M = H v^* ;$$

si avverte che l'approssimazione ottenuta così operando è piuttosto grossolana. Poichè è  $d^2 v^*/dz^2 = d^2 v/dz^2$ , la (9-11) si scrive

$$\frac{d^2 v^*}{dz^2} + \frac{H}{EI \cos \alpha} v^* = 0$$

con le condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} z = 0 & & v^* = 0 \\ z = \frac{l}{2} & & v^* = 0 . \end{aligned}$$

La spinta critica è perciò, nello spirito dell'approssimazione già fatta, il primo carico assiale critico della trave fittizia AC lunga  $l/2$  appoggiata agli estremi, di momento d'inerzia  $I^* = I \cos \alpha$ .

Essa coincide con quella già calcolata per l'arco a due cerniere relativamente alla deformata con due onde.

Analogamente, e nella stessa approssimazione, per l'arco incastrato in A e B e con una cerniera in C il carico critico coincide con quello dell'arco

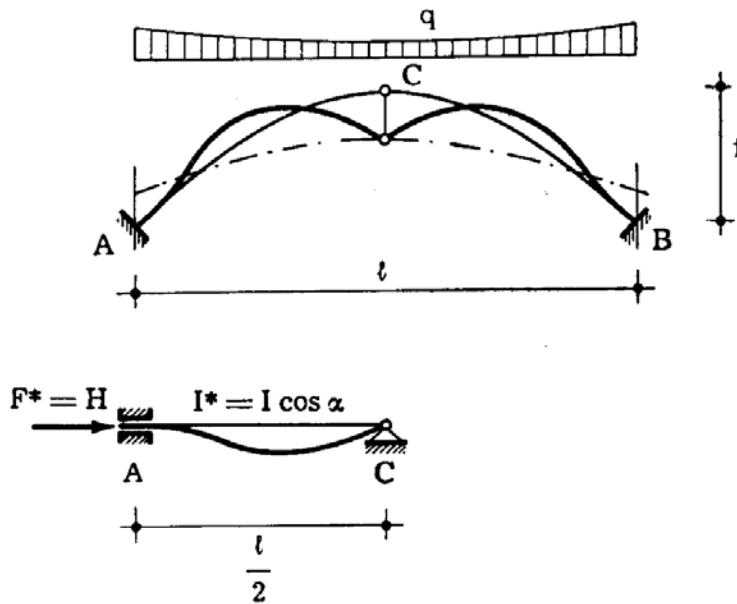


FIG. 9-16

incastrato (fig. 9-16). Vale per gli archi quanto già detto più volte circa il calcolo alla *Shanley* del carico critico al di là del periodo elastico.

Quanto detto circa l'instabilità degli archi è valido in linea approssimata, e legato alle due ipotesi di inestensibilità della deformata e di assenza di flessioni nella configurazione di partenza. Si osserverà nel paragrafo che segue che, per archi molto ribassati, può esistere un carico di collasso, di valore inferiore, per deformata con accorciamenti. Un carico critico per deformata estensionale (ad una sola onda) è in genere da escludere, perchè l'energia da sforzo normale è, per archi ordinari, talmente elevata da portare il valore del carico critico al disopra di quello calcolato per deformata inestensionale. Ma pur nell'ipotesi di inestensibilità gli autori non sono concordi nelle formule proposte, anche se gli scarti non sono in genere tali da turbare il tecnico. Secondo il *Timoshenko*, per esempio, per un arco parabolico di sezione costante soggetto ad un carico distribuito uniformemente sull'arco, il carico critico può porsi nella forma

$$q_c = \gamma \frac{EI}{l^3} ;$$

il valore di  $\gamma$  è fornito, in funzione della monta  $f/l$ , dalla tabella 9-1,

TABELLA 9-1

$f/l$	Incastrato	Una cerniera	Due cerniere	Tre cerniere
0,1	60,7	33,8	28,5	22,5
0,2	101	59	45,4	39,6
0,3	115	—	46,5	46,5
0,4	111	96	43,9	43,9
0,5	97,4	—	38,4	38,4
0,6	83,8	80	30,5	30,5
0,8	59,1	59,1	20,0	20,0
1,0	43,7	43,7	14,1	14,1

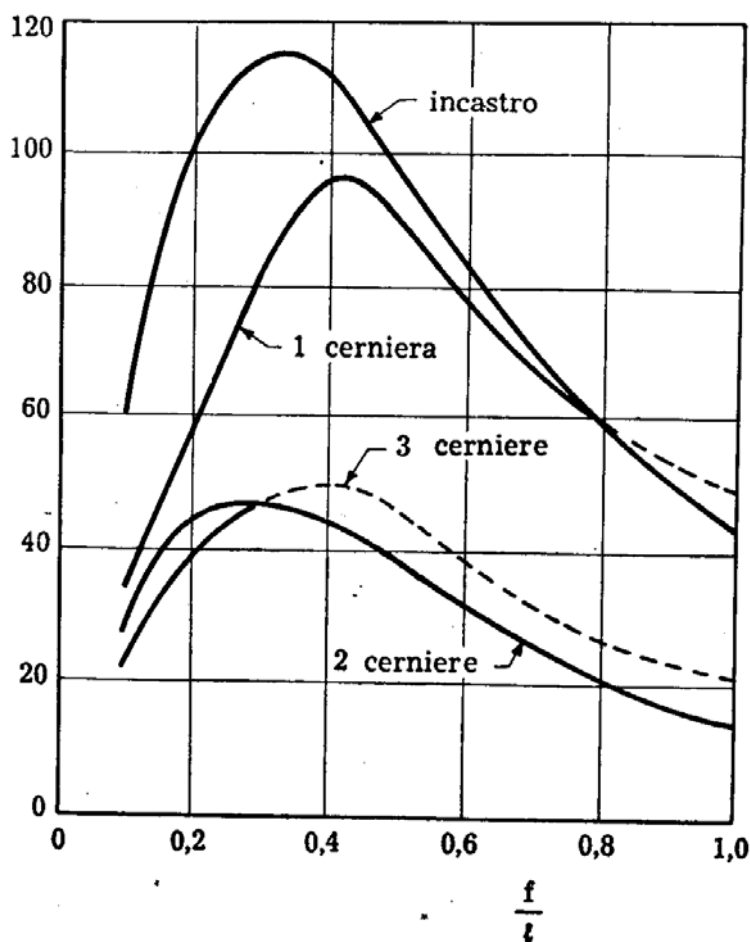


FIG. 9-17

o dalla fig. 9-17. In quest'ultima, per l'arco ad una ed a tre cerniere esso

è calcolato per deformata simmetrica; ove questo valore è più alto di quello dei corrispondenti archi rispettivamente incastrato ed a due cerniere (linea tratteggiata) si deve assumere per carico critico il secondo.

### 8. Il caso dell'arco che scavalca la corda.

Negli archi molto ribassati si può avere instabilità di seconda specie con l'intervento di deformazioni assiali, per un valore del carico di collasso inferiore a quello del carico critico in condizioni di inestensibilità.

Sembra significativo un esempio dovuto al *Timoshenko*, relativo ad un arco di sezione costante a due cerniere il cui asse sia sagomato secondo una senoide (fig. 9-18); la trattazione è la stessa del *Timoshenko*, salvo

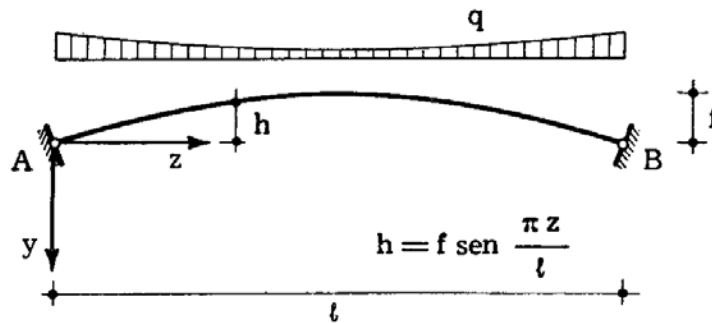


FIG. 9-18

lievissime varianti del tutto marginali. La luce dell'arco sia  $l$ , la freccia  $f$ ; la quota  $h$  generica dell'asse, positiva se il baricentro della sezione è al disopra della corda, è fornita da

$$h = f \sin \frac{\pi z}{l} .$$

Se una cerniera si sostituisce con un appoggio a piano di scorrimento orizzontale, l'asse dell'arco presenta sotto il carico agente (fig. 9-19 a) degli spostamenti; l'espressione delle componenti verticali si approssima con il primo termine dello sviluppo in serie di funzioni trigonometriche:

$$v_1 = v_{1m} \sin \frac{\pi z}{l} = f V \sin \frac{\pi z}{l}$$

con la posizione (\*)

$$V = \frac{V_{1m}}{f} \quad (p)$$

L'asse dell'arco è fornito, in queste condizioni, da

$$h_1 = f \left( 1 - V \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}$$

Si faccia poi agire (fig. 9-19 b) la spinta  $H$ ; essa, se si trascurano le

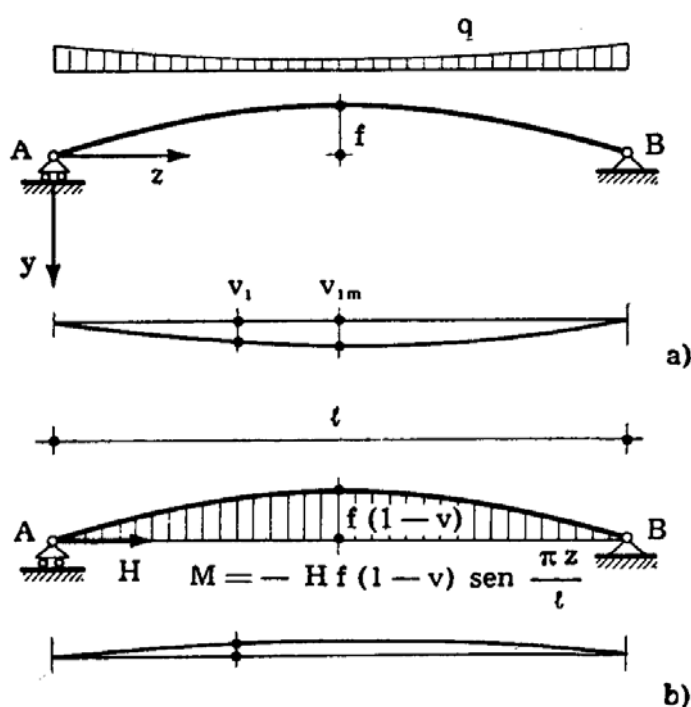


FIG. 9-19

variazioni di momento dovute agli spostamenti, provoca i momenti

$$M = -Hf(1 - V) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{l}$$

(\*) Per esempio, se l'arco è di sezione costante, e si pone  $\cos \alpha = 1$ , per un carico uniforme risulta

$$v_{1m} = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI};$$

per una forza  $F$  in mezzeria è

$$v_{1m} = \frac{F l^3}{48 EI}$$

e quindi, per la (9-11) ove si pone  $\cos \alpha = 1$ , gli spostamenti di componenti verticali

$$v_2^{(1)} = - \frac{H \ell^2 f (1 - V)}{EI \pi^2} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\ell} .$$

Per tener conto della variazione di momento dovuta agli spostamenti occorre dividere  $v_2^{(1)}$  per  $1 - H/H_c$  (si veda il capitolo relativo al principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale). Quindi in definitiva

$$v_2 = - \frac{H \ell^2 f (1 - V)}{EI \pi^2 (1 - H \ell^2 / \pi^2 EI)} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\ell} .$$

Con la posizione

$$\alpha = \frac{H \ell^2}{\pi^2 EI} \quad (q)$$

si ha

$$v_2 = - \frac{\alpha f (1 - V)}{1 - \alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\ell}$$

e quindi l'asse dell'arco presenta le ordinate

$$h_2 = h_1 - v_2 = f \left[ 1 - V + \frac{\alpha (1 - V)}{1 - \alpha} \right] \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\ell}$$

e ancora

$$h_2 = f \frac{1 - V}{1 - \alpha} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{\ell} . \quad (r)$$

Il valore di  $H$  si calcola imponendo che l'accorciamento assiale dovuto ad  $H$  sia uguale alla variazione di distanza tra le imposte  $A$  e  $B$  dovuta al passaggio dalle quote  $h$  alle quote  $h_2$ ; poichè sia  $h$  che  $h_2$  sono molto piccole, si può dire che distendendo l'asse dell'arco supposto inestensibile sull'orizzontale e poi portandolo alla forma  $h$  gli estremi si avvicinano di

$$\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left( \frac{dh}{dz} \right)^2 dz .$$

Quindi è

$$\frac{H \ell}{EA} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left( \frac{dh}{dz} \right)^2 dz - \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left( \frac{dh_2}{dz} \right)^2 dz . \quad (s)$$

Si ha

$$\int_0^l \left( \frac{dh}{dz} \right)^2 dz = \frac{f^2 \pi^2}{2l};$$

quindi la (s) si scrive

$$\frac{Hl}{EA} = \frac{f^2 \pi^2}{4l} - f^2 \frac{(1-V)^2}{(1-\alpha)^2} \frac{\pi^2}{4l}$$

che, con la posizione

$$m = \frac{4I}{A f^2} = 4 \frac{\rho^2}{f^2} \quad (t)$$

si scrive

$$(1-V)^2 = (1-\alpha)^2 (1-m\alpha). \quad (u)$$

Data la forma e il valore del carico esterno, e quindi  $V$ , dalla (u) si trae  $\alpha$ , e quindi  $H$ ; però l'equazione non è lineare, e può fornire più valori di  $H$  per lo stesso carico esterno. Il diagramma della  $(1-\alpha)^2 (1-m\alpha)$  in funzione di  $\alpha$  si presenta per  $m < 1$  come nella fig. 9-20, ottenuta per

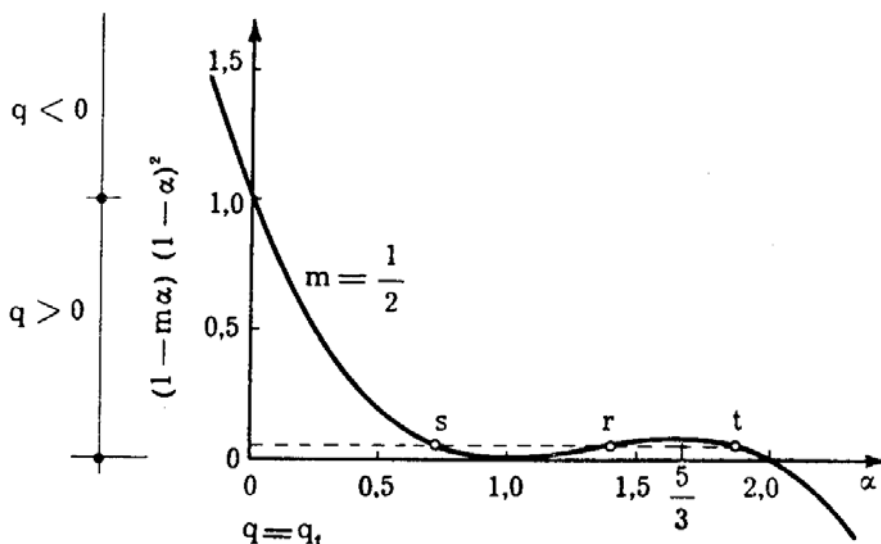


FIG. 9-20

$m = 1/2$ ; dato il carico, e quindi  $(1-V)^2$ , l'orizzontale per tale valore fornisce nelle intersezioni con la curva i valori di  $H$ ; questi, per carico positivo, possono essere uno o tre, secondo che  $(1-V)^2$  è superiore o inferiore ad un certo valore, secondo cioè che il carico è inferiore o superiore



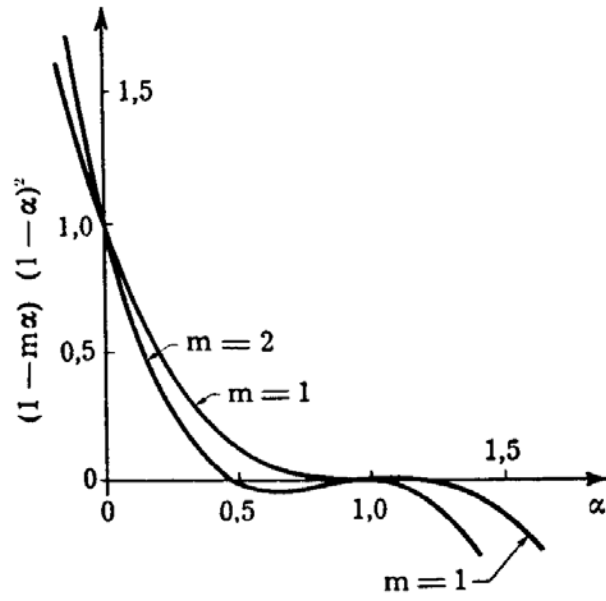


FIG. 9-21

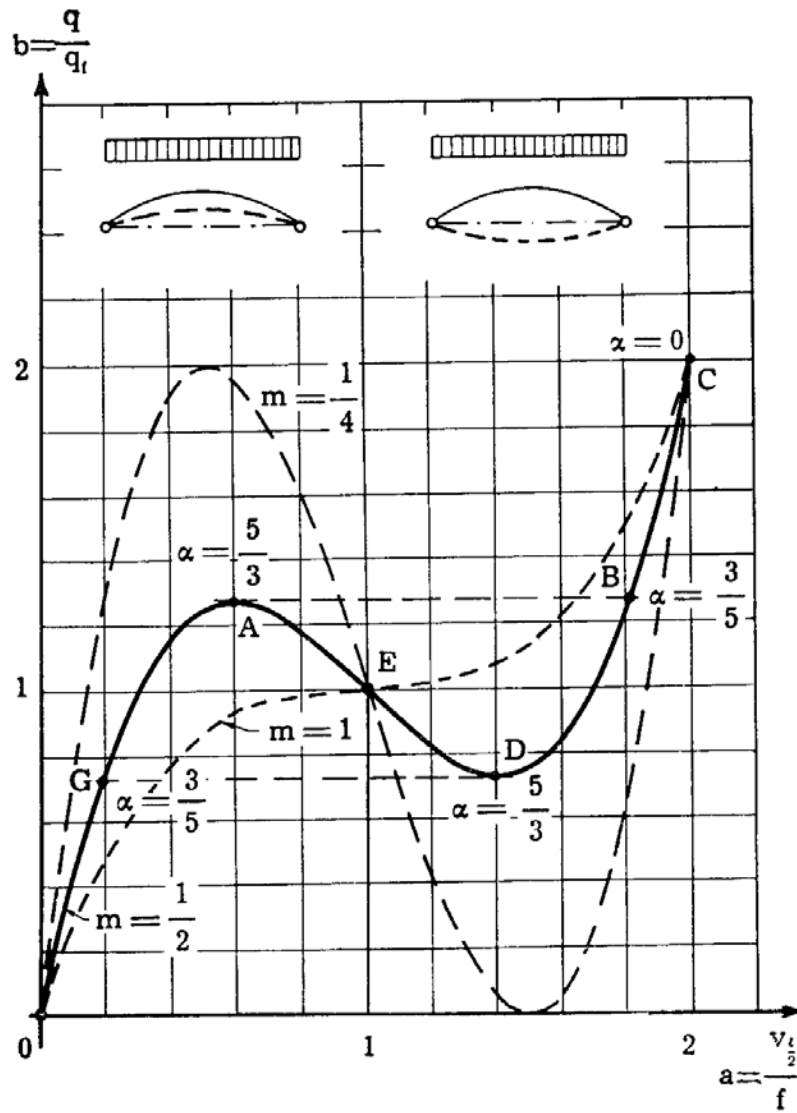


FIG. 9-22

ad un certo valore. Per  $m > 1$  invece il diagramma si presenta come nella fig. 9-21, ottenuta per  $m=1$  e per  $m=2$ , ed il valore di  $H$  è unico per ogni valore del carico.

Nella fig. 9-22 è riportato il diagramma carico-abbassamento in chiave per un carico uniformemente distribuito; in ascissa è rappresentato il rapporto  $a$  tra l'abbassamento  $v_{1/2}$  in mezzeria e la freccia iniziale  $f$ , in ordinata il rapporto  $b$  tra il valore  $q$  del carico ed il valore  $q_f$  cui corrisponde nell'arco con appoggio un abbassamento in mezzeria pari alla freccia. Per  $a > 1$  si ha scavalramento della corda.

Tutte le curve passano per il punto E (1, 1); infatti se  $b=1$ , e cioè  $q=q_f$ , il carico  $q$  porta l'asse dell'arco sull'orizzontale, e la  $H$  ne fa variare solo la lunghezza, quindi  $v_{1/2}=f$ , ed  $a=1$ . Il corrispondente valore di  $H$  è, per un dato  $m$ , il più elevato rispetto a tutti gli altri punti della curva.

Si osserva (fig. 9-22) dai valori di  $a$  (e cioè di  $H$ ) che per  $m=1/2$  non si può avere per  $q < q_m$  ( $q_m$  carico di collasso) instabilità con deformata emisimmetrica, e quindi in realtà l'arco (sempre che sia molto ribassato) si instabilizza scavalcando la corda. Però si nota che diminuendo  $m$ , e cioè  $\rho^2$ , diminuisce nello stesso rapporto sia  $q_f$  che il carico critico  $q_c$  determinato per deformata emisimmetrica; ma  $q_m/q_f$ , dove  $q_m$  è il carico di collasso, aumenta e quindi in definitiva  $q_m/q_c$  aumenta. Per archi snelli, cioè, si può avere  $q_c < q_m$ , e quindi instabilità con deformata emisimmetrica.

Aumentando  $\rho$  in modo che  $m > 1$ , non si ha mai instabilità di seconda specie, ma neppure quella con deformata emisimmetrica, perchè l'arco scavalca la corda prima che sia attinto il valore  $H_c$ , e cioè il valore  $q_c$ .