

CAPITOLO VII

INSTABILITA' TORSIO-FLESSIONALE DELLE TRAVI COMPRESSE

1. Instabilità da sola torsione di travi compresse.

Nelle travi ad asse rettilineo soggette a sforzo assiale esiste la possibilità di una deformazione equilibrata torsionale. A prova di ciò, si consideri una trave a sezione sottile *aperta*, di *spessore* δ comunque variabile con l'ascissa curvilinea s , che è presa secondo la *linea media*; si suppone che opportuni irrigidimenti trasversali valgano a garantire l'invariabilità di forma della sezione, più precisamente l'invariabilità della proiezione della linea media sul piano normale all'asse della trave. La sezione può essere variabile con l'ascissa z , ma i centri di taglio C siano allineati, e la retta z dei centri costretta a non deformarsi. La trave sia sollecitata da forze assiali (baricentriche) di compressione, e sia $-F n(z)$ lo sforzo normale N all'ascissa z (fig. 2-1). La deformazione è caratterizzata dalla rotazione ϑ della sezione retta intorno all'asse z , coincidente con la retta dei centri di taglio; la derivata

$$\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dz} \quad (1)$$

è l'angolo di rotazione tra due sezioni distanti dell'unità di lunghezza. L'elemento AP di lunghezza dz della fibra generica, inizialmente parallelo all'asse z (si può considerare tale anche per sezione variabile, se la variazione non è troppo sensibile) per effetto della deformazione torsionale si dispone (fig. 7-1) in modo da determinare, con la posizione originaria, un piano $P'AP$ normale alla retta PC , dove PC è la perpendicolare da P alla retta dei centri di taglio.

Sull'elemento δds di sezione retta agisce la forza elementare $\sigma \delta ds$; a deformazione avvenuta, l'elemento AP' è inclinato dell'angolo $\vartheta' r$, dove $r = PC$.

Le forze σds , ancora parallele all'asse z , ed applicate in A e P' , non sono più in equilibrio, e danno luogo ad un momento $\sigma \delta ds \vartheta' r dz$, equivalente a quello di due forze $\sigma \delta ds \vartheta' r$ applicate secondo PP' e la paral-

lela alla PP' per A ; la forza

$$\sigma \delta ds \vartheta' r \quad (a)$$

agente sulla sezione retta di normale positiva fornisce, per $\sigma > 0$ e $\vartheta' > 0$, un momento negativo (orario) rispetto al centro C .

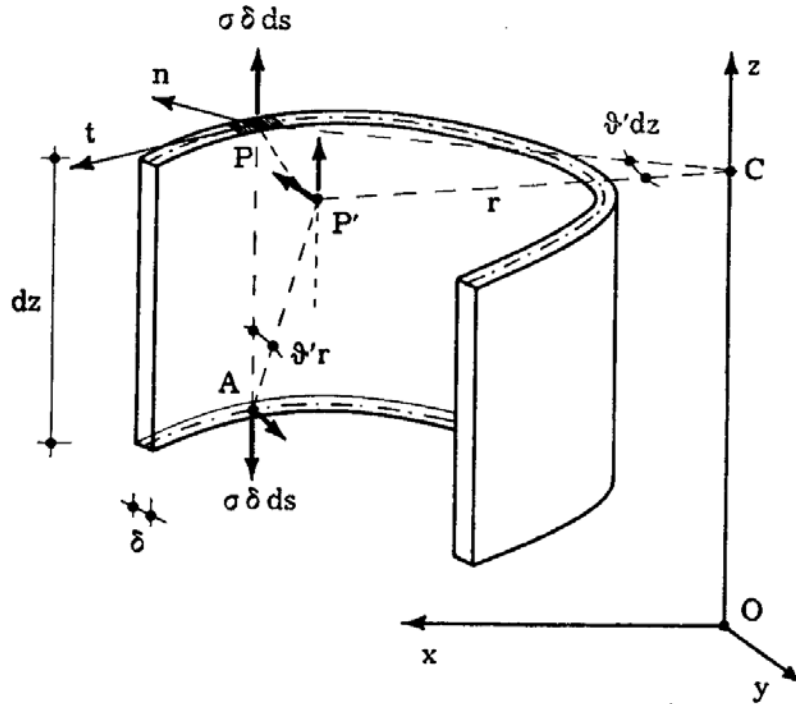


FIG. 7-1

Il momento M_{tn} delle (a) rispetto a C è fornito quindi da

$$M_{tn} = -\frac{N}{A} \vartheta' \int_A \delta ds r^2 = -\frac{N}{A} \vartheta' I_C \quad (b)$$

dove A è l'area della sezione retta, ed I_C il suo momento polare rispetto a C .

L'equazione più generale della torsione (torsione non uniforme), valida nel caso in cui i centri di taglio siano allineati, è (Vol. II, Cap. X, § 9)

$$C_2 \vartheta^{iv} + C_2' \vartheta''' - C_1 \vartheta'' - C_1' \vartheta' = m_t = -\frac{dM_t}{dz}; \quad (2)$$

in questa C_1 è la *rigidità torsionale*

$$C_1 = G \frac{\int \delta^3 ds}{3} \quad (3)$$

C_2 il *bimomento*

$$C_2 = E \int_s (2 A_s)^2 \delta ds, \quad (4)$$

ed m_t il momento distribuito applicato sulla superficie laterale. Nella (7-4) A_s indica l'*area settoriale*, compresa (fig. 7-2) tra il raggio fisso CR,

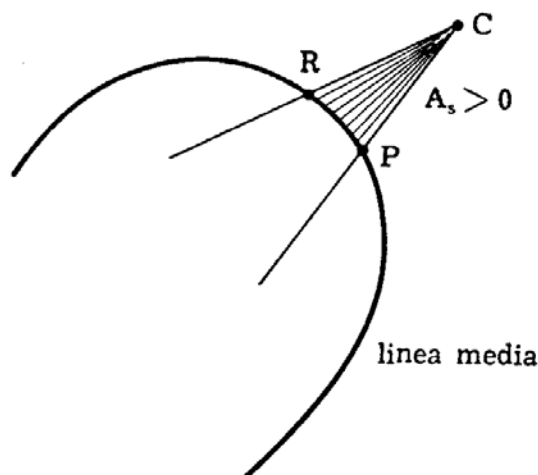


FIG. 7-2

il raggio CP ruotante intorno a C, e la linea media tra C e P; l'incremento dA_s è positivo se il raggio CP ruota in senso antiorario; il raggio di riferimento CR è tale che risulti

$$\int_s A_s \delta ds = 0. \quad (5)$$

Per la presenza dello sforzo normale, la (7-2) si modifica nell'altra

$$C_2 \vartheta^{iv} + C'_2 \vartheta''' - C_1 \vartheta'' - C'_1 \vartheta' = - \frac{dM_t}{dz} - \frac{dM_{tn}}{dz} = - \frac{dM_{tn}}{dz} + m_t$$

e ancora

$$C_2 \vartheta^{iv} + C'_2 \vartheta''' - \left(C_1 + \frac{NI_C}{A} \right) \vartheta'' - \left(C'_1 + \frac{NI_C}{A} \right)' \vartheta' = m_t. \quad (6)$$

L'equazione di equilibrio variato è la (7-6) scritta per $m_t = 0$.

Se la sezione è costante, e se la trave è sollecitata solo alle estremità da una forza assiale, è $N = -F$, e l'equazione di equilibrio variato si

scrive

$$C_2 \vartheta^{IV} - \left(C_1 - F \frac{I_C}{A} \right) \vartheta'' = 0 . \quad (7)$$

Ponendo

$$k^2 = - \frac{C_1 - F \frac{I_C}{A}}{C_2} . \quad (8)$$

la (7-7) si presenta sotto l'aspetto

$$\vartheta^{IV} + k^2 \vartheta'' = 0$$

la cui soluzione è

$$\vartheta = A \operatorname{sen} kz + B \operatorname{cos} kz + C z + D . \quad (9)$$

Se le sezioni estreme della trave non possono ruotare intorno all'asse z , in esse è $\vartheta = 0$. Se le sezioni estreme sono libere di ingobbarsi, in esse è $w \neq 0$; e poichè le tensioni normali da torsione non uniforme sono fornite da

$$\sigma = - 2 E \vartheta'' A_s$$

e risultano nulle, deve essere pure

$$\vartheta'' = 0 .$$

Se le sezioni estreme sono incastrate, in esse è $w = 0$, e poichè è

$$w = - 2 A_s \vartheta' ,$$

risulta pure

$$\vartheta' = 0 .$$

Se perciò gli estremi presentano vincoli che impediscono la rotazione intorno all'asse z , ma non l'ingobbimento (*appoggi torsionali*), le condizioni ai limiti sono

$$\begin{array}{ll} z = 0 & \vartheta = \vartheta'' = 0 \\ z = l & \vartheta = \vartheta'' = 0 \end{array}$$

che per la (7-9) si scrivono

$$\begin{aligned}
 0 &= && B && + D \\
 0 &= && - k^2 B \\
 0 &= & A \operatorname{sen} k\ell + & B \cos k\ell + C\ell + D \\
 0 &= & - k^2 A \operatorname{sen} k\ell - & k^2 B \cos k\ell
 \end{aligned} \tag{c}$$

La condizione di compatibilità delle (c) è

$$\begin{vmatrix}
 0 & 1 & 0 & 1 \\
 0 & -k^2 & 0 & 0 \\
 \operatorname{sen} k\ell & \cos k\ell & \ell & 1 \\
 -k^2 \operatorname{sen} k\ell & -k^2 \cos k\ell & 0 & 0
 \end{vmatrix} = 0$$

che porge la soluzione

$$\operatorname{sen} k\ell = 0 \tag{d}$$

cui corrispondono A indeterminata e finita, $B = C = D = 0$.

Dalla (d) si trae

$$k\ell = n\pi$$

e, per la (7-8),

$$F_a = \frac{A}{I_C} \left(C_1 + \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} C_2 \right); \tag{10}$$

alla (7-10) corrisponde la soluzione

$$\vartheta = A \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{\ell}. \tag{11}$$

Può porsi perciò nel caso in esame

$$F_C = \frac{A}{I_C} \left(C_1 + \frac{\pi^2}{\ell^2} C_2 \right). \tag{12}$$

Se gli estremi sono costretti da vincoli che impediscono sia la rotazione intorno all'asse z che l'ingobbimento (*incastri torsionali*) le condizioni ai limiti sono

$$z = 0 \quad \vartheta = \vartheta' = 0$$

$$z = l \quad \vartheta = \vartheta' = 0$$

che si scrivono

$$0 = B + D$$

$$0 = kA + C$$

$$0 = A \operatorname{sen} kl + B \cos kl + Cl + D$$

$$0 = kA \cos kl - kB \operatorname{sen} kl + C$$

La condizione di compatibilità è

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} kl & \cos kl & l & 1 \\ k \cos kl & -k \operatorname{sen} kl & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

le cui soluzioni sono (§ 2-2 d)

$$\operatorname{sen} \frac{kl}{2} = 0 \quad (e)$$

e

$$\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{kl}{2} \quad (f)$$

La (e) porge

$$\frac{kl}{2} = n\pi$$

da cui

$$F_a = \frac{A}{I_C} \left(C_1 + \frac{4 n^2 \pi^2}{l^2} C_2 \right). \quad (13)$$

Il valore più basso delle F_a ricavabili attraverso la (f) è più elevato del valore più basso delle (7-12); è perciò

$$F_C = \frac{A}{I_C} \left(C_1 + \frac{4 \pi^2}{l^2} C_2 \right). \quad (14)$$

Quanto sopra è valido se la retta z dei centri di taglio è vincolata. Se il centro di taglio C coincide con il baricentro G , le (a) sono a risultante nulla (fig. 7-3), e perciò anche in assenza di vincolo lungo z le formule precedenti sono valide, perchè il vincolo non è chiamato in gioco.

Se invece $C \neq G$, in assenza di vincolo lungo z occorre considerare una configurazione flesso-torsionale.

2. Instabilità flesso-torsionale di travi compresse.

Nel caso più generale in cui centro di taglio e baricentro non coincidono, si può giungere alle equazioni della deformata per effetto di coppie applicate distribuite m_t imponendo prima il vincolo lungo la retta dei centri di taglio, e poi rimuovendolo. La trattazione è fatta nell'ipotesi di sezione costante e di forze F applicate alle estremità. In presenza del vincolo le rotazioni ϑ sono fornite dalla (7-7); contemporaneamente sorgono, a causa dello sforzo normale $N(z)$, reazioni $r(z)$, parallele al piano xy ; tali assi siano paralleli agli assi principali di inerzia ξ ed η . Le reazioni $r(z)$ (ciò è valido, in genere, nell'ipotesi che anche i baricentri siano allineati) sono tali da generare in ogni sezione i tagli (fig. 7-3)

$$T_{rx} = - \sigma \vartheta' \int_A y \, dA = - \sigma \vartheta' S_x$$

$$T_{ry} = \sigma \vartheta' \int_A x \, dA = - \sigma \vartheta' S_y .$$

Le reazioni $-r(z)$, che occorre applicare rimuovendo il vincolo, generano perciò i tagli

$$T_x = \sigma \vartheta' S_x = \sigma \vartheta' A y_G$$

$$T_y = \sigma \vartheta' S_y = - \sigma \vartheta' A x_G$$

e cioè (form. a Cap. VIII) gli spostamenti u e v regolati dalle equazioni

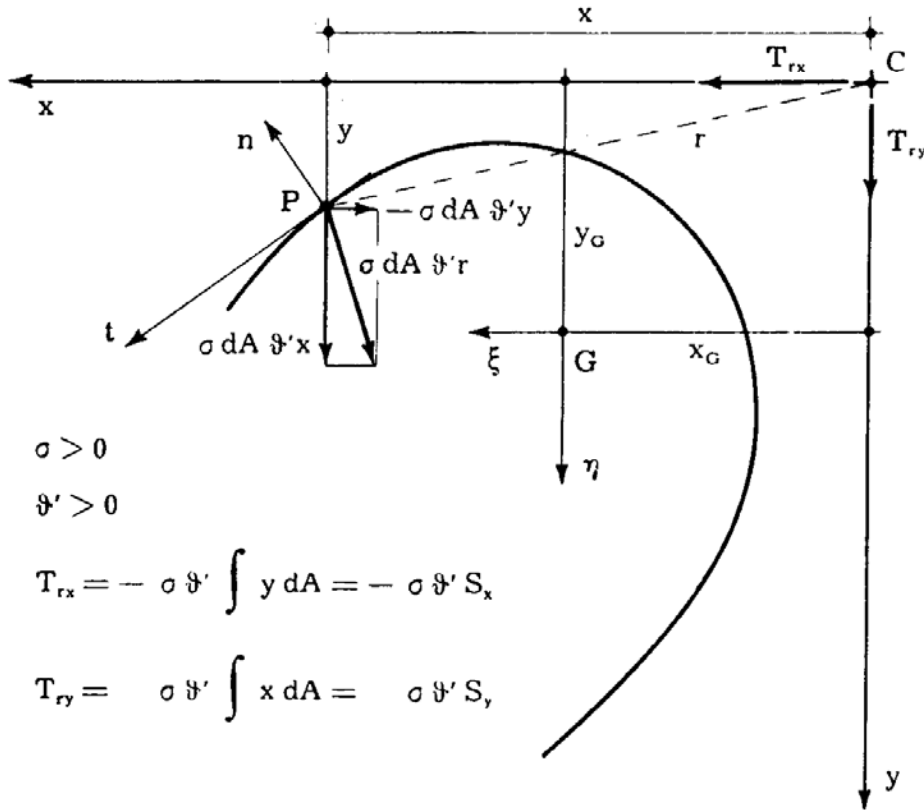


FIG. 7-3

(E , I_ξ , I_η , A ed N sono costanti con z)

$$EI_\eta u'' = -Fu - \sigma \vartheta A y_G =$$

$$= -F(u - \vartheta y_G)$$

(g)

$$EI_\xi v'' = -Fv + \sigma \vartheta A x_G =$$

$$= -F(v + \vartheta x_G).$$

L'inflessione di componenti $u(z)$ e $v(z)$ provoca le inclinazioni $u'(z)$ e $v'(z)$ della normale alla sezione retta rispetto all'asse z ; le proiezioni normali della F sulla sezione retta di normale positiva così inclinata sono fornite da Fu' e Fv' (si ricordi che F è positiva se ad essa corrisponde uno sforzo normale di compressione). Sorge così il momento torcente supplementare (valutato rispetto a C)

$$M_{ts} = -Fu' y_G + Fv' x_G,$$

per cui la (7-7) si modifica nell'altra (in presenza di m_t applicate)

$$C_2 \vartheta^{iv} - \left(C_1 - F \frac{I_C}{A} \right) \vartheta'' = m_t - \frac{dM_{ts}}{dz} = m_t + F u'' y_G - F v'' x_G . \quad (h)$$

La variazione del momento torcente dovuta ad N non influenza la (g), dove entrano in gioco direttamente le ϑ . Le equazioni della deformata sono perciò

$$\begin{aligned} EI_\eta u'' &= - F (u - \vartheta y_G) \\ EI_\xi v'' &= - F (v + \vartheta x_G) \\ C_2 \vartheta^{iv} - \left(C_1 - F \frac{I_C}{A} \right) \vartheta'' - F u'' y_G + F v'' x_G &= m_t . \end{aligned} \quad (15)$$

Se $m_t = 0$, si hanno le equazioni dell'equilibrio variato

$$\begin{aligned} EI_\eta u'' + F (u - \vartheta y_G) &= 0 \\ EI_\xi v'' + F (v + \vartheta x_G) &= 0 \\ C_2 \vartheta^{iv} - \left(C_1 - F \frac{I_C}{A} \right) \vartheta'' - F u'' y_G + F v'' x_G &= 0 . \end{aligned} \quad (16)$$

Se gli estremi sono vincolati con appoggi comuni e torsionali, le condizioni limiti sono

$$\begin{aligned} \text{in } z=0 \quad \text{ed in } z=l \quad u = v = \vartheta &= 0 \\ \text{in } z=0 \quad \text{ed in } z=l \quad u'' = v'' = \vartheta'' &= 0 . \end{aligned} \quad (17)$$

Se $x_G = y_G = 0$, le (7-16) sono a variabili separate, ed offrono le soluzioni critiche

$$\begin{aligned} F_x &= n^2 \pi^2 \frac{EI_\xi}{l^2} \\ F_y &= n^2 \pi^2 \frac{EI_\eta}{l^2} \\ F_\vartheta &= \frac{A}{I_C} \left(C_1 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} C_2 \right) , \end{aligned} \quad (i)$$

già note.

Nel caso generale di $C \neq G$, una terna di funzioni $u v w$ che soddisfa le condizioni ai limiti (7-17) è la seguente

$$\begin{aligned} u &= A_x \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} \\ v &= A_y \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} \\ \vartheta &= A_\vartheta \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} ; \end{aligned} \quad (l)$$

poichè la sezione è costante, essa soddisfa pure le (7-16) se si verifica

$$\begin{aligned} \left(F - EI_\eta \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) A_x & & - F y_G A_\vartheta &= 0 \\ \left(F - EI_\xi \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) A_y & & + F x_G A_\vartheta &= 0 \quad (m) \\ - F y_G A_x & + F x_G A_y - \left(C_2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} + C_1 - F \frac{I_C}{A} \right) A_\vartheta &= 0 \end{aligned}$$

e cioè ancora, con le posizioni (i), se è

$$\begin{vmatrix} F - F_y & 0 & -F y_G \\ 0 & F - F_x & F x_G \\ -F y_G & F x_G & \frac{I_C}{A} (F - F_\vartheta) \end{vmatrix} = 0 \quad (n)$$

L'equazione cubica (n) si scrive pure

$$\frac{I_C}{A} (F - F_x) (F - F_y) (F - F_\vartheta) - F^2 y_G^2 (F - F_x) - F^2 x_G^2 (F - F_y) = 0$$

e ancora, chiamando I_G il momento polare baricentrico,

$$\begin{aligned} f(F) &= \frac{I_G}{I_C} F^3 + \left[\frac{A}{I_C} (F_x y_G^2 + F_y x_G^2) - (F_x + F_y + F_\vartheta) \right] F^2 + \\ &+ (F_x F_y + F_x F_\vartheta + F_y F_\vartheta) F - F_x F_y F_\vartheta = 0 \quad (18) \end{aligned}$$

La (7-18) fornisce tre radici per F ; di tali terne ne esistono infinite, ordinabili secondo n crescente. La più piccola delle tre radici della (7-18) per $n=1$ fornisce il valore critico di F , perchè è la più bassa fra tutte le radici. I corrispondenti valori di $A_x A_y A_z$, ricavabili dalla (m), forniscono con i loro rapporti la deformata della struttura, a meno di una costante.

Ovviamente sono state così indagate solo le soluzioni del tipo (l); in rigore quindi la soluzione è calcolata come limite superiore.

Nella fig. 7-4 è riportato il grafico della funzione $f(F)$ che compare

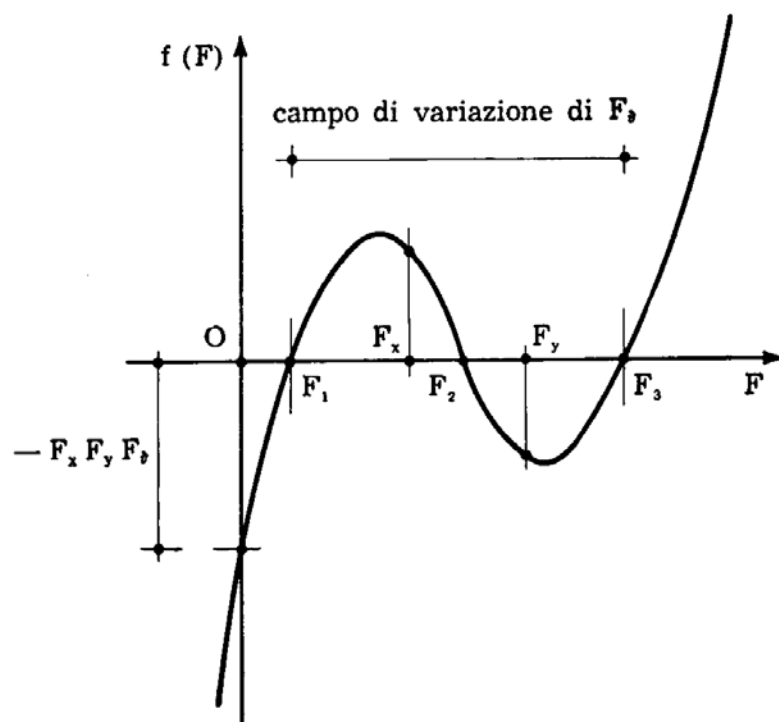


FIG. 7-4

nella (7-18), per $n=1$; le intersezioni con l'asse delle F forniscono i valori F_a .

Per $F=0$, $f(F)$ è negativa; per F molto alto, $f(F)$ assume il segno del termine cubico, che è positivo.

Se è $F_x < F_y$, si ha ($I_G = I_C - A x_G^2 - A y_G^2$)

$$f(F_x) = -\frac{A}{I_C} F_x^2 x_G^2 (F_x - F_y) > 0$$

$$f(F_y) = -\frac{A}{I_C} F_y^2 y_G^2 (F_y - F_x) < 0 .$$

Quindi la (7-18) ha tre radici reali $F_1 F_2 F_3$, e valgono le disuguaglianze

$$F_1 < F_x < F_2 < F_y < F_3 .$$

Se F_b è più piccolo di F_x ed F_y , $f(F_b)$ è positiva; infatti è

$$f(F_b) = \frac{A}{I_C} F_b^2 [x_G^2 (F_y - F_b) + y_G^2 (F_x - F_b)] > 0 .$$

Così pure, se F_b è più grande di F_x ed F_y , la $f(F_b)$ è negativa. Ciò significa che comunque

$$F_1 < F_b$$

$$F_3 > F_b .$$

Si conclude perciò che delle tre radici $F_1 F_2 F_3$ la più piccola, F_1 , è minore di F_x , F_y , F_b , e la più grande, F_3 , è maggiore di F_x , F_y , F_b ; la seconda, F_2 , è intermedia tra F_x ed F_y . La chiamata in gioco delle deformazioni torsionali, abbassa sempre il valore del carico critico eulero. Per travi di lunghezza modesta e sezione rigida F_b è piccolo in confronto di F_x ed F_y , F_1 è prossimo ad F_b , e l'instabilità è prevalentemente di carattere torsionale; il contrario accade se la trave è lunga e con sezione poco rigida, ed in tal caso la formula di Eulero fornisce valori molto vicini al vero.

Si osservi che per $x_G = y_G = 0$ ($C \equiv G$) la $f(F)$ ha le tre radici $F_x F_y F_b$; ciò conforta a supporre che le (l) siano le uniche soluzioni delle (7-16), poichè per variazione continua della sezione, fatta in modo che x_G ed y_G tendano a zero, le F_b devono tendere ai valori di diramazione delle tre equazioni a variabili separate che si ricavano dalle (7-16) per $x_G = y_G = 0$, e questi ultimi valori sono soltanto gli (i).

Se agli estremi della trave esistono incastri comuni e torsionali, le condizioni ai limiti sono

$$\begin{aligned} \text{in } z=0 \quad \text{ed in } z=l \quad u = v = \vartheta = 0 \\ \text{in } z=0 \quad \text{ed in } z=l \quad u' = v' = \vartheta' = 0 . \end{aligned} \tag{19}$$

Le prime due delle (7-16) si modificano, perchè essendo del secondo ordine occorre in esse aggiungere il termine relativo ai due momenti di incastro, mentre la terza, che è del quarto ordine, resta inalterata. Si

ha così

$$\begin{aligned} EI_{\eta} u'' + F(u + \vartheta y_G) - EI_{\eta} (u'')_0 &= 0 \\ EI_{\xi} v'' + F(v - \vartheta x_G) - EI_{\xi} (v'')_0 &= 0 \\ C_2 \vartheta'' - \left(C_1 - F \frac{I_C}{A} \right) \vartheta'' + F u'' y_G - F v'' x_G &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Una soluzione che soddisfa le (7-19) è

$$\begin{aligned} u &= A_x \left(1 - \cos 2 \frac{n \pi z}{l} \right) \\ v &= A_y \left(1 - \cos 2 \frac{n \pi z}{l} \right) \\ \vartheta &= A_{\vartheta} \left(1 - \cos 2 \frac{n \pi z}{l} \right); \end{aligned} \quad (o)$$

perchè siano soddisfatte le (7-20), con soluzione nulla, deve essere

$$\begin{vmatrix} F - EI_{\eta} 4 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} & 0 & F y_G \\ 0 & F - EI_{\xi} 4 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} & -F x_G \\ F y_G & -F x_G & \frac{I_C}{A} \left[F - \frac{A}{I_C} \left(C_1 + 4 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} C_2 \right) \right] \end{vmatrix} = 0 \quad (p)$$

Il determinante (p) è identico a quello (n), purchè nelle notazioni (i) si ponga $4n^2$ al posto di n^2 . L'equazione che porge F è perciò ancora la (7-18), ed il procedimento di risoluzione lo stesso. In questo caso le (o) non esauriscono tutte le possibili soluzioni, perchè esse non sono tutte le soluzioni delle (7-20) ridotte a variabili separate per $x_G = y_G = 0$. La più bassa delle soluzioni della (p) è però F_c , perchè essa tende, per x_G ed y_G tendenti a zero, al minore dei valori critici euleriani relativi alla flessione e alla torsione non coesistenti.

3. Il caso della sezione con un asse di simmetria.

Se la sezione ha un asse x di simmetria, è $y_G = 0$ (fig. 7-5), e quindi la (n) si scrive

$$\begin{vmatrix} F - F_x & -F x_G \\ -F x_G & \frac{I_C}{A} (F - F_\theta) \end{vmatrix} = 0. \quad (q)$$

Dalla (q) si trae

$$\frac{I_C}{A} (F - F_x) (F - F_\theta) - F^2 x_G^2 = 0$$

e ancora

$$f(F) = \frac{I_G}{I_C} F^2 - (F_x + F_\theta) F + F_x F_\theta = 0. \quad (21)$$

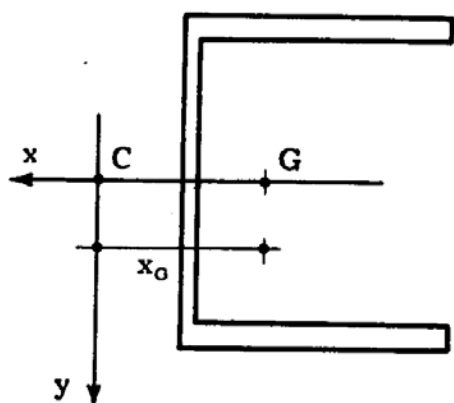


FIG. 7-5

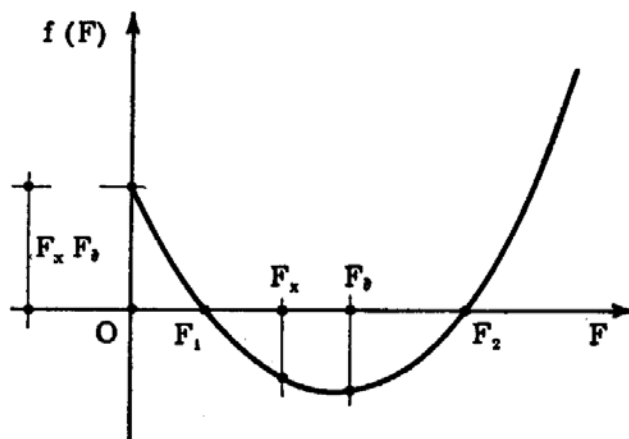


FIG. 7-6

La (7-21) è quadratica in F , e fornisce due radici F_1 , F_2 tali che (fig. 7-6)

$$F_1 < F_x < F_\theta < F_2;$$

infatti è

$$f(0) = F_x F_\theta > 0$$

$$f(F_x) = F_x^2 \left(\frac{I_G}{I_C} - 1 \right) < 0$$

$$f(F_\theta) = F_\theta^2 \left(\frac{I_G}{I_C} - 1 \right) < 0.$$

Nella fig. 7-7, riportata dal *Timoshenko*, sono disegnate le curve F_1/F_x ed F_2/F_x in funzione del rapporto F_0/F_x , e per diversi valori del

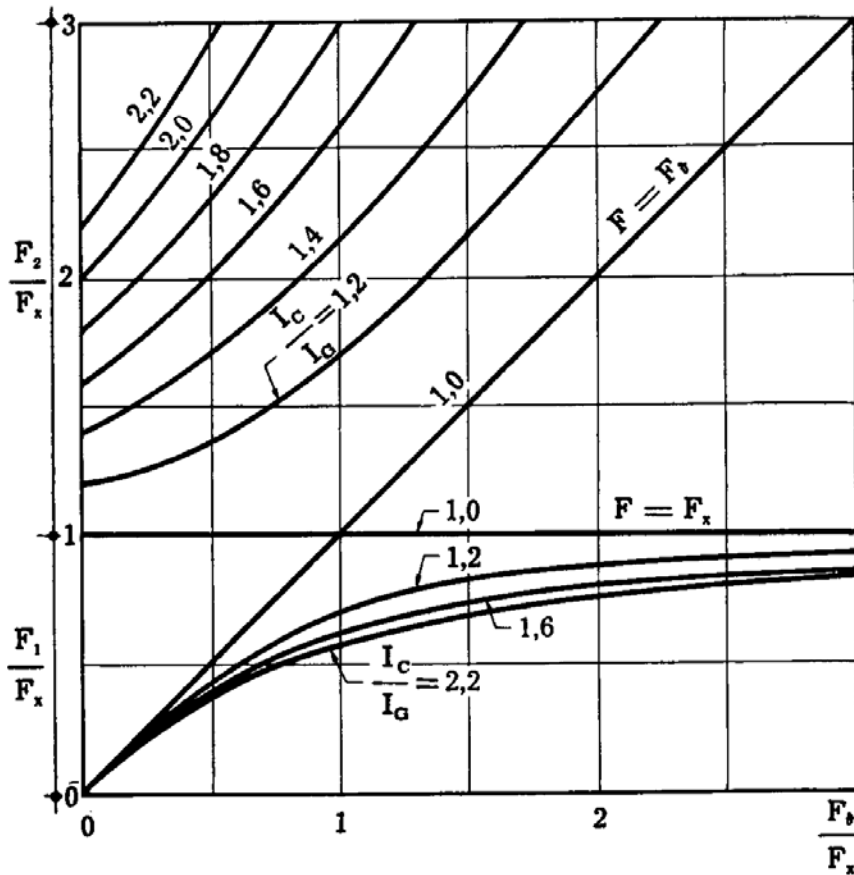


FIG. 7-7

rapporto I_C/I_G . Si osserva che per F_0 piccolo rispetto ad F_x , F_1 è molto vicino ad F_0 ; invece per F_0 grande rispetto ad F_x , F_1 si approssima ad F_x .

4. Il metodo energetico.

Si consideri una trave di sezione comunque variabile, in cui però i baricentri G ed i centri di taglio C siano situati lungo due rette parallele, in genere distinte; la trave sia caricata da forze assiali agenti lungo la retta dei baricentri, tali che nella sezione all'ascissa z generica sia $-Fn(z)$ lo sforzo normale. Le equazioni che reggono il fenomeno sono ancora del tipo (7-16), in cui le prime due sono però (2-1) del terzo ordine (Cap. VIII, § 1, form. a):

$$(EI_\eta u'')' + Fn u' - Fy_G n \vartheta' = 0$$

$$(EI_\xi v'')' + Fn v' + Fx_G n \vartheta' = 0 \quad (22)$$

$$C_2 \vartheta^{iv} + C'_2 \vartheta^{''''} - \left(C_1 - Fn \frac{I_C}{A} \right) \vartheta'' - \left(C_1 - Fn \frac{I_C}{A} \right)' \vartheta' - \\ - F (n u')' y_G + F (n v')' x_G = 0 .$$

La soluzione delle (7-22) è molto laboriosa, e può convenire la ricerca di un valore approssimato per eccesso del carico critico, attraverso il metodo energetico.

Se le condizioni di vincolo sono di appoggio comune e torsionale ($u = u'' = 0, v = v'' = 0, \vartheta = \vartheta'' = 0$) si può porre

$$w = 0 \\ u_C = \sum u_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} \\ v_C = \sum v_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} \\ \vartheta = \sum \vartheta_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l}$$

dove u_C e v_C sono gli spostamenti relativi all'asse dei centri di taglio. E' così

$$u = u_C - y \vartheta \\ v = v_C + x \vartheta .$$

La componente del secondo ordine $\varepsilon_z^{(2)}$ è fornita da

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]$$

e quindi risulta

$$L_2^* = \int_V \sigma_z \varepsilon_z^{(2)} dV = - \frac{F \pi^2}{2 l^2} \int_V \frac{n(z)}{A} \left[\left(\sum n u_n \cos \frac{n \pi z}{l} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\sum n v_n \cos \frac{n \pi z}{l} \right)^2 + (x^2 + y^2) \left(\sum n \vartheta_n \cos \frac{n \pi z}{l} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2 \sum n \vartheta_n \cos \frac{n \pi z}{l} \left(y \sum n u_n \cos \frac{n \pi z}{l} - x \sum n v_n \cos \frac{n \pi z}{l} \right) \right] dV . \quad (23)$$

D'altro canto è pure

$$\begin{aligned} 2W &= \int_0^l EI_\eta (u''_c)^2 dz + \int_0^l EI_\xi (v''_c)^2 dz + \int_0^l M_t \vartheta' dz = \\ &= \int_0^l EI_\eta (u''_c)^2 dz + \int_0^l EI_\xi (v''_c)^2 dz + \int_0^l C_1 \vartheta'^2 dz - \int_0^l C_2 \vartheta' \vartheta''' dz \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi^4}{2l^4} \int_0^l EI_y \left(\sum n^2 u_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \right)^2 dz + \frac{\pi^4}{2l^4} \int_0^l EI_x \left(\sum n^2 v_n \operatorname{sen} \frac{n\pi z}{l} \right)^2 dz + \\ &+ \frac{\pi^2}{2l^2} \int_0^l C_1 \left(\sum n \vartheta_n \cos \frac{n\pi z}{l} \right)^2 dz + \\ &+ \frac{\pi^4}{2l^4} \int_0^l C_2 \sum n \vartheta_n \cos \frac{n\pi z}{l} \sum n^3 \vartheta_n \cos \frac{n\pi z}{l} dz . \end{aligned}$$

L'espressione $\delta_2 E = L_2^* + W$ è quadratica omogenea nelle $u_n v_n \vartheta_n$; le relazioni

$$\frac{\partial \delta_2 E}{\partial u_n} = 0$$

$$\frac{\partial \delta_2 E}{\partial v_n} = 0$$

$$\frac{\partial \delta_2 E}{\partial \vartheta_n} = 0$$

costituiscono un sistema di equazioni omogenee nelle m incognite $u_n v_n \vartheta_n$, che ammette soluzione diversa dalla banale se, e solo se, risulta

$$\Delta = 0 .$$

Questa a sua volta è un'equazione di grado m nel parametro F , che fornisce, con la più piccola radice, il valore del carico critico. E' appena necessario avvertire che, aumentando il numero delle incognite $u_n v_n \vartheta_n$, migliora l'approssimazione; gli integrali (7-23) e (7-24) si possono ottenere per integrazione numerica suddividendo la trave in tratti.

Per trave di sezione costante caricata da una sola forza F all'estremo risulta

$$L_2^* = - \frac{F\pi^2}{4\ell} \left(\sum n^2 u_n^2 + \sum n^2 v_n^2 + \frac{I_C}{A} \sum n^2 \vartheta_n^2 - \right. \\ \left. - 2y_G \sum n^2 u_n \vartheta_n + 2x_G \sum n^2 v_n \vartheta_n \right) \\ W = \pi^4 \frac{EI_\eta}{4\ell^3} \sum u_n^2 n^4 + \pi^4 \frac{EI_\xi}{4\ell^3} \sum v_n^2 n^4 + \\ + \pi^2 \frac{C_1}{4\ell} \sum \vartheta_n^2 n^2 + \pi^4 \frac{C_2}{4\ell^3} \sum \vartheta_n^2 n^4 .$$

Limitandosi ai soli parametri u_1, v_1, ϑ_1 , le equazioni di equilibrio variato sono

$$\frac{\partial \delta_2 E}{\partial u_1} = - \frac{F\pi^2}{4\ell} (2u_1 - 2y_G \vartheta_1) + \frac{\pi^4 EI_\eta}{2\ell^3} u_1 = 0 \\ \frac{\partial \delta_2 E}{\partial v_1} = - \frac{F\pi^2}{4\ell} (2v_1 + 2x_G \vartheta_1) + \frac{\pi^4 EI_\xi}{2\ell^3} v_1 = 0 \\ \frac{\partial \delta_2 E}{\partial \vartheta_1} = - \frac{F\pi^2}{4\ell} \left(2 \frac{I_C}{A} \vartheta_1 - 2y_G u_1 + 2x_G v_1 \right) + \\ + \frac{\pi^2 C_1}{2\ell} \vartheta_1 + \frac{\pi^4 C_2}{2\ell^3} \vartheta_1 = 0$$

la cui condizione di compatibilità si scrive

$$\begin{vmatrix} -F + \pi^2 \frac{EI_\eta}{\ell^2} & 0 & Fy_G \\ 0 & -F + \pi^2 \frac{EI_\xi}{\ell^2} & -Fx_G \\ Fy_G & -Fx_G & -F \frac{I_C}{A} + C_1 + \pi^2 \frac{C_2}{\ell^2} \end{vmatrix} = 0 .$$

E' facile riconoscere la coincidenza di questa equazione con la (n).