

CAPITOLO IV

LA TRAVE CONTINUA ED I TELAI A NODI FISSI CARICATI NEI NODI

1. La trave appoggiata di sezione costante, soggetta ad una forza assiale di compressione, e ad una coppia in un estremo.

La trave AB, rettilinea, appoggiata ai due estremi, e di sezione costante, sia soggetta (fig. 4-1 a) ad una forza F di compressione, e ad una coppia  $\mathcal{M}_B$  nell'estremo B.

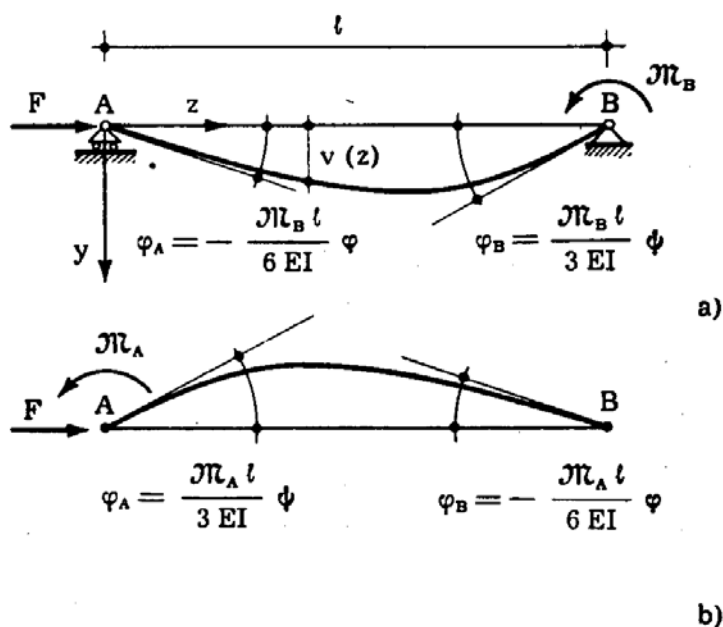


FIG. 4-1

Poichè il momento è fornito da

$$M = F v + \frac{\mathcal{M}_B}{l} z$$

l'equazione della trave è

$$EI v'' = - F v - \frac{\mathcal{M}_B}{l} z$$

che si scrive, con la solita posizione  $k^2 = F/EI$ ,

$$v'' + k^2 v = - \frac{\mathcal{M}_B}{EI \ell} z. \quad (a)$$

L'integrale generale è

$$v = A \operatorname{sen} kz + B \cos kz - \frac{\mathcal{M}_B}{k^2 EI \ell} z$$

o anche

$$v = A \operatorname{sen} kz + B \cos kz - \frac{\mathcal{M}_B}{F \ell} z.$$

Le condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} v(0) &= B = 0 \\ v''(0) &= -B k^2 = 0 \\ v(\ell) &= A \operatorname{sen} k\ell + B \cos k\ell - \frac{\mathcal{M}_B}{F} = 0 \\ v''(\ell) &= -A k^2 \operatorname{sen} k\ell - B k^2 \cos k\ell = -\frac{\mathcal{M}_B}{EI} \end{aligned}$$

sono soddisfatte per  $B = 0$ , e

$$A = \frac{\mathcal{M}_B}{F \operatorname{sen} k\ell}.$$

Si ha perciò

$$v = \frac{\mathcal{M}_B}{F} \left( \frac{\operatorname{sen} kz}{\operatorname{sen} k\ell} - \frac{z}{\ell} \right). \quad (b)$$

Si osserva che, per  $k\ell = n\pi$ , è  $v = \infty$ .

Dalla (b) si ottiene

$$v' = \frac{\mathcal{M}_B}{F} \left( \frac{k \cos kz}{\operatorname{sen} k\ell} - \frac{1}{\ell} \right)$$

e quindi

$$\varphi_A = - (v')_{z=0} = - \frac{\mathcal{M}_B}{F} \left( \frac{k}{\text{sen } kl} - \frac{1}{l} \right)$$

$$\varphi_B = - (v')_{z=l} = \frac{\mathcal{M}_B}{F} \left( \frac{1}{l} - \frac{k}{\text{tg } kl} \right).$$

Si può anche scrivere

$$\varphi_A = - \frac{\mathcal{M}_B l}{6 EI} \frac{6 EI}{F l} \left( \frac{k}{\text{sen } kl} - \frac{1}{l} \right)$$

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{M}_B l}{3 EI} \frac{3 EI}{F l} \left( \frac{1}{l} - \frac{k}{\text{tg } kl} \right).$$
(c)

Le (c) si traducono nelle

$$\varphi_A = - \frac{\mathcal{M}_B l}{6 EI} \frac{6 EI k}{F l} \left( \frac{1}{\text{sen } kl} - \frac{1}{kl} \right) = - \frac{\mathcal{M}_B l}{6 EI} \frac{6}{kl} \left( \frac{1}{\text{sen } kl} - \frac{1}{kl} \right)$$

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{M}_B l}{3 EI} \frac{3 EI k}{F l} \left( \frac{1}{kl} - \frac{1}{\text{tg } kl} \right) = \frac{\mathcal{M}_B l}{3 EI} \frac{3}{kl} \left( \frac{1}{kl} - \frac{1}{\text{tg } kl} \right).$$

Con la posizione

$$2 \mathbf{u} = kl = l \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (1)$$

si ottiene infine

$$\varphi_A = - \frac{\mathcal{M}_B l}{6 EI} \frac{3}{\mathbf{u}} \left( \frac{1}{\text{sen } 2\mathbf{u}} - \frac{1}{2\mathbf{u}} \right)$$

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{M}_B l}{3 EI} \frac{3}{2\mathbf{u}} \left( \frac{1}{2\mathbf{u}} - \frac{1}{\text{tg } 2\mathbf{u}} \right).$$
(d)

L'ulteriore posizione

$$\varphi(\mathbf{u}) = \frac{3}{\mathbf{u}} \left( \frac{1}{\text{sen } 2\mathbf{u}} - \frac{1}{2\mathbf{u}} \right)$$

$$\psi(\mathbf{u}) = \frac{3}{2\mathbf{u}} \left( \frac{1}{2\mathbf{u}} - \frac{1}{\text{tg } 2\mathbf{u}} \right)$$
(2)

consente di scrivere

$$\begin{aligned}\varphi_A &= -\frac{\mathcal{M}_B \ell}{6 EI} \varphi \\ \varphi_B &= \frac{\mathcal{M}_B \ell}{3 EI} \psi.\end{aligned}\tag{3}$$

Una coppia  $\mathcal{M}_A$  applicata in A fornisce invece (fig. 4-1 b)

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \frac{\mathcal{M}_A \ell}{3 EI} \psi \\ \varphi_B &= -\frac{\mathcal{M}_A \ell}{6 EI} \varphi.\end{aligned}\tag{4}$$

Se la forza  $F$  non varia, vale il principio di sovrapposizione nei riguardi delle forze trasversali (intendendo come tali le sollecitazioni non assiali); infatti l'equazione si presenta sotto la forma

$$v'' + k^2 v = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z),$$

dove  $f_i(z)$  è il termine relativo all' $i$ -esima forza trasversale, e il suo integrale generale è

$$v = A \sin kz + B \cos kz + F_1(z) + F_2(z) + \dots + F_n(z)$$

dove  $F_i(z)$  è l'integrale particolare relativo all' $i$ -esima forza.

Le costanti  $A$  e  $B$  sono d'altro canto somma di quelle che si avrebbero se le sollecitazioni trasversali agissero una alla volta, per la linearità del sistema di equazioni che le fornisce.

Si può quindi dire che, date due coppie  $\mathcal{M}_A$  ed  $\mathcal{M}_B$  agli estremi A e B della trave, si ha

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \frac{\mathcal{M}_A \ell}{3 EI} \psi - \frac{\mathcal{M}_B \ell}{6 EI} \varphi \\ \varphi_B &= -\frac{\mathcal{M}_A \ell}{6 EI} \varphi + \frac{\mathcal{M}_B \ell}{3 EI} \psi.\end{aligned}\tag{5}$$

Le funzioni  $\varphi(u)$  e  $\psi(u)$  sono riportate nelle tabelle in appendice al testo; esse, più estese di quelle del *Timoshenko*, sono state ricavate dal

*Maceri* con l'aiuto del calcolatore elettronico della facoltà d'Ingegneria Napoletana.

## 2. La trave vincolata con incastri cedevoli.

La trave della fig. 4-2 a è ad asse rettilineo, e di sezione costante; i suoi estremi A e B sono vincolati ad incastri angolarmente (ed ela-

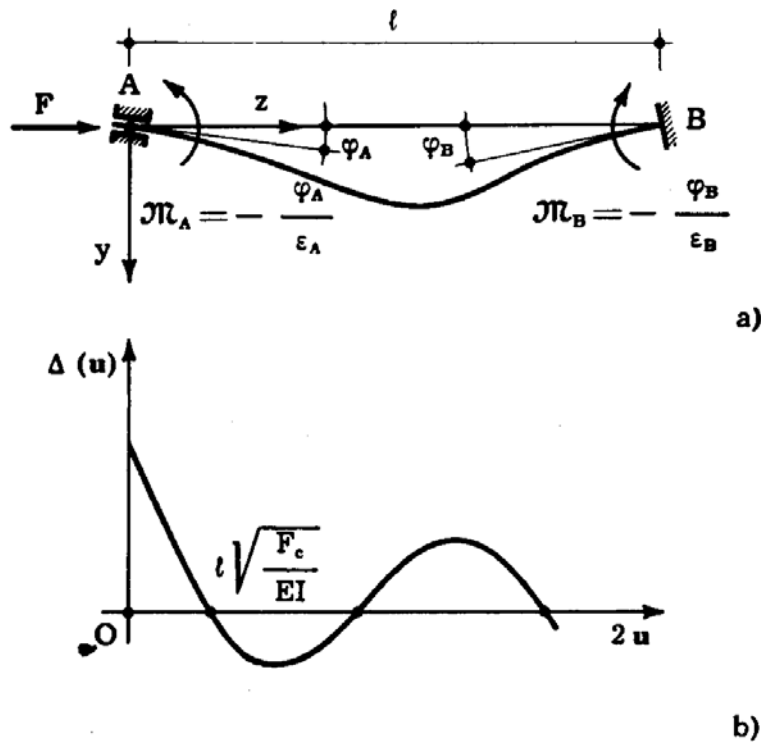


FIG. 4-2

sticamente) cedevoli, con cedibilità elastiche  $\varepsilon_A$  ed  $\varepsilon_B$ :

$$\mathcal{M}_A = -\frac{\varphi_A}{\varepsilon_A}$$

$$\mathcal{M}_B = -\frac{\varphi_B}{\varepsilon_B}.$$

Se esiste una deformata variata, le equazioni dell'equilibrio variato si traggono dalle (4-5):

$$-\varepsilon_A \mathcal{M}_A = \frac{\mathcal{M}_A l}{3EI} \psi - \frac{\mathcal{M}_B l}{6EI} \varphi$$

$$-\varepsilon_B \mathcal{M}_B = -\frac{\mathcal{M}_A l}{6EI} \varphi + \frac{\mathcal{M}_B l}{3EI} \psi.$$

(e)

Il sistema (e) è algebrico lineare omogeneo nelle  $\mathcal{M}_A$  ed  $\mathcal{M}_B$ ; perchè ammetta soluzione non nulla è condizione necessaria e sufficiente che si verifichi

$$\Delta(\mathbf{u}) = \begin{vmatrix} \alpha \psi + \varepsilon_A & -\frac{\alpha}{2} \varphi \\ -\frac{\alpha}{2} \varphi & \alpha \psi + \varepsilon_B \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{f})$$

dove si è posto

$$\alpha = \frac{l}{3EI} \quad (6)$$

La (f) si scrive pure

$$\Delta(\mathbf{u}) = \alpha^2 \psi^2 - \frac{\alpha^2}{4} \varphi^2 + (\varepsilon_A + \varepsilon_B) \alpha \psi + \varepsilon_A \varepsilon_B = 0 \quad (7)$$

La (4-7) va risolta utilizzando le tabelle in appendice; dai valori  $\mathbf{u}$  che la soddisfano si traggono i  $k$  e quindi gli  $F_a$ ; il più basso di questi è  $F_c$ . Un metodo di risoluzione può essere quello di tracciare la curva  $\Delta(\mathbf{u})$ , e considerare i punti ove essa interseca l'asse delle  $\mathbf{u}$  (fig. 4-2 b).

### 3. La trave con incastro ed appoggio.

La trave appoggiata in A, e incastrata in B, (fig. 4-3) sia soggetta

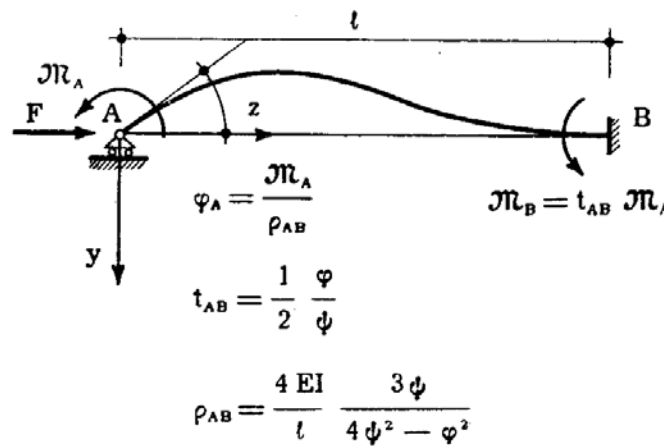


FIG. 4-3

alla forza  $F$  di compressione, e ad una coppia  $\mathcal{M}_A$  in A. Le (4-5) porgono

$$\begin{aligned}\varphi_A &= \frac{\mathcal{M}_A l}{3 EI} \psi - \frac{\mathcal{M}_B l}{6 EI} \varphi \\ 0 &= -\frac{\mathcal{M}_A l}{6 EI} \varphi + \frac{\mathcal{M}_B l}{3 EI} \psi.\end{aligned}\tag{g}$$

La seconda delle (f) porge

$$\mathcal{M}_B = \frac{\mathcal{M}_A}{2} \frac{\varphi}{\psi};\tag{h}$$

la prima

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{M}_A l}{4 EI} \frac{4\psi^2 - \varphi^2}{3\psi}.\tag{i}$$

Con le posizioni

$$t_{AB} = \frac{1}{2} \frac{\varphi}{\psi} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{B}}\tag{8}$$

$$\rho_{AB} = \frac{4 EI}{l} \frac{3\psi}{4\psi^2 - \varphi^2} = \frac{4 EI}{l} \bar{\mathbf{A}}\tag{9}$$

le (h) ed (i) si scrivono

$$\mathcal{M}_B = t_{AB} \mathcal{M}_A\tag{10}$$

$$\varphi_A = \frac{\mathcal{M}_A}{\rho_{AB}}.\tag{11}$$

Le (8) e (9) rappresentano il coefficiente di trasmissione e la rigidità secondo Cross, modificate per l'azione della forza F.

#### 4. La trave soggetta a cedimenti verticali anelastici dei vincoli.

La trave di sezione costante con appoggio in A ed incastro in B della fig. 4-4 presenti cedimenti vincolari anelastici verticali dei vincoli, la cui differenza sia  $\delta$ , positiva se B cede più di A.

Dalla relazione

$$\varphi_B = -\frac{\delta}{l} + \frac{\mathcal{M}_B l}{3 EI} \psi = 0$$

si trae

$$\mathcal{M}_B = \frac{3 EI \delta}{l^2} \frac{1}{\psi} \quad (12)$$

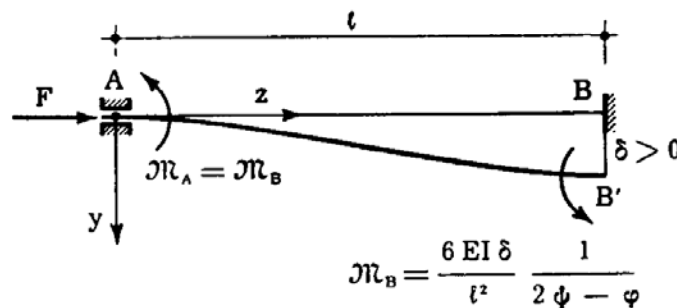


FIG. 4-4

Nella trave con due incastri invece si ha (fig. 4-5)

$$\varphi_A = -\frac{\delta}{l} + \frac{\mathcal{M}_A l}{3 EI} \psi - \frac{\mathcal{M}_B l}{6 EI} \varphi = 0$$

$$\varphi_B = -\frac{\delta}{l} - \frac{\mathcal{M}_A l}{6 EI} \varphi + \frac{\mathcal{M}_B l}{3 EI} \psi = 0$$

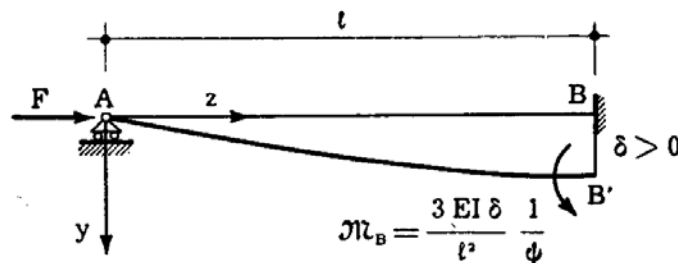


FIG. 4-5

da cui

$$\mathcal{M}_A = \mathcal{M}_B = \frac{6 EI \delta}{l^2} \frac{1}{2\psi - \varphi} = \frac{6 EI \delta}{l^2} \bar{C} \quad (13)$$

### 5. Il caso della forza di trazione.

Se la forza  $F$  è di trazione ( $F < 0$ ) invece che di compressione, la (a) si scrive

$$v'' - k^2 v = -\frac{\mathcal{M}_B}{EI l} z$$



il cui integrale generale si trae da quello della (a) semplicemente cambiando le funzioni trigonometriche con le omonime iperboliche:

$$v = A \sinh kz + B \cosh kz - \frac{\mathcal{M}_B}{k^2 EI \ell} z .$$

Poichè è, nel caso in esame,

$$k^2 = - \frac{F}{EI} ,$$

risulta pure

$$v = A \sinh kz + B \cosh kz + \frac{\mathcal{M}_B}{F \ell} z .$$

Le condizioni ai limiti porgono

$$v(0) = B = 0$$

$$v''(0) = B k^2 = 0$$

$$v(\ell) = A \sinh k\ell + B \cosh k\ell + \frac{\mathcal{M}_B}{F} = 0$$

$$v''(\ell) = A k^2 \sinh k\ell + B k^2 \cosh k\ell = - \frac{\mathcal{M}_B}{EI}$$

da cui  $B=0$ , e

$$A = - \frac{\mathcal{M}_B}{F \sinh k\ell} ;$$

si ha perciò

$$v = - \frac{\mathcal{M}_B}{F} \left( \frac{\sinh kz}{\sinh k\ell} - \frac{z}{\ell} \right) .$$

Con la posizione

$$2u = k\ell = \ell \sqrt{- \frac{F}{EI}}$$

si ottiene

$$\varphi_A = - \frac{\mathcal{M}_B \ell}{6 EI} \frac{3}{u} \left( \frac{1}{2u} - \frac{1}{\sinh 2u} \right) \quad (1)$$

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{M}_B \ell}{3 EI} \frac{3}{2u} \left( \frac{1}{\operatorname{tgh} 2u} - \frac{1}{2u} \right).$$

Se si pone

$$\Phi(u) = \frac{3}{u} \left( \frac{1}{2u} - \frac{1}{\sinh 2u} \right) \quad (14)$$

$$\Psi(u) = \frac{3}{2u} \left( \frac{1}{\operatorname{tgh} 2u} - \frac{1}{2u} \right)$$

le (1) si scrivono

$$\varphi_A = - \frac{\mathcal{M}_B \ell}{6 EI} \Phi \quad (15)$$

$$\varphi_B = \frac{\mathcal{M}_B \ell}{3 EI} \Psi.$$

Poichè le (4-15) sono formalmente identiche alle (4-3), in presenza di una forza assiale di trazione valgono i risultati già trovati, purchè si sostituiscano  $\Phi$  e  $\Psi$  alle  $\varphi$  e  $\psi$ .

Nelle tabelle in appendice al testo sono riportati, come già detto, in funzione di  $u$ , i valori numerici delle funzioni  $\varphi$  e  $\psi$ , nonchè quelli delle

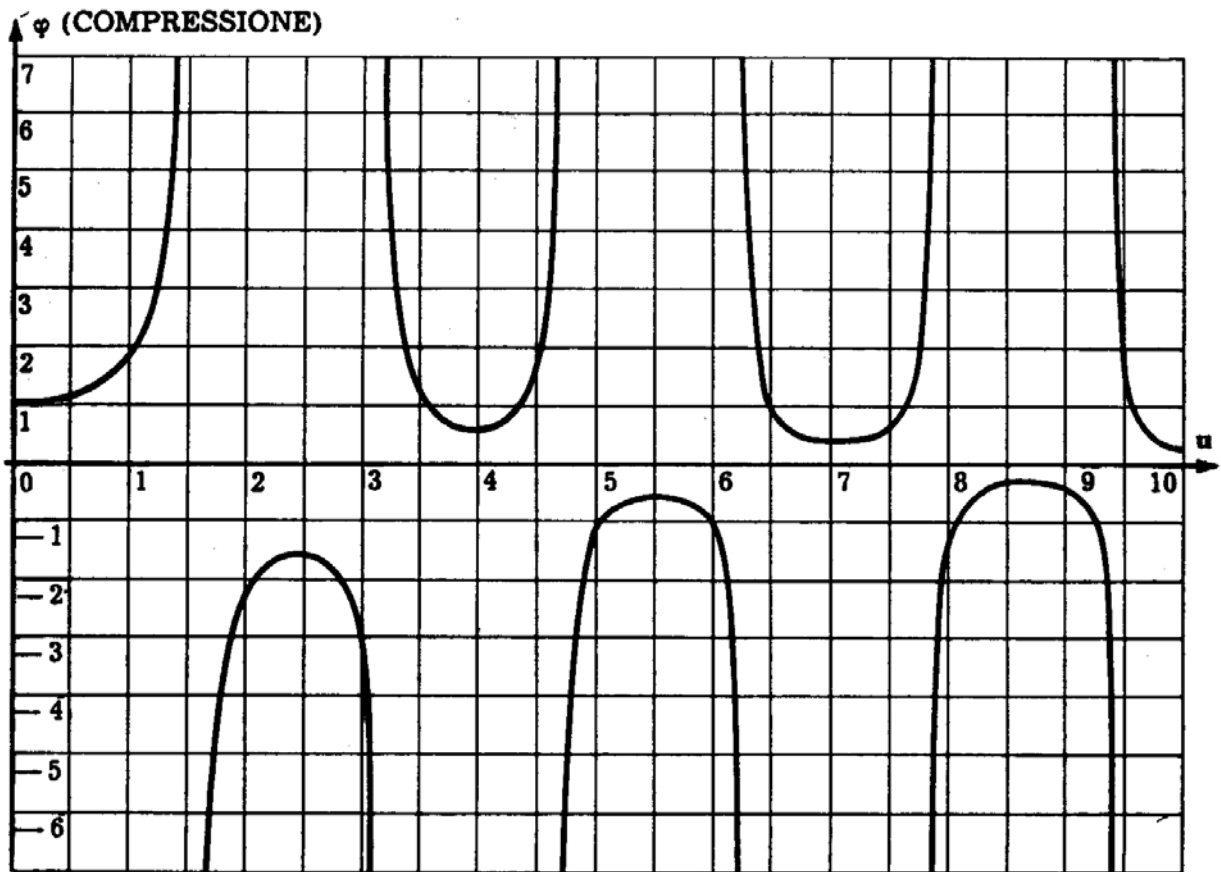
$$\bar{\mathbf{A}} = \frac{\rho}{\frac{4 EI}{\ell}} = \frac{3 \psi}{4 \psi^2 - \varphi^2}$$

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = \frac{\varphi}{\psi}$$

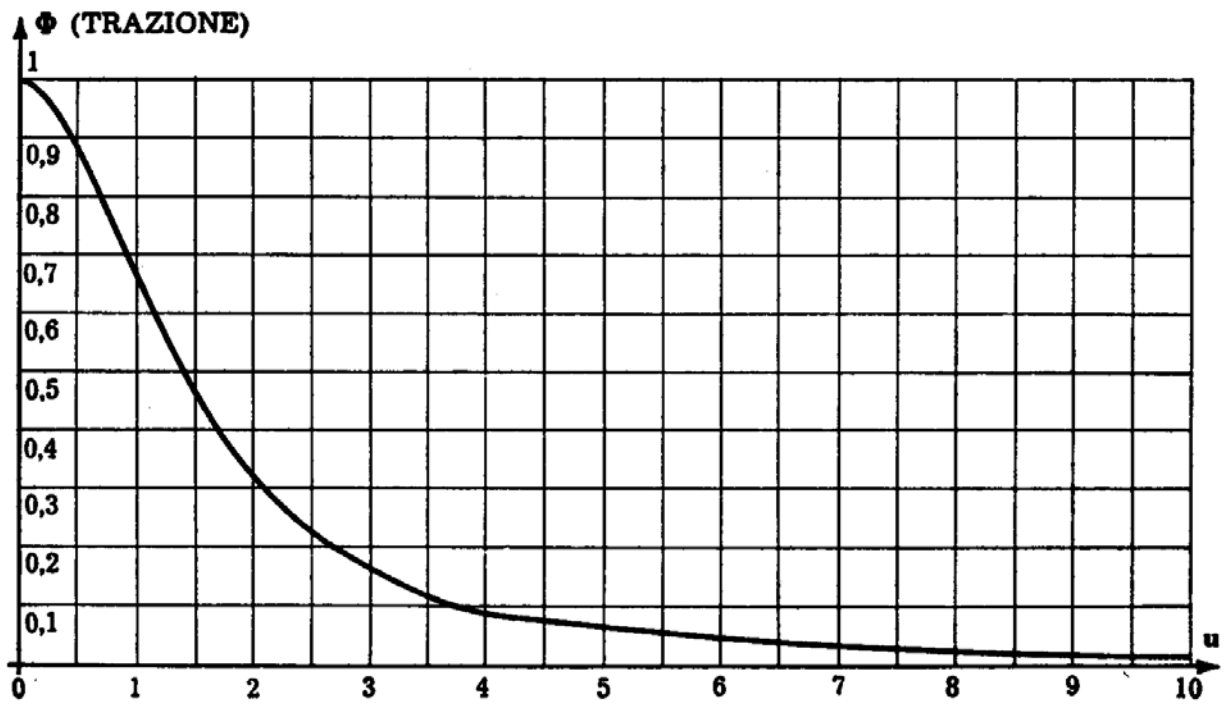
$$\bar{\mathbf{C}} = \frac{\rho'}{\frac{6 EI}{\ell^2}} = \frac{1}{2 \psi - \varphi}$$

(con  $\rho$  si è indicata la rigidità alla rotazione, e cioè la coppia generata da una rotazione unitaria, e con  $\rho'$  la rigidità alla traslazione, e cioè la coppia generata da una traslazione unitaria); così pure sono riportati i valori corrispondenti a trazione  $\Phi, \Psi, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ .

Nelle figg. 4-6, 4-7, 4-8 e 4-9, sono riportati i grafici tratti dalle tabelle.

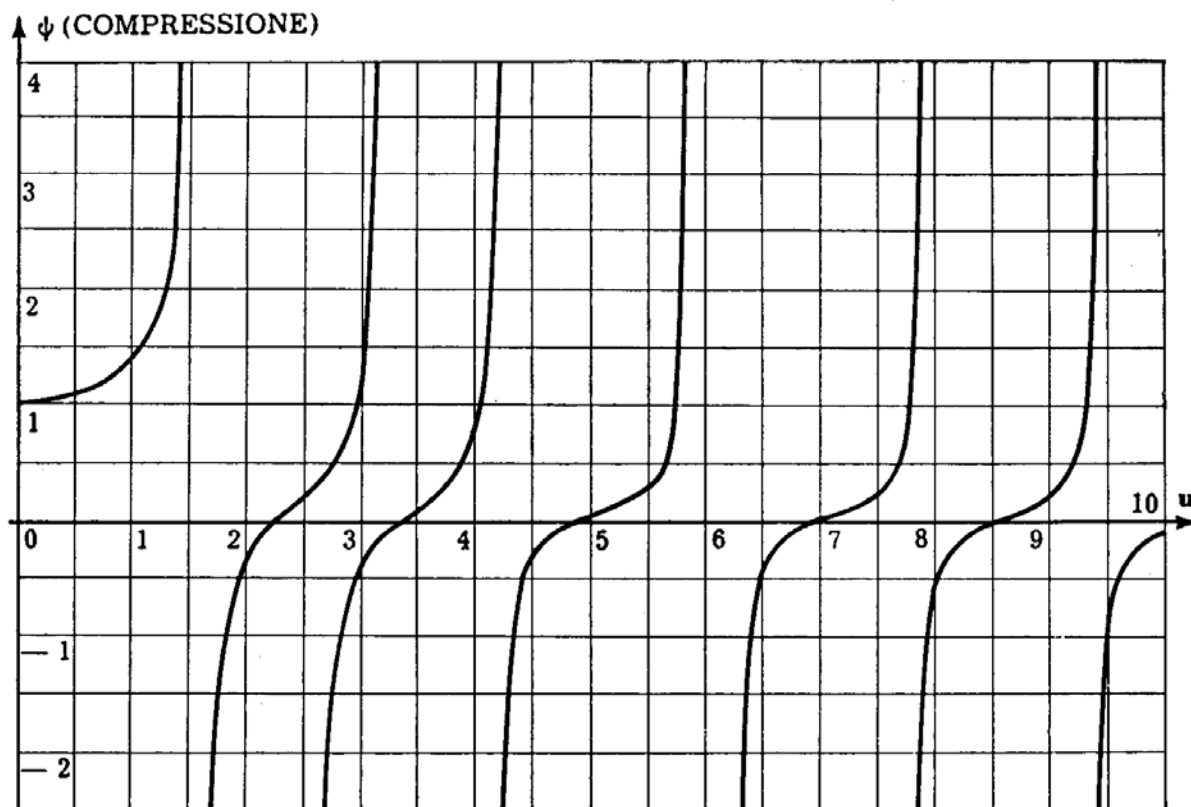


a)

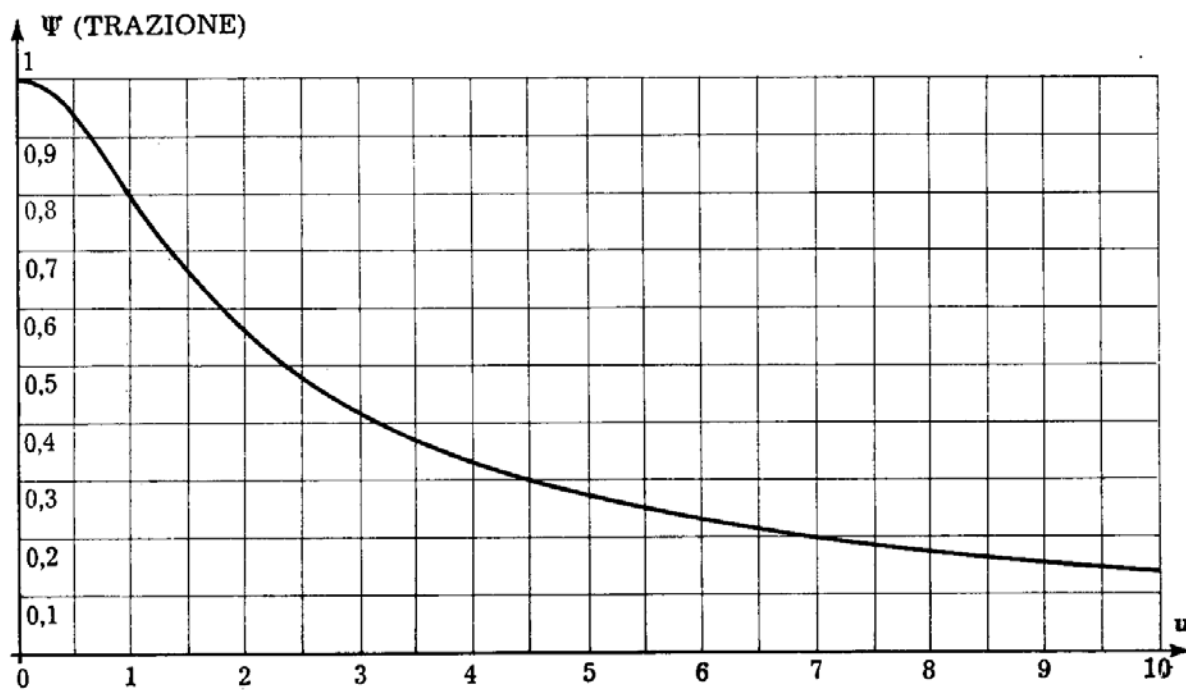


b)

FIG. 4-6 a, b

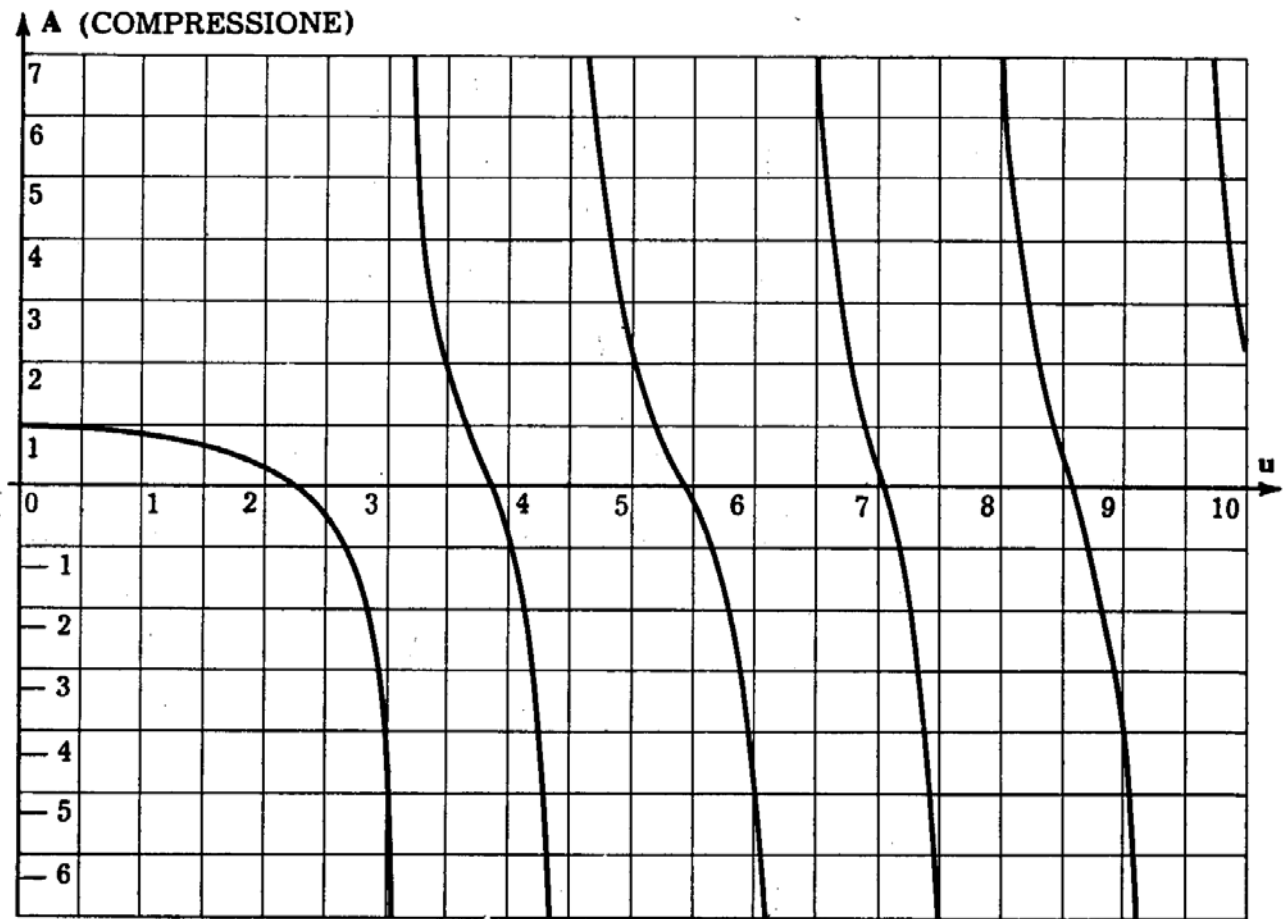


c)

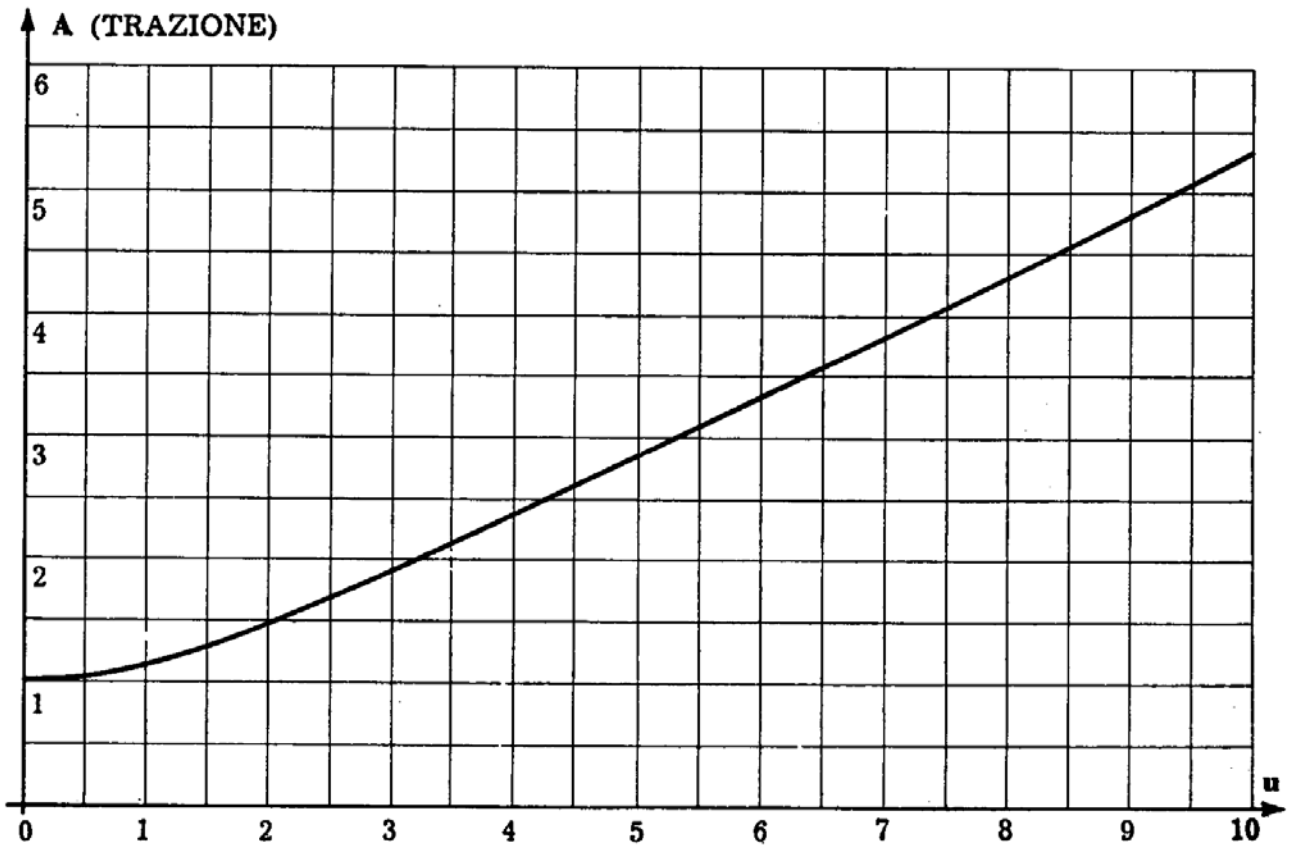


d)

FIG. 4-6 c, d

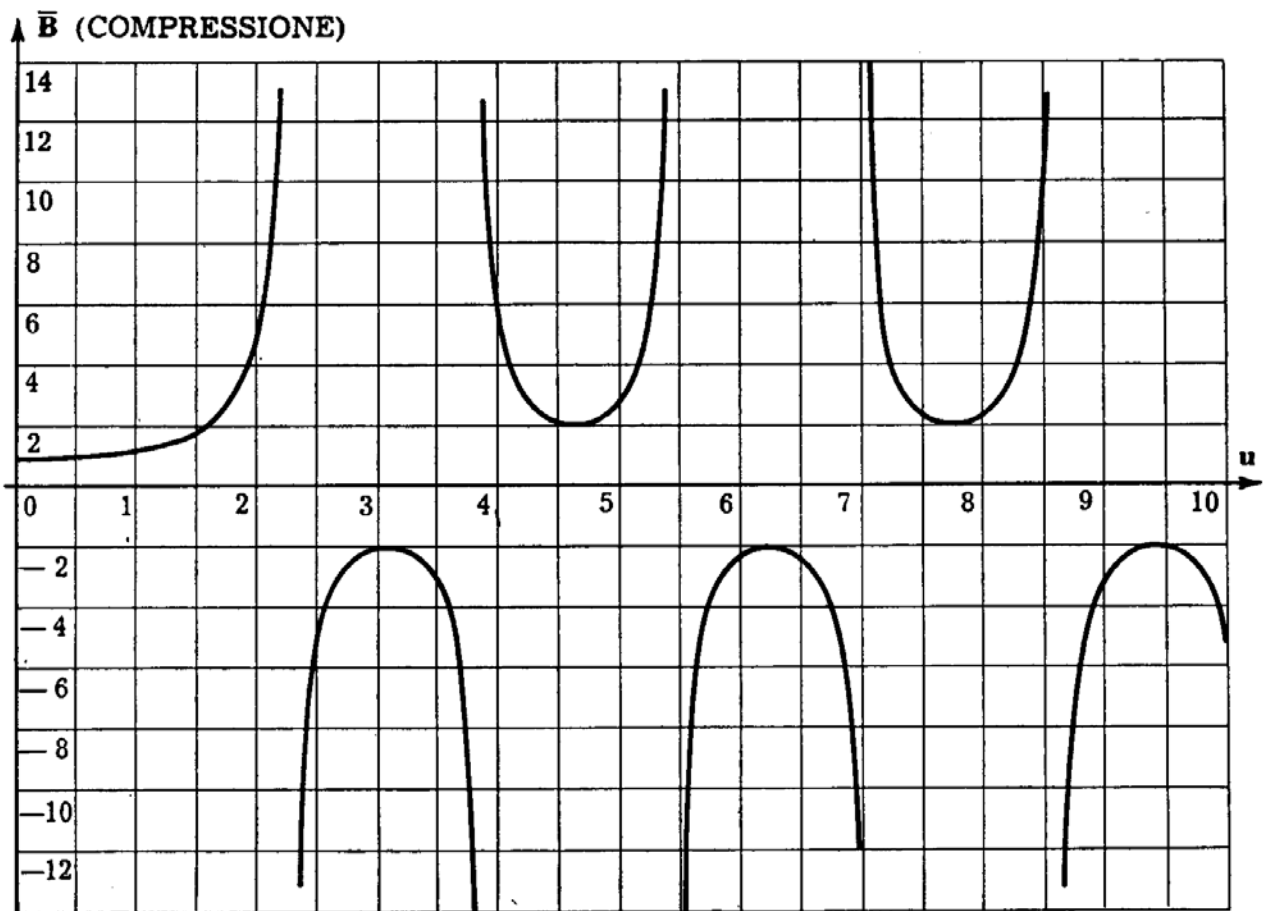


a)

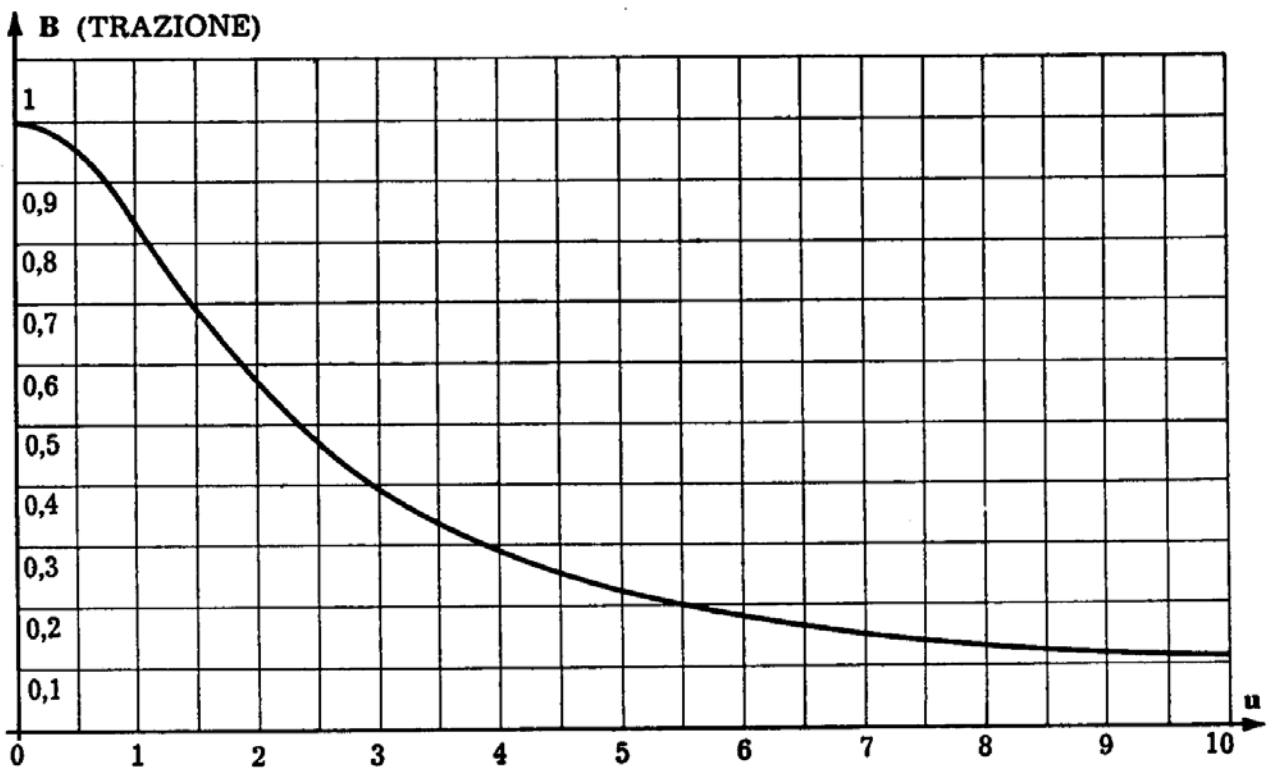


b)

FIG. 4-7

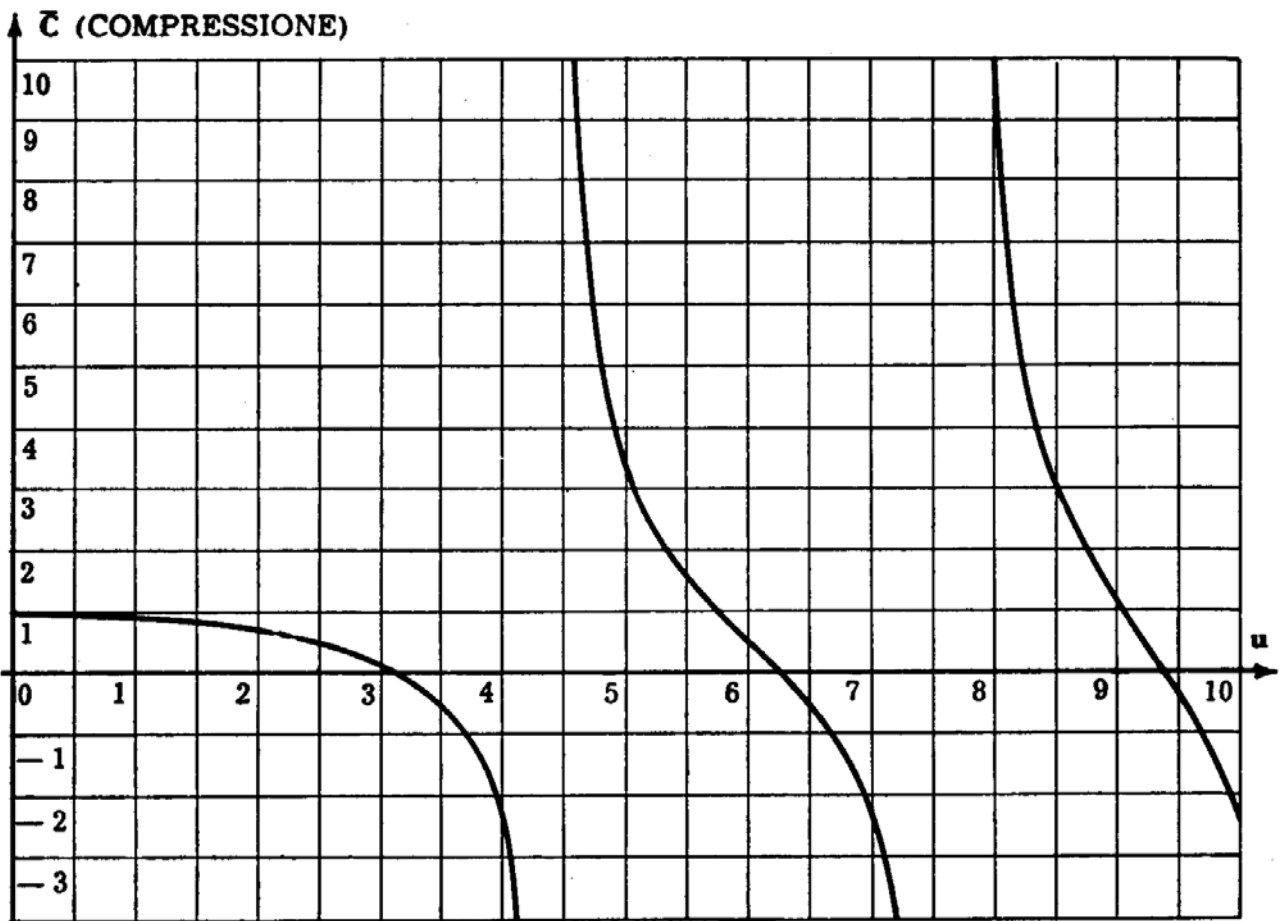


a)

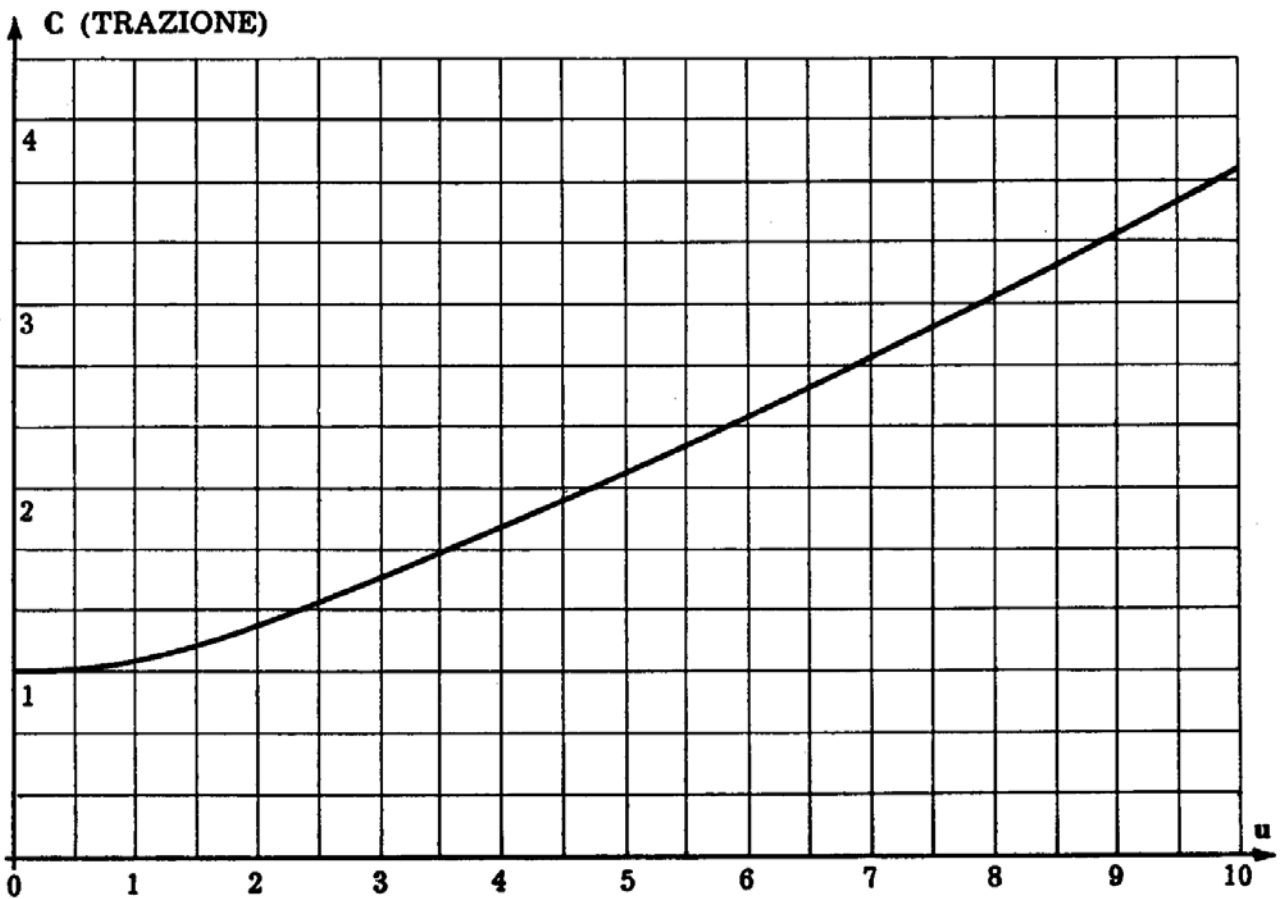


b)

FIG. 4-8



a)



b)

FIG. 4-9

Si osserva che, nel caso della compressione, il coefficiente di trasmissione  $t$  è pari ad  $1/2$  per  $2u=0$  ( $F=0$ ), aumenta con  $F$ , è pari ad  $\infty$  per  $2u=4,493$  ( $F$  coincidente con il carico critico  $F_c$  della trave con incastro ed appoggio), e cambia di segno per valori di  $F$  maggiori di  $F_c$ . La rigidità  $\rho$  è pari a  $4EI/l$  per  $2u=0$ , diminuisce con  $F$ , è nulla per  $2u=4,493$ , cambia di segno per valori di  $F$  maggiori di  $F_c$ .

Nel caso della trazione invece  $t$  diminuisce e  $\rho$  aumenta uniformemente con  $F$ .

### 6. La trave appoggiata soggetta a carichi assiali e trasversali.

Se sulla trave già studiata nel § 2-1 (fig. 2-1) agiscono anche dei carichi trasversali  $p(z)$ , come nella fig. 4-10, l'equazione (2-1) si modi-

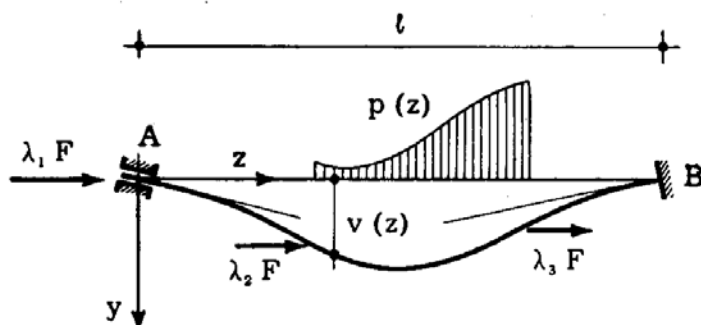


FIG. 4-10

fica nell'altra

$$(EI v''')' + F (n v')' = p(z) . \quad (16)$$

Infatti

$$M'' = F (n v')' - p(z)$$

e quindi

$$(EI v''')' = -M'' = -F (n v')' + p(z) .$$

Per  $p=0$ , si ritrova la (2-1); per  $F=0$ , la nota equazione delle travi inflesse. Se il carico assiale è una sola forza  $F$  in A e la sezione è costante, si ha

$$EI v^{IV} + F v'' = p . \quad (17)$$

Le condizioni ai limiti sono le (2-1).



Per trave appoggiata, si ponga

$$v = \sum v_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l}$$

$$p = \sum p_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} ;$$

la (4-17) porge

$$EI \sum \frac{n^4 \pi^4}{l^4} v_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} - F \sum \frac{n^2 \pi^2}{l^2} v_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} = \sum p_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l}$$

da cui

$$v_n = \frac{p_n l^4}{n^2 \pi^2 (EI n^2 \pi^2 - F l^2)} . \quad (18)$$

Dalla

$$v' = \sum v_n \frac{n \pi}{l} \cos \frac{n \pi z}{l}$$

si trae

$$\varphi_A = - \sum \frac{p_n l^3}{n \pi (EI n^2 \pi^2 - F l^2)}$$

$$\varphi_B = - \sum \frac{p_n l^3 \cos n \pi}{n \pi (EI n^2 \pi^2 - F l^2)} . \quad (19)$$

Il termine  $p_n$  è fornito, come è noto, da

$$p_n = \frac{2}{l} \int_0^l p \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} dz , \quad (20)$$

e per molte forme di carico è già tabellato; limitandosi ai primi tre o quattro termini delle (4-19) si ottiene già una soddisfacente approssimazione, tenendo anche conto del fatto che il procedimento è per sua natura approssimato, basato com'è su equazioni linearizzate.

### 7. La trave continua: il metodo della trave equivalente.

La trave continua caricata assialmente e trasversalmente si risolve nel modo più semplice, sfruttando il principio di sovrapposizione; e cioè

si scrivono le equazioni dei tre momenti, nelle quali sia gli angoli dovuti alle coppie di appoggio che quelli provocati dai carichi sono corretti per l'effetto dei carichi assiali.

Se la forza assiale è una sola, o anche se sono più d'una, ma applicate in corrispondenza degli appoggi, in modo che lo sforzo assiale sia

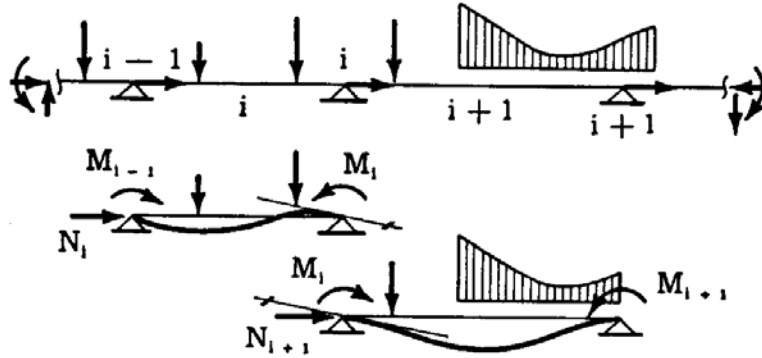


FIG. 4-11

costante lungo ogni campata, la generica equazione dei tre momenti si scrive (fig. 4-11)

$$M_{i-1} \frac{l_i}{6 E_i I_i} \varphi_i + M_i \left( \frac{l_i}{3 E_i I_i} \psi_i + \frac{l_{i+1}}{3 E_{i+1} I_{i+1}} \psi_{i+1} \right) +$$

$$+ M_{i+1} \frac{l_{i+1}}{6 E_{i+1} I_{i+1}} \varphi_{i+1} = \varphi_{i+1}^{os} - \varphi_i^{od} . \quad (21)$$

Nella (4-21) sono introdotti i momenti invece delle coppie — si avverte di ciò in relazione al segno — e gli angoli  $\varphi_{i+1}^{os}$  e  $\varphi_i^{od}$  sono quelli forniti dalle (4-19); le  $\varphi$  e  $\psi$  per ogni campata sono calcolate in relazione al corrispondente valore dello sforzo normale.

Come già fatto osservare, le (4-21) sono valide solo nell'ambito dei piccoli spostamenti, e quindi la loro portata è relativa. Esse sono importanti però nel calcolo del valore critico  $F_c$  di  $F$ , in assenza quindi di carichi trasversali; in questo caso infatti è rigoroso usare l'ipotesi di piccoli spostamenti. Le (4-21) risultano, se sono nulli i carichi trasversali, omogenee nelle incognite  $M$ ; perchè sia possibile una soluzione variata dell'equilibrio elastico, deve essere nullo il determinante dei coefficienti:

$$\Delta(\mathbf{u}_i) = 0 . \quad (22)$$

La (4-22) è un'equazione trascendente nelle  $\mathbf{u}_i$  e quindi in  $F$ ; la sua radice più bassa fornisce il valore  $F_c$ .

Il problema è così risolto ineccepibilmente sul piano teorico. Resta il fatto però che la soluzione della (4-22) è in genere piuttosto difficoltosa; occorre infatti tracciare la curva  $\Delta(F)$  — e questo è molto lungo se il determinante è di ordine elevato — individuando così i valori di  $F$  ove questa interseca l'asse delle  $F$  stesse, analogamente a quanto si fa per la trave di una campata con incastri cedevoli (fig. 4-2 b). Le difficoltà scompaiono se si fa uso di un calcolatore elettronico. In sua assenza si consigliano metodi approssimati, che si passa ad esprimere, a cominciare da quello della *trave equivalente*.

Si consideri la trave continua della fig. 4-12 a, solidale con i ritti; si trascurino le variazioni di lunghezza da sforzo assiale. Ogni campata si può considerare come incastrata elasticamente ai suoi estremi, con cedibilità funzioni dello sforzo assiale e calcolabili sulle parti residue della trave; se  $F_a$  è un valore di diramazione sulla trave continua, si verifica che  $F_a$  è anche valore di diramazione su ogni campata i cui estremi sono incastrati elasticamente con le cedibilità corrispondenti ad  $F_a$ . Si può operare per questa via, scegliendo una qualsiasi campata, per es. la CD, e ricercando quei valori di  $F$  per cui la suddetta condizione è verificata; se essa lo è per la CD (e per la CD quindi sono possibili configurazioni variate), lo deve essere anche per le altre, perchè la possibilità di configurazioni variate nell'elemento CD della trave deve essere accompagnata da analoga possibilità nelle altre campate.

Si parte quindi dalla CD; sia  $F'$  il suo carico critico nell'ipotesi di appoggi alle estremità. Come primo valore di tentativo si può scegliere proprio  $F'$  (o un valore ad esso prossimo).

Eliminata la CD (fig. 4-12 b), si caricano le due parti residue AC e DE con una forza assiale  $F'$ , e con due coppie unitarie in C e D. Operando alla Cross, secondo i coefficienti di trasmissione e le rigidità corrette per effetto di  $F'$ , si diffondono le due coppie in C e D rispettivamente lungo la parte AC e la parte DE, ottenendo i momenti agli estremi delle singole travi, e quindi le rotazioni in C e in D, pari alle cedibilità  $\varepsilon_C$  ed  $\varepsilon_D$ . Tornando alla CD, la più bassa soluzione della (4-7) fornisce un valore  $F''$  di  $F$ .

Si itera il procedimento, partendo da quest'ultimo, e così via, fino a giungere ad un valore  $F_i$  molto prossimo al precedente  $F_{i-1}$ , che può essere adottato come  $F_c$ .

Nel caso in esame si osserva che il carico critico  $F'$  della CD considerata appoggiata agli estremi è minore di quello relativo alle altre campate supposte anch'esse appoggiate, e quindi di quelli  $F_{cs}$  ed  $F_{cd}$  relativi alle due parti AC e DE.

Il carico critico  $F_{cs}$  della parte AC è più elevato di quello della stessa trave appoggiata in A, B e C; d'altro canto, quest'ultimo è più elevato di quello della

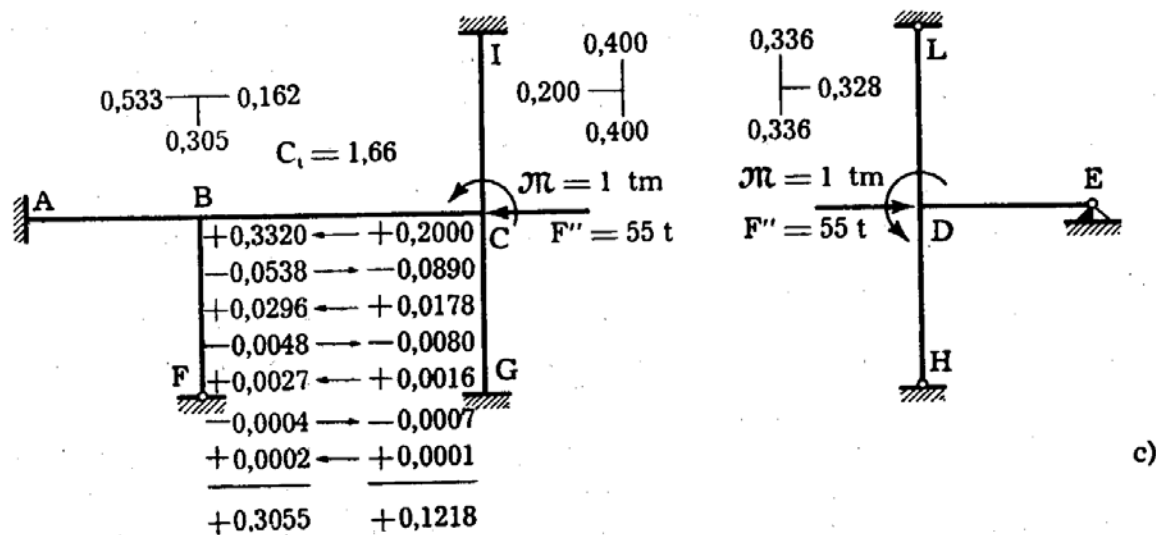
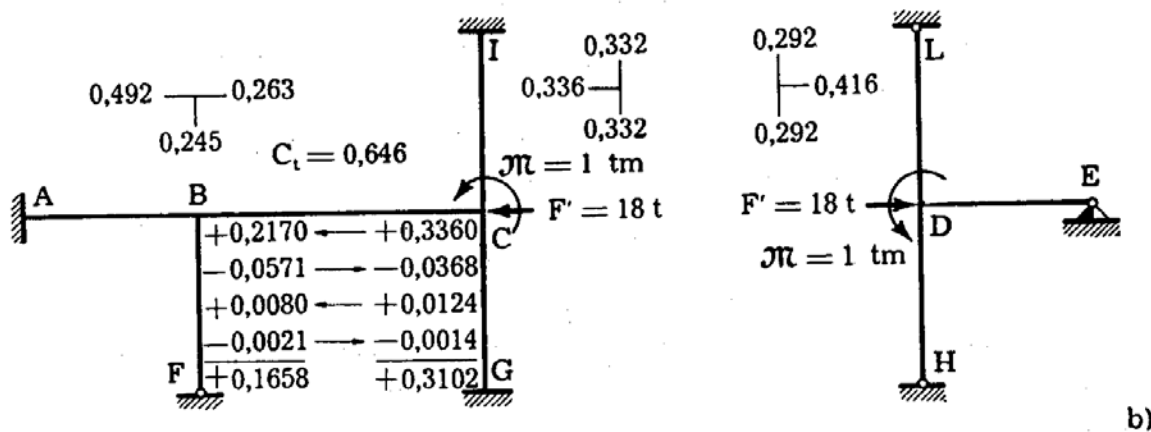
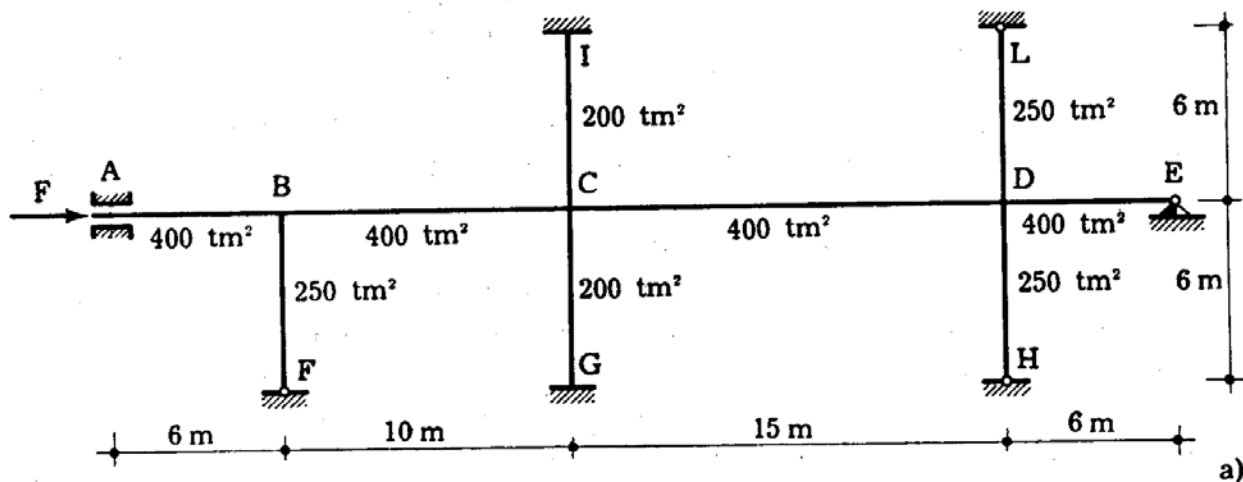


FIG. 4-12

trave con cerniera sugli appoggi, che coincide con il più basso dei valori relativi alle singole campate appoggiate. Poichè quest'ultimo è maggiore di  $F'$ , il carico critico  $F_{cs}$  della parte AC è più elevato di  $F'$ . Altrettanto vale per la parte DE.

Perciò, sotto  $F'$  le cedibilità  $\epsilon_c$  ed  $\epsilon_D$  sono positive; esse inoltre sono più piccole di quelle che si avrebbero in presenza di  $F_c$ , poichè  $F_c > F'$ .

Si prenda in esame la parte AC di sinistra (fig. 4-13); se essa è soggetta ad una forza assiale  $F$  di valore inferiore a quello del suo carico critico  $F_{cs}$ , la rotazione  $\varphi_c$  provocata da una coppia  $\mathcal{M} = 1$  è la cedibilità  $\epsilon_c$ . Se  $F$  aumenta,

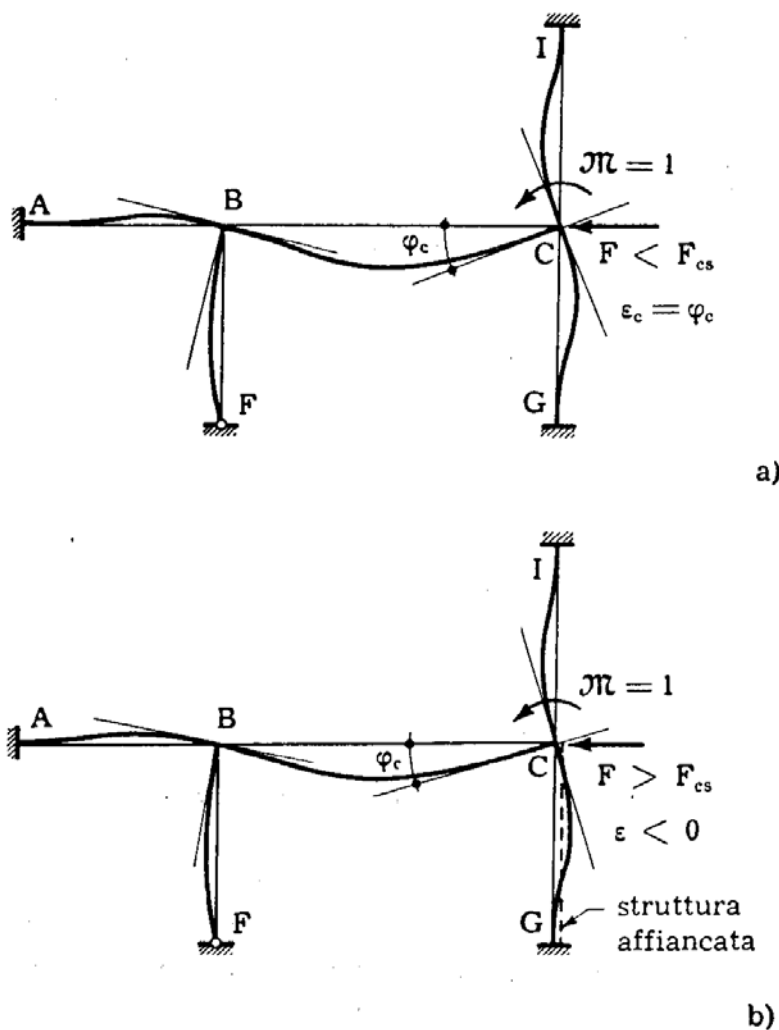


FIG. 4-13

aumenta anche  $\varphi_c$ , che diviene  $\infty$  per  $F = F_{cs}$ . La  $F$  non può andare al di là di  $F_{cs}$ , perchè in  $F > F_{cs}$  esiste ancora una deformata (instabile) di equilibrio (fig. 4-14) ma ad essa può giungersi solo con artifici, per es. con l'applicazione di una forza trasversale che poi si rimuove. Si definisce ancora, però, una cedibilità  $\epsilon_c$  in C per  $F > F_{cs}$ ; se infatti (fig. 4-13 b) si rende la sezione in C solidale

con un elemento strutturale avente una rigidità  $1/\varepsilon_f$  nei riguardi delle rotazioni  $\varphi_c$ , e se  $F$  non supera il valore critico relativo a questo nuovo sistema, si ha ancora

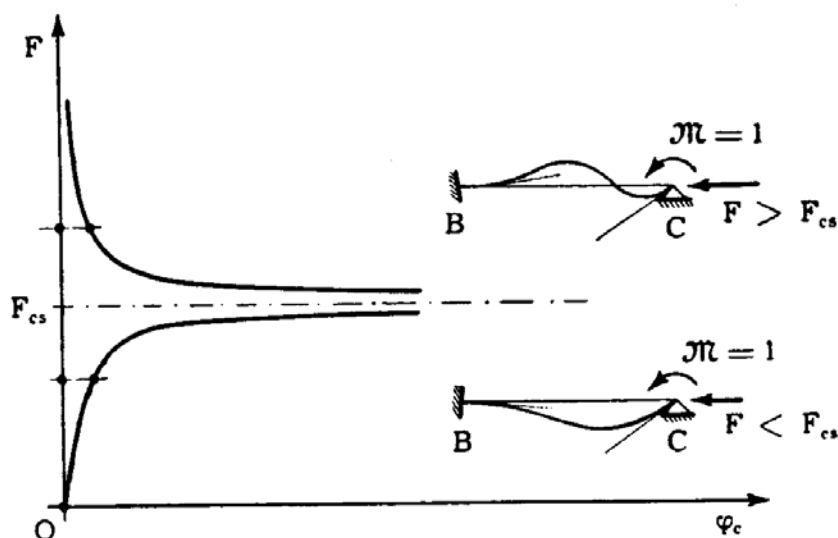


FIG. 4-14

per  $F > F_{cs}$  una rotazione  $\varphi_c$  finita, data da

$$\frac{1}{\varepsilon_c} + \frac{1}{\varepsilon_f} = \frac{1}{\varphi_c}$$

da cui

$$\frac{1}{\varepsilon_c} = \frac{1}{\varphi_c} - \frac{1}{\varepsilon_f}$$

Per  $F > F_c$  è  $1/\varphi_c < 1/\varepsilon_f$ , e cioè  $\varepsilon_c$  è negativo.

Quindi la (4-7) fornisce, con tali valori delle  $\varepsilon$ , un carico critico  $F'' > F_c$ .

Ripetendo il calcolo delle  $\varepsilon$  sotto  $F''$ , le  $\varepsilon$  risultano più elevate di quelle corrispondenti ad  $F_c$ , e possono addirittura cambiare di segno. Sia in un caso che nell'altro, si ha  $F''' < F_c$ ; nel secondo caso però, se ambedue le  $\varepsilon$  sono negative, o se lo è una sola, ma con valore assoluto abbastanza elevato, è pure  $F''' < F'$ .

I successivi valori  $F'$   $F'''$   $F^v$  ... sono perciò tutti minori di  $F_c$ , quelli  $F''$   $F^{iv}$   $F^{vi}$  ... sono maggiori di  $F_c$ ; però nel primo caso l'intervallo  $F^i$   $F^{i+1}$  decresce nei successivi tentativi, ed il procedimento converge, nel secondo accade il contrario.

Nella maggior parte dei casi, se si sceglie come trave equivalente quella cui corrisponde il più basso valore critico per estremi appoggiati, il procedimento è convergente.

Sono utili, comunque, le seguenti considerazioni. Si pongano in ascisse (fig. 4-15 a) i valori di  $F$  con cui si calcolano le cedibilità  $\epsilon_C$  ed  $\epsilon_D$ , ed in ordinata i valori critici della trave CD calcolati con le cedibilità  $\epsilon_C$  ed  $\epsilon_D$ .

Il valore di  $F_c$  è dato dall'intersezione della curva  $F_{CD}(F)$  con la bisettrice del quadrante positivo.

Partendo da  $F'$ , valore di  $F_{CD}$  per cedibilità infinite, si ottiene  $F''$ ; partendo poi da  $F''$ , si ottiene  $F'''$ . Se la curva  $F_{CD}(F)$  ha pendenza moderata,  $F''' > F'$

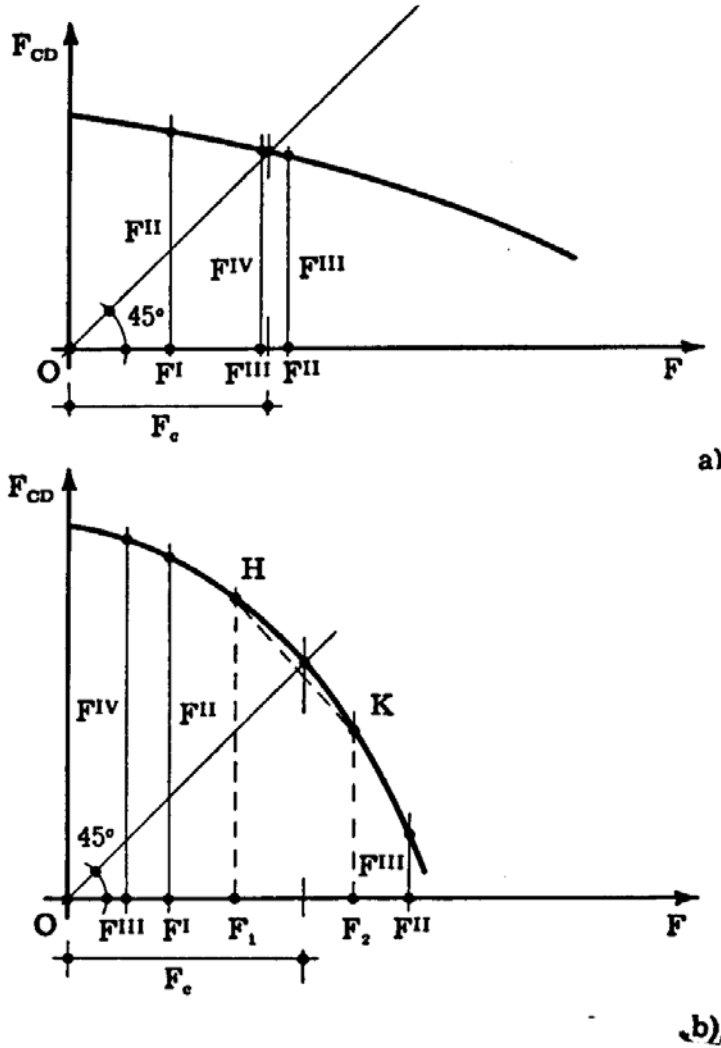


FIG. 4-15

(fig. 4-15 a); se invece la pendenza è notevole,  $F''' < F'$  (fig. 4-15 b). In tal caso conviene calcolare due valori  $F_{CD}$  partendo da due qualsiasi valori  $F_1$  ed  $F_2$ , e confondere la curva  $F_{CD}(F)$  nel tratto  $HK$  con la retta  $HK$ . Nell'intersezione di tale retta con la bisettrice si ha un primo valore approssimato di  $F_c$ . Nel secondo tentativo, effettuato a partire da altri due valori  $F_3$  ed  $F_4$ ,  $F_3$  si pone uguale al primo valore approssimato di  $F_c$ , ed  $F_4$  prossimo ad esso.

Come esempio si tratti proprio la trave della fig. 4-12.

Come già detto, il minore carico critico è quello della trave CD (17,5 t).

Le rigidezze secondo Cross dei vari elementi sono forniti da (4-9)

$$\rho_{AB} = 267 \frac{3\psi_1}{4\psi_1^2 - \varphi_1^2} \text{ tm ;}$$

$$\rho_{BC} = 160 \frac{3\psi_2}{4\psi_2^2 - \varphi_2^2} \text{ tm ;}$$

$$\rho_{DE} = \frac{200}{\psi_4} \text{ tm ; } \rho_{BF} = 125 \text{ tm ;}$$

$$\rho_{CI} = \rho_{CG} = 133 \text{ tm ; } \rho_{DL} = \rho_{DH} = 125 \text{ tm .}$$

Si iniziano i calcoli con il valore

$$F' = 18 \text{ t .}$$

Si ha (si usano gli indici 1, 2, 4 per indicare le travi AB, BC, DE)

$$2u_1 = 2u_4 = 1,27 \qquad 2u_2 = 2,12$$

$$\psi_1 = \psi_4 = 1,13 \qquad \psi_2 = 1,53$$

$$\varphi_1 = \varphi_4 = 1,23 \qquad \varphi_2 = 1,98 .$$

Si ottengono così i coefficienti di ripartizione e di trasmissione indicati nella fig. 4-12 b. Si applicano in C e in D due coppie unitarie e si diffondono alla Cross (fig. 4-12 b). La rotazione della sezione C è data da

$$\varphi_C = \frac{0,310 \times 10 \times 1,53}{3 \times 400} - \frac{0,166 \times 10 \times 1,98}{6 \times 400} = 0,00260 \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} = \varepsilon_C .$$

La rotazione della sezione D è data da

$$\varphi_D = \frac{0,416 \times 6 \times 1,13}{3 \times 400} = 0,00234 \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} = \varepsilon_D .$$

L'equazione (4-7), scritta per la trave CD, diviene

$$1,56\psi^2 - 0,39\varphi^2 + 0,616\psi + 0,0608 = 0$$



la cui soluzione è  $2 \mathbf{u} = 5,57$ . E' quindi

$$F'' = 55 \text{ t.}$$

Ripetendo il calcolo con quest'ultimo valore si ha

$$2 \mathbf{u}_1 = 2 \mathbf{u}_4 = 2,22 \qquad 2 \mathbf{u}_2 = 3,71$$

$$\psi_1 = \psi_4 = 1,63 \qquad \psi_2 = -1,04$$

$$\varphi_1 = \varphi_4 = 2,18 \qquad \varphi_2 = -3,45 .$$

Si ottengono così i coefficienti della fig. 4-12 c; ripetendo su questa quanto già fatto nella fig. 4-12 b si ottiene

$$\varepsilon_C = 0,00334 \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad ; \quad \varepsilon_D = 0,00268 \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} .$$

L'equazione (4-7) si scrive così

$$1,56 \psi^2 - 0,39 \varphi^2 + 0,754 \psi + 0,089 = 0$$

da cui  $2 \mathbf{u} = 5,45$ , e ancora

$$F''' = 52,8 \text{ t} .$$

E' quindi

$$52,8 \text{ t} < F_c < 55 \text{ t} . \qquad (m)$$

Per risolvere lo stesso problema seguendo il metodo di *Timoshenko* occorre scrivere tre equazioni per le coppie di travi AB, BC; BC, CD; CD, DE; tre equazioni per gli appoggi B, C, D; una equazione per il vincolo in A; e annullare il determinante dei coefficienti. Le cedibilità dei ritti in B, C, D sono fornite da

$$\frac{1}{\varepsilon_B} = 0,008 \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} \quad ; \quad \frac{1}{\varepsilon_C} = 0,00375 \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} ;$$

$$\frac{1}{\varepsilon_D} = 0,004 \text{ t}^{-1} \text{ m}^{-1} .$$

L'equazione trascendente che risolve il problema è quindi la seguente:

$$\Delta (F) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & 2\psi_1 & 3,34\psi_2 & 1,67\varphi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_2 & 2\psi_2 & 3\psi_3 & 1,5\varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_3 & 2\psi_3 & 0,8\psi_4 \\ 2,5\varphi_1 & (5\psi_1+8) & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4,16\varphi_2 & (8,32\psi_2+3,76) & -3,76 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6,25\varphi_3 & (12,5\psi_3+4) & -4 \\ 5\psi_1 & 2,5\varphi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (n)$$

La (n) permette di saggiare l'esattezza del risultato conseguito con il metodo proposto. In accordo con la disuguaglianza (m) si ponga

$$F_c = 53,5 \text{ t .}$$

Risulta così

$$\begin{aligned} 2u_1 = 2u_4 = 2,19 & \quad ; \quad 2u_2 = 3,66 & \quad ; \quad 2u_3 = 5,48 & \quad ; \\ \varphi_1 = \varphi_4 = 2,11 & \quad ; \quad \varphi_2 = -3,79 & \quad ; \quad \varphi_3 = -1,73 & \quad ; \\ \psi_1 = \psi_4 = 1,60 & \quad ; \quad \psi_2 = -1,23 & \quad ; \quad \psi_3 = -0,630 & \quad . \end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nella (n) e sviluppando il determinante secondo i minori complementari degli elementi della prima riga si ottiene

$$\Delta = 44488 - 47946 = -3458 .$$

Ponendo invece, sempre in accordo con la (m)

$$F_c = 53 \text{ t .}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} 2u_1 = 2u_4 = 2,18 & \quad ; \quad 2u_2 = 3,64 & \quad ; \quad 2u_3 = 5,46 & \quad ; \\ \varphi_1 = \varphi_4 = 2,09 & \quad ; \quad \varphi_2 = -3,94 & \quad ; \quad \varphi_3 = -1,71 & \quad ; \\ \psi_1 = \psi_4 = 1,59 & \quad ; \quad \psi_2 = -1,30 & \quad ; \quad \psi_3 = -0,615 & \quad . \end{aligned}$$

da cui

$$\Delta = 41761 - 37464 = 4297 .$$

Se nell'intervallo

$$53 < F < 53,5$$

la  $\Delta(F)$  si suppone lineare, a  $\Delta(F) = 0$  corrisponde

$$F_c = 53 + 0,5 \frac{4297}{7755} = 53,28 \text{ t.}$$

Il metodo su esposto resta integralmente valido se le forze assiali sono più d'una, ma applicate nei nodi; occorre e basta, per la sua validità, che lo sforzo assiale sia costante lungo ogni campata.

### 8. La trave continua: il metodo della diffusione dei momenti.

Si prenda in esame la stessa generica trave continua solidale con i ritti della fig. 4-12 in cui siano trascurabili le variazioni di lunghezza da sforzo assiale; anche quanto sarà detto in questo paragrafo è integralmente valido solo se lo sforzo normale è costante in ogni campata.

Si faccia agire una piccola coppia  $\mathcal{M}$  in corrispondenza di un nodo qualsiasi D (fig. 4-16). Se in assenza di coppia la configurazione rettilinea

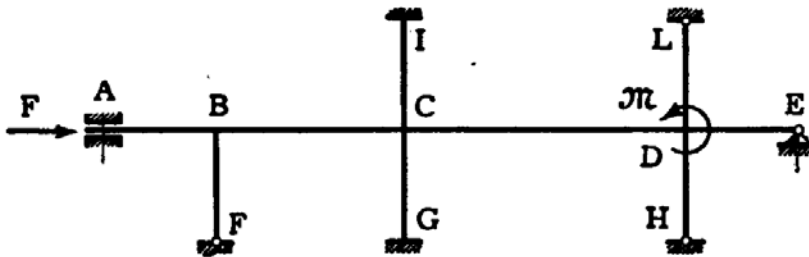


FIG. 4-16

è stabile, lo sarà anche la configurazione inflessa dovuta alla  $\mathcal{M}$ , che è piccola; e viceversa.

Come coordinate lagrangiane della struttura possono assumersi le rotazioni  $\varphi_i$  dei nodi; infatti, data la forza assiale  $F$  e le  $\varphi_i$  ai due estremi di ogni campata, è univocamente fissata la deformata della campata stessa, perchè la (4-5) fornisce univocamente  $\mathcal{M}_A$  ed  $\mathcal{M}_B$ .

Data quindi la forza assiale  $F$  e la coppia  $\mathcal{M}$ , la funzione  $E(\varphi_i)$ , che in corrispondenza delle  $\varphi_{i0}$  di equilibrio assume il significato di energia potenziale totale sotto  $F$  ed  $\mathcal{M}$ , presenta o meno, per le stesse  $\varphi_{i0}$ , un minimo secondo che  $F \leq F_c$ .

Se si diffonde  $\mathcal{M}$  alla Cross, in ogni stadio si è in presenza di una configurazione congruente ma non equilibrata; la  $E(\varphi_i)$  assume in ogni stadio valori diversi da  $E(\varphi_{i0})$ , sempre maggiori di questa se  $F < F_c$ .

Nello stadio generico, tutti i nodi sono bloccati con morsetti che ne impediscono le rotazioni; si rimuove uno di questi, riversando sul nodo

della struttura la coppia prima assorbita dal morsetto. Sotto la forza  $F$  una qualsiasi delle strutture elementari di Cross (costituita dalle aste che concorrono in un nodo generico  $k$ , considerate incastrate all'altro estremo) risulta stabile o instabile, secondo che  $\Sigma \rho_{kh} \geq 0$ . Una prima indagine deve quindi essere eseguita per assicurarsi che sia ovunque  $\Sigma \rho_{kh} > 0$ ; in caso contrario infatti, essendo instabile la trave più vincolata di quella reale, lo è pure la trave reale. Escluso questo caso, la rimozione di un morsetto  $k$ , ed il conseguente passaggio della coppia  $\mathcal{M}_k$  dal morsetto al nodo, deve provocare comunque una diminuzione della funzione  $E(\varphi_i)$ ; infatti la variazione di  $E(\varphi_i)$  è relativa alla sola struttura elementare interessata dalla rimozione del morsetto, e cioè alla sola  $\varphi_i$ , e poichè la struttura elementare è stabile, alla sua configurazione in presenza del morsetto, che è congruente ma non equilibrata, deve corrispondere un'energia totale maggiore di quella che compete alla sua configurazione di equilibrio.

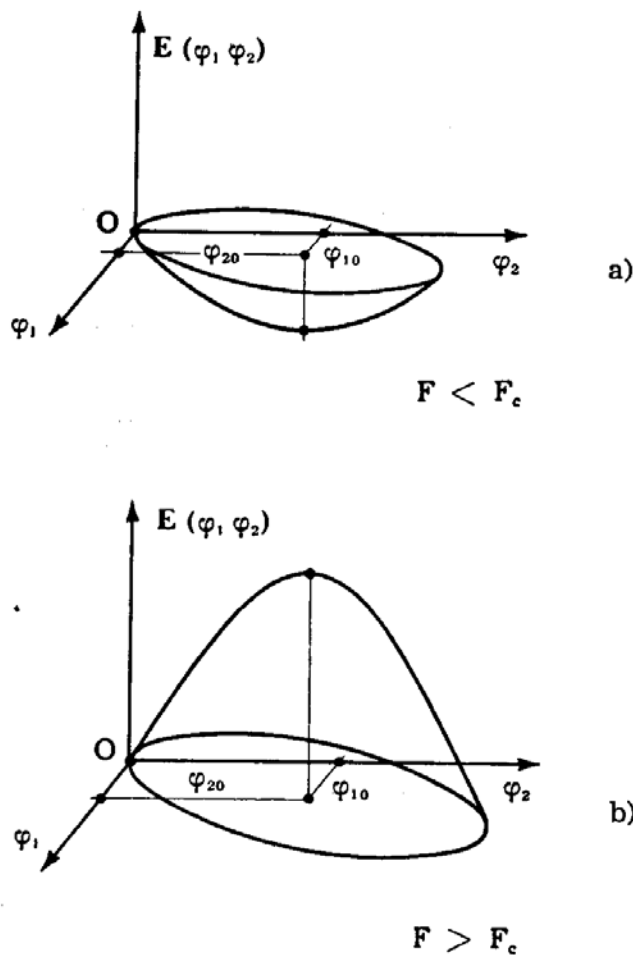


FIG. 4-17

Ciò premesso, se  $F < F_c$  ogni equilibramento di nodo provoca una diminuzione della  $E(\varphi_i)$ ; la superficie  $E(\varphi_i)$ , rappresentata nella fig. 4-17a nel caso di due sole  $\varphi$ , lega il valore di  $E(\varphi_i)$  ai valori  $\varphi_i$ , e si

osserva che, se le successive variazioni delle  $\varphi_i$  portano tutte ad una diminuzione di  $\mathbf{E}$ , le successive posizioni  $\varphi_i$  tendono alla posizione  $\varphi_{10}$ . Il procedimento di *Cross* quindi converge.

Se invece  $F > F_c$ , ogni equilibramento porta ancora ad una diminuzione di  $\mathbf{E}$ ; poichè in  $\varphi_{10}$  la  $\mathbf{E}$  presenta un massimo (fig. 4-17 b), ogni equilibramento allontana sempre più da  $\varphi_{10}$ , ed il procedimento di *Cross* diverge.

Si riporta un esempio (*Belli*), relativo alla stessa struttura della fig. 4-12.

Nelle tabelle *a* e *b* sono riportati, per  $F=50$  t. e  $F=55$  t. rispettivamente, i valori di  $\varphi$  e  $\psi$ .

Nella tabella *c* sono riportati i valori delle rigidità non modificate.

TABELLA a

F = 50 t.

Trave	$l$ (m)	EI (tm <sup>2</sup> )	$2u$	$\varphi$	$\psi$
AB	6,00	400	2,1216	1,9831	1,5336
BC	10,00	400	3,5360	5,3179	1,8089
CD	15,00	400	5,3040	1,5482	0,4495
DE	6,00	400	2,1216	1,9831	1,5336

TABELLA b

F = 55 t.

Trave	$l$ (m)	EI (tm <sup>2</sup> )	$2u$	$\varphi$	$\psi$
AB	6,00	400	2,2248	2,1754	1,6343
BC	10,00	400	3,7080	3,4990	1,0787
CD	15,00	400	5,5620	1,7446	0,6470
DE	6,00	400	2,2248	2,1754	1,6343

TABELLA c

Trave	$\frac{4EI}{l}$ (tm)	$\frac{3EI}{l}$ (tm)
AB	266,00	
BC	160,00	
CD	106,00	
DE		200
BF		125
CG	133,00	
DH		125
IC	133,00	
LD		125

Si sono quindi determinati i coefficienti di ripartizione e di trasporto consegnati, per  $F = 50$  t. nella tabella *d* e, per  $F = 55$  t., nella tabella *e*.

TABELLA *d* $F = 50$  t.

Nodo	Travi	$\tau$	$t$
B	BA	0,551	0,64
	BF	0,308	0,00
	BC	0,141	1,47
C	CB	0,246	1,47
	CG	0,572	0,50
	CD	0,390	1,72
	CI	0,572	0,50
D	DC	0,312	1,72
	DH	0,431	0,00
	DE	0,450	0,00
	DL	0,431	0,00

TABELLA *e* $F = 55$  t.

Nodo	Travi	$\tau$	$t$
B	BA	0,532	0,665
	BF	0,303	0,000
	BC	0,165	1,622
C	CB	0,371	1,622
	CG	0,726	0,500
	CD	0,823	1,348
	CI	0,726	0,500
D	DC	0,683	1,348
	DH	0,565	0,000
	DE	0,553	0,000
	DL	0,565	0,000

La diffusione alla Cross di una coppia  $\mathcal{M} = 1$  agente sul nodo D

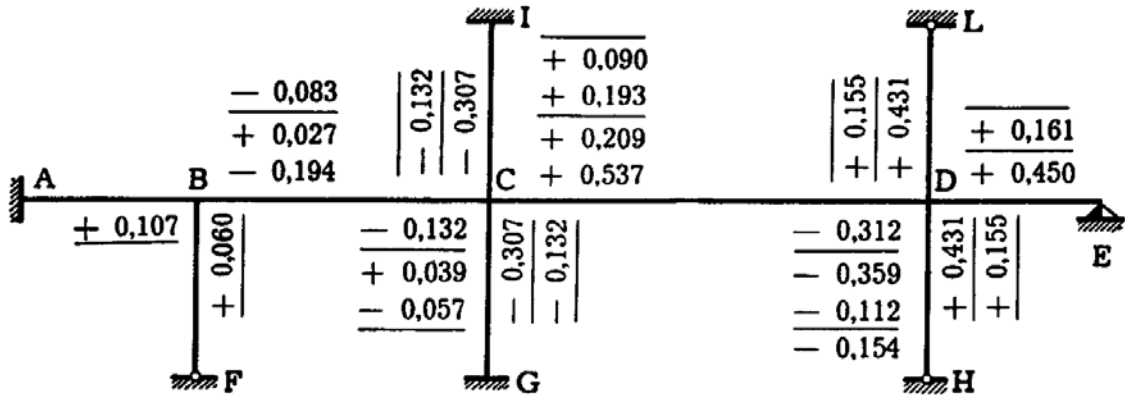
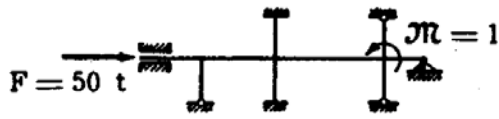


FIG. 4-18

(figg. 4-18 e 4-19), risulta convergente per  $F = 50 t.$  e divergente per  $F = 55 t.$

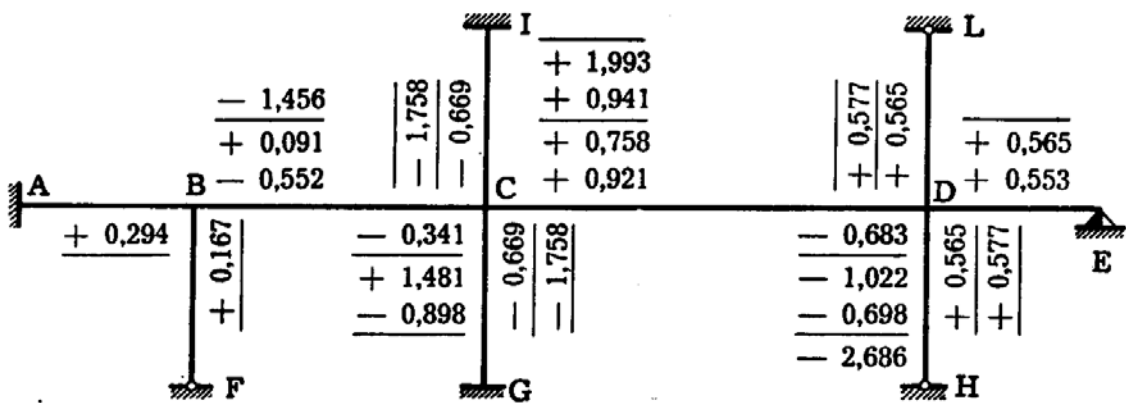


FIG. 4-19

Si individua in tal modo per il carico critico  $F_c$  l'intervallo:

$$50 t. < F_c < 55 t.$$