

### CAPITOLO III

## LA STABILITA' DELL' EQUILIBRIO OLTRE LA SOGLIA PLASTICA

### 1. Generalità.

Tutto quanto si è finora detto perde di validità se al disotto del carico di crisi (critico, o di collasso) si verificano escursioni in campo plastico (e quasi tutto se si supera la  $\sigma$  di proporzionalità). La stessa definizione di stabilità (§ 1-1) cade in difetto. L'applicazione delle forze  $F_d$  perturbanti, sul corpo soggetto alle forze  $F$  ed in una configurazione  $C_0$ , porta il corpo in una configurazione  $C_d$  prossima a  $C_0$ ; secondo il criterio statico  $C_0$  è stabile se, rimuovendo le  $F_d$ , il corpo torna in  $C_0$ , quali che siano le forze  $F_d$ ; è instabile se, per almeno un insieme  $F_d$ , si ha allontanamento. In campo elastico, il procedimento può ripetersi indefinitamente; infatti, se si ha ritorno in  $C_0$ , la riapplicazione delle  $F_d$  trova tutto nelle identiche condizioni della prima volta. Se invece sotto le forze  $F$  ed in  $C_0$  la struttura è, in qualche sua zona, in campo plastico, le  $F_d$  fanno in genere variare le deformazioni plastiche, e quindi al loro scomparire non si può più tornare in  $C_0$ .

Legare perciò la stabilità della  $C_0$  al ritorno in  $C_0$  appare troppo restrittivo; una configurazione  $C_0$  si potrebbe definire in senso più ampio stabile se applicazioni, ripetute in qualsiasi numero e forma, di piccole forze perturbanti spostano la configurazione in un'altra  $C_d$ , che tende a  $C_0$  se l'entità delle forze perturbanti tende globalmente a zero. E' immediata l'analogia di tale definizione con quella di neutro stabilità fornita nel Cap. I.

Più che di stabilità di una configurazione, conviene, superata la soglia plastica, riferirsi al comportamento della struttura per carichi sempre crescenti, o comunque alternantisi, e ricercare i valori dei carichi per cui questo comportamento può destare preoccupazioni per determinate singularità.

Si cominci con l'osservare che, poichè una perturbazione provoca un residuo di deformazione, non può parlarsi più, in rigore, di variazioni euleriane; una trave caricata assialmente, per esempio, deve comunque supporre affetta da eccentricità. Il comportamento di una generica strut-

tura deve sempre considerarsi quindi con deformazioni presenti anche per  $F_d = 0$ .

Nell'ipotesi ideale di comportamento indefinitamente elastico il ramo  $Fc_1$  può presentare o meno un massimo  $F_m$ ; nella realtà il campo elastico è sempre superato per  $F$  crescenti, ed il diagramma  $Fc_1$  presenta sempre (fig. 3-1) un massimo  $F_m$ , dopo il quale il ramo decresce. Se l'entrata in

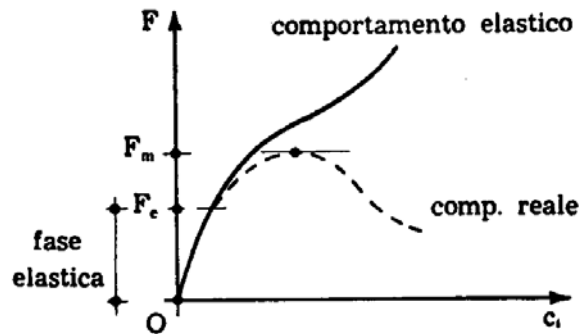


FIG. 3-1

campo plastico avviene per valori elevati di  $F$ , superiori al carico critico o a quello di collasso, i ragionamenti di tipo elastico non perdono di vigore e di utilità, altrimenti occorre studiare il fenomeno sotto i punti di vista indicati.

L'esempio della fig. 3-2 è indicativo al proposito.

L'asta  $AB$  è flessionalmente rigida; l'allungamento  $\lambda$  dell'asta è nullo per  $N < N_0$ , indefinito per  $N = N_0$ . Il concio in  $B$  presenta rotazione relativa  $\varphi$  nulla per  $M < M_0$ , indefinita per  $M = M_0$ .

La  $F$  che provoca la plasticizzazione del concio è fornita da

$$F_r = \frac{M_0}{l} .$$

A plasticizzazione avvenuta, l'asta ruota; la condizione di equilibrio è (fig. 3-2 a e b)

$$F l \cos \varphi = M_0 \quad \text{per } F \sin \varphi < N_0$$

$$F (l + \lambda) \cos \varphi = M_0 \quad \text{per } F \sin \varphi = N_0 .$$

Il valore  $\varphi^*$  di  $\varphi$  per cui si iniziano gli allungamenti  $\lambda$  è fornito da

$$F = \frac{M_0}{l \cos \varphi^*} = \frac{N_0}{\sin \varphi^*}$$

e cioè

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{N_o l}{M_o}$$

Per  $0 \leq \varphi \leq \varphi^*$  è

$$F = \frac{M_o}{l \cos \varphi} = \frac{M_o}{l \sqrt{1 - (w/l)^2}} = \frac{M_o}{\sqrt{l^2 - w^2}};$$

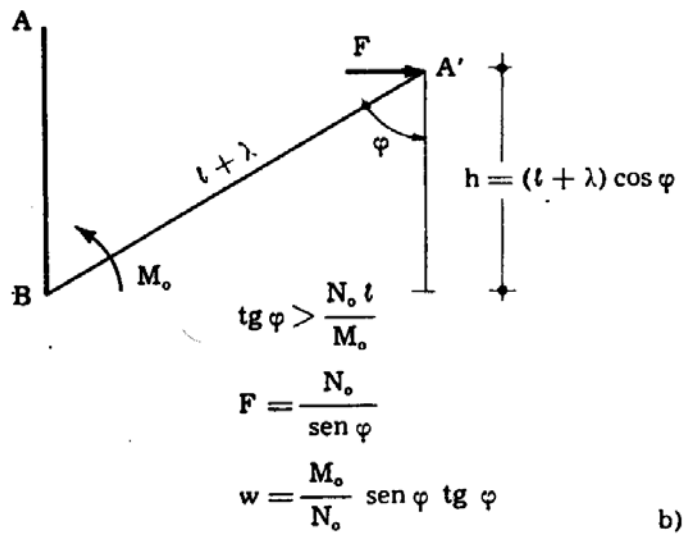
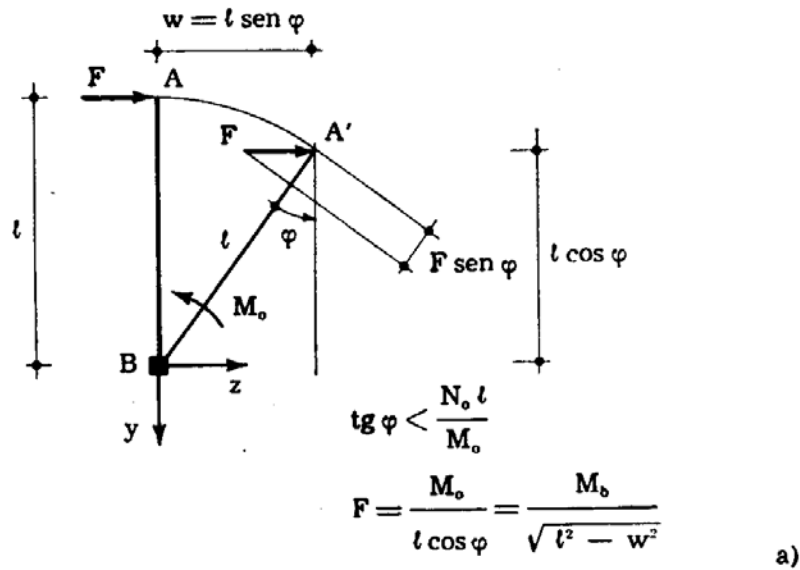


FIG. 3-2 a, b

per  $\varphi^* < \varphi < \pi/2$  è invece (fig. 3-2 b)

$$F = \frac{N_o}{\operatorname{sen} \varphi}$$

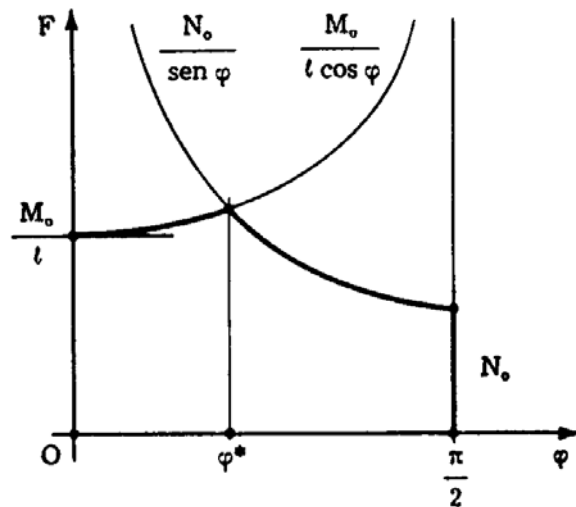
$$h = \frac{M_o}{F} = \frac{M_o}{N_o} \operatorname{sen} \varphi$$

$$w = h \operatorname{tg} \varphi = \frac{M_0}{N_0} \operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} \varphi .$$

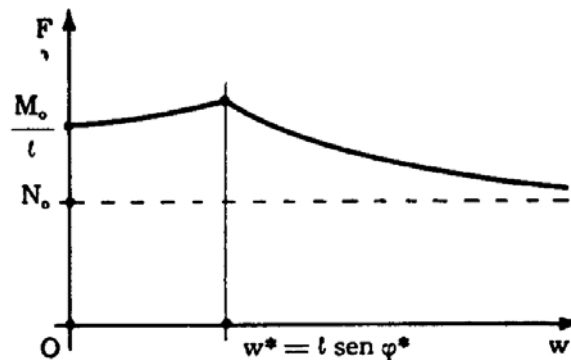
Si ha così il legame tra  $F$  e  $w$  sotto forma parametrica; è pure

$$\frac{dF}{dw} = \frac{dF}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dw} = - \frac{N_0^2}{M_0} \frac{\cos^3 \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi (\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi)} .$$

Si osserva (fig. 3-2 c e d) che per  $\varphi = \pi/2$  è  $F = N_0$ ,  $w = \infty$ ,  $dF/dw = 0$ , e cioè la retta  $F = N_0$  è asintoto del diagramma  $Fw$ .



c)



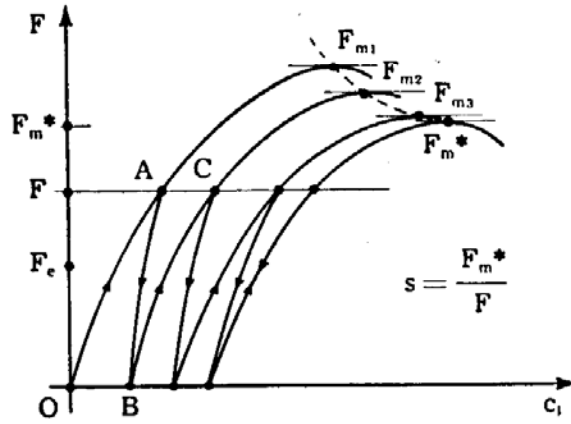
d)

FIG. 3-2 c, d

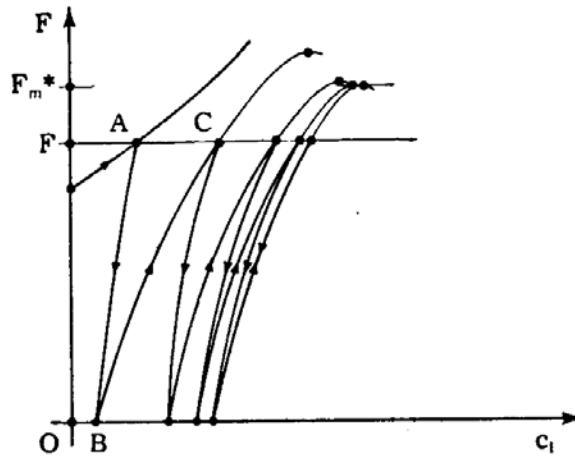
Il ramo  $Fc_1$  può essere calcolato nell'ipotesi di diagramma  $\sigma\epsilon$  indefinito; in realtà, esso si spezza in corrispondenza della rottura.

Se le forze possono solo crescere,  $F_m$  ha un suo valore preciso. Se invece le forze sono ripetibili, in particolare possono annullarsi, ciò non è più vero. Nel caso più semplice che le forze dipendano ancora da un unico parametro  $F$ , e che questo possa variare da zero ad un massimo  $F$  più alto del valore  $F_c$  per cui appaiono i primi fenomeni plastici (fig. 3-

3 a), è presumibile che  $F_m$  si abbassi nei cicli  $0 \rightarrow F$  successivi al primo. Se dopo un certo numero di cicli non si ha più produzione di deformazioni



a)



b)

FIG. 3-3

plastiche, il ciclo  $0 \rightarrow F \rightarrow 0$  si effettua in fase elastica ed  $F_m$  si stabilizza ad un valore  $F_m^*$ ; il coefficiente di sicurezza è

$$s = \frac{F_m^*}{F} < \frac{F_m}{F} (*) .$$

Nei casi in cui si potrebbe operare, in fase elastica, con variazioni euleriane è presumibile anche partendo da una struttura inizialmente priva di

(\*) Se fino dalla prima ripetizione del ciclo si ha  $BC \equiv AB$ ,  $F_m^*$  coincide con  $F_m$ .

imperfezioni, il comportamento della fig. 3-3 b; se per un valore  $F$  della forza si è sul ramo diramato, il ritorno  $F \rightarrow 0$  implica una deformazione permanente, ed il ricarico  $0 \rightarrow F$  segue una curva  $B C$  diversa dall'asse delle  $F$ . Nelle altre alternanze  $0 \rightarrow F \rightarrow 0$  si ha un comportamento analogo a quello della fig. 3-3 a, e quindi la possibilità o meno di stabilizzazione di  $F_m$  su un valore  $F_m^*$ .

Più semplice, nel suddetto caso di variazioni inizialmente euleriane, è il chiamare ancora *critico* — con un significato preciso, anche se ne è discutibile l'utilità pratica — il valore  $F_c$  di  $F$  per cui, per forze sempre crescenti su una struttura priva di eccentricità iniziali, comincia la possibilità di avere configurazioni diramate.

L'esempio che segue (*Augusti*) vale a chiarire le idee. Si consideri la struttura della fig. 3-4, costituita da una trave ad asse rettilineo rigida  $AB$ ,

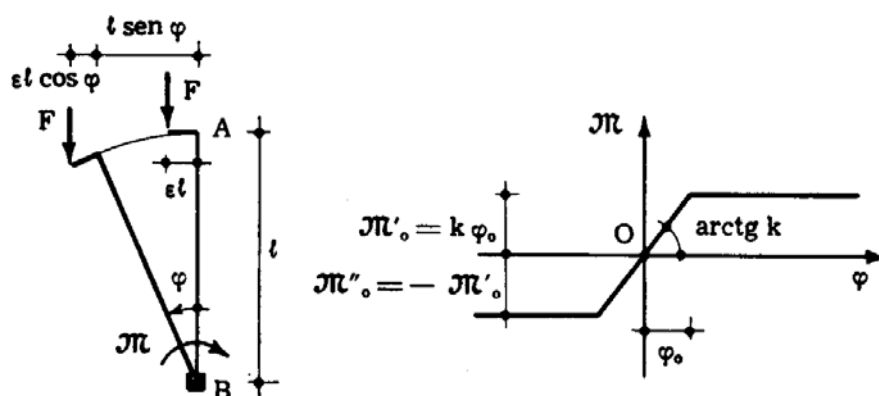


FIG. 3-4

caricata in  $A$  come in figura, e vincolata in  $B$  da una molla; il diagramma  $M\varphi$  caratterizzante la molla è riportato nella stessa figura, e si suppone del tipo elasto-plastico ideale (tratto plastico orizzontale e indefinito). Si ipotizza poi che la  $F$  sia sempre crescente. La condizione di equilibrio è

$$F \ell (\sin \varphi + \varepsilon \cos \varphi) + \mathcal{M} = 0 \quad (a)$$

da cui, in fase elastica

$$F \ell (\sin \varphi + \varepsilon \cos \varphi) - k\varphi = 0 \quad (b)$$

Poichè risulta

$$F_c = \frac{k}{\ell}$$

il carico critico in assenza di eccentricità, la (b) si scrive

$$\beta = \frac{F}{F_c} = \frac{\varphi}{\text{sen } \varphi + \varepsilon \cos \varphi} \quad (c)$$

Nella fig. 3-5 è riportata la curva

$$\beta = \frac{\varphi}{\text{sen } \varphi} \quad (d)$$

relativa al caso  $\varepsilon = 0$ , e la curva (c).

La presenza della fase plastica fa cadere in difetto la (c) e la (d) per

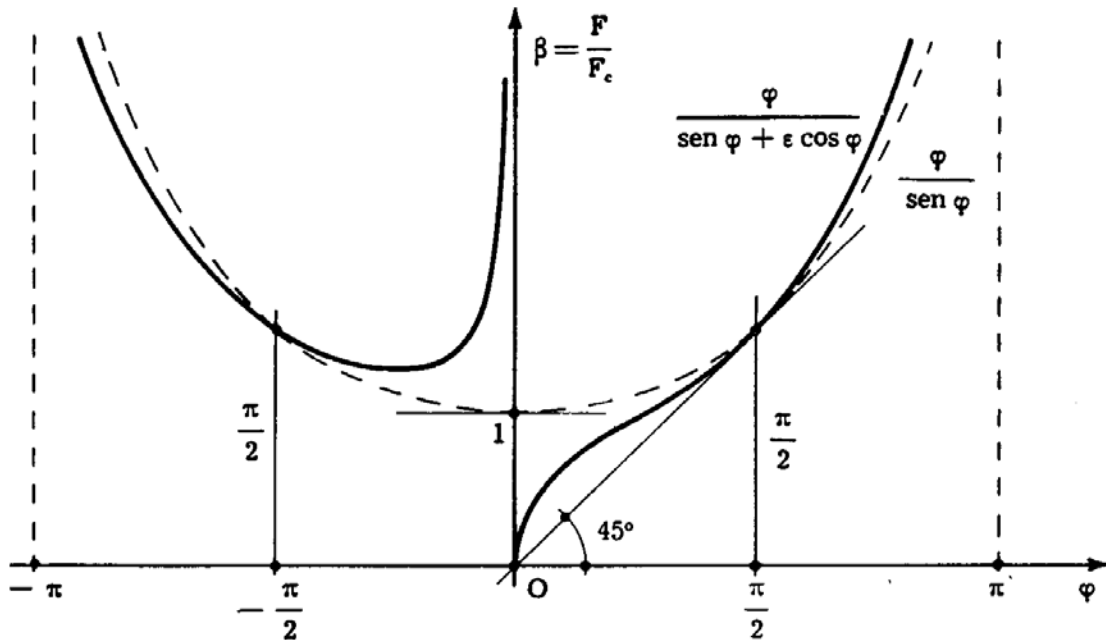


FIG. 3-5

$\varphi > \varphi_0$  e per  $\varphi < -\varphi_0$ ; in tali due casi le (c) e (d) sono sostituite dalle altre

$$\beta = \frac{\varphi_0}{\text{sen } \varphi + \varepsilon \cos \varphi} \quad \varphi > \varphi_0 \quad (e)$$

$$\beta = \frac{\varphi_0}{\text{sen } \varphi}$$

e ancora

$$\beta = \frac{-\varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi + \varepsilon \cos \varphi} \quad \varphi < -\varphi_0 \quad (f)$$

$$\beta = \frac{-\varphi_0}{\operatorname{sen} \varphi}$$

Per  $\varepsilon = 0,10$  e  $\varphi_0 = 0,5$  le curve (e) ed (f) sono riportate nella fig. 3-6; si osserva sia in un caso che nell'altro la comparsa del carico di collasso definito da  $\beta_m$ .

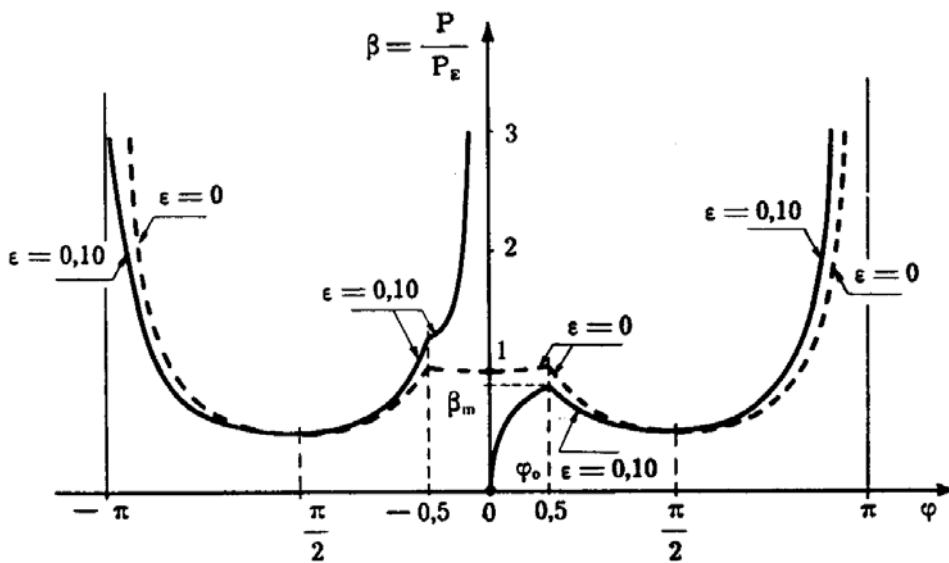


FIG. 3-6

Dalla prima delle (e) derivando si ha

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = -\varphi_0 \frac{\cos \varphi - \varepsilon \operatorname{sen} \varphi}{(\operatorname{sen} \varphi + \varepsilon \cos \varphi)^2};$$

quindi il segno di  $d\beta/d\varphi$  coincide con quello di  $\varepsilon \operatorname{sen} \varphi - \cos \varphi$ . Perchè esista un carico di collasso occorre che in  $\varphi = \varphi_0$  la  $d\beta/d\varphi$  sia negativa, e cioè

$$\varepsilon \operatorname{sen} \varphi_0 - \cos \varphi_0 < 0$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 < \frac{1}{\varepsilon} \quad (g)$$

Per  $\varepsilon = 0,10$  si ha quindi carico di collasso se  $\varphi_0 < 84^\circ$ , per  $\varepsilon = 0,25$  se  $\varphi_0 < 76^\circ$ ; in pratica, quindi il carico di collasso  $F_m$  esiste sempre. Il



corrispondente  $\beta_m$  è fornito da

$$\beta_m = \frac{F_m}{F_c} = \frac{\varphi_0}{\sin \varphi_0 + \varepsilon \cos \varphi_0} \quad (h)$$

Per piccoli valori di  $\varphi$  la (h) può scriversi

$$\beta_m = \frac{\varphi_0}{\varphi_0 + \varepsilon}$$

da cui

$$\varepsilon = \varphi_0 \left( \frac{1}{\beta_m} - 1 \right) \quad (i)$$

La (i) è, nel piano  $\beta_m \varepsilon$ , una iperbole equilatera con asintoti  $\beta_m = 0$  ed  $\varepsilon = -\varphi_0$  (fig. 3-7). Si osserva che per  $\varphi_0 = 0,1$  la curva esatta non si può distinguere da quella approssimata, per  $\varphi_0 = 0,5$  è ad essa molto vicina, e fornisce valori più bassi di  $F_m$ , con errore del  $6 \div 8 \%$  nel campo  $\varphi_0 \leq 0,5$ ,  $\varepsilon \leq 0,2$ .

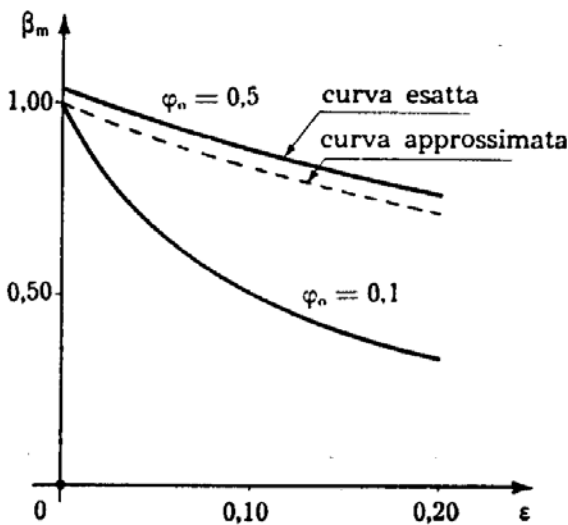


FIG. 3-7

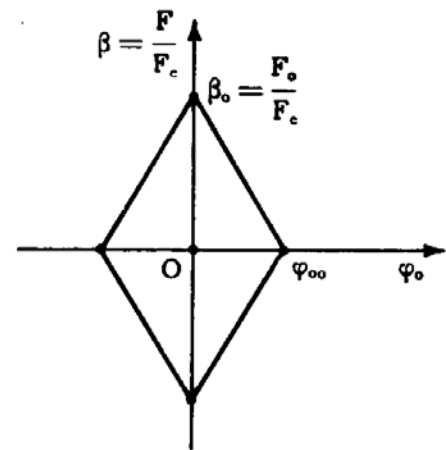


FIG. 3-8

Se la molla ha costante elastica funzione dello sforzo normale, si può caratterizzare attraverso il dominio di plasticizzazione (Vol. IV, § 3-4) che per semplicità si suppone rombico (fig. 3-8). Se in assenza di sforzo normale è  $\varphi_0 = \varphi_{00}$ , ed  $F_0$  è lo sforzo normale limite si ha

$$\varphi_0 = \varphi_{00} \left( 1 - \frac{\beta}{\beta_0} \right)$$

La prima delle (e) si scrive così

$$\beta = \frac{\varphi_{00}}{\operatorname{sen} \varphi + \varepsilon \cos \varphi} \left( 1 - \frac{\beta}{\beta_0} \right);$$

da questa si trae il valore di  $\beta_m$  :

$$\beta_m = \frac{\varphi_{00}}{\operatorname{sen} \varphi_0 + \varepsilon \cos \varphi_0} \left( 1 - \frac{\beta_m}{\beta_0} \right)$$

da cui, nell'ipotesi di piccoli spostamenti,

$$\varepsilon = \varphi_{00} \left( 1 - \frac{\beta_m}{\beta_0} \right) \left( \frac{1}{\beta_m} - 1 \right). \quad (\ell)$$

Nella fig. 3-9 sono riportate, per vari valori di  $\beta_0$ , le curve  $\varepsilon \beta_m$  ;

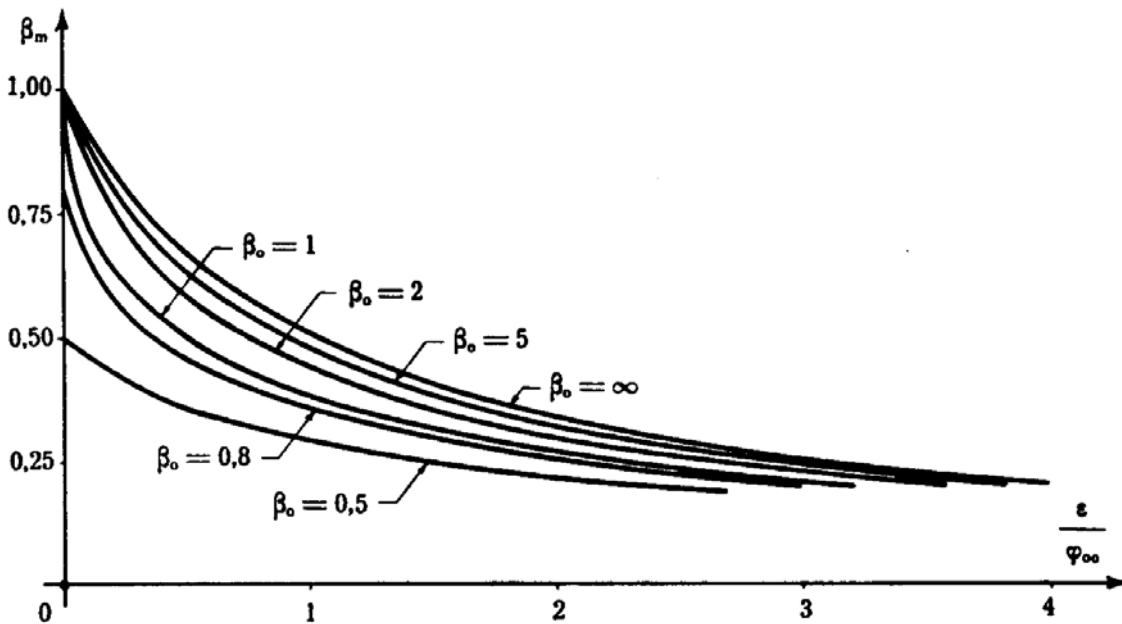


FIG. 3-9

si osserva come  $\beta_m$ , e quindi il carico di collasso, decrescano all'aumentare di  $\varepsilon$ , prima molto rapidamente, e poi sempre più lentamente.

## 2. La trave rettilinea di sezione costante in regime elasto-plastico.

Se si valica la soglia elastica, cade in difetto tutto quanto detto nel Cap. I; in particolare, per variazioni euleriane a carattere simmetrico non è più, in un punto di diramazione,  $\partial F / \partial c_1 = 0$ .

Inoltre i punti di diramazione non corrispondono più a valori distinti di  $F$ ; in altre parole possono esistere *intervalli di diramazione*  $F_1 \leq F \leq F_h$ , in cui ad ogni valore di  $F$  può corrispondere un punto di diramazione.

Con riferimento alla trave ad asse rettilineo e di sezione costante (Cap. II) la formula di Eulero è valida finchè la tensione critica  $\sigma_c$  è inferiore al valore assoluto di quella di elasticità  $\sigma''_e$ ; anzi, con maggiore precisione, della tensione di proporzionalità  $\sigma''_p$ , attesi i limiti delle espressioni di Navier per le travi inflesse.

Quindi la formula di Eulero è condizionata (2-18) da

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E \leq |\sigma''_p|$$

e cioè da

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{|\sigma''_p|}} \quad (m)$$

Se si chiama *snellezza limite* il numero

$$\lambda_t = \pi \sqrt{\frac{E}{|\sigma''_p|}} \quad (1)$$

la disuguaglianza (m) si scrive

$$\lambda \geq \lambda_t \quad (2)$$

La  $\lambda_t$  è funzione del materiale; si dà il caso, però, che per acciaio, legno e conglomerato sia sempre compreso tra 80 e 100.

La relazione tra  $\lambda^2$  e  $\sigma_c$  fornita dalla formula di Eulero

$$\sigma_c \lambda^2 = \pi^2 E$$

è una iperbole equilatera (fig. 3-10) avente per asintoti gli assi  $\sigma_c$  e  $\lambda^2$  (*iperbole di Eulero*); tale curva è valida, per quanto detto, solo per  $\lambda \geq \lambda_t$ , e cioè nel tratto a destra di B.

La  $\sigma_c$  non può comunque superare il valore della tensione di crisi a compressione  $\sigma''_o$ ; d'altro canto, per  $\lambda = 0$  il solido è così tozzo che la tensione critica  $\sigma_c$  coincide con la tensione di crisi a compressione. Quindi il ramo DB della curva  $\sigma_c \lambda^2$  per  $\lambda < \lambda_t$  deve avere in B, per continuità, la stessa tangente dell'iperbole di Eulero, deve essere tutta al disotto dell'orizzontale per D (dove D è il punto di ordinata  $\sigma''_o$ ), ed incontrare in D



conoscendo  $\omega$ , ed il rapporto  $s_{i \min}/s_{t \min}$  assunto per il calcolo di  $\omega$ , è possibile risalire ad  $s$ .

Si osservi (fig. 3-11) che se  $s_{i \min} = s_{t \min}$ , è

$$\omega = \frac{FE}{GE}$$

Nelle tabelle da 3-1 a 3-5, sono riportati i valori di  $\omega$  (in funzione di  $\lambda$ ) per acciai UNI comuni e di qualità e per la ghisa, dalle «Istruzioni per il calcolo, l'esecuzione e la manutenzione delle costruzioni metalliche» del C.N.R. (1946); nella tabella 3-6 i valori di  $\omega$  per il legno da ponteggio, presi dal Krall; nella tabella 3-7 i valori di  $\omega$  per il conglomerato, suggeriti dalle «Istruzioni per l'esecuzione delle opere in conglomerato cementizio semplice od armato» del C.N.R.

Le proposte di Istruzioni del C.N.R. del 1963 dividono gli acciai in due tipi, con tensioni ammissibili di 1600 e 2400 Kg/cm<sup>2</sup> (tabelle VIII e IX).

TABELLA I

COEFFICIENTE  $\omega$  DI AUMENTO DEL CARICO  
per il ferro agglomerato  $\sigma_a = 9 \text{ Kg/mm}^2$

$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	1,00	1,01	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06
40	1,07	1,07	1,08	1,09	1,10	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14
50	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,20	1,21	1,22
60	1,23	1,24	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,31	1,33
70	1,34	1,35	1,36	1,37	1,38	1,40	1,41	1,42	1,43	1,45
80	1,46	1,47	1,49	1,50	1,52	1,53	1,55	1,56	1,58	1,59
90	1,61	1,62	1,64	1,66	1,68	1,69	1,71	1,73	1,75	1,77
100	1,79	1,81	1,83	1,85	1,87	1,90	1,92	1,94	1,97	1,99
110	2,02	2,04	2,07	2,10	2,12	2,15	2,18	2,21	2,24	2,28
120	2,31	2,34	2,38	2,41	2,45	2,49	2,53	2,57	2,62	2,66
130	2,70	2,74	2,78	2,82	2,87	2,91	2,95	3,00	3,04	3,08
140	3,13	3,17	3,22	3,26	3,31	3,36	3,40	3,45	3,50	3,54
150	3,59	3,64	3,69	3,74	3,78	3,83	3,88	3,93	3,98	4,03
160	4,09	4,14	4,19	4,24	4,29	4,34	4,40	4,45	4,50	4,56
170	4,61	4,67	4,72	4,78	4,83	4,89	4,94	5,00	5,06	5,11
180	5,17	5,23	5,29	5,34	5,40	5,46	5,52	5,58	5,64	5,70
190	5,76	5,82	5,88	5,94	6,01	6,07	6,13	6,19	6,26	6,32
200	6,38	6,45	6,51	6,58	6,64	6,71	6,77	6,84	6,90	6,97

Si avverte ancora che il metodo è valido solo per travi a sezione costante, e  $\lambda$  è il rapporto tra la lunghezza libera d'inflessione, ed il più piccolo tra i raggi di inerzia relativi a tutti i possibili piani di inflessione.

TABELLA II

COEFFICIENTE  $\omega$  DI AUMENTO DEL CARICO  
 per l'acciaio in verghe A 37 UNI 743  
 » » in lamiera A 42 UNI 815  $\sigma_a = 14 \text{ Kg/mm}^2$   
 » » in tubi Aq 35 UNI 663

$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	1,00	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08
40	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15	1,16	1,17	1,18
50	1,20	1,21	1,22	1,23	1,25	1,26	1,27	1,28	1,30	1,31
60	1,33	1,34	1,36	1,37	1,39	1,40	1,42	1,44	1,45	1,47
70	1,49	1,51	1,53	1,54	1,56	1,58	1,61	1,63	1,65	1,67
80	1,69	1,72	1,74	1,77	1,79	1,82	1,85	1,88	1,91	1,94
90	1,97	2,00	2,03	2,07	2,10	2,14	2,18	2,22	2,26	2,30
100	2,35	2,40	2,46	2,51	2,56	2,61	2,66	2,71	2,76	2,81
110	2,80	2,91	2,97	3,02	3,07	3,13	3,18	3,24	3,29	3,35
120	3,40	3,46	3,52	3,58	3,64	3,69	3,75	3,81	3,87	3,93
130	4,00	4,06	4,12	4,18	4,24	4,31	4,37	4,44	4,50	4,57
140	4,63	4,70	4,77	4,83	4,90	4,97	5,04	5,11	5,18	5,25
150	5,32	5,39	5,46	5,53	5,61	5,68	5,75	5,83	5,90	5,98
160	6,05	6,13	6,20	6,28	6,36	6,44	6,51	6,59	6,67	6,75
170	6,83	6,91	6,99	7,08	7,16	7,24	7,32	7,41	7,49	7,57
180	7,66	7,74	7,83	7,92	8,00	8,09	8,18	8,27	8,36	8,44
190	8,53	8,62	8,71	8,81	8,90	8,99	9,08	9,17	9,27	9,36
200	9,46	9,55	9,65	9,74	9,84	9,93	10,00	10,10	10,20	10,30

TABELLA III

COEFFICIENTE  $\omega$  DI AUMENTO DEL CARICO  
 per l'acciaio in verghe Aq 42 UNI 743  
 » » in lamiera Aq 48 UNI 815  $\sigma_a = 16 \text{ Kg/mm}^2$

$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08	1,09
40	1,10	1,11	1,12	1,13	1,15	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21
50	1,22	1,24	1,25	1,26	1,28	1,29	1,31	1,33	1,34	1,36
60	1,38	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	1,53	1,55
70	1,57	1,60	1,62	1,64	1,67	1,69	1,72	1,75	1,78	1,80
80	1,83	1,87	1,90	1,93	1,96	2,00	2,04	2,08	2,12	2,16
90	2,20	2,25	2,29	2,34	2,39	2,44	2,49	2,54	2,60	2,65
100	2,70	2,76	2,81	2,87	2,92	2,98	3,04	3,09	3,15	3,21
110	3,27	3,33	3,39	3,45	3,51	3,57	3,64	3,70	3,76	3,83
120	3,89	3,96	4,02	4,09	4,15	4,22	4,29	4,36	4,43	4,50
130	4,57	4,64	4,71	4,78	4,85	4,92	5,00	5,07	5,15	5,22
140	5,30	5,37	5,45	5,53	5,60	5,68	5,76	5,84	5,92	6,00
150	6,08	6,16	6,24	6,33	6,41	6,49	6,58	6,66	6,73	6,83
160	6,92	7,00	7,09	7,18	7,27	7,36	7,45	7,54	7,63	7,72
170	7,81	7,90	7,99	8,09	8,18	8,27	8,37	8,47	8,56	8,66
180	8,75	8,85	8,95	9,05	9,15	9,25	9,35	9,45	9,55	9,65
190	9,75	9,86	9,96	10,06	10,17	10,27	10,38	10,49	10,59	10,70
200	10,81	10,92	11,03	11,13	11,24	11,36	11,47	11,58	11,69	11,80

TABELLA IV

COEFFICIENTE  $\omega$  DI AUMENTO DEL CARICO

per l'acciaio in verghe Aq 50 UNI 743

» » in lamiera Aq 53 UNI 815

» » in tubi Aq 55 UNI 663

$$\sigma_a = 18 \text{ Kg/mm}^2$$

$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	1,06	1,07	1,09	1,10
40	1,11	1,12	1,13	1,15	1,16	1,17	1,19	1,20	1,22	1,23
50	1,25	1,26	1,28	1,29	1,31	1,33	1,35	1,36	1,38	1,40
60	1,42	1,44	1,46	1,49	1,51	1,53	1,55	1,58	1,60	1,63
70	1,66	1,68	1,71	1,74	1,77	1,80	1,84	1,87	1,91	1,94
80	1,98	2,02	2,06	2,10	2,15	2,20	2,24	2,30	2,35	2,41
90	2,46	2,52	2,57	2,63	2,69	2,74	2,80	2,86	2,92	2,98
100	3,04	3,10	3,16	3,22	3,29	3,35	3,42	3,48	3,55	3,61
110	3,68	3,74	3,81	3,88	3,95	4,02	4,09	4,16	4,23	4,30
120	4,38	4,45	4,52	4,60	4,67	4,75	4,83	4,90	4,98	5,06
130	5,14	5,22	5,30	5,38	5,46	5,54	5,62	5,70	5,79	5,87
140	5,96	6,04	6,13	6,22	6,30	6,39	6,48	6,57	6,66	6,75
150	6,84	6,93	7,02	7,12	7,21	7,30	7,40	7,49	7,59	7,68
160	7,78	7,88	7,98	8,08	8,18	8,28	8,38	8,48	8,58	8,68
170	8,78	8,89	8,99	9,10	9,20	9,31	9,42	9,52	9,63	9,74
180	9,85	9,96	10,07	10,18	10,29	10,40	10,52	10,63	10,74	10,86
190	10,97	11,09	11,20	11,32	11,44	11,56	11,68	11,80	11,92	12,04
200	12,16	12,28	12,40	12,53	12,65	12,77	12,90	13,02	13,15	13,28

TABELLA V

COEFFICIENTE  $\omega$  DI AUMENTO DEL CARICOper ghisa grigia  $\sigma_a = 10 \text{ Kg/mm}^2$ 

$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	1,00	1,01	1,03	1,05	1,06	1,08	1,09	1,11	1,13	1,15
20	1,17	1,18	1,20	1,22	1,24	1,26	1,28	1,31	1,33	1,35
30	1,37	1,40	1,42	1,45	1,47	1,50	1,52	1,55	1,58	1,61
40	1,64	1,67	1,70	1,73	1,77	1,80	1,83	1,87	1,91	1,95
50	1,98	2,02	2,07	2,11	2,15	2,20	2,24	2,29	2,34	2,39
60	2,44	2,49	2,55	2,60	2,66	2,72	2,78	2,85	2,91	2,98
70	3,05	3,12	3,19	3,27	3,35	3,43	3,51	3,60	3,69	3,78
80	3,89	3,99	4,09	4,19	4,29	4,39	4,50	4,60	4,71	4,82
90	4,92	5,03	5,15	5,26	5,37	5,49	5,60	5,72	5,84	5,96
100	6,08	6,20	6,33	6,45	6,58	6,70	6,83	6,96	7,09	7,22
110	7,36	7,49	7,63	7,76	7,90	8,04	8,18	8,32	8,46	8,61
120	8,75	8,90	9,05	9,20	9,35	9,50	9,65	9,80	9,96	10,12
130	10,27	10,43	10,59	10,75	10,92	11,08	11,24	11,41	11,58	11,75
140	11,91	12,09	12,26	12,43	12,61	12,78	12,96	13,14	13,32	13,50
150	13,68	13,86	14,04	14,23	14,42	14,60	14,79	14,98	15,18	15,37
160	15,56	15,76	15,95	16,15	16,35	16,55	16,75	16,95	17,16	17,36
170	17,57	17,78	17,98	18,19	18,40	18,62	18,83	19,04	19,26	19,48
180	19,70	19,92	20,14	20,36	20,58	20,81	21,03	21,26	21,49	21,71

TABELLA VI  
COEFFICIENTE  $\omega$  DI AUMENTO DEL CARICO  
per il legno da ponteggio

$\lambda$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,00	1,01	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,06	1,06
10	1,07	1,08	1,09	1,09	1,10	1,11	1,12	1,13	1,14	1,15
20	1,15	1,16	1,17	1,18	1,19	1,20	1,21	1,22	1,23	1,24
30	1,25	1,26	1,27	1,28	1,29	1,30	1,32	1,33	1,34	1,35
40	1,36	1,38	1,39	1,40	1,42	1,43	1,44	1,46	1,47	1,49
50	1,50	1,52	1,53	1,55	1,56	1,58	1,60	1,61	1,63	1,65
60	1,67	1,69	1,70	1,72	1,74	1,76	1,79	1,81	1,83	1,85
70	1,87	1,90	1,92	1,95	1,97	2,00	2,03	2,05	2,08	2,11
80	2,14	2,17	2,21	2,24	2,27	2,31	2,34	2,38	2,42	2,46
90	2,50	2,54	2,58	2,63	2,68	2,73	2,78	2,83	2,88	2,94
100	3,00	3,07	3,14	3,21	3,28	3,35	3,43	3,50	3,57	3,65
110	3,73	3,81	3,89	3,97	4,05	4,13	4,21	4,29	4,38	4,46
120	4,55	4,64	4,73	4,82	4,91	5,00	5,09	5,19	5,28	5,38
130	5,48	5,57	5,67	5,77	5,88	5,98	6,08	6,19	6,29	6,40
140	6,51	6,62	6,73	6,84	6,95	7,07	7,18	7,30	7,41	7,53
150	7,65	7,77	7,90	8,02	8,14	8,27	8,30	8,52	8,65	8,78

TABELLA VII  
COEFFICIENTE  $\omega$  DI AUMENTO DEL CARICO  
per il cemento armato (\*)

A) Pilastri ordinari			B) Pilastri con cerchiatura a spirale	
$\lambda$	$l_0/b$	$\omega$	$l_0/D$	$\omega$
50	14,4	1,000	13	1,00
55	15,9	1,055	14	1,10
60	17,3	1,116	15	1,20
65	18,8	1,182	16	1,30
70	20,2	1,253	17	1,40
75	21,7	1,330	18	1,50
80	23,1	1,513	19	1,60
85	24,5	1,708	20	1,70
90	26,0	1,915	21	1,90
95	27,4	2,134	22	2,10
100	28,9	2,364	23	2,30
105	30,3	2,606	24	2,50
110	31,8	2,860	25	2,70
115	33,2	3,127		
120	34,6	3,404		

(\*) Il  $\rho_{\min}$  è calcolato prescindendo dalle armature;  $b$  è la dimensione minima della sezione trasversale, se rettangolare;  $D$  è il diametro del nucleo cerchiato, nel caso B).





**3. Le formule di Shanley-Engesser e di V. Karman**

Si consideri la trave con cerniera ed appoggio della fig. 3-11, di sezione costante, caricata assialmente in un estremo; la direzione dell'asse neutro

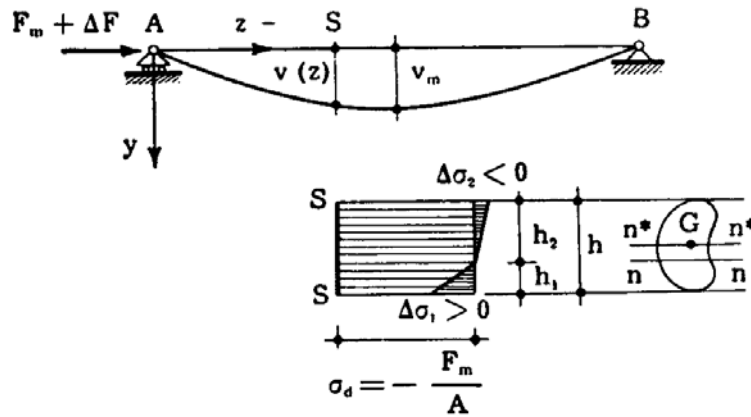


FIG. 3-11

della possibile flessione sia  $n$ . Rispetto alla  $n^*$ , parallela ad  $n$  e baricentrica, la sezione sia simmetrica. Il materiale di cui è costituita la trave è caratterizzato dal diagramma  $\sigma\varepsilon$  della fig. 3-12. La trave, studiata in campo elastico, presenti un carico critico superiore al valore  $|\sigma''_p| A$ ; il reale carico critico  $F_c$  deve essere ricercato quindi con formula diversa da quella di Eulero.

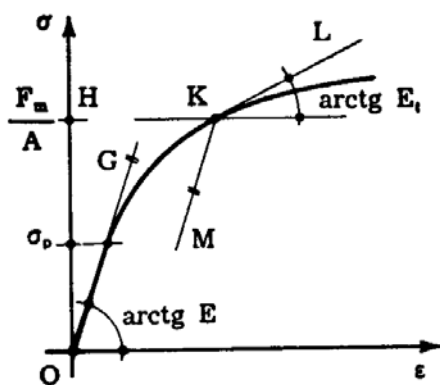


FIG. 3-12

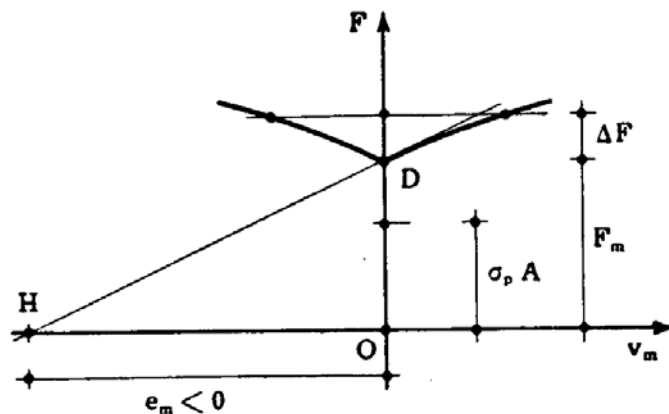


FIG. 3-13

Si riportino in ascissa (fig. 3-13) i valori  $v_m$  dello spostamento della sezione di mezzeria, ed in ordinata i valori di  $F$ ; la curva  $F$  non è obbligata, come già detto (§ 3-1) a presentare in  $D$  tangente orizzontale. Se quindi è  $F_m$  un valore di  $F$  per cui la trave può cominciare ad inflettersi,

in corrispondenza della configurazione diramata può essere  $F \neq F_m$ . Si ponga

$$F = F_m + \Delta F$$

dove  $\Delta F$  può essere positivo o negativo. In tale situazione, il diagramma delle  $\sigma$  in una sezione generica  $S$  si presenta come nella fig. 3-11; esso consta di una parte costante  $\sigma_d$  pari a  $-F_m/A$ , ed una parte  $\Delta\sigma$  bitriangolare, di valori estremi  $\Delta\sigma_1$  positiva e  $\Delta\sigma_2$  negativa, che si annulla sull'asse neutro  $n$  (\*). Le  $\Delta\sigma dA$  equivalgono ad una forza assiale  $\Delta F$ , e ad un momento  $\Delta M$  pari a  $(F_m + \Delta F)v$ .

Se si ammette che le sezioni restino piane, il rapporto tra le inclinazioni  $d\Delta\sigma/dy$  dei due diagrammi  $\Delta\sigma$  positivo e negativo è pari a

$$\frac{\frac{\Delta\sigma_1}{h_1}}{\frac{\Delta\sigma_2}{h_2}} = \frac{E}{E_t};$$

infatti in due punti equidistanti dall'asse neutro le  $\varepsilon$  dovute alla inflessione sono uguali in valore, e le due  $\sigma$  quindi (fig. 3-12) stanno nel rapporto  $E/E_t$ .

Fissato  $n$ , e cioè la sua distanza  $h_1$  dal bordo che per l'inflessione si allunga (\*\*),  $\Delta F$  e  $\Delta M$  sono proporzionali a  $\Delta\sigma_1$ ; può quindi in generale porsi

$$\begin{aligned} \Delta F &= f(h_1) \Delta\sigma_1 \\ \Delta M &= g(h_1) \Delta\sigma_1 \end{aligned} \quad (n)$$

da cui

$$\Delta M = \Delta F \frac{f(h_1)}{g(h_1)} = e \Delta F \quad (o)$$

La  $e(h_1)$  è l'eccentricità che occorre dare a  $\Delta F$  per generare, rispetto al baricentro, un momento  $\Delta M$ . Si ha, nella generica sezione  $S$ ,

$$e = - \frac{\Delta M}{\Delta F} = - \frac{\Delta M}{F - F_m} = - \frac{Fv}{F - F_m} = \frac{v}{\frac{F_m}{F} - 1} \quad (p)$$

(\*) Sull'asse  $n$  le dilatazioni, e quindi le tensioni, sono nulle per effetto dell'inflessione.

(\*\*)  $h_1$  ed  $h_2$  sono positivi se situati al disotto del punto ove  $\Delta\sigma = 0$ ; così  $h_1$  ed  $h_2$  hanno, per  $v > 0$ , lo stesso segno del  $\Delta\sigma$  corrispondente.

In  $z=0$  e  $z=l$ , è sempre  $\Delta M=0$ , e quindi  $e=0$ ; invece nella sezione di mezzeria, dove  $v$  e quindi  $\Delta M$  sono massimi, possono darsi due casi limiti. Il diagramma delle  $\Delta\sigma$  in detta sezione deve presentarsi infatti sempre intrecciato; al massimo (fig. 3-14 a, b) può verificarsi  $\Delta\sigma_1=0$ , o  $\Delta\sigma_2=0$ . Se infatti in  $z=l/2$  fossero  $\Delta\sigma_1$  e  $\Delta\sigma_2$  dello stesso se-

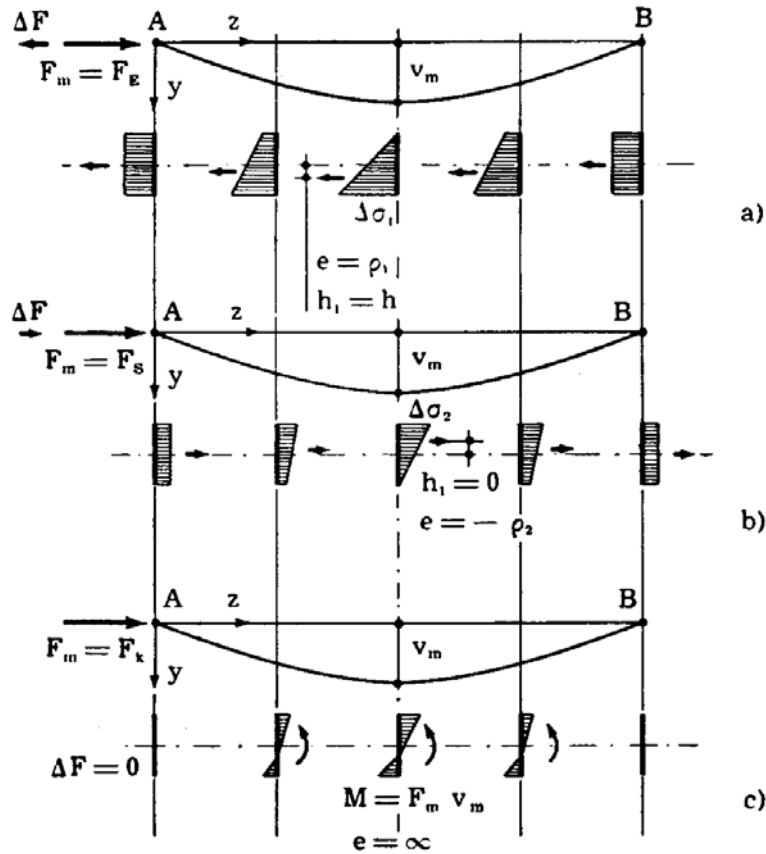


FIG. 3-14

gno, e cioè il diagramma fosse trapezio, lo sarebbe con la stessa ordinata media e con minore inclinazione in tutte le altre sezioni; a tutti questi diagrammi potrebbe essere sottratta un'area rettangolare di altezza costante  $\Delta\sigma^*$ , corrispondente ad una forza assiale  $\Delta F^* = \Delta\sigma^* A$ .

Sia le tensioni  $\Delta\sigma$  che le  $\Delta\sigma - \Delta\sigma^*$  corrisponderebbero agli stessi momenti flettenti, e quindi agli stessi spostamenti  $v$ ; d'altro canto, se  $v$  sono gli stessi, i momenti flettenti sarebbero diversi nei due casi, e pari a  $\Delta F v$  nel primo e  $(\Delta F + \Delta F^*) v$  nel secondo. L'equilibrio quindi non sarebbe rispettato. I due estremi di  $e$  in  $z=l/2$  sono perciò i due valori del raggio di nocciolo  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , ed  $e$  ( $h_1$ ) deve rispettare, in detta sezione, la relazione

$$\rho_1 \leq e \leq \infty \quad (\text{per } h_1 = h)$$

oppure

$$-\infty \leq e \leq -\rho_2 \quad (\text{per } h_1 = 0) . \quad (q)$$

Si osserva che, nel caso dello scarico di tutte le fibre in  $z = l/2$  (fig. 3-14 a) è  $\Delta F < 0$  (e cioè, il valore di  $F_m$  diminuisce), mentre nel caso del carico di tutte le fibre è  $\Delta F > 0$ .

Sempre nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, all'ascissa generica  $S$  è

$$\frac{1}{r} = - \frac{\Delta \varepsilon_1 - \Delta \varepsilon_2}{h} = - \frac{\Delta \varepsilon_1}{h} \left( 1 - \frac{h_1}{h_2} \right) = - \frac{\Delta \varepsilon_1}{h}$$

da cui

$$\frac{1}{r} = - \frac{\Delta \sigma_1}{E_t h_1} .$$

La seconda delle (n) porge così

$$\Delta M = - g(h_1) \frac{E_t h_1}{r} ,$$

da cui

$$\frac{1}{r} = - \frac{\Delta M}{E_v I} \quad (r)$$

dove

$$E_v = E_t g(h_1) \frac{h_1}{I} \quad (s)$$

è un modulo d'elasticità ideale.

Nel caso limite della fig. 3-14 a, risulta in tutte le sezioni

$$\frac{1}{r} = - \frac{\Delta M}{EI}$$

e quindi, confrontando con la (r),

$$E_v = E . \quad (t)$$

Nel caso limite della fig. 3-14 b è invece in ogni sezione

$$\frac{1}{r} = - \frac{\Delta M}{E_t I}$$

e quindi

$$E_v = E_t . \quad (u)$$

Nel caso della fig. 3-14 c, ove in  $z = l/2$ , e quindi in ogni sezione, è  $\Delta F = 0$ , risulta invece

$$\frac{1}{r} = - \frac{\Delta M}{E_k I} .$$

L'asse neutro  $n$  (e cioè  $h_1$ ) è fornito dalla condizione

$$\int_A \sigma dA = 0 ,$$

che si traduce nell'altra (fig. 3-11)

$$\int_0^{h_1} E d_n dA + \int_0^{h_2} E_t d_n dA = 0 ; \quad (v)$$

ottenuto  $n$ , è

$$\Delta M = - \frac{E}{r} \int_0^{h_1} y^2 dA - \frac{E_t}{r} \int_0^{h_2} y^2 dA = - \frac{E}{r} \left( I_1 + \frac{E_t}{E} I_2 \right) . \quad (z)$$

Le  $y$  sono prese a partire dall'asse baricentrico  $n^* \equiv x$  parallelo ad  $n$ ;  $I_1$  e  $I_2$  sono perciò relativi ad  $n^*$ . Dalla (z) si trae, per ogni sezione,

$$E_k = \frac{1}{I} (E I_1 + E_t I_2) . \quad (a')$$

Il modulo  $E_k$  si chiama *modulo ridotto di V. Kármán*.

Per i primi spostamenti  $v$  si può porre, al solito,

$$\frac{1}{r} = - v'' ,$$

e dalla (r)

$$v'' = \frac{\Delta M}{E_v I} = \frac{Fv}{E_v I} ,$$

da cui

$$v'' E_v I + Fv = 0 \quad (b')$$

con le condizioni

$$\begin{array}{lll} z=0 & v=0 & v''=0 \\ z=l & v=0 & v''=0 \end{array}$$

La (b') porge nei tre casi della fig. 3-14

$$\begin{aligned} F_m &= \pi^2 \frac{EI}{l^2} = F_E \\ F_m &= \pi^2 \frac{E_t I}{l^2} = F_S \\ F_m &= \pi^2 \frac{E_k I}{l^2} = F_K \end{aligned} \tag{c'}$$

carico di *Eulero*, carico di *Shanley-Engesser* e carico di *V. Kármán*. Il modulo  $E_v$  è funzione di  $h_1$ , e può assumere solo e qualsiasi valore com-

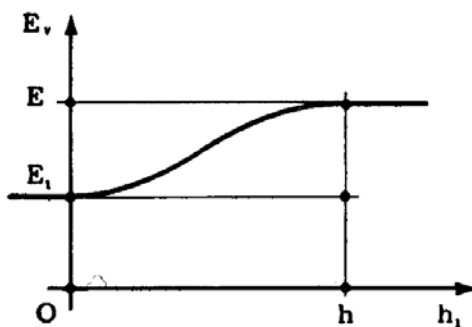


FIG. 3-15

preso tra  $E$  ed  $E_t$  (fig. 3-15). Infatti dalle (r) e (z) si ha (la (z) è valida quale che sia  $n$ )

$$E_v = \frac{E}{I} \left( I_1 + \frac{E_t}{E} I_2 \right);$$

per  $h_1 \geq h$  è  $I = I_1$ , e

$$E_v = \frac{E}{I} I_1 = E;$$

per  $h_1 \leq 0$  è  $I = I_2$ , e

$$E_v = \frac{E}{I} \frac{E_t}{E} I_2 = E_t ;$$

per  $0 \leq h_1 \leq h$  inoltre la funzione  $E(h_1)$  è sempre crescente.

Si può quindi asserire che  $F_m$ , il più basso tra gli  $F$  per cui la (b') ammette soluzione non nulla, può essere qualunque valore compreso tra  $F_E$  ed  $F_S$ , e può d'altronde essere ubicato solo in questo intervallo.

Dalla (p) si trae,

$$e = \frac{v}{\frac{F_m}{F} - 1} .$$

Effettuando il limite di  $e$  per  $v \rightarrow 0$  (ed  $F \rightarrow F_m$ ) si ha

$$\lim_{v \rightarrow 0} e = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{F_m \frac{d}{dv} \left( \frac{1}{F} \right)} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{F_m}{F^2} \frac{dF}{dv}} = - \frac{F_m}{\left( \frac{dF}{dv} \right)_{v=0}} ,$$

da cui

$$\left( \frac{dF}{dv} \right)_{v=0} = - \frac{F_m}{e_{v=0}} . \quad (d')$$

Dalla (d') si trae (fig. 3-13) che la tangente in D alla curva  $F v_m$  taglia sull'asse delle  $v_m$  un segmento OH di valore pari all' $e_m$  iniziale, ed ubicato alla sinistra dell'origine se  $e_m$  è negativo. Si deduce da ciò (fig. 3-16) che la curva  $F v_m$ , nel caso limite della fig. 3-14 a, parte da  $F = F_E$ , e decresce con  $v_m$ ; nel caso limite della fig. 3-14 b parte da  $F = F_S$  e cresce con  $v_m$ ; nel caso della fig. 3-14 c è stazionaria ( $e = \infty$ ). Nel caso più generale,  $E_v(z)$  è una funzione oscillante tra due estremi  $E_1$  ed  $E_2$  compresi nell'intervallo  $E_t E$ ; l'autovalore  $F_d$  della (b') è compreso a sua volta tra  $F_S$  ed  $F_E$ . Di più,  $E_v$  è ovunque inferiore ad  $E_K$  se  $F_m < F_K$ , e viceversa; nel primo caso è  $F_S \leq F_m \leq F_K$ , nel secondo  $F_K \leq F_m \leq F_E$ . Il comportamento della struttura nei due casi è essenzialmente diverso.

Nel primo caso in ogni sezione l'eccentricità  $e$  risulta negativa, e quindi

$$\frac{dF}{dv} = - \frac{F_m}{e} > 0 ;$$

ciò significa che in ogni sezione, in particolare in  $z = \ell/2$ , la funzione  $F v$



è crescente (fig. 3-16). Il contrario accade per  $F_K \leq F_m \leq F_E$ . Nell'ipotesi di piccoli spostamenti,  $F$  è comunque ristretto nell'intervallo  $F_S F_E$ ; ciò per quanto detto a proposito dei due casi limiti in  $z = l/2$  (fig. 3-14), che è valido per qualsiasi valore di  $v$ , purchè piccolo. Per  $v \rightarrow \infty$  (si perdo-

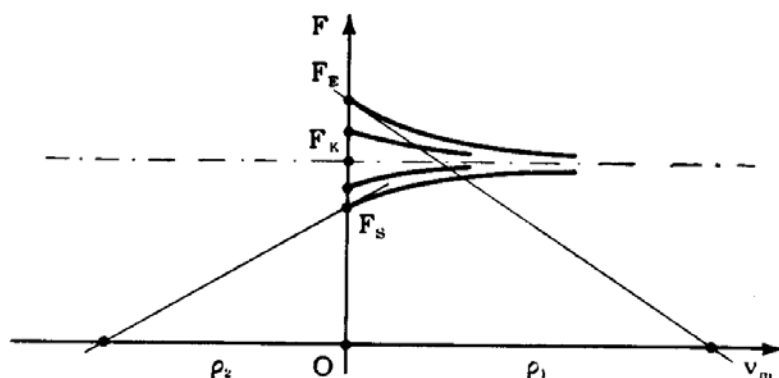


FIG. 3-16

ni la contraddizione, poichè in realtà non si vuole ricercare che un comportamento) dalla (p) risulta  $e \rightarrow \infty$ , e quindi  $\Delta F \rightarrow 0$ ; ciò significa che in qualsiasi caso (fig. 3-16) la curva  $F v_m$  tende all'asintoto orizzontale  $F = F_K$ .

Si usa dire, con termine leggermente improprio, che nel tratto  $F_S F_K$  la flessione è stabile, nel tratto  $F_K F_E$  instabile; si può comunque accettare che il campo interessante il tecnico è solo quello  $F_S F_K$ , e che prudentialmente è da prendere  $F_S$  come valore critico  $F_c$ :

$$F_c = \frac{\pi^2 E_t I}{\ell^2}; \quad (6)$$

è questa la cosiddetta *formula di Shanley*, già ricavata nel 1898 dall'*Engesser* partendo però da presupposti errati, e giustificata in rigore su schema dallo *Shanley* nel 1947, e dallo scrivente in generale nel 1953.

La (3-6) permetterebbe di disegnare il tratto BD della curva  $\sigma_c \lambda^2$  (fig. 3-10), in funzione del solo materiale; assegnato infatti  $\lambda$ , la  $\sigma_c$  è fornita da

$$\sigma_c = \frac{\pi^2}{\lambda^2} E_t. \quad (7)$$

Poichè la  $E_t$  è funzione di  $\sigma_c$ , sulla (3-7) si deve operare per successive approssimazioni.

#### 4. Il calcolo alla Shanley del carico critico delle strutture monodimensionali.

Quanto detto per la trave di sezione costante vale integralmente per qualsiasi struttura monodimensionale sollecitata assialmente. Si ricercano, in generale, per forze crescenti secondo un parametro  $F$ , e su strutture in cui gli spostamenti siano trascurabili nella configurazione non diramata, i valori  $F_m$  di  $F$  in corrispondenza dei quali può diramarsi una configurazione equilibrata. L'equazione di equilibrio di quest'ultima è, nella forma più generale, del tipo

$$M_e = EI v'' ,$$

dove  $M_e$ , momento esterno, è dato da  $(F_m + \Delta F) f(v)$  (\*), ed  $E$  può assumere qualsiasi valore tra  $E_E$  ed  $E_t$ ;  $E = E_t$  se nel passaggio alla configurazione diramata le tensioni crescono ovunque in valore assoluto,  $E = E_E$  se diminuiscono ovunque,  $E$  assume valori intermedi tra  $E_t$  ed  $E_E$  se le tensioni in qualche punto aumentano e in altri diminuiscono. Il problema è quindi formalmente ricondotto a quello elastico della ricerca di  $F_c = F_s$  critico, per un materiale di modulo  $E_t$  (cui corrisponde  $F_{c \min}$ ), con l'unica differenza, di carattere operativo, della dipendenza di  $E_t$  da  $F_s$  attraverso il diagramma  $\sigma \epsilon$  del materiale; da cui la necessità di operare per successive approssimazioni.

Per esempio la trave della fig. 3-17 di sezione variabile può studiarsi

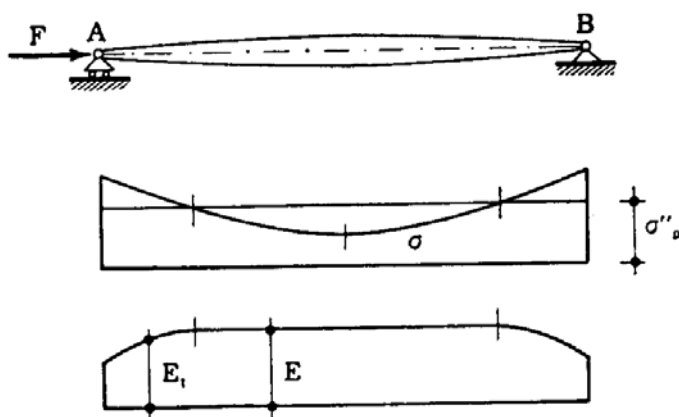


FIG. 3-17

con il metodo di *Vianello*, come una trave elastica ideale con modulo pari al modulo tangente, in quelle zone ove  $\sigma < |\sigma''_p|$ .

(\*) Il valore critico fornito dall'equazione di equilibrio è  $F_m + \Delta F$ , coincidente con  $F_m$  perchè, per  $v \rightarrow 0$ ,  $\Delta F$  tende pur esso a zero.

Il metodo esposto in questo paragrafo e nel precedente è applicabile con qualche riserva anche per strutture bidimensionali o nei casi in cui entra in gioco, con il modulo di elasticità normale, quello  $G$  tangenziale.

Si riporta di seguito un esempio di calcolo (*Locascio*) del carico critico in fase ultraelastica attraverso il metodo di *Vianello*.

Il diagramma  $\sigma\varepsilon$  del materiale (conglomerato cementizio) sia quello della fig. 3-18. La trave  $AB$  è appoggiata in  $A$  e incastrata in  $B$ , di luce

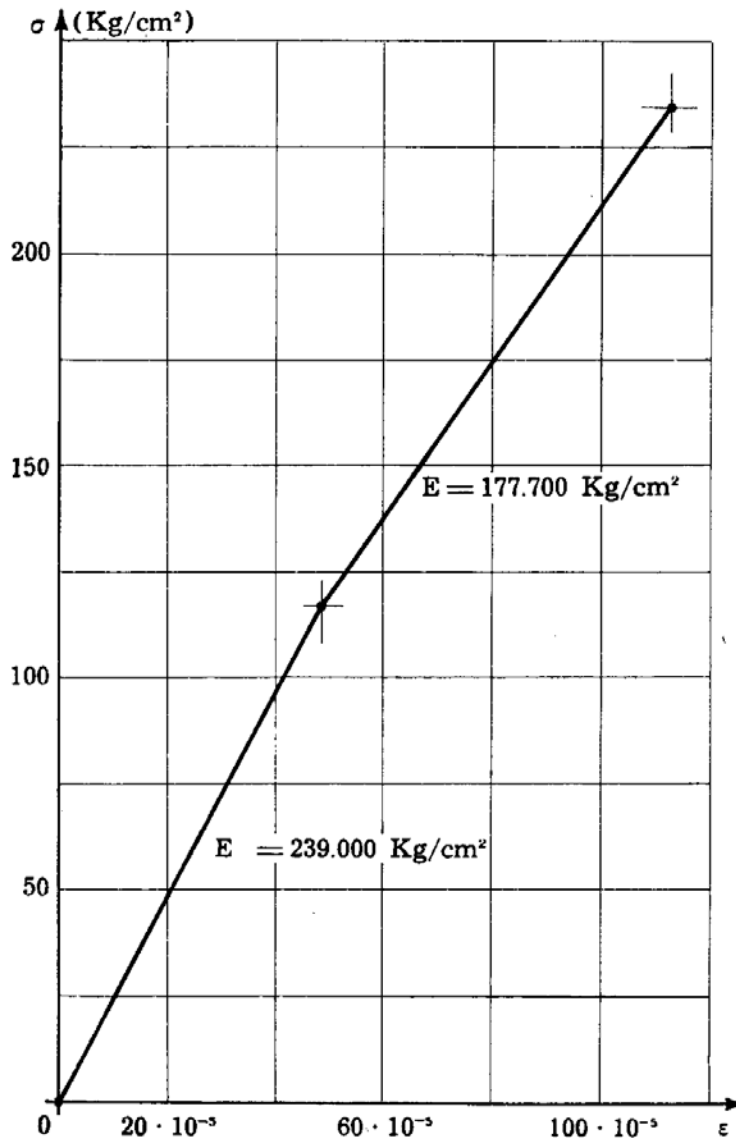


FIG. 3-18

$l = 10$  m, con sezione circolare di diametro variabile linearmente lungo l'asse ed armatura uguale all'1 % dell'area. Le sezioni hanno i seguenti diametri

sull'appoggio  $D = 16$  cm ,

all'incastro  $D = 24$  cm .

I carichi sono assiali, concentrati, pari ad  $F$  sull'appoggio,  $2F$  a 3 m,  $5F$  a 6 m da esso.

Nella fig. 3-19 è riportata la deformazione  $v$  provocata sulla trave, li-

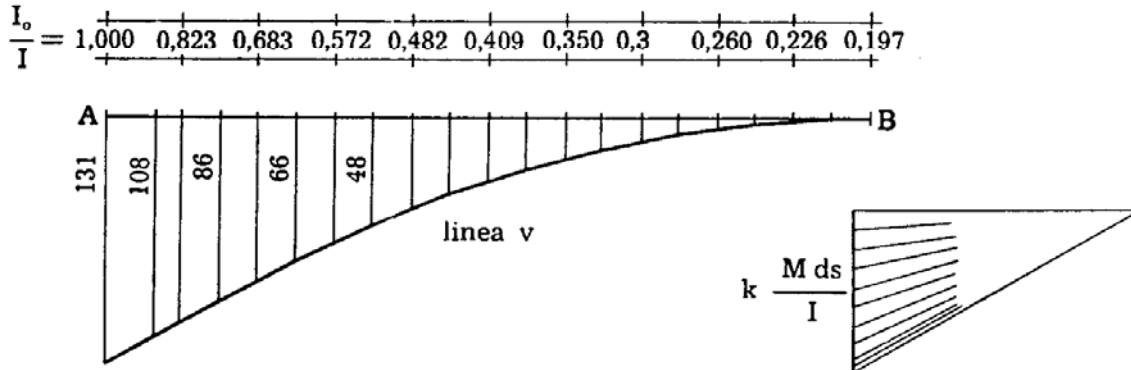


FIG. 3-19

bera in A e incastrata in B, da una forza concentrata qualsiasi agente in A ed ortogonale all'asse.

Nella fig. 3-20 a è disegnata una prima deformata  $v_0$  di tentativo, congruente ma arbitraria; nella stessa figura sono riportati i valori di  $M$  sulla mensola, a meno di  $F$ .

Nella fig. 3-20 b è integrata, sempre sulla mensola, la  $v_0$ ; si ha la curva tratteggiata  $v_1^*(z)$ , che non rispetta l'appoggio in A. La curva

$$v_1(z) = -v(z) \frac{v_{10}^*}{v_0} + v_1^*(z)$$

si assume come nuova deformata di tentativo, ottenendo da essa, in maniera analoga alla precedente, la  $v_2$  (fig. 3-20 c). In questa figura si leggono pure i rapporti  $v_2/v_1$ , che non risultano abbastanza vicini tra loro.

Si itera il procedimento, ottenendo  $v_3$  (fig. 3-20 d) e  $v_4$  (fig. 3-20 e); il rapporto tra le ordinate  $v_4$  e  $v_3$  diviene così pressochè costante lungo l'asse, e pari mediamente a 0,63. Dalla  $v_3$  alla  $v_4$  si è passati riportando nel poligono delle « aree curvature » i prodotti  $\frac{M dz}{EI} = \frac{k F v dz}{EI_0}$  a meno di  $F/EI_0$ ; essi sono quindi delle aree, ed avendo assunto pari ad 1,6 il rapporto  $r$  tra la misura in  $\text{cm}^2$  dei prodotti  $k v dz$  letti sul disegno e la misura dei segmenti che li rappresentano, e  $v_4/v_3 = 0,63$ , si ha

$$F_c = \frac{EI_0}{r \bar{S}_i^2 \frac{v_4}{v_3}} = 12.140 \text{ Kg} .$$

Questo sarebbe il carico critico se fosse ovunque  $\sigma_c \leq |\sigma''_v|$ .

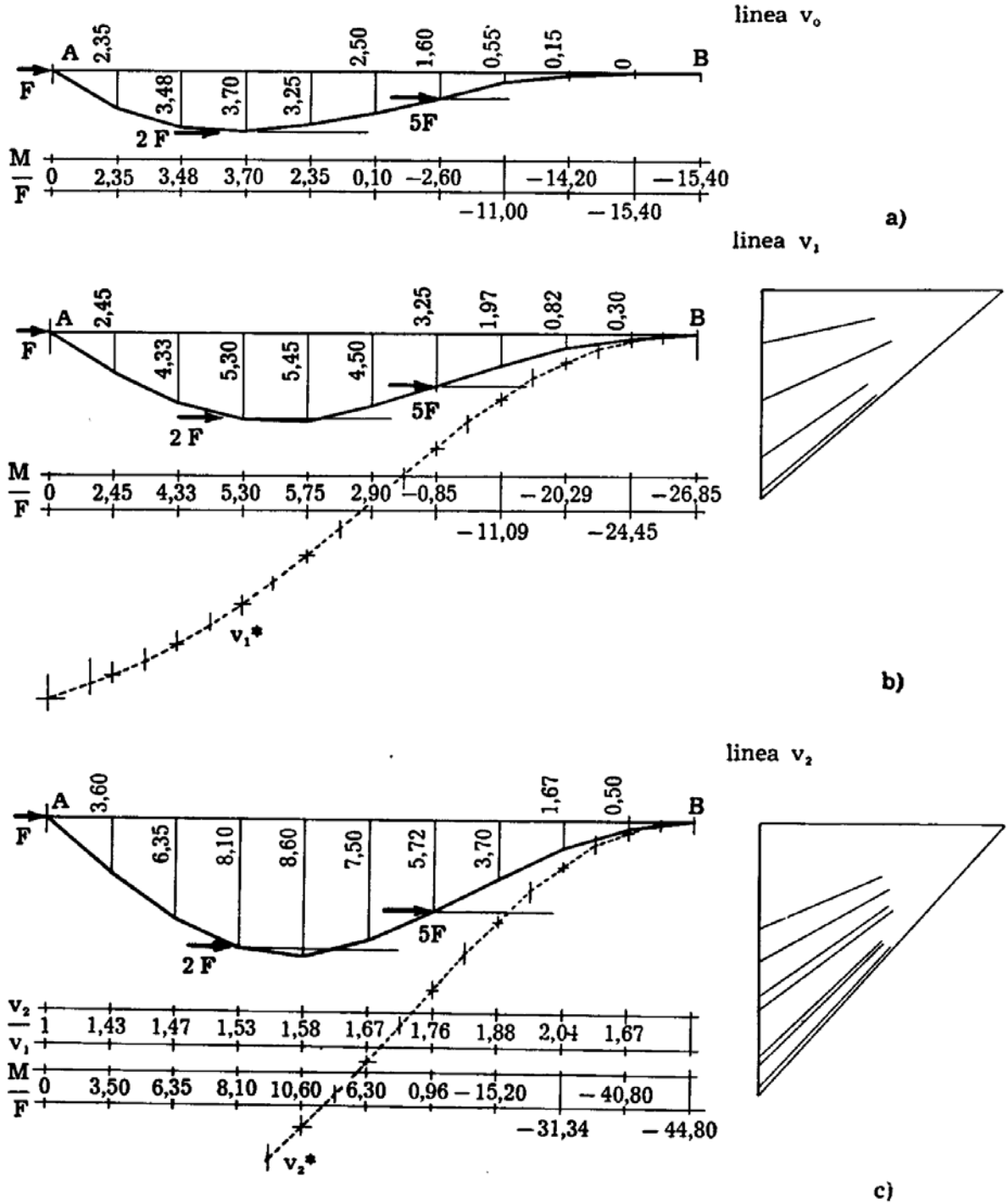
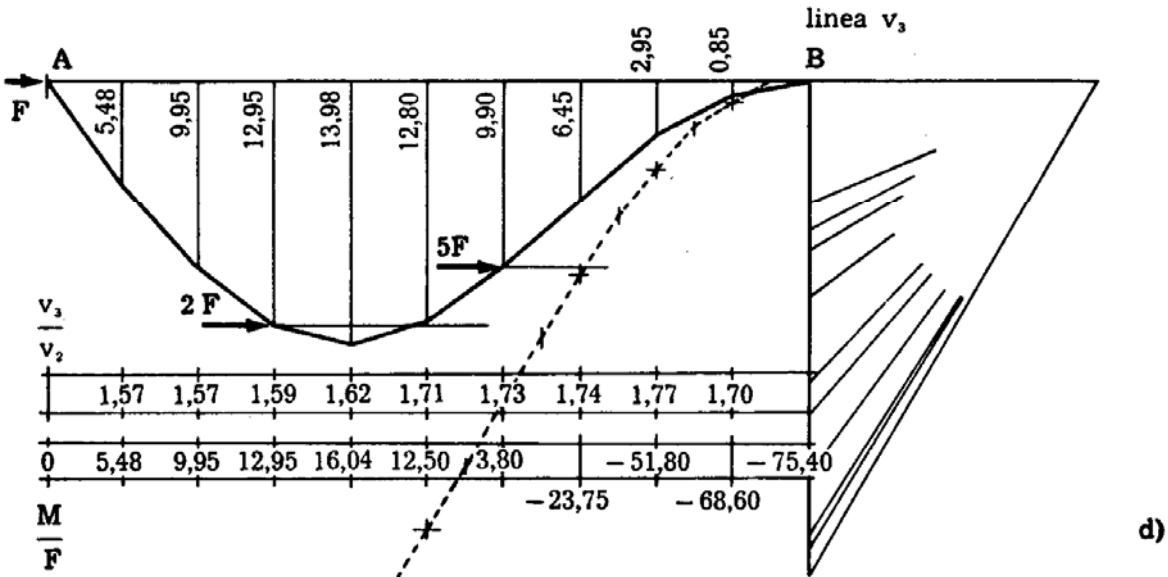
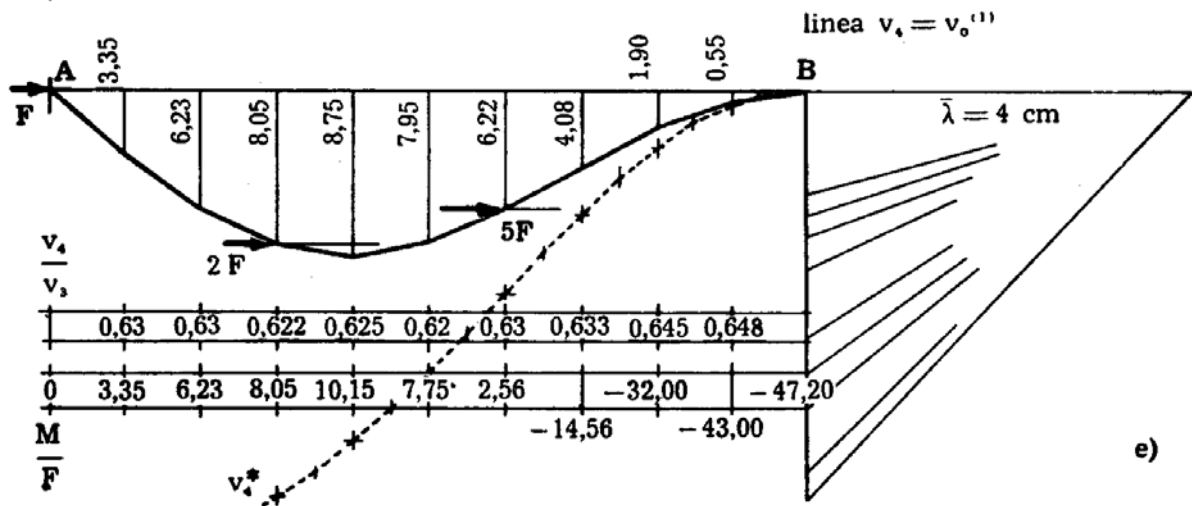


FIG. 3-20 a, b, c



$r = 1,6$   
 $S_i = 125$   
 $E = 239.000 \text{ Kg/cm}^2$   
 $I_o = 0,02 \times 20^4 \text{ cm}^4$   
 $F_{cr} = \frac{EI_o}{r S_i^2 \bar{\lambda} \frac{v_4}{v_3}} = 12.140 \text{ Kg}$



linea  $v_4 = v_0^{(1)}$

$\bar{\lambda} = 4 \text{ cm}$

linea  $\sigma_{cr}(z)$  1 cm = 258 Kg/cm<sup>2</sup>

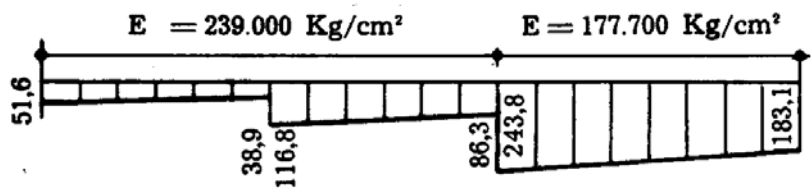


FIG. 3-20 d, e, f

Effettuando questa verifica (fig. 3-20 f) si osserva che in un tratto in prossimità dell'incastro la  $\sigma_c$  supera il valore assoluto della  $\sigma''_p$  di proporzionalità. Calcolati i valori  $E_o I_o/EI$  (fig. 3-21 a) si traccia la  $v$  con i

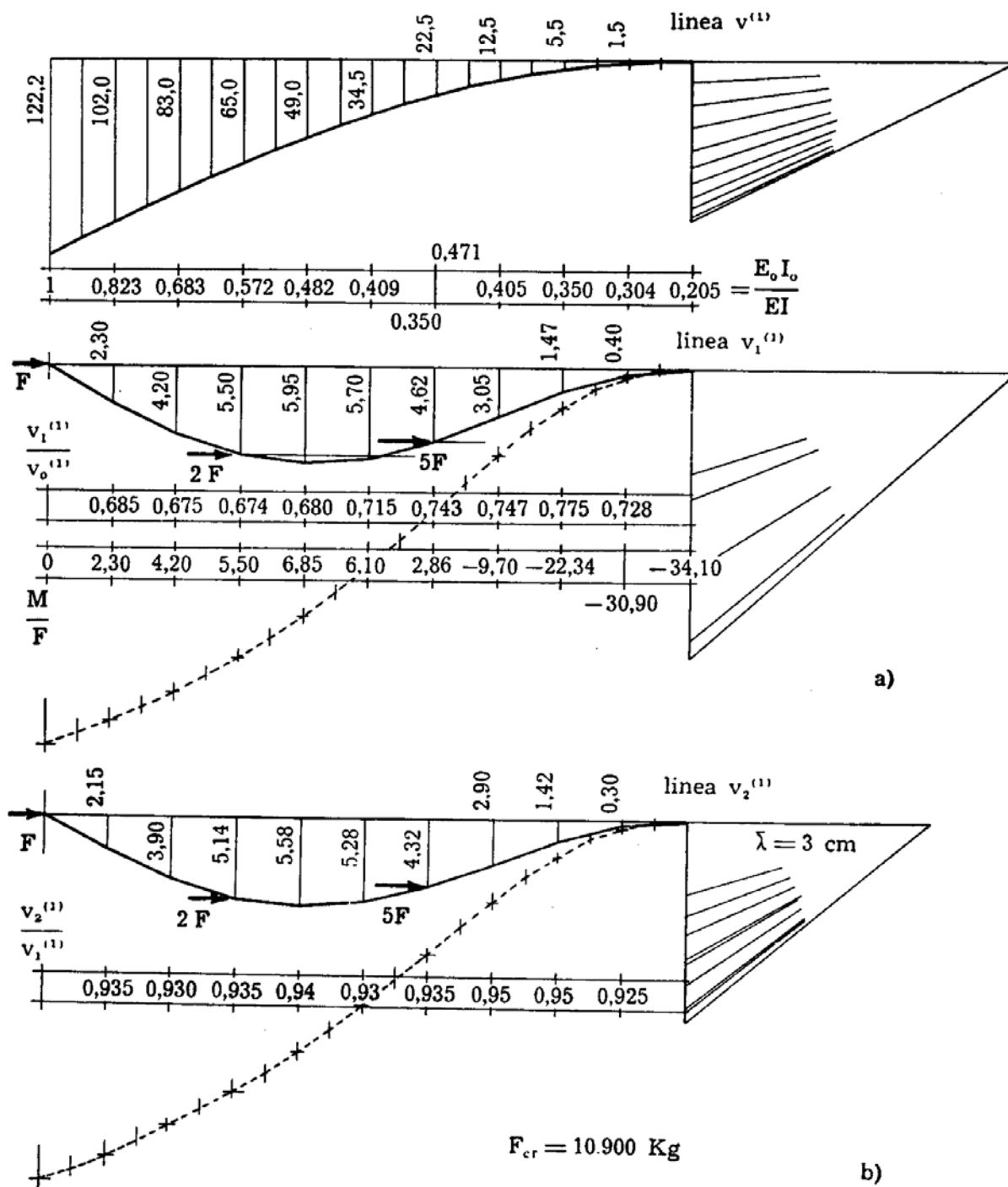


FIG. 3-21

momenti d'inerzia variati nei rapporti  $E/E_o$  (curva  $v^{(1)}$ ); poi, partendo da una  $v_o^{(1)}$  coincidente con la  $v_4$ , si perviene sempre con gli stessi momenti d'inerzia variati, a  $v_1^{(1)}$ , e da questa, con base 3 cm, a  $v_2^{(1)}$  (fig. 3-

21 b). Si ha così un valore pressochè uniforme di  $v_2^{(1)}/v_1^{(1)}$ , pari in media a 0,935, ed il valore del carico critico da poter assumere come reale

$$F_c = \frac{239.000 \cdot 0,02 \cdot 20^4}{1,6 \cdot 125^2 \cdot 3 \cdot 0,935} = 10.900 \text{ Kg .}$$

Il procedimento seguito per il tracciamento della deformata è estensibile a strutture più volte iperstatiche; partendo da una  $v_0$  congruente sulla struttura iperstatica, si determinano gli  $M$  e la  $v_1^*$  per la struttura isostatica; possedendo le  $v_i$  relative alle  $n$  reazioni iperstatiche agenti una per volta, si aggiungono alla  $v_1^*$  le  $v_i$  opportunamente dosate (ottenibili da un sistema di  $n$  equazioni algebriche di congruenza).