

INSTABILITA' DELLE LASTRE CILINDRICHE

1. Generalità. Equazioni di equilibrio in regime di membrana.

Se la *superficie media* della lastra, invece di essere *piana* come nei casi trattati nel Cap. X, è *cilindrica*, si è in presenza di una *struttura sottile a superficie media cilindrica* (già incontrata nel Cap. IX) ovvero, più brevemente, di una *lastra cilindrica* (fig. 11-1).

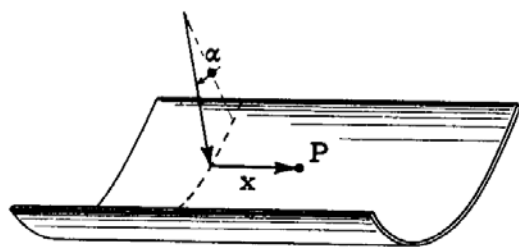


FIG. 11-1

Lo spessore h va in tal caso misurato, punto per punto, ortogonalmente alla superficie media.

Conviene riferire la superficie media a un sistema di coordinate cilindriche (x, α) , in cui x è misurata parallelamente alle generatrici (fig. 11-1). In genere, il raggio di curvatura della direttrice è funzione dell'anomalia α , ma in questo capitolo si tratterà solo il caso

$$R = \text{cost} \gg h = \text{cost} \quad (1)$$

cioè, ci si limita a lastre cilindriche sottili la cui direttrice è una *circonferenza* o un *arco di circonferenza*, e il cui spessore è costante.

In ciascun punto della superficie media si definisce una terna triortogonale destrorsa x, t, n , in cui l'asse x è parallelo alle generatrici, l'asse t tangente alla superficie, l'asse n normale alla superficie e diretto verso la convessità (fig. 11-2 a). Gli spostamenti secondo i tre assi suddetti verranno indicati con u, v, w rispettivamente (fig. 11-2 c).

Si definisce regime (statico) di *membrana* quello in cui le azioni

(*) Redatto dal Prof. Ing. Giuliano Augusti.

trasmesse ad un generico elemento della lastra dagli elementi adiacenti giacciono tutte nel piano tangente all'elemento stesso. Un elemento in tale regime è rappresentato in fig. 11-2 b: gli sforzi normali N_x ed N_t e gli sforzi di taglio N_{tx} ed N_{xt} , indicati in figura con i loro versi positivi, sono definiti come forze per unità di lunghezza, hanno dimensioni $[F l^{-1}]$ e vanno moltiplicati per il lato dell'elemento su cui agiscono.

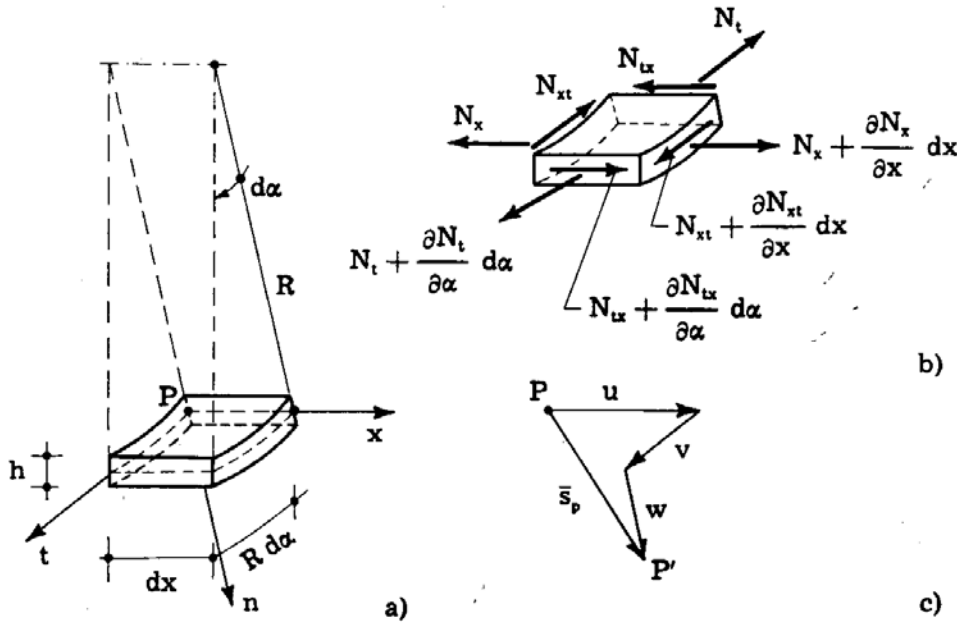


FIG. 11-2

L'equazione di equilibrio alla rotazione intorno ad n fornisce

$$N_{tx} = N_{xt} \tag{2}$$

analoga alle (2-9) del Vol. I. L'equilibrio alla traslazione secondo n for-

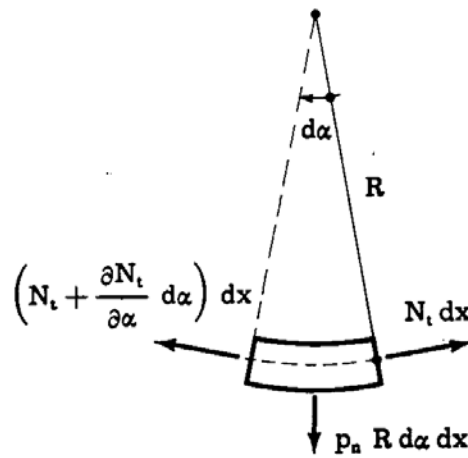


FIG. 11-3

nisce N_t (fig. 11-3):

$$N_t = p_n R \tag{3}$$

in cui p_n è la componente secondo n della pressione direttamente applicata sull'elemento.

Gli equilibri alla traslazione secondo x e secondo t forniscono rispettivamente

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{xt}}{\partial \alpha} + p_x &= 0 \\ \frac{\partial N_{xt}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_t}{\partial \alpha} + p_t &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

in cui p_t e p_x sono le corrispondenti componenti della pressione agente sull'elemento.

2. Espressione delle componenti di deformazione e delle variazioni di curvatura in funzione degli spostamenti.

I termini del primo e del secondo ordine delle componenti di deformazione della superficie media della lastra, già ricavati al Cap. IX, § 3, si scrivono, nelle coordinate definite in fig. 11-1:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(1)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_t^{(1)} &= \frac{1}{R} \left(w + \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \\ \gamma_{xt}^{(1)} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \varepsilon_x^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_t^{(2)} &= \frac{1}{2R^2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 - 2v \frac{\partial w}{\partial \alpha} + v^2 \right] \\ \gamma_{xt}^{(2)} &= \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + w \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (6)$$

La curvatura χ_x di una generatrice è, limitandosi al termine del primo ordine,

$$\chi_x^{(1)} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (7)$$

La variazione di curvatura χ_t di una direttrice, già ricavata al Cap. IX, si scrive con i simboli ora usati (*):

$$\chi_t^{(1)} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{w}{R^2} \tag{7''}$$

Bisogna infine definire un parametro per misurare la deformazione torsionale della superficie media della lastra. Si indichi pertanto con $\frac{1}{2} \chi_{xt} dx$ la rotazione relativa intorno ad x dei lati $x = \text{cost}$ dell'elemento $R d\alpha dx$, assunta positiva se, procedendo lungo x , la rotazione avviene nel verso $t \rightarrow n$; analogamente si indichi con $\frac{1}{2} \chi_{tx} R d\alpha$ la rotazione relativa intorno a t dei lati $\alpha = \text{cost}$, assunta positiva se, procedendo lungo t , avviene nel verso $x \rightarrow n$.

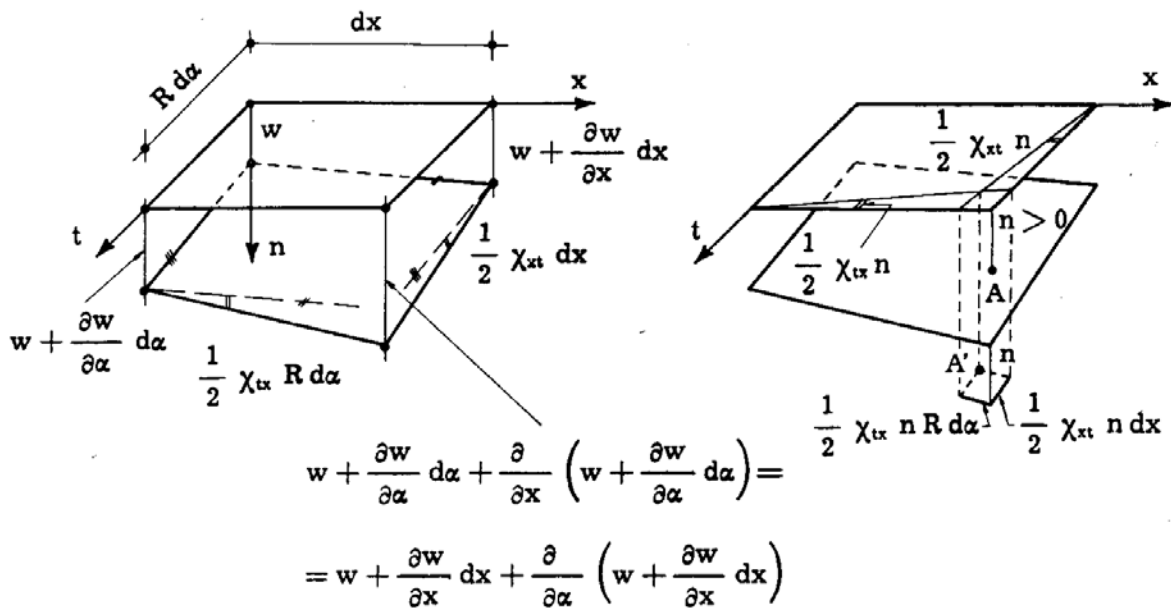


FIG. 11-4

Dalla fig. 11-4 a si ha, trascurando infinitesimi di ordine superiore:

$$\frac{1}{2} \chi_{xt}^{(1)} dx = \frac{1}{R d\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx \right) d\alpha \tag{a}$$

$$\frac{1}{2} \chi_{tx}^{(1)} R d\alpha = \frac{1}{dx} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} d\alpha \right) dx$$

(*) Si ricordi che, avendo diretto l'asse delle n verso la convessità della direttrice, la curvatura iniziale vale $-1/R$.

da cui

$$\chi_{xt}^{(1)} = \chi_{tx}^{(1)} = \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \alpha} . \quad (7''')$$

3. Relazioni tra componenti di sollecitazione e componenti di deformazione.

La sottigliezza della lastra permette di trascurare le componenti speciali di tensione parallele alla normale. Pertanto, le formule di Navier porgono, in tutto lo spessore della lastra, con ovvia simbologia:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x &= \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \frac{\sigma_t}{m} \right) \\ \bar{\varepsilon}_t &= \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{\sigma_x}{m} \right) \\ \bar{\gamma}_{xt} &= \frac{1}{G} \tau_{xt} \end{aligned} \quad (b)$$

in cui si è usato il soprasegno per distinguere queste componenti di deformazione da quelle della superficie media, già incontrate al § 2. Dalle (b), con semplici passaggi.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \frac{1}{m^2}} \left(\bar{\varepsilon}_x + \frac{\bar{\varepsilon}_t}{m} \right) \\ \sigma_t &= \frac{E}{1 - \frac{1}{m^2}} \left(\bar{\varepsilon}_t + \frac{\bar{\varepsilon}_x}{m} \right) \\ \tau_{xt} &= G \bar{\gamma}_{xt} . \end{aligned} \quad (c)$$

Nella teoria delle lastre sottili si fa l'ipotesi fondamentale (analoga al principio di conservazione delle sezioni piane nella teoria delle travi) che i segmenti rettilinei inizialmente normali alla superficie media si mantengano rettilinei e ortogonali alla superficie deformata. Da ciò discende

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_x &= \varepsilon_x - \chi_x n \\ \bar{\varepsilon}_t &= \varepsilon_t - \chi_t n \\ \bar{\gamma}_{xt} &= \gamma_{xt} - \chi_{xt} n \end{aligned} \quad (d)$$

dove n è la distanza dalla superficie media, e le χ sono le variazioni di curvatura già incontrate. Il secondo addendo della terza (d) appare chiaro dalla fig. 11-4 b. Sull'elemento di lastra agiscono gli sforzi N_x , N_t , N_{xt} già definiti:

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \, dn$$

$$N_t = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_t \, dn \quad (e)$$

$$N_{xt} = N_{tx} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xt} \, dn$$

e inoltre momenti flettenti (M_x , M_t) e torcenti (M_{xt} , M_{tx}), anch'essi ri-

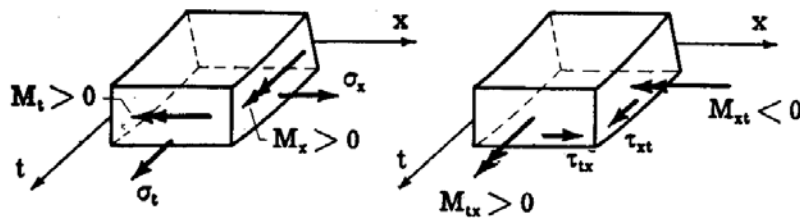


FIG. 11-5

feriti all'unità di lunghezza e definiti da (fig. 11-5):

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x \, n \, dn$$

$$M_t = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_t \, n \, dn \quad (f)$$

$$M_{xt} = - M_{tx} = - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xt} \, n \, dn .$$

Si noti che nelle espressioni di N_x , N_{xt} , M_x , M_{xt} le tensioni dovrebbero essere moltiplicate per $(1 + n/R)$. Infatti, data la curvatura della lastra nel piano

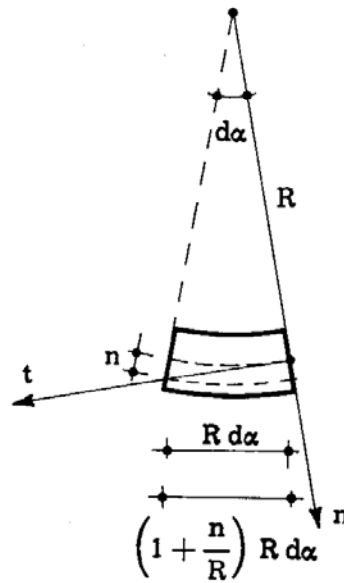


FIG. 11-6

$n-t$, le facce $x = \text{cost}$ dell'elemento sono trapezie (fig. 11-6). L'ipotesi iniziale (11-1) permette però di trascurare n/R nei confronti dell'unità.

Introducendo le (c) e (d) nelle (e) ed (f) e ricordando che

$$G = \frac{E}{2 \left(1 + \frac{1}{m}\right)} \quad (g)$$

si ha

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{12D}{h^2} \left(\varepsilon_x + \frac{\varepsilon_t}{m} \right) \\ N_t &= \frac{12D}{h^2} \left(\varepsilon_t + \frac{\varepsilon_x}{m} \right) \\ N_{xt} = N_{tx} &= \frac{6D}{h^2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \gamma_{xt} \\ M_x &= -D \left(\chi_x + \frac{\chi_t}{m} \right) \\ M_t &= -D \left(\chi_t + \frac{\chi_x}{m} \right) \\ M_{xt} = -M_{tx} &= \frac{D}{2} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \chi_{xt} \end{aligned} \quad (8)$$

in cui, come nel Cap. X,

$$D = \frac{E h^3}{12 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)} \quad (9)$$

4. Equazioni dell'equilibrio variato.

Supponendo che nella configurazione principale il regime statico sia di membrana, nella configurazione variata l'elemento di lastra è soggetto a sforzi $\bar{N}_x + N_x$, $\bar{N}_t + N_t$, $\bar{N}_{xt} + N_{xt}$ ed a momenti M_x , M_t , M_{xt} , avendo indicato con il soprasegno gli sforzi nella configurazione principale, che soddisfano le (3) (4), e senza soprasegno gli sforzi e i momenti che sorgono nella variazione, forniti dalle (8).

L'equazione di equilibrio alla traslazione secondo n si ottiene in maniera analoga a quella delle lastre piane (Cap. X, § 3), tenendo conto anche del termine dovuto alla curvatura della direttrice $-(\bar{N}_t + N_t) dx d\alpha$ (fig. 11-3). Si ha quindi, trascurando infinitesimi di ordine superiore e ricordando la (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{xt}}{\partial x \partial \alpha} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_t}{\partial \alpha^2} + \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ + \frac{2}{R} \bar{N}_{xt} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\bar{N}_t}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{N_t}{R} = 0. \end{aligned} \quad (h)$$

Introducendo le (8), la (h) si scrive

$$\begin{aligned} D \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\chi_x + \frac{\chi_t}{m} \right) + \frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{m} \right) \frac{\partial^2 \chi_{xt}}{\partial x \partial \alpha} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left(\chi_t + \frac{\chi_x}{m} \right) \right] + \\ + \frac{12 D}{h^2 R} \left(\varepsilon_t + \frac{\varepsilon_x}{m} \right) = \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \bar{N}_{xt} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\bar{N}_t}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \end{aligned} \quad (10)$$

la quale, con l'introduzione delle (5) e (7), fornisce la prima equazione dell'equilibrio variato.

In maniera del tutto analoga al caso delle lastre piane si ottengono le equazioni di equilibrio alla traslazione secondo x e t , tenendo conto, in quest'ultima, del termine

$$T_n dx d\alpha = \frac{1}{R} \frac{\partial M_x}{\partial \alpha} dx d\alpha \quad (i)$$

dovuto alle forze di taglio agenti secondo n sulle facce $\alpha = \text{cost}$ dell'elemento (fig. 11-7).

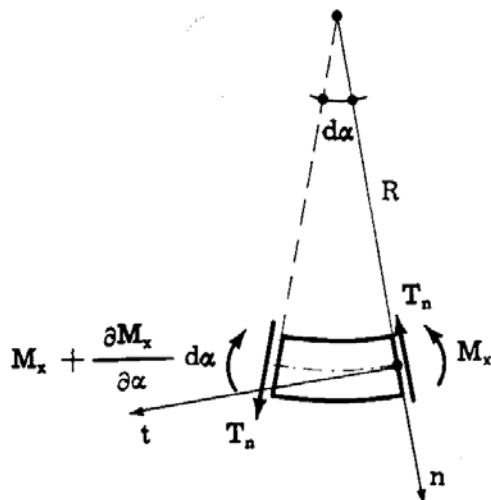


FIG. 11-7

Siccome le \bar{N} soddisfano le (4), l'equilibrio alla traslazione secondo x e t fornisce rispettivamente (*)

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{xt}}{\partial \alpha} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial N_{xt}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_t}{\partial \alpha} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial M_x}{\partial \alpha} = 0 .$$

Le (11), con l'introduzione delle (8) e quindi delle (5) e (7), forniscono le altre due equazioni dell'equilibrio variato. Si ha così un sistema di tre equazioni differenziali, ciascuna contenente le tre funzioni incognite u, v, w , i cui autovalori forniscono i moltiplicatori critici del carico applicato, che compare nella (10) attraverso gli sforzi di membrana nella configurazione principale.

La ricerca degli autovalori di un sistema di equazioni differenziali è però estremamente difficile, e si preferisce quindi separare, sia pure in maniera approssimata, le tre variabili. A tal fine basta trascurare il terzo addendo nella seconda delle (11) e il secondo addendo nella (7'').

(*) Se la p si mantiene di direzione fissa, le (11) si scrivono con riferimento agli assi t ed x definiti sulla superficie indeformata. Se invece la direzione di p varia con la deformazione, restando fissa rispetto al piano tangente, le (11) si scrivono con riferimento ad assi t ed x in questo piano.

Si può così introdurre una funzione ausiliaria $\Phi(x, \alpha)$ la quale soddisfi automaticamente le (11): basta infatti porre

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= N_t \\ -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \alpha} &= N_{xt} \\ \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} &= N_x . \end{aligned} \quad (12)$$

Dalle (5) si ha facilmente

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_x^{(1)}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_t^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \gamma_{xt}^{(1)}}{\partial x \partial \alpha} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (l)$$

che è una delle condizioni di congruenza interna (Vol. I, Cap. I, § 15), scritta in coordinate cilindriche. Introducendo le (12) e le inverse delle (8), analoghe alle (b),

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{Eh} \left(N_x - \frac{N_t}{m} \right) \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{Eh} \left(N_t - \frac{N_x}{m} \right) \\ \gamma_{xt} &= \frac{2}{Eh} \left(1 + \frac{1}{m} \right) N_{xt} \end{aligned} \quad (m)$$

la (l) diventa

$$\Delta_4 \Phi = \frac{Eh}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (13)$$

avendo indicato con Δ_4 l'operatore doppio di Laplace. In coordinate cilindriche:

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \\ \Delta_4 &= \Delta_2 \Delta_2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{R^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \alpha^2} + \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} . \end{aligned} \quad (n)$$

Trascurando, come si è detto, il secondo addendo della (7''), e tenendo presenti le (12) ed (n), la (10) si scrive

$$D \Delta_4 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \bar{N}_{xt} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\bar{N}_t}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2}. \quad (o)$$

Applicando l'operatore Δ_4 , la (o) diventa

$$D \Delta_4 \Delta_4 w + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta_4 \Phi = \Delta_4 \left(\bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \bar{N}_{xt} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\bar{N}_t}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \quad (p)$$

e ricordando la (13)

$$D \Delta_4 \Delta_4 w + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \Delta_4 \left(\bar{N}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2}{R} \bar{N}_{xt} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\bar{N}_t}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right). \quad (14)$$

La (14) è l'equazione fondamentale approssimata dell'equilibrio variato, nella sola funzione incognita w . Ad essa viene di solito associato il nome del *Donnell*, che per primo la derivò nel 1933.

Si nota esplicitamente che, a causa delle approssimazioni sulla cui base è stata ottenuta, la (14) dà risultati attendibili solo se la deformata di instabilità presenta un notevole numero di onde lungo le direttrici: ciò sarà meglio chiarito negli esempi.

5. Energia di deformazione e lavoro del secondo ordine.

L'energia di deformazione W connessa con il passaggio dalla configurazione principale alla configurazione variata è uguale alla somma dei sei contributi corrispondenti alle sei caratteristiche (8), i quali non danno termini di scambio. Convien separare tali contributi in due gruppi, e scrivere

$$W = W_\epsilon + W_\chi \quad (15)$$

facendo comparire in W_ϵ i contributi degli N , cioè l'energia connessa con la deformazione degli elementi di superficie nel loro piano, e in W_χ i contributi degli M , cioè delle χ . Spesso questi due termini vengono indicati, seppure impropriamente, come energia di deformazione *estensionale* e *flessionale* rispettivamente.

Indicando con Ω l'area della superficie media della lastra, le prime

tre (8) forniscono immediatamente:

$$\begin{aligned} W_\varepsilon &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x \varepsilon_x + N_t \varepsilon_t + N_{xt} \gamma_{xt}) R \, dx \, d\alpha = \\ &= \frac{6D}{h^2} \iint_{\Omega} \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_t^2 + 2 \frac{\varepsilon_x \varepsilon_t}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) \frac{\gamma_{xt}}{2} \right] R \, dx \, d\alpha. \end{aligned} \quad (q)$$

Sostituendo le espressioni (5), la (q) fornisce l'energia di deformazione estensionale corrispondente a una data terna di funzioni spostamento $u v w$.

Operando nell'ambito dell'approssimazione già introdotta al § 5, conviene utilizzare le (m) e le (12). Si ottiene così la W_ε in funzione del solo spostamento w , attraverso la funzione Φ :

$$\begin{aligned} W_\varepsilon &= \frac{1}{2Eh} \iint_{\Omega} \left[N_x^2 + N_t^2 - 2 \frac{N_x N_t}{m} + 2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) N_{xt}^2 \right] R \, dx \, d\alpha = \\ &= \frac{1}{2Eh} \iint_{\Omega} \left[(N_x + N_t)^2 + 2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) (N_{xt}^2 - N_x N_t) \right] R \, dx \, d\alpha = \quad (16) \\ &= \frac{1}{2Eh} \iint_{\Omega} \left\{ (\Delta_2 \Phi)^2 + \frac{2}{R^2} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \alpha}\right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2} \right] \right\} R \, dx \, d\alpha. \end{aligned}$$

Per la determinazione dell'energia di deformazione flessionale W_χ , si noti che il momento $M_{xt} R d\alpha$ compie lavoro (positivo) per l'angolo $\frac{1}{2} \chi_{xt} dx$, e il momento $M_{tx} dx = -M_{xt} dx$ compie lavoro per l'angolo $-\frac{1}{2} \chi_{xt} R d\alpha$ (figg. 11-4 e 11-5). Analogamente, i momenti flettenti $M_x R d\alpha$ ed $M_t dx$ compiono lavoro (positivo) per le corrispondenti rotazioni relative $-\chi_x dx$ e $-\chi_t R d\alpha$. Tenendo presenti la quarta, quinta e sesta delle (8), si ha:

$$\begin{aligned} W_\chi &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (-M_x \chi_x - M_t \chi_t + M_{xt} \chi_{xt}) R \, dx \, d\alpha = \\ &= \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left[\chi_x^2 + \chi_t^2 + 2 \frac{\chi_x \chi_t}{m} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \chi_{xt}^2 \right] R \, dx \, d\alpha = \\ &= \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left[(\chi_x + \chi_t)^2 + 2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(\frac{\chi_{xt}^2}{4} - \chi_x \chi_t\right) \right] R \, dx \, d\alpha \end{aligned}$$

la quale, introducendo le (7) e trascurando il secondo addendo della (7''), diventa immediatamente

$$W_x = \frac{D}{2} \iint_{\Omega} \left\{ (\Delta_2 w)^2 + \frac{2}{R^2} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \alpha}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right] \right\} R dx d\alpha. \quad (17)$$

Il lavoro del secondo ordine compiuto dagli sforzi principali \bar{N} è dato da

$$L_2^* = \iint_{\Omega} (\bar{N}_x \varepsilon_x^{(2)} + \bar{N}_t \varepsilon_t^{(2)} + \bar{N}_{xt} \gamma_{xt}^{(2)}) R dx d\alpha.$$

Prendendo in considerazione solo deformate con $u=v=0$ e w infinitesimo del primo ordine, le componenti del secondo ordine della deformazione hanno le espressioni:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_t^{(2)} &= \frac{1}{2R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2 \\ \gamma_{xt}^{(2)} &= \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (18)$$

e quindi:

$$L_2^* = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[\bar{N}_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\bar{N}_t}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2 + 2 \frac{\bar{N}_{xt}}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] R dx d\alpha. \quad (19)$$

Per deformate del tipo sopra definito, il lavoro del secondo ordine L_2 è nullo. Se però durante la variazione di configurazione resta costante il valore della pressione p_n riferita all'unità di superficie, e quindi può variare la forza $p_n R dx d\alpha$ agente su ciascun elemento (come p. es. nel caso di carichi idrostatici), bisogna considerare anche il lavoro L_{2s} già incontrato nel Cap. IX, § 4. Dalla (9-6), per la deformata che si sta considerando e con i simboli del presente capitolo, si ricava

$$L_{2s} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} p_n w^2 dx d\alpha = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \frac{\bar{N}_t}{R} w^2 dx d\alpha. \quad (r)$$

D'altra parte, il procedimento energetico non può dare risultati prossimi al vero, se la deformata assunta esalta eccessivamente una delle energie in gioco.

Dalla seconda delle (5) si nota che, affinché la W_e non sia eccessiva, la w dev'essere (in valore assoluto) dello stesso ordine di grandezza di $\partial v / \partial \alpha$. Per

poter quindi assumere $u = v = 0$, dev'essere anche, sulla massima parte della superficie:

$$w^2 \ll \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2$$

come è per deformate con un gran numero di onde lungo la circonferenza direttrice. Confrontando quindi la (r) e la (19), si vede che L_{2s} è trascurabile rispetto ad L_2^* .

L'equazione fondamentale del procedimento energetico si scrive quindi

$$\delta_2 E = W_\varepsilon + W_x + L_2^* = 0 \quad (20)$$

in cui gli addendi hanno le espressioni (16), (17) e (19).

Con i metodi del calcolo delle variazioni, è possibile ritrovare la (o) dalla (20). Risulta così confermata l'equivalenza tra le approssimazioni introdotte nelle derivazioni dell'equazione di Donnell (14) e della formulazione approssimata (20) del procedimento energetico.

6. Il cilindro circolare soggetto a pressione radiale uniforme.

Sia data una lastra cilindrica circolare completa, di raggio R e spessore h , appoggiata nelle circonferenze di estremità $x=0$ ed $x=l$ (*). Le condizioni ai limiti si scrivono:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases} \quad (21)$$

Il cilindro venga sottoposto a una pressione radiale verso l'interno:

$$p_n = -p = \text{cost} \quad (s)$$

Dalle (3) e (4) si ha:

$$\begin{aligned} \bar{N}_t &= -pR \\ \bar{N}_x &= \bar{N}_{xt} = 0 \end{aligned} \quad (t)$$

(*) Per brevità, nel seguito si userà spesso il termine improprio di *cilindro*, invece di *lastra* o *superficie cilindrica*.

a) *Metodo geometrico.*

L'equazione di Donnell (14) si scrive, introducendo le (t),

$$D \Delta_4 \Delta_4 w + \frac{p}{R} \Delta_4 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \quad (22)$$

Una famiglia di deformate soddisfacenti la (22) e le condizioni ai limiti (21) ha l'espressione, analoga alla (10-21),

$$w = A_{rs} \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{l} \operatorname{sen} s \alpha \quad (23)$$

con A_{rs} costante arbitraria ed r, s numeri interi.

Si ha infatti

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= A_{rs} \frac{r^4 \pi^4}{l^4} \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{l} \operatorname{sen} s \alpha \\ \Delta_4 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} &= - A_{rs} s^2 \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{l} \operatorname{sen} s \alpha \\ \Delta_4 \Delta_4 w &= A_{rs} \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^4 \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{l} \operatorname{sen} s \alpha. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (22) e dividendo per $A_{rs} \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{l} \operatorname{sen} s \alpha$:

$$D \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^4 - \frac{p}{R} s^2 \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2} \frac{r^4 \pi^4}{l^4} = 0. \quad (u)$$

b) *Metodo energetico.*

Si scelga la w data dalla (23), con $u = v = 0$. La (13) suggerisce di porre

$$\Phi = - \Phi_{rs} \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{l} \operatorname{sen} s \alpha. \quad (v)$$

Si ha

$$\Delta_4 \Phi = - \Phi_{rs} \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{r \pi x}{l} \operatorname{sen} s \alpha$$

e quindi dalle (13) e (23)

$$\Phi_{rs} \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2 = \frac{Eh}{R} A_{rs} \frac{r^2 \pi^2}{l^2}. \quad (z)$$

La (16) diventa:

$$\begin{aligned}
 W_{\epsilon} &= \frac{R \Phi_{rs}^2}{2Eh} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{R^2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \left[\left(\frac{r\pi}{l} s \right)^2 - \frac{r^2 \pi^2}{l^2} s^2 \right] \right\} \operatorname{sen}^2 \frac{r \pi x}{l} \operatorname{sen}^2 s \alpha \, dx \, d\alpha = \\
 &= \frac{R}{2Eh} \Phi_{rs}^2 \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2 \frac{\pi l}{2} = \\
 &= \frac{Eh}{2R} A_{rs}^2 \frac{\frac{r^4 \pi^4}{l^4}}{\left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2} \frac{\pi l}{2}.
 \end{aligned}$$

Analogamente, la (17) fornisce

$$W_x = \frac{D}{2} R A_{rs}^2 \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2 \frac{\pi l}{2}.$$

La (19), tenendo conto delle (t), si scrive

$$\begin{aligned}
 L_2^* &= - \frac{A_{rs}^2}{2} p \int_0^{2\pi} \int_0^l s^2 \operatorname{sen}^2 \frac{r \pi x}{l} \cos^2 s \alpha \, dx \, d\alpha = \\
 &= - \frac{p}{2} A_{rs}^2 s^2 \frac{\pi l}{2}.
 \end{aligned}$$

Sommando $W_{\epsilon} + W_x + L_2^*$, eguagliando a zero e dividendo per A_{rs}^2 , si ritrova la (u).

Ricavando p dalla (u), e ponendo

$$k_{rs} = \frac{\pi^2 R^2}{s^2 l^2} \left(r^2 + \frac{s^2 l^2}{\pi^2 R^2} \right)^2 + \frac{l^2}{\pi^2 s^2 h^2} \frac{12 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)}{\left(1 + \frac{s^2 l^2}{\pi^2 r^2 R^2} \right)^2} \quad (a')$$

si hanno le pressioni corrispondenti a punti di biforcazione dell'equilibrio nella forma

$$p_{rs} = \frac{\pi^2 D}{R l^2} k_{rs}. \quad (24)$$

Dalla (a'), è immediato notare che la pressione critica p_c , cioè la più piccola delle p_{rs} , va ricercata tra quelle con $r=1$: cioè ciascuna generatrice si deforma secondo una sola semionda di senoide. Ponendo $r=1$, nonchè

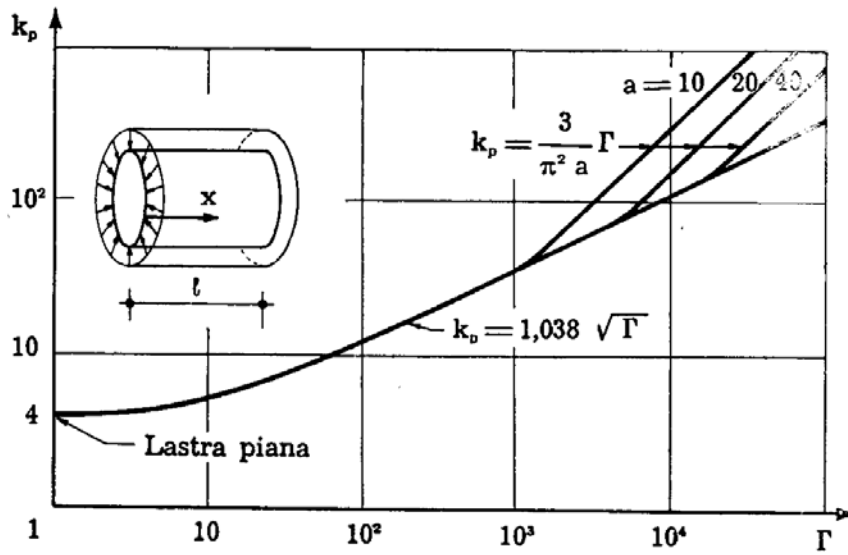
$$\beta = \frac{s\ell}{\pi R} \tag{25}$$

$$\Gamma = \frac{\ell^2}{R h} \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}$$

si ha

$$k_{rs} = k_s = \frac{(1 + \beta^2)^2}{\beta^2} + \frac{12}{\pi^4} \frac{\Gamma^2}{\beta^2 (1 + \beta^2)^2} \tag{26}$$

Il diagramma delle $k_p = (k_s)_{\min}$ in funzione di Γ è riportato, in scala logaritmica, nella fig. 11-8. Si noti che tale diagramma è approssimato,



(Da Gerard)

FIG. 11-8

in quanto si è supposto che β , e quindi s , sia una variabile continua.

Per $\Gamma \rightarrow 0$, la (26) si riduce al primo addendo. Si può ripetere il ragionamento svolto per la lastra piana compressa in una direzione (Cap. X, § 5), giungendo a

$$s = \frac{\pi R}{\ell}$$

$$k_p = 4$$

Per cilindri di media lunghezza, cioè per

$$100 \leq \Gamma \leq 5 a^2$$

essendo

$$a = \frac{R}{h} \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}} \quad (27)$$

si può dimostrare che con buona approssimazione

$$k_p = 1,038 \sqrt{\Gamma}.$$

Per cilindri più lunghi, il minimo valore di k_s (26) corrisponde al minimo s possibile, ovvero a

$$s = 2:$$

cioè, le circonferenze direttrici si trasformano in ellissi. Come si è però già detto, nè l'equazione di Donnell (22) nè la formulazione approssimata (20) del criterio energetico, danno risultati attendibili per un così basso numero di semionde lungo la direttrice. Si può ritenere che per cilindri lunghi sia trascurabile l'effetto dei vincoli di estremità e sia quindi valida la formula dei tubi di lunghezza infinita (9-13), la quale, con i simboli del presente capitolo, si scrive:

$$p_c = \frac{3D}{R^3}.$$

Sostituendo questo valore di p nella (24) e tenendo presente la (27), si ha facilmente

$$k_p = \frac{3}{\pi^2 a} \Gamma.$$

Anche quest'ultima formula è riportata in diagramma, per alcuni valori di a , nella fig. 11-8.

7. Il cilindro circolare compresso secondo le generatrici.

La lastra cilindrica completa già definita al § 6 sia sollecitata da una distribuzione di carichi equivalenti a due forze di compressione F , agenti secondo l'asse del cilindro. Si ha quindi:

$$\begin{aligned} \bar{N}_x &= - \frac{F}{2\pi R} \\ \bar{N}_t &= \bar{N}_{xt} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

L'equazione di Donnell (14) si scrive

$$D \Delta_4 \Delta_4 w + \frac{F}{2\pi R} \Delta_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (29)$$

ed è ancora soddisfatta, insieme alle condizioni ai limiti, dalla (23).

Operando come al § 6, si ottiene l'analogia della (u)

$$D \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^4 - \frac{F}{2 \pi R} \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2 + \frac{Eh}{R^2} \frac{r^4 \pi^4}{l^4} = 0 \quad (b')$$

Ricordando le (25), e ponendo inoltre

$$\mu_{rs} = \frac{(r^2 + \beta^2)^2}{r^2} \quad (c')$$

i valori di diramazione della F secondo le deformate (23) possono esprimersi nella forma:

$$F_{rs} = 2 \pi^3 \frac{DR}{l^2} k_{rs} \quad (30)$$

in cui

$$k_{rs} = \mu_{rs} + \frac{12}{\pi^4} \frac{\Gamma^2}{\mu_{rs}} \quad (31)$$

Per un dato Γ , il carico critico F_c , ammesso che sia uno dei valori dati dalla (30), si ottiene minimizzando la k_{rs} rispetto alla variabile μ_{rs} . Trattando quest'ultima, in maniera approssimata, come una variabile continua, si può ricavare dalla (31)

$$\frac{\partial k}{\partial \mu} = 1 - \frac{12}{\pi^4} \frac{\Gamma^2}{\mu^2}$$

e quindi

$$\mu = \frac{2 \sqrt{3}}{\pi^2} \Gamma \quad (d')$$

D'altro canto, dalla (c') si nota che

$$\mu \geq 1$$

Quindi, se

$$\Gamma \leq \frac{\pi^2}{2 \sqrt{3}} \cong 2,85$$

il più piccolo valore di k_{rs} si ha per

$$s = 0 \quad ; \quad r = 1 \quad ; \quad \mu = 1$$

cioè, l'instabilità si manifesta con una deformata radialsimmetrica con

una sola semionda longitudinale:

$$w = A_{10} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{l} .$$

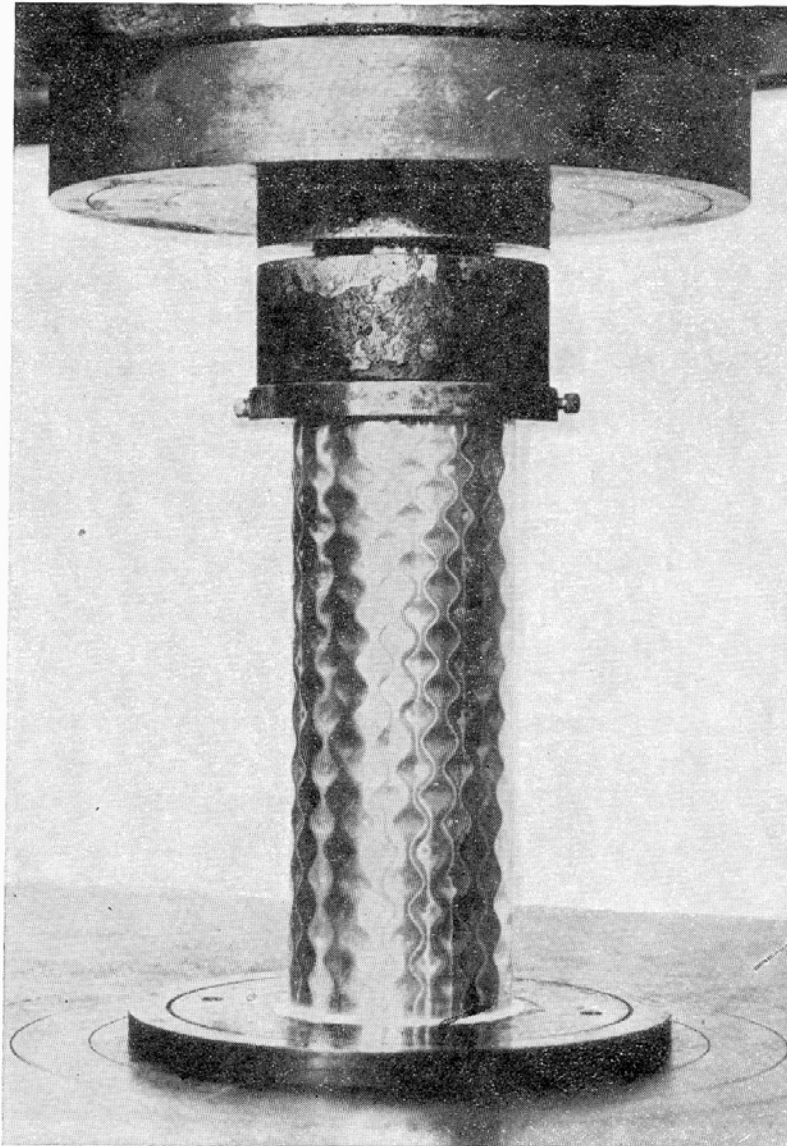
In questo caso si ha:

$$k_c = 1 + \frac{12}{\pi^4} \Gamma^2 . \quad (e')$$

Se invece

$$\Gamma \geq \frac{\pi^2}{2\sqrt{3}}$$

la μ è data dalla (d') e l'instabilità si manifesta con un notevole numero di onde in senso sia longitudinale che trasversale, come nel caso della



(Da Horton e Durham)

FIG. 11-9

fig. 11-9, che mostra un sottile cilindro di nickel alle soglie dell'instabilità.

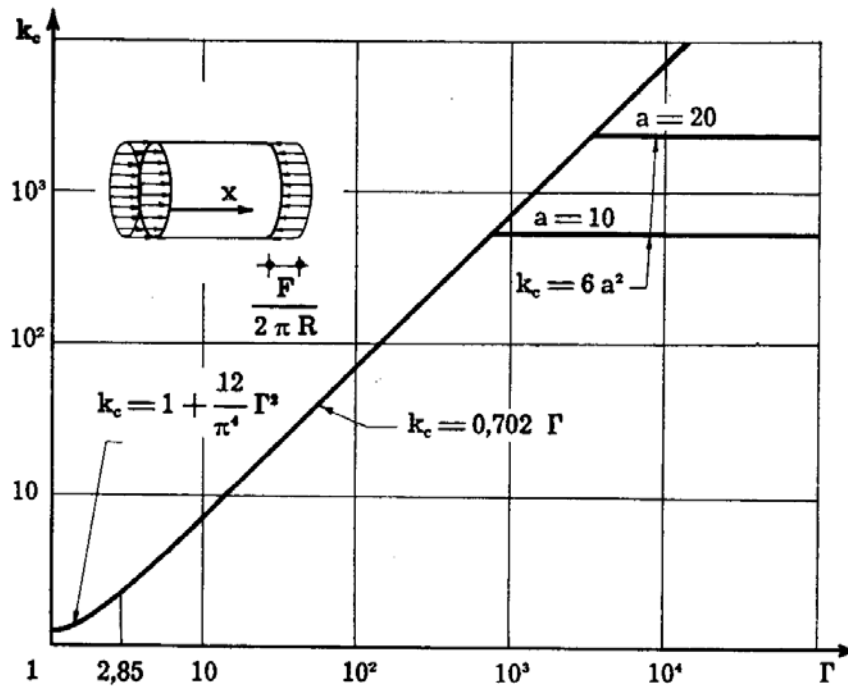
Sostituendo la (d') nella (29) si ha:

$$k_c = \frac{4\sqrt{3}}{\pi^2} \Gamma \cong 0,702 \Gamma \quad (f')$$

che, introdotta nella (28) e tenendo presente la (25) e la (9), fornisce

$$\begin{aligned} F_c &= 2\pi^3 \frac{DR}{\ell^2} \frac{4\sqrt{3}}{\pi^2} \frac{\ell^2}{Rh} \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}} = \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{Eh^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}} \cong \frac{3,63}{\sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}} Eh. \end{aligned} \quad (32)$$

Il diagramma delle k_c (e') (f') è riportato, in scala logaritmica, nella fig. 11-10.



(Da Gerard)

FIG. 11-10

Si noti infine che cilindri molto lunghi possono instabilizzarsi come una trave compressa di sezione a corona circolare, incernierata agli estremi. Ricordando la formula del momento d'inerzia I_c di una corona circolare sottile di raggio R e spessore h , e introducendo la (30), si ha

$$F_c = \pi^2 \frac{EI_c}{\ell^2} = \pi^3 \frac{ER^3h}{\ell^2} = 2\pi^3 \frac{Eh^3}{12 \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)} \frac{R}{\ell^2} k_c$$

da cui

$$k_c = 6 a^2 \quad (g')$$

in cui a è data dalla (27). Le linee (g') sono anch'esse riportate nella fig. 11-10, per $a = 10$ e 20 .

8. Il cilindro circolare soggetto a torsione.

Nei due casi finora esaminati, i termini contenenti le derivate miste scompaiono dall'equazione dell'equilibrio variato (14). Ciò ha reso possibile esprimere la deformata d'instabilità come prodotto di funzioni delle due variabili, nella semplice forma (23). In tal modo sulla superficie cilindrica si identificano delle generatrici e delle direttrici formanti un sistema di *linee nodali* (cioè a spostamento w nullo): infatti, dalla (23),

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{per } x = \frac{l}{r} i \quad (i = 0, 1, 2, \dots r)$$

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0 \quad \text{per } \alpha = \frac{2\pi}{s} j \quad (j = 0, 1, 2, \dots s)$$

E' quindi immediato includere in queste condizioni le condizioni di vincolo (21).

Ben diversamente accade se il cilindro è soggetto sulle due basi a una distribuzione uniforme di tensioni tangenziali pari a due coppie \mathcal{M} eguali ed opposte, di asse momento parallelo ad x , sicchè (*)

$$\bar{N}_x = \bar{N}_t = 0 \quad (33)$$

$$\bar{N}_{xt} = \frac{\mathcal{M}}{2\pi R^2}$$

e l'equazione dell'equilibrio variato (14) si scrive (**):

$$D \Delta_4 \Delta_4 w - \frac{\mathcal{M}}{\pi R^3} \Delta_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \alpha} + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (34)$$

$$(*) \quad d\mathcal{M} = (\bar{N}_{xt} R d\alpha) R \quad ; \quad \mathcal{M} = \int_{2\pi} d\mathcal{M} = 2\pi R^2 \bar{N}_{xt}$$

(**) La (14) fu originariamente derivata proprio per questo caso di sollecitazione, di difficilissima soluzione con le equazioni esatte.

Infatti in tal caso le *linee nodali* sono di forma elicoidale (del tipo indicato nella fig. 11-11) e non risulta quindi facile esprimere le condizioni di vincolo su delle circonferenze $x = \text{cost.}$

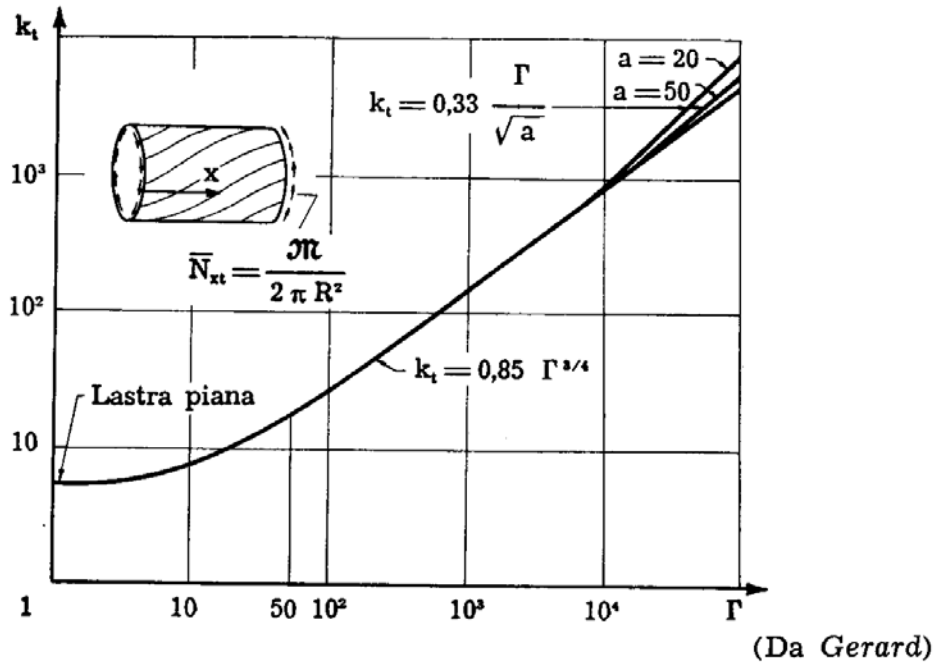


FIG. 11-11

Becker e Gerard (1956) proposero la soluzione

$$w = A_{rs} \left[\text{sen} \left(\frac{r \pi x}{l} - s\alpha \right) - \text{sen} \left(\frac{(r+2) \pi x}{l} - s\alpha \right) \right] \quad (35)$$

la quale sulle circonferenze $x=0$ ed $x=l$ soddisfa la sola condizione $w=0$.

Derivando la (35) si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= A_{rs} \left[\frac{r^4 \pi^4}{l^4} \text{sen} \left(\frac{r \pi x}{l} - s\alpha \right) - \frac{(r+2)^4 \pi^4}{l^4} \text{sen} \left(\frac{(r+2) \pi x}{l} - s\alpha \right) \right] \\ \Delta_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \alpha} &= A_{rs} \left[\left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2 \frac{r \pi}{l} s \text{sen} \left(\frac{r \pi x}{l} - s\alpha \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{(r+2)^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^2 \frac{(r+2) \pi}{l} s \text{sen} \left(\frac{(r+2) \pi x}{l} - s\alpha \right) \right] \quad (h') \\ \Delta_4 \Delta_4 w &= A_{rs} \left[\left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^4 \text{sen} \left(\frac{r \pi x}{l} - s\alpha \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{(r+2)^2 \pi^2}{l^2} + \frac{s^2}{R^2} \right)^4 \text{sen} \left(\frac{(r+2) \pi x}{l} - s\alpha \right) \right]. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (34) e dividendo per A_{rs} si ha

$$\begin{aligned} & \left[D \left(\frac{s}{R} \right)^8 (\beta_1 + 1)^4 - \frac{\mathcal{M}}{\pi R^2} \left(\frac{s}{R} \right)^6 \beta_1 (\beta_1 + 1)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{Eh}{R^2} \left(\frac{s}{R} \right)^4 \beta_1^4 \right] \operatorname{sen} \left(\frac{r \pi x}{l} - s\alpha \right) + \\ & - \left[D \left(\frac{s}{R} \right)^8 (\beta_2 + 1)^4 - \frac{\mathcal{M}}{\pi R^2} \left(\frac{s}{R} \right)^6 \beta_2 (\beta_2 + 1)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{Eh}{R^2} \left(\frac{s}{R} \right)^4 \beta_2^4 \right] \operatorname{sen} \left(\frac{(r+2) \pi x}{l} - s\alpha \right) = 0 \end{aligned} \quad (i')$$

in cui

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{r \pi R}{s l} \\ \beta_2 &= \frac{(r+2) \pi R}{s l} \end{aligned} \quad (l')$$

sono gli angoli che le linee $w = \text{cost}$ corrispondenti a ciascuno dei due addendi della (35) formano con l'asse x .

Per cilindri di media lunghezza, ancora secondo *Becker e Gerard*, sulla circonferenza a metà lunghezza si può porre

$$x = \frac{l}{2}$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{(r+2) \pi x}{l} - s\alpha \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{r \pi x}{l} - s\alpha + \pi \right) = - \operatorname{sen} \left(\frac{r \pi x}{l} - s\alpha \right)$$

$$\beta_1^2 \ll 1$$

$$\beta_2^2 \ll 1$$

da cui, sostituendo nella (i'), si hanno i valori \mathcal{M}_{rs} delle coppie torcenti di diramazione:

$$\mathcal{M}_{rs} = \frac{\pi R^2 D}{\beta_1 + \beta_2} \left[2 \left(\frac{s}{R} \right)^2 + 12 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \left(\frac{R}{s} \right)^2 \frac{\beta_1^4 + \beta_2^4}{R^2 h^2} \right] \quad (m')$$

che si può anche scrivere

$$\mathcal{N}_{rs} = 2 \pi^3 \frac{DR^2}{\ell^2} k_{rs} \quad (36)$$

avendo posto

$$k_{rs} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\ell^2}{\beta_1 + \beta_2} \left[\left(\frac{s}{R} \right)^2 + 6 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \left(\frac{R}{s} \right)^2 \frac{\beta_1^4 + \beta_2^4}{R^2 h^2} \right]. \quad (37)$$

Trattando r ed s come variabili continue, analogamente ai paragrafi precedenti, e minimizzando la (37) rispetto ad entrambe, si ottiene finalmente l'espressione (approssimata) del valore *critico* di k_{rs} :

$$k_t = 0,85 \Gamma^{3/4} \quad (n')$$

in cui Γ è il parametro geometrico definito dalla (25).

Per valori di Γ compresi all'incirca nell'intervallo

$$50 \leq \Gamma \leq 10 a^2$$

la (n') coincide quasi esattamente con la più esatta soluzione determinata da *Batdorf e coll.* (1947), e riportata in diagramma nella fig. 11-11.

Si noti che per cilindro molto corto si ritrova il risultato valido per lastra rettangolare allungata soggetta a forze taglienti (Cap. X, § 10; $a/b = \infty$):

$$\bar{N}_{xt} = 5,35 \pi^2 \frac{D}{\ell^2} \cong 52,8 \frac{D}{\ell^2}$$

cioè

$$k_t = 5,35 \quad ; \quad \mathcal{N}_c = 2 \pi^3 \frac{DR^2}{\ell^2} 5,35 \cong 332 \frac{DR^2}{\ell^2}.$$

Infine, per cilindri molto lunghi, per cui l'effetto dei vincoli di estremità è trascurabile (cfr. § 6), si può eliminare il secondo addendo della (35). Inoltre, come al § 6,

$$s = 2$$

mentre si può ancora ritenere

$$\beta_1 = \frac{r \pi R}{2 \ell} \ll 1.$$

Pertanto la (37) diventa

$$k_{r2} = \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{4}{\beta_1} \left(\frac{l}{R} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \left(\frac{l}{h} \right)^2 \beta_1^3 \right]. \quad (o')$$

Minimizzando rispetto a β_1 e sostituendo nella (o') tenendo presenti le (25) e (27), si ha

$$k_t \cong \frac{3,26}{\pi^2} \frac{\Gamma}{\sqrt{a}} \cong 0,33 \frac{\Gamma}{\sqrt{a}}. \quad (p')$$

La (p') è riportata nella fig. 11-11 per $a=20$ ed $a=50$.

9. Instabilità di cilindri sottili oltre la soglia plastica.

Quando le tensioni critiche fornite dalle formule dei §§ 6, 7 e 8 superano il limite di proporzionalità, esse non sono più valide, e vanno ridotte moltiplicandole per opportuni coefficienti. Qui di seguito si riportano i coefficienti di riduzione semi-empirici μ suggeriti dal Gerard [37] rispet-

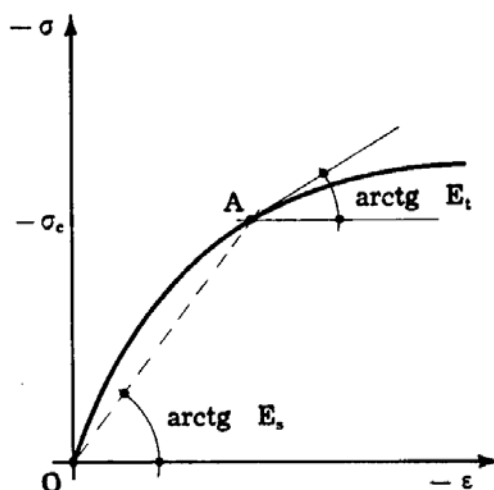


FIG. 11-12

tivamente per ciascuno dei tre casi esaminati, avendo posto, oltre ai simboli già definiti:

E_s : modulo secante (fig. 11-12);

m_p : modulo di Poisson in campo plastico.

a) *Pressione radiale:*

Cilindri corti:

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{1}{m^2}}{1 - \frac{1}{m_p^2}} \frac{E_s}{E} \left[1 + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E_s}} \right]. \quad (38')$$

Cilindri medi ($s > 2$):

$$\mu = \left(\frac{1 - \frac{1}{m^2}}{1 - \frac{1}{m_p^2}} \right)^{3/4} \frac{E_s}{E} \left(\frac{E_t}{E} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E_s}} \quad (38'')$$

Cilindri lunghi ($s = 2$):

$$\mu = \frac{1 - \frac{1}{m^2}}{1 - \frac{1}{m_p^2}} \frac{E_s}{E} \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \frac{E_t}{E_s} \right]. \quad (38''')$$

b) *Compressione secondo le generatrici:*

$$\mu = \left(\frac{1 - \frac{1}{m^2}}{1 - \frac{1}{m_p^2}} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{E_s E_t}}{E}. \quad (39)$$

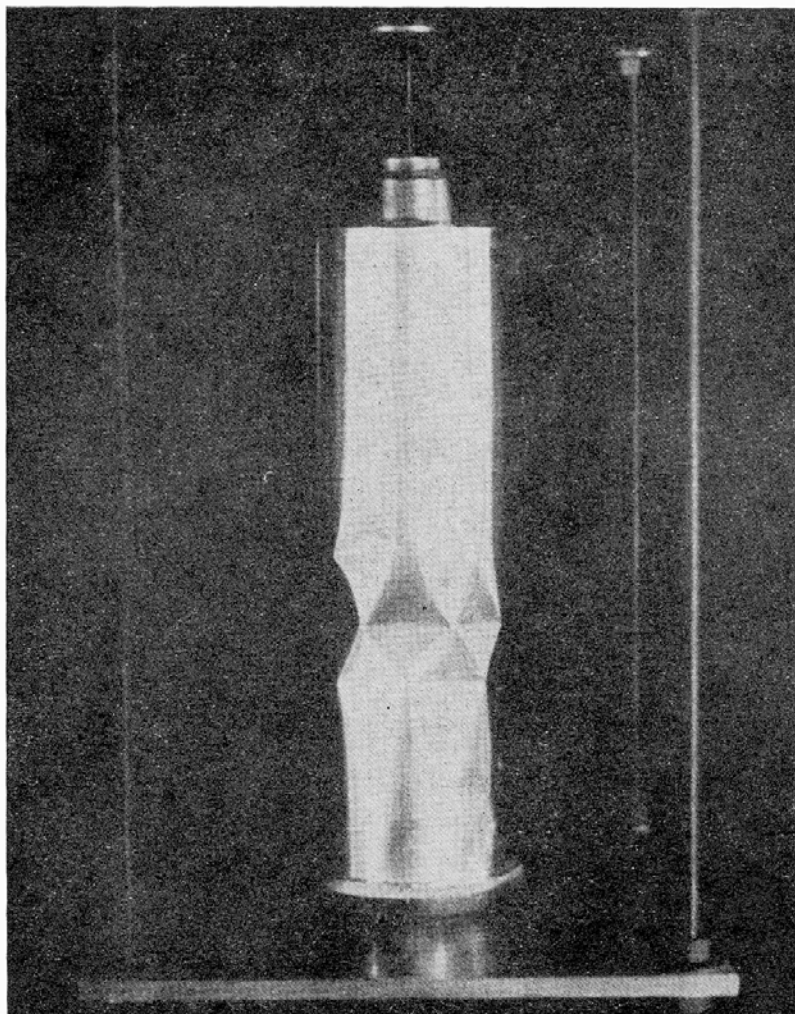
c) *Torsione:*

$$\mu = \left(\frac{1 - \frac{1}{m^2}}{1 - \frac{1}{m_p^2}} \right)^{3/4} \frac{E_s}{E} \quad (40)$$

10. Considerazioni sul comportamento reale dei cilindri sottili.

Nel caso di cilindri soggetti a pressione radiale ed a torsione, sono stati ottenuti da vari ricercatori risultati sperimentali che confermano quelli

teorici riportati ai §§ 6 ed 8. Al contrario, nel caso di compressione secondo le generatrici (§ 7), carichi e deformate assimilabili a quelli teorici, (32) e (23), si possono ottenere soltanto mediante particolari accorgimenti (come nel caso della fig. 11-9, in cui era limitata la profondità massima delle onde) oppure facendo uso di carichi impulsivi: altrimenti, l'instabilità si manifesta inevitabilmente quando il carico è ancora una frazione dell'ordine di $1/2-1/4$ del valore critico teorico, ed è caratterizzata dalla deformazione di una limitata zona del cilindro (fig. 11-13) e dalla precipitosa caduta del carico.

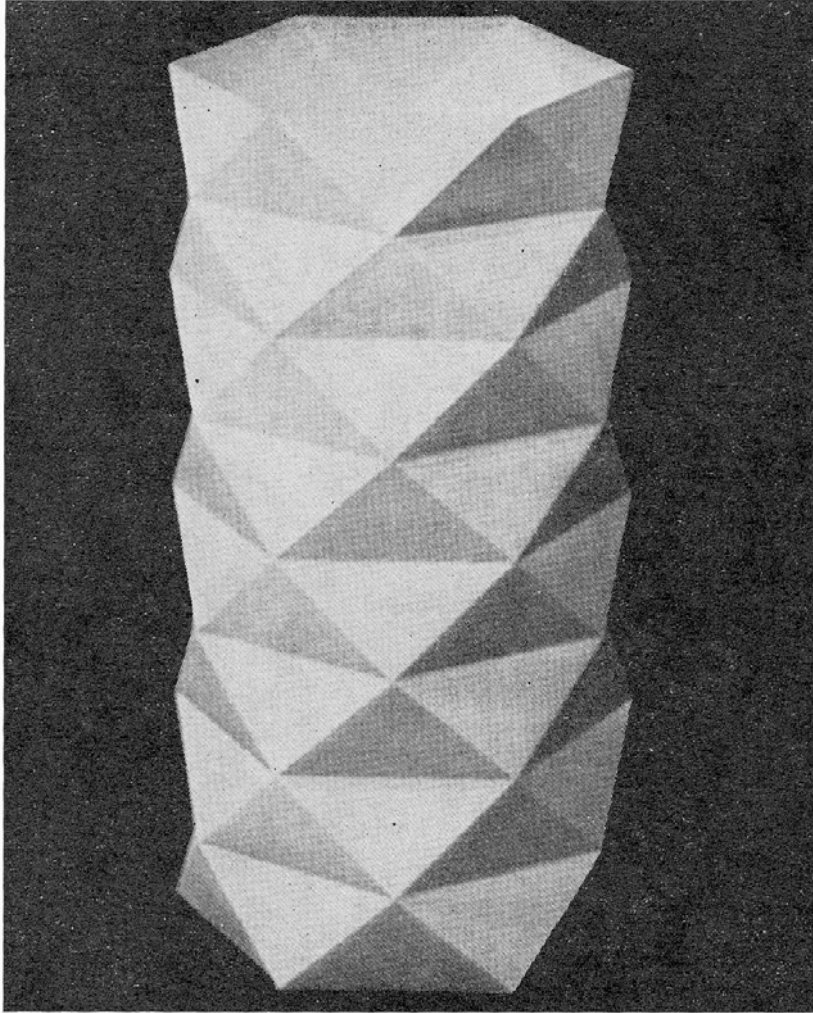


(Da Hoff)

FIG. 11-13

La differenza tra carico critico teorico e carico sperimentale di collasso è massima nel campo dei cilindri di media lunghezza. Com'è stato dimostrato da una recente serie di studi del Hoff e dei suoi collaboratori alla Stanford University [40-44], questa differenza può in parte essere attribuita alla diversità delle effettive condizioni sperimentali di vincolo rispetto a quelle teoriche.

La ragione principale del peculiare comportamento dei cilindri sottili compressi sta però nel fatto che ci si trova in presenza di un caso di *instabilità di terza specie* molto pronunciata (cap. I). Infatti, com'è stato mostrato in maniera molto evidente con l'ausilio di modelli di carta (fig. 11-14), una superficie cilindrica sottile può deformarsi in una super-



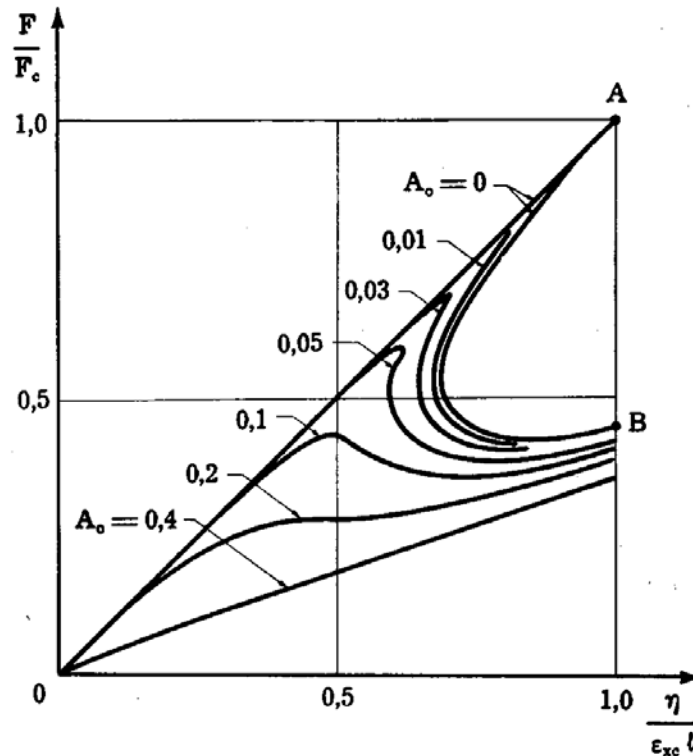
(Da Hoff)

FIG. 11-14

ficie poliedrica di eguale area facendo nel contempo avvicinare notevolmente le due circonferenze di base. Siccome in questa deformazione non è implicata alcuna energia di deformazione estensionale W_e , il livello energetico del cilindro compresso sulle circonferenze di base e così deformato è, in prossimità del carico critico, molto inferiore a quello della configurazione principale indeformata. E' quindi sufficiente una piccola *imperfezione* iniziale o una qualsiasi *perturbazione* per causare il *salto* dinamico del sistema nella configurazione deformata.

Lo studio quantitativo del fenomeno comporta la scrittura e la soluzione delle equazioni di equilibrio della lastra cilindrica in fase di grandi

spostamenti. I principali risultati di queste ricerche sono riportati nella fig. 11-15, in cui η è la diminuzione della distanza tra le due basi del ci-



(Da Timoshenko e Gere)

FIG. 11-15

lindro (cioè il *parametro della configurazione* tale che $F\eta$ sia il lavoro del carico applicato F : cfr. Cap. I, § 5), ed F_c , ϵ_{xc} indicano i rispettivi valori *critici*.

La curva $F-\eta$ per cilindro perfetto ($A_0 = 0$) fu ottenuta da *Kàrmàn e Tsien* nel 1941. Dalla figura si nota che, con una curva di questo tipo, si ha un salto brusco dal punto A al punto B, con conseguenti fenomeni dinamici, anche se la forza F è applicata secondo le norme della *deformazione guidata* (cap. I).

Le altre curve riportate in figura furono ottenute da *Donnell e Wan* nel 1950, supponendo che il cilindro reale fosse inizialmente deformato, rispetto alla superficie cilindrica perfetta, secondo l'equazione

$$w = A \frac{R}{r^{3/2} s^2} \left(\cos \frac{rsx}{R} \cos s\alpha + b \cos \frac{2rsx}{R} + c \cos 2s\alpha + d \right) \quad (q')$$

in cui le costanti r, s, b, c, d venivano ottenute con la condizione che l'energia di deformazione fosse minima. Le curve di fig. 11-15, corrispondenti a vari valori di A_0 , mostrano che il valore del carico critico (*carico di collasso*) decresce molto rapidamente al crescere dell'ampiezza della *imperfezione*, finchè per A_0 dell'ordine di 0,15 il fenomeno di instabilità sparisce completamente, ma la *rigidezza* assiale F/η del cilindro è molto inferiore a quella iniziale del cilindro perfetto.

11. Le volte sottili autoportanti.

Un altro caso di lastra cilindrica che può presentare pericolosi fenomeni di instabilità, è quello della volta sottile autoportante, di particolare interesse per l'ingegnere civile.

Una tale volta è costituita da una lastra cilindrica, in genere in cemento armato, simmetrica rispetto al piano verticale passante per la generatrice di colmo (fig. 11-16). I vincoli esterni sono costituiti da sottili diaframmi ortogonali alle generatrici (*timpani*), atti ad impedire solo gli spostamenti nel loro stesso piano. La volta può essere vincolata a due soli *timpani* alle estremità (volta *semplicemente appoggiata*), ovvero essere *continua* su più timpani.

Dalla trattazione statica delle volte sottili autoportanti (per cui si rimanda ai testi specializzati) è noto che è possibile realizzare un equilibrio con soli *sforzi di membrana*, purchè si accettino alcune incongruenze e si ammetta che le fibre

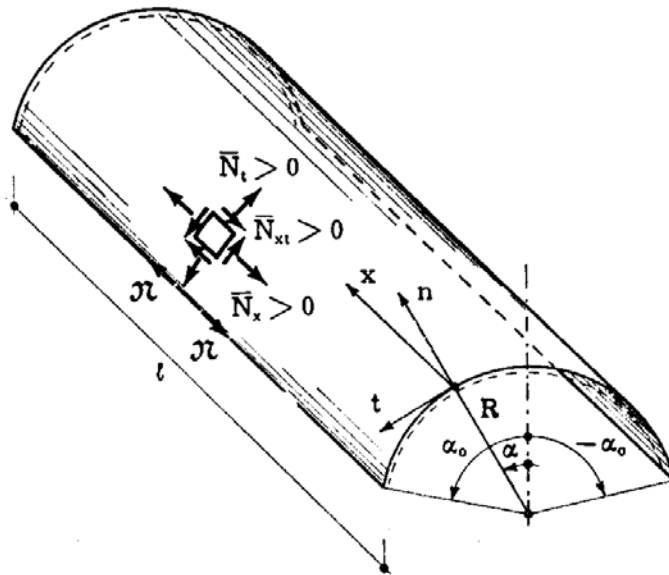


FIG. 11-16

longitudinali corrispondenti alle generatrici terminali della volta siano capaci di assorbire gli sforzi N_{xt} ed N_t trasmessi dagli elementi adiacenti: a questo scopo è talvolta necessario realizzare un'apposita *trave di bordo*.

Nel seguito si studierà la stabilità delle volte *semplicemente appoggiate*, la cui direttrice è costituita da una semicirconferenza ($R = \text{cost}$, $\alpha_0 = \pi/2$; fig. 11-16) soggette a carichi verticali uniformemente ripartiti rispetto alla superficie della volta oppure rispetto alla sua proiezione orizzontale. Il primo caso corrisponde per esempio alla distribuzione del peso proprio della volta e di eventuali rivestimenti; il secondo caso alle normali ipotesi sul sovraccarico accidentale; nel seguito si farà riferimento ai due casi come *caso g* e *caso q* rispettivamente, indicando con le stesse lettere g e q il valore del carico applicato sull'unità di superficie (rispettivamente, della volta o della proiezione orizzontale).

In entrambi i casi, nelle fibre di bordo sorrà presente soltanto uno sforzo normale di trazione \mathcal{N} : esse prendono quindi il nome di *tiranti di bordo*.

Misurando le anomalie α dal piano verticale di simmetria e le ascisse x da uno dei timpani, e indicando con l la luce della volta (fig. 11-16), gli sforzi \bar{N}_x , \bar{N}_t , \bar{N}_{xt} nella volta ed \mathcal{N} nei tiranti di bordo sono dati da:

Caso g:

$$\begin{aligned}\bar{N}_x &= -g \frac{l^2}{R} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \cos \alpha \\ \bar{N}_t &= -g R \cos \alpha \\ \bar{N}_{xt} &= g l \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) \sin \alpha \\ \mathcal{N} &= g l^2 \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right)\end{aligned}\tag{41}$$

Caso q:

$$\begin{aligned}\bar{N}_x &= -\frac{3}{2} q \frac{l^2}{R} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \cos 2\alpha \\ N_t &= -q R \cos^2 \alpha \\ \bar{N}_{xt} &= \frac{3}{4} q l \left(1 - 2 \frac{x}{l} \right) \sin 2\alpha \\ \mathcal{N} &= 0.\end{aligned}\tag{42}$$

In entrambi i casi, a causa della variabilità degli sforzi da punto a punto della volta e dell'incompletezza della superficie rispetto agli esempi precedentemente trattati, non è possibile la soluzione diretta delle equazioni dell'equilibrio variato, nemmeno facendo ricorso alla forma semplificata di Donnell (14). Bisogna quindi far ricorso al procedimento energetico, che sarà sviluppato utilizzando i risultati del § 5.

Alla deformata si attribuisca l'espressione (Capurso)

$$w_{ns} = A_{ns} (1 + \eta \cos 2\alpha) \sin \frac{\pi x}{l} \cos s\alpha\tag{43}$$

con η parametro costante arbitrario ed s intero pari. La (43) rispetta le condizioni ai limiti

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{per} \quad \begin{cases} x=0 \\ x=l \end{cases}\tag{44}$$

e su una generica direttrice corrisponde ad onde che, per $\eta > 0$, si vanno smorzando verso i bordi liberi (fig. 11-17), cioè, com'è logico, dov'è mi-

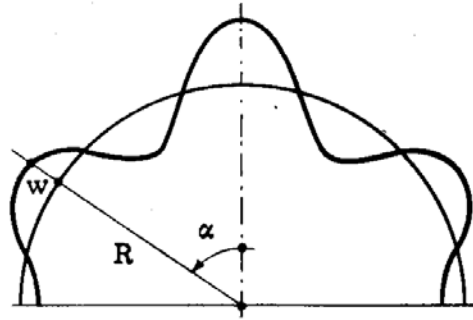


FIG. 11-17

nore la compressione della volta stessa. Il carico e la deformata assunta permettono di affermare senz'altro

$$L_2 = L_{2s} = 0 . \quad (r')$$

Nel calcolo del lavoro L_2^* bisogna tener conto anche dello sforzo \mathcal{N} localizzato nel tirante di bordo: pertanto limitandosi per simmetria a metà volta, la (19) si modifica in:

$$L_2^* = \int_0^{\pi/2} \int_0^l \left[\bar{N}_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\bar{N}_t}{R^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + 2 \frac{\bar{N}_{tx}}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right] R dx d\alpha + \int_0^l \mathcal{N} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{\alpha=\pi/2}^2 dx . \quad (s')$$

Introducendo le (41), (42) e (43), e contraddistinguendo con gli indici g e q i risultati relativi ai due casi considerati, la (s') fornisce

$$\begin{aligned} L_{2g}^* &= -A_{\eta s}^2 \quad g l (Q_{0g} + Q_{1g} \eta + Q_{2g} \eta^2) \\ L_{2q}^* &= -A_{\eta s}^2 \frac{\pi}{4} q l (Q_{0q} + Q_{1q} \eta + Q_{2q} \eta^2) \end{aligned} \quad (45)$$

in cui si è posto

$$Q_{0g} = \frac{s^2}{4s^2 - 1} \left(s^2 - 1 - \frac{\pi^2 + 3}{6} \right)$$

$$Q_{1g} = \frac{1}{6} \left(s^2 + 4 + 7 \frac{\pi^2 + 3}{6} \right) + \frac{1}{4(s-1)^2 - 1} \left[(s-1)^2 - \frac{s}{4} (s-2) + \right.$$

$$+ \frac{\pi^2 + 3}{24} \left] + \frac{1}{4(s+1)^2 - 1} \left[(s+1)^2 - \frac{s}{4}(s+2) + \frac{\pi^2 + 3}{24} \right] \quad (t')$$

$$Q_{2g} = \frac{1}{60} \left(7s^2 + 24 - 23 \frac{\pi^2 + 3}{6} \right) - \frac{1}{4s^2 - 1} \left(\frac{3s^2 + 4}{8} + \frac{\pi^2 + 3}{48} \right) +$$

$$- \frac{1}{4(s-2)^2 - 1} \left[3 \left(\frac{s-2}{4} \right)^2 + \frac{\pi^2 + 3}{96} \right] +$$

$$- \frac{1}{4(s+2)^2 - 1} \left[3 \left(\frac{s+2}{4} \right)^2 + \frac{\pi^2 + 3}{96} \right]$$

$$Q_{0q} = \frac{s^2}{4}$$

$$Q_{1q} = \frac{1}{4} \left(s^2 + 3 + \frac{\pi^2 + 3}{6} \right) \quad (u')$$

$$Q_{2q} = \frac{1}{4} (s^2 + 4) .$$

Analogamente, introducendo la (43) e le opportune condizioni ai limiti, le (15), (16) e (17) forniscono l'espressione dell'energia di deformazione della volta, che si può mettere nella forma:

$$W = A_{ns}^2 \frac{\pi}{24} \frac{E \ell}{1 - \frac{1}{m^2}} (S_0 + S_1 \eta + S_2 \eta^2) \quad (46)$$

in cui si è posto

$$S_0 = 3 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \frac{h}{R \kappa_0^2} \left(1 - \frac{\varphi}{\kappa_0^2} \right) + \frac{\pi^4}{4} \frac{Rh^3}{\ell^4} \kappa_0^2$$

$$S_1 = 3 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \frac{h}{R \kappa_0^2} \varphi \left(\frac{1}{\kappa_1^2} + \frac{1}{\kappa_2^2} \right) \quad (v')$$

$$S_2 = 3 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \frac{h}{4R} \left(\frac{1}{\kappa_1^2} + \frac{1}{\kappa_2^2} \right) \left[1 - \varphi \left(\frac{1}{\kappa_1^2} + \frac{1}{\kappa_2^2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\pi^4}{16} \frac{Rh^3}{\ell^4} (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)$$

essendo a loro volta:

$$\varphi = \frac{8}{\pi^2} \frac{\ell}{R} \frac{\cosh \frac{\pi^2 R}{\ell} - 1}{\sinh \frac{\pi^2 R}{\ell} + \frac{\pi^2 R}{\ell}}$$

$$\kappa_0 = 1 + \frac{s^2 \ell^2}{\pi^2 R^2}$$

$$\kappa_1 = 1 + \frac{(s-2)^2 \ell^2}{\pi^2 R^2}$$

$$\kappa_2 = 1 + \frac{(s+2)^2 \ell^2}{\pi^2 R^2}.$$
(z')

Ponendo rispettivamente nei due casi

$$g = \frac{\pi}{24} \frac{E}{1 - \frac{1}{m^2}} \lambda_g$$

$$q = \frac{1}{6} \frac{E}{1 - \frac{1}{m^2}} \lambda_q$$
(47)

la (20) fornisce l'espressione del moltiplicatore λ , formalmente identica nei due casi

$$\lambda = \frac{S_0 + S_1 \eta + S_2 \eta^2}{Q_0 + Q_1 \eta + Q_2 \eta^2}$$
(48)

in cui le S sono date dalle (v'), e le Q dalle (t') o dalle (u').

Imponendo la condizione di minimo

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = 0$$

si ha

$$\eta = \frac{S_2 Q_0 - S_0 Q_2}{S_2 Q_1 - S_1 Q_2} \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{(S_2 Q_1 - S_1 Q_2)(S_0 Q_1 - S_1 Q_0)}{(S_2 Q_0 - S_0 Q_2)^2}} \right]$$
(a'')

I moltiplicatori critici λ_{gc} e λ_{qc} corrispondenti a determinate caratteristiche geometriche R/l ed h/l , si trovano introducendo una delle due espressioni (a'')

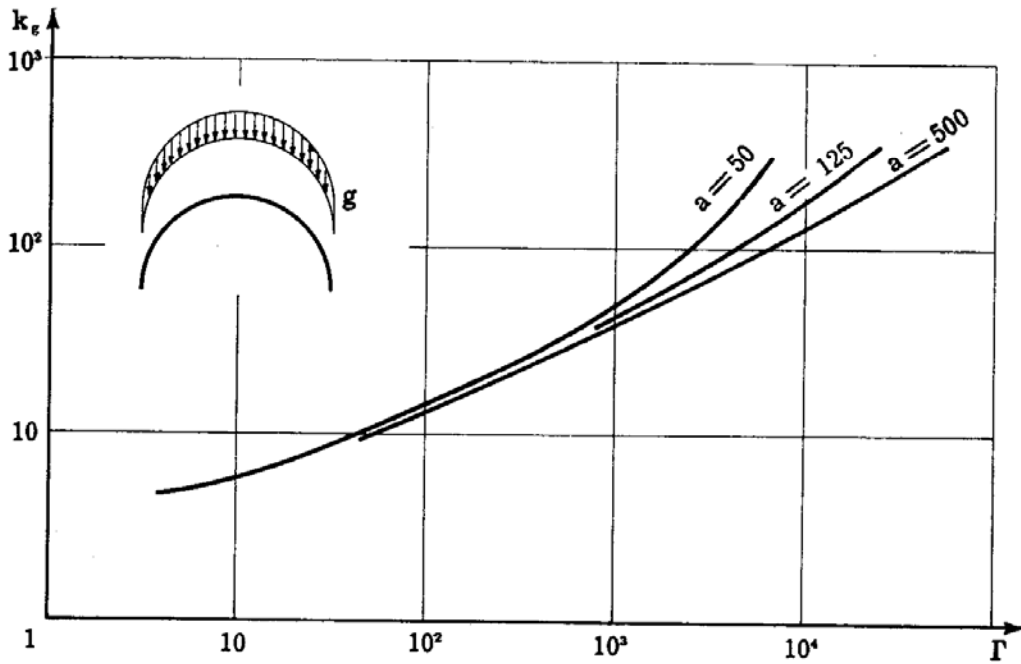


FIG. 11-18

nella (48), e determinandone il minimo rispetto ai possibili valori di s , che è per ipotesi un numero intero pari.

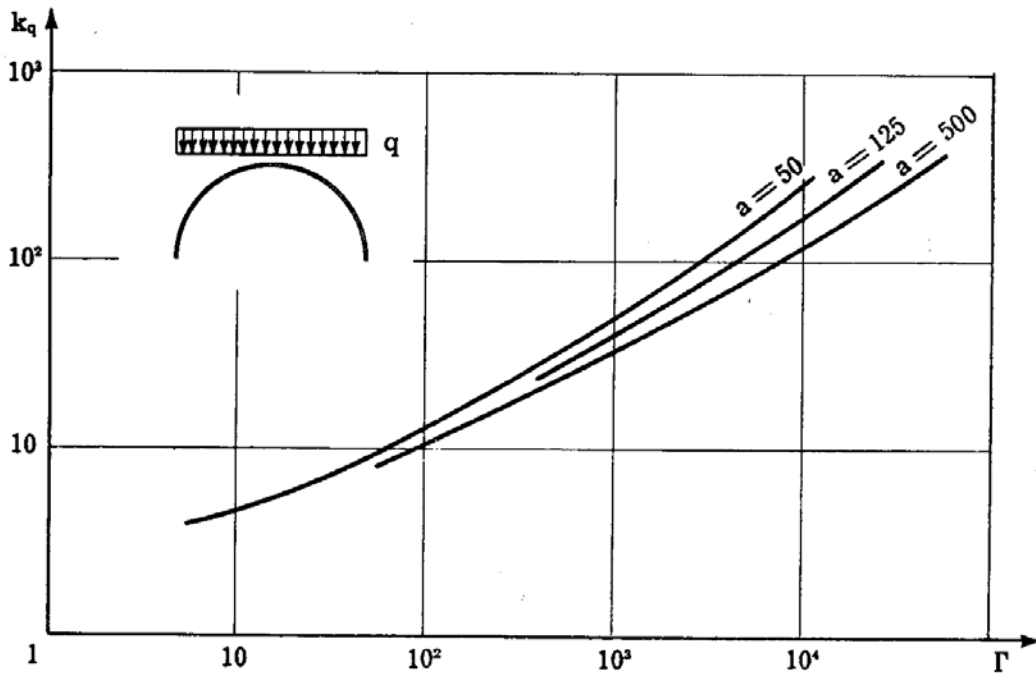


FIG. 11-19

Ciò è stato fatto in un'estesa calcolazione numerica, i cui principali risultati si riportano nelle figg. 11-18 e 11-19, in coordinate analoghe a quelle usate nelle

figg. 11-8, 11-10 e 11-11. Γ ed a sono cioè ancora date dalle (25) e (27):

$$\Gamma = \frac{\ell^2}{Rh} \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}$$

$$a = \frac{R}{h} \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}$$

mentre si è posto nei due casi, in analogia alla (24),

$$g = \frac{\pi^2 D}{R \ell^2} k_g$$

$$q = \frac{\pi^2 D}{R \ell^2} k_q$$
(b'')

e quindi dalle (47) e (9)

$$k_g = \frac{1}{2\pi} \frac{R \ell^2}{h^3} \lambda_{gc}$$

$$k_q = \frac{2}{\pi^2} \frac{R \ell^2}{h^3} \lambda_{qc}$$
(49)

Si nota che il valore di k_g e k_q è poco sensibile al variare di a in gran parte del campo investigato.

Infine, a titolo di curiosità, si ricorda il caso della volta sottile con concavità rivolta verso l'alto, che è stata usata per realizzare alcuni *ponti-canale*. In tal caso la volta è prevalentemente tesa e non dà quindi luogo a fenomeni di instabilità. Si ha invece un notevole sforzo normale di compressione nelle travi di bordo (*puntoni di bordo*), la cui instabilità dev'essere prevenuta con particolari artifici, non potendosi fare assegnamento sul vincolo costituito dalla volta stessa.

12. Le volte sottili autoportanti molto lunghe (volte-travi).

Nei paragrafi precedenti si sono determinati i carichi critici di lastre cilindriche a direttrice circolare (completa o incompleta), in varie condizioni di carico e vincolo ma sempre trascurando gli spostamenti precedenti al manifestarsi dell'instabilità. Si sono cioè trattati casi di *instabilità di prima (o terza) specie a variazioni euleriane* (cfr. Cap. I, § 7).

Nel caso di *volte* o *tubi* cilindrici molto lunghi in rapporto all'altezza della sezione normale all'asse del cilindro, prevalentemente inflessi e non *diaframmati* in maniera sufficiente a garantire l'indeforabilità delle sezioni suddette, può manifestarsi un fenomeno di *instabilità di seconda*

specie, in cui gli spostamenti giocano un ruolo fondamentale. Infatti, nelle suddette condizioni, le sezioni trasversali della volta (o del tubo) tendono ad *appiattirsi*, cioè a ridurre il loro momento d'inerzia rispetto all'asse neutro (effetto *Brazier*): può così avvenire che oltre un certo limite il momento d'inerzia decresca più rapidamente di quanto aumenti la curvatura, e si abbia quindi *equilibrio instabile*.

L'esempio che segue chiarirà quanto sopra esposto.

Si consideri una lastra cilindrica la cui direttrice sia un arco di cerchio di raggio R ed apertura $2\alpha_0$ (fig. 11-20). Si definisca una terna cartesiana destrorsa $\xi \eta \zeta$, fissa nello spazio, con origine nel baricentro di una delle sezioni terminali,

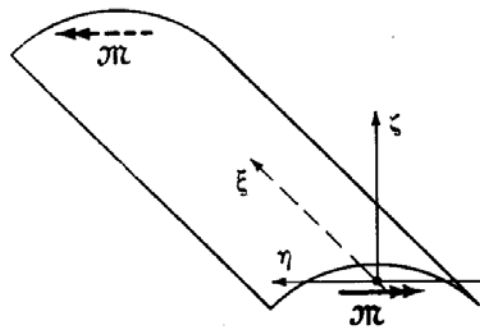


FIG. 11-20

asse ξ parallelo alle generatrici, ed assi η e ζ principali d'inerzia della sezione. In ciascun punto della superficie della volta si può inoltre definire il solito sistema $x t n$.

La volta sia sollecitata alle estremità da due coppie eguali ed opposte π , di asse vettore parallelo ad η (fig. 11-20 a) e non abbia nessun vincolo esterno. Sono quindi giustificate le ipotesi:

$$\begin{aligned} N_t &= 0 & \frac{\partial M_x}{\partial x} &= 0 \\ N_{xt} &= 0 & & \\ M_{xt} &= 0 & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (50)$$

avendo indicato con

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 w_G}{\partial \xi^2}$$

la curvatura longitudinale assunta dall'asse della volta per effetto della flessione. A sua volta w_G è lo spostamento del baricentro della generica sezione, il quale, per simmetria, avviene lungo ζ .

Le caratteristiche di sollecitazione non nulle agenti su un generico elemento di volta sono quindi quelle indicate in fig. 11-21 a, con i segni già definiti.

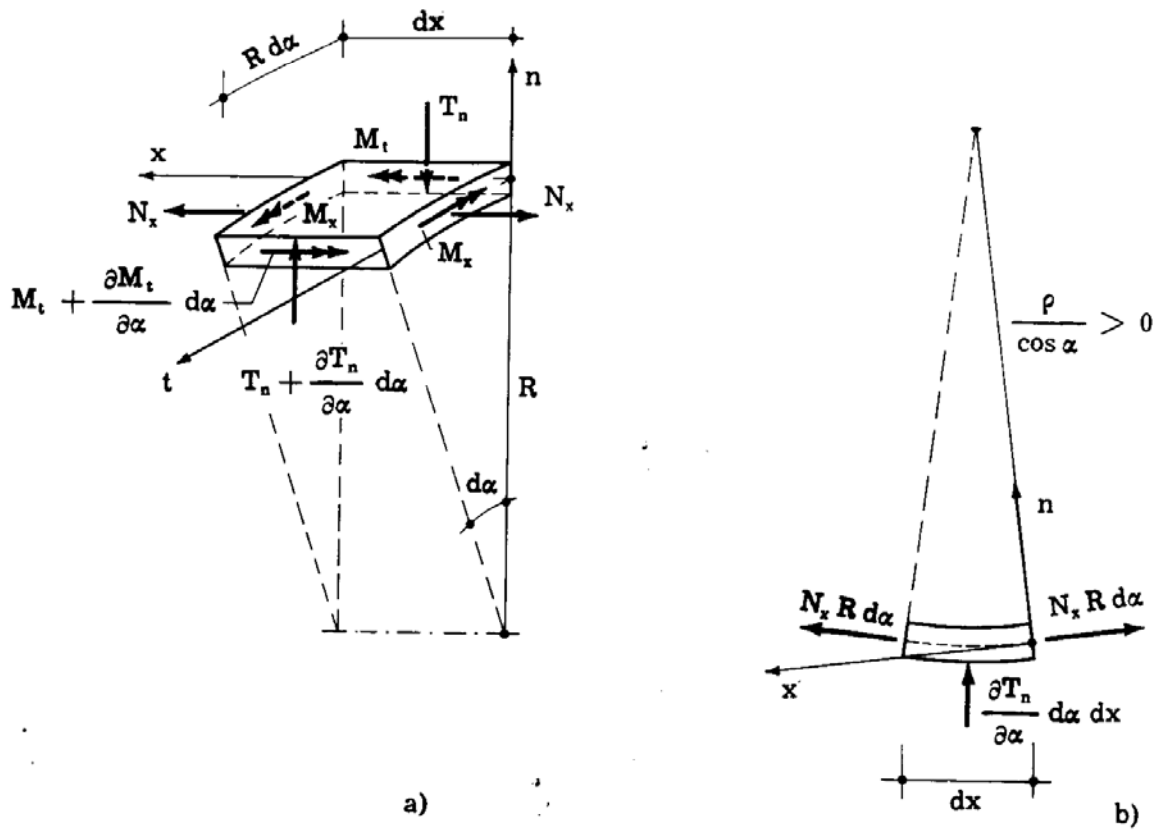


FIG. 11-21

Un generico punto della superficie media della volta, di coordinata originale ζ , si trova per effetto della deformazione ad una distanza ζ' dall'asse baricentrico

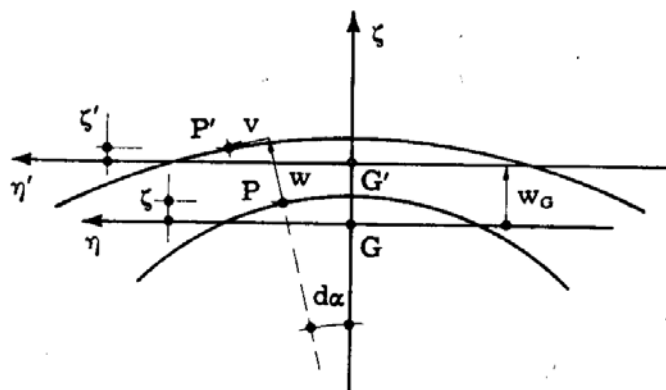


FIG. 11-22

parallelo η' (fig. 11-22):

$$\zeta' = \zeta + w \cos \alpha - v \sin \alpha - w_G \quad (c'')$$

La dilatazione ε_x delle fibre longitudinali della volta è legata alla curvatura $1/\rho$ dalla

$$\varepsilon_x = - \frac{\zeta'}{\rho} \quad (d'')$$

Tenendo presenti le (50), la prima delle (m) porge

$$N_x = - Eh \frac{\zeta'}{\rho} \quad (51)$$

L'equazione elementare di equilibrio alla rotazione intorno ad x restituisce la già nota relazione (l) tra il taglio T_n e il momento M_t (fig. 11-21 a):

$$T_n = \frac{1}{R} \frac{\partial M_t}{\partial \alpha}$$

mentre l'equazione di equilibrio alla traslazione secondo n fornisce, tenendo conto della curvatura longitudinale (fig. 11-21 b):

$$N_x R d\alpha \frac{\cos \alpha dx}{\rho} + \frac{\partial T_n}{\partial \alpha} d\alpha dx = 0$$

e quindi

$$N_x = - \frac{\rho}{R^2 \cos \alpha} \frac{\partial^2 M_t}{\partial \alpha^2} \quad (52)$$

Limitandosi d'ora innanzi a piccoli angoli di apertura $2\alpha_0$, e quindi ponendo

$$\cos \alpha = 1$$

$$\text{sen } \alpha = \alpha \quad \frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} = - \frac{1}{R} \quad (53)$$

$$R d\alpha = d\eta$$

la (52) diventa:

$$N_x = - \rho \frac{\partial^2 M_t}{\partial \eta^2} \quad (54)$$

Ricordando le (7) e tenendo presenti le (53) e (c''), le variazioni di curvatura delle generatrici (χ_x) e delle direttrici (χ_t) sono rispettivamente:

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho} \quad (e'')$$

$$\chi_t \cong \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = \frac{d^2 \zeta'}{d\eta^2} + \frac{1}{R}$$

per cui le (8) porgono

$$M_x = -D \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{m} \frac{d^2 \zeta'}{d\eta^2} + \frac{1}{mR} \right) \quad (55)$$

$$M_t = -D \left(\frac{d^2 \zeta'}{d\eta^2} + \frac{1}{R} + \frac{1}{m\rho} \right).$$

Sostituendo la (d'') e la seconda (55) nella (54), si ha

$$D\rho \frac{d^4 \zeta'}{d\eta^4} + Eh \frac{\zeta'}{\rho} = 0$$

ovvero

$$\frac{d^4 \zeta'}{d\eta^4} + \frac{12 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)}{\rho^2 h^2} \zeta' = 0 \quad (56)$$

che fornisce il legame tra la curvatura longitudinale della volta-trave $1/\rho$ e la configurazione $\zeta'(\eta)$ della sua sezione trasversale.

La soluzione della (56), tenendo conto delle condizioni ai limiti

$$T_n = M_t = 0 \quad \text{per} \quad \eta = \pm R \alpha_0 \quad (f'')$$

si può mettere nella forma

$$\zeta' = C_1 \cosh \frac{n\eta}{\rho} \cos \frac{n\eta}{\rho} + C_2 \sinh \frac{n\eta}{\rho} \sen \frac{n\eta}{\rho} \quad (g'')$$

avendo posto

$$n = \left[3 \left(1 - \frac{1}{m^2} \right) \frac{\rho^2}{h^2} \right]^{1/4}$$

$$\begin{matrix} C_1 \\ C_2 \end{matrix} = \frac{\rho^2}{2n^2} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{m\rho} \right) \frac{\sinh \frac{nR\alpha_0}{\rho} \cos \frac{nR\alpha_0}{\rho} \mp \cosh \frac{nR\alpha_0}{\rho} \sen \frac{nR\alpha_0}{\rho}}{\sinh \frac{nR\alpha_0}{\rho} \cosh \frac{nR\alpha_0}{\rho} + \sen \frac{nR\alpha_0}{\rho} \cos \frac{nR\alpha_0}{\rho}} \quad (h'')$$

Tenendo conto delle (53), l'equazione di equilibrio globale della volta fornisce

$$\mathfrak{N} = 2 \int_0^{R\alpha_0} (M_x + N_x \zeta') d\eta$$

e introducendo le (55), (51) e (g''):

$$\mathfrak{N} = 2 \alpha_0 D \left[\left(\frac{R}{\rho} - \frac{1}{m} \right) + \frac{1}{m} \left(1 - \frac{R}{m\rho} \right) F_1 - \left(1 - \frac{R}{m\rho} \right)^2 \frac{\rho}{R} F_2 \right] \quad (57)$$

avendo posto

$$F = \frac{2}{\mu} \frac{\cosh \mu - \cos \mu}{\sinh \mu + \sin \mu}$$

$$F_2 = \frac{1}{2\mu} \frac{\cosh \mu - \cos \mu}{\sinh \mu + \sin \mu} - \frac{\sinh \mu - \sin \mu}{(\sinh \mu + \sin \mu)^2} \quad (58)$$

$$\mu = \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{1}{m^2} \frac{2R\alpha_0}{\sqrt{\rho h}}}$$

Il diagramma momento \mathcal{M} -curvatura $1/\rho$, calcolato dalle (57) e (58) per

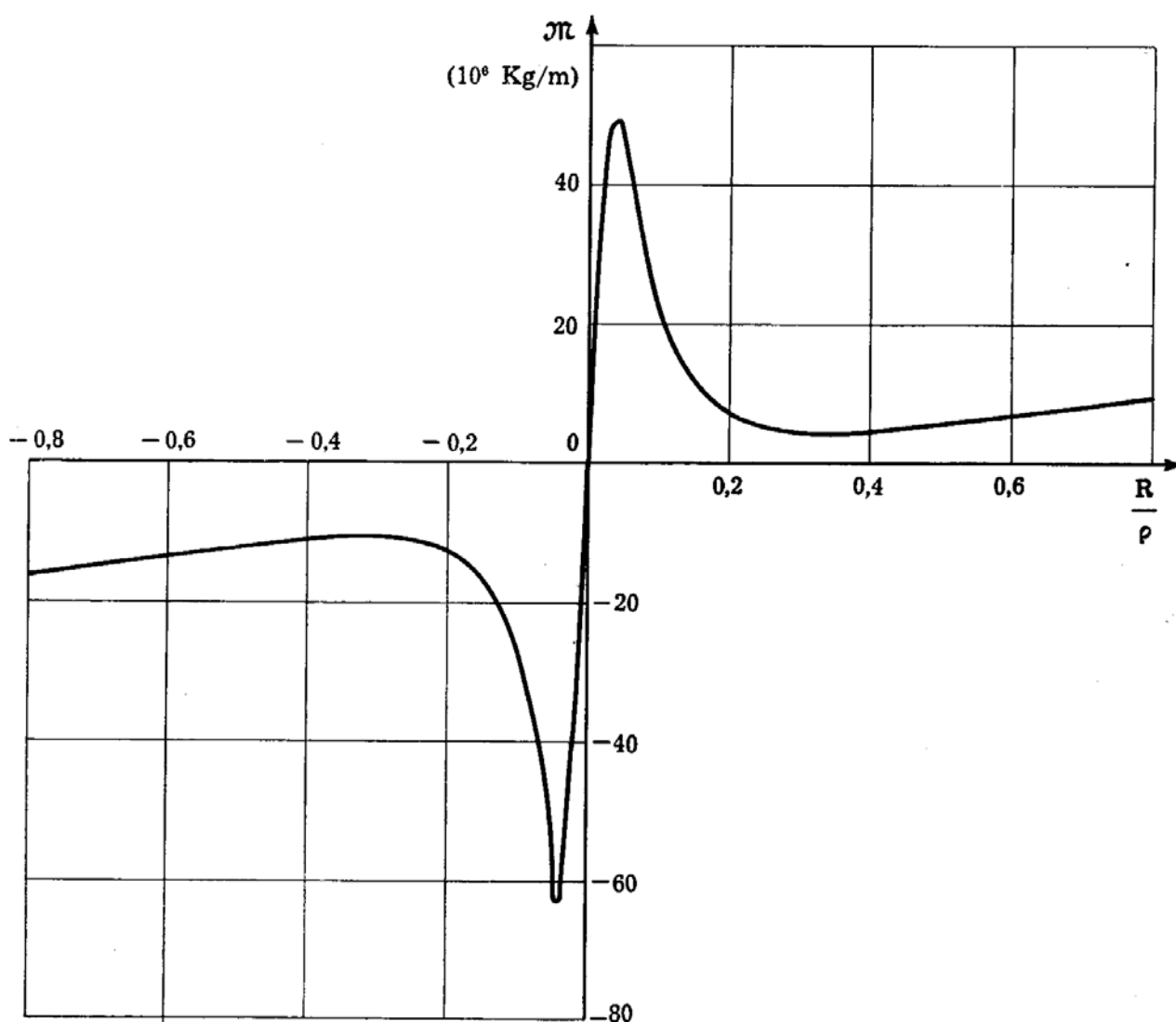


FIG. 11-23

un caso particolare ($R = 20 \text{ m}$; $\alpha_0 = 0,5$; $h = 0,2 \text{ m}$; $E = 2,1 \times 10^{10} \text{ Kg/m}^2$; $1/m = 0,25$) è riportato nella fig. 11-23. Si noti che l'instabilità (di seconda spe-

cie) si manifesta per coppie \mathcal{M} sia positive che negative: i due momenti di collasso valgono rispettivamente

$$\mathcal{M}_c^+ = 49 \times 10^6 \text{ Kg. m}$$

$$\mathcal{M}_c^- = - 63 \times 10^6 \text{ Kg. m .}$$

Per il calcolo pratico del momento di collasso di una volta-trave a direttrice con piccolo angolo di apertura, si può usare la formula approssimata

$$\mathcal{M}_c = \pm 0,28 D a \alpha_0^2 \quad (59)$$

con D ed a dati dalle (9) e (27).

Se il diagramma del momento non è costante lungo l'asse della volta-trave, come avviene nella stragrande maggioranza dei casi pratici, si può, a vantaggio di sicurezza, confrontare il momento flettente massimo con la (59).

Nell'esempio cui si riferisce la fig. 11-23, la (59) fornisce

$$\mathcal{M}_c \cong \pm 50 \times 10^6 \text{ Kg. m .}$$