

Vale quindi la limitazione di *Dunkerly*:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{F'_c} + \frac{1}{F''_c} \right) \leq \frac{1}{F_c} \leq \frac{1}{F'_c} + \frac{1}{F''_c} \quad (36)$$

che si dimostra molto utile, anche se con essa si può commettere un errore in difetto fino al 50 %.

d) Sia F'_c il moltiplicatore critico di una struttura sotto i carichi $\lambda_i F$, F''_c quello della stessa struttura sotto i carichi $\lambda_j F$, F_c quello sotto i carichi $\lambda_i F$ e $\lambda_j F$ contemporaneamente presenti. E'

$$F'_c \leq \frac{W}{\mathcal{L}'_2 - \mathcal{L}_2^{*'}}$$

$$F''_c \leq \frac{W}{\mathcal{L}''_2 - \mathcal{L}_2^{*''}}$$

$$F_c = \frac{W}{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*}$$

dove tutti i termini sono calcolati con riferimento alle variazioni dc relative alla presenza contemporanea dei carichi $\lambda_i F$ e $\lambda_j F$.

E' quindi

$$\mathcal{L}'_2 + \mathcal{L}''_2 = \mathcal{L}_2$$

$$\mathcal{L}_2^{*'} + \mathcal{L}_2^{*''} = \mathcal{L}_2^*$$

da cui

$$\frac{1}{F'_c} + \frac{1}{F''_c} \geq \frac{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*}{W}$$

e cioè

$$\frac{1}{F'_c} + \frac{1}{F''_c} \geq \frac{1}{F_c} .$$

D'altro canto, dalle relazioni (1-35)

$$\frac{1}{F'_c} \leq \frac{1}{F_c}$$

$$\frac{1}{F''_c} \leq \frac{1}{F_c}$$

si ricava

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{F'_c} + \frac{1}{F''_c} \right) \leq \frac{1}{F_c} .$$

dove W_r è calcolato, sulla struttura rinforzata, attraverso le dc_r . Quindi, poichè è

$$F_{cr} = \frac{W_r}{\lambda_{2r} - \lambda_{2r}^*},$$

risulta

$$F_c \leq F_{cr}. \quad (33)$$

Se rinforzando la struttura F_c aumenta o resta inalterata, il carico critico F_{cb} di una struttura indebolita deve essere minore (o al massimo uguale) di quello F_c della struttura reale:

$$F_c \geq F_{cb}; \quad (34)$$

infatti rispetto alla struttura indebolita quella reale è rinforzata, ed il suo carico critico deve essere maggiore.

c) Considerazioni simili possono farsi con riferimento ai carichi; se cioè ai carichi $\lambda_1 F$ se ne aggiunge qualcuno (qualche λ_1 aumenta, in particolare) il moltiplicatore critico diminuisce, e viceversa. Infatti, chiamando F'_c il moltiplicatore critico della struttura sotto i carichi maggiori, ed F_c quello sotto i carichi minori, è

$$F_c = \frac{W}{\lambda_2 - \lambda_2^*}$$

dove W , λ_2 ed λ_2^* sono calcolati con le variazioni dc relative ai carichi minori; calcolando F'_c con le stesse variazioni, W resta inalterato, $\lambda'_2 - \lambda_2^{*'}$ risulta maggiore di $\lambda_2 - \lambda_2^*$ (o, eccezionalmente, resta inalterato). D'altro canto così operando risulta, poichè le dc non coincidono con quelle relative ai carichi maggiori,

$$F'_c \leq \frac{W}{\lambda'_2 - \lambda_2^{*'}}$$

e quindi

$$F'_c \leq \frac{W}{\lambda'_2 - \lambda_2^{*'}} \leq \frac{W}{\lambda_2 - \lambda_2^*}$$

da cui

$$F'_c \leq F_c. \quad (35)$$

ω (F). La differenza tra i due comportamenti è così messa in buona evidenza.

Da tutto quanto sopra si trae che il criterio statico ed il criterio dinamico differiscono profondamente se le forze applicate non sono conservative, mentre coincidono se lo sono.

Se le forze sono conservative, la stabilità può riconoscersi, secondo ambedue i criteri, attraverso il metodo energetico, oppure col metodo geometrico, che nel criterio statico fornisce i valori delle forze per cui esistono più configurazioni di equilibrio vicine sotto le stesse forze, nel criterio dinamico i valori delle forze per cui la frequenza di vibrazione passa da reale a immaginaria, e l'ampiezza a valori infinitamente grandi.

Se le forze non sono conservative, la stabilità può invece riconoscersi solo attraverso il metodo geometrico; in questo caso, come già detto, i risultati secondo i due criteri non coincidono.

13. Limitazioni del carico critico.

Considerazioni elementari valgono a fornire valori approssimati, sia pure largamente, per eccesso o per difetto, del carico critico quando questo sia calcolabile per variazioni euleriane.

a) Si è già detto al § 8 che operando, per caratterizzare la variazione di configurazione, su terne u, v, w non complete, si calcola un carico critico mai in difetto rispetto al vero; e che si traggono, da ciò, due conseguenze: il carico critico di una struttura aumenta se si introducono dei vincoli, diminuisce se si eliminano dei vincoli, o, il che è lo stesso, se si introducono degli snodi (eccezionalmente, può restare invariato).

b) Analogamente può dirsi che se in una parte della struttura aumentano i valori dei parametri da cui, a parità di configurazione, dipende l'energia elastica (per esempio, se in una trave aumenta il modulo E o il momento d'inerzia I) il carico critico aumenta, e viceversa; eccezionalmente, può restare invariato. Infatti sia F_c il carico critico della struttura effettiva, ed F_{cr} quello della struttura rinforzata, dc e dc_r le rispettive variazioni di coordinate lagrangiane.

Dalla (1-18) risulta

$$F_c = \frac{W}{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*} \leq \frac{W'_r}{\mathcal{L}_{2r} - \mathcal{L}_{2r}^*}$$

dove W'_r , \mathcal{L}_{2r} ed \mathcal{L}_{2r}^* sono calcolati attraverso le dc_r sulla struttura effettiva. D'altro canto è

$$W'_r \leq W_r$$

Dalla (a''') si ha

$$\left(\lambda_2^2 - \frac{k^2}{2}\right)^2 = \beta \omega_n^2 + \frac{k^4}{4}$$

$$\lambda_2^4 - \lambda_2^2 k^2 = \beta \omega_n^2$$

$$\omega_n^2 = \frac{\lambda_2^2}{\beta} (\lambda_2^2 - k^2)$$

e, per la (d'''),

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{4 \beta l^2} \left(\frac{n^2 \pi^2}{4 l^2} - \frac{F}{EI} \right). \tag{e'''}$$

Per ω_n reale la (d''') offre soluzione finita; per ω_n immaginaria soluzione infinita, e quindi instabilità.

Il primo valore di F per cui un ω passa da reale a immaginaria è fornito da $\omega_1 = 0$, e cioè da

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}. \tag{f'''}$$

Nella fig. 1-49 sono riportati per la trave a mensola e nel campo reale

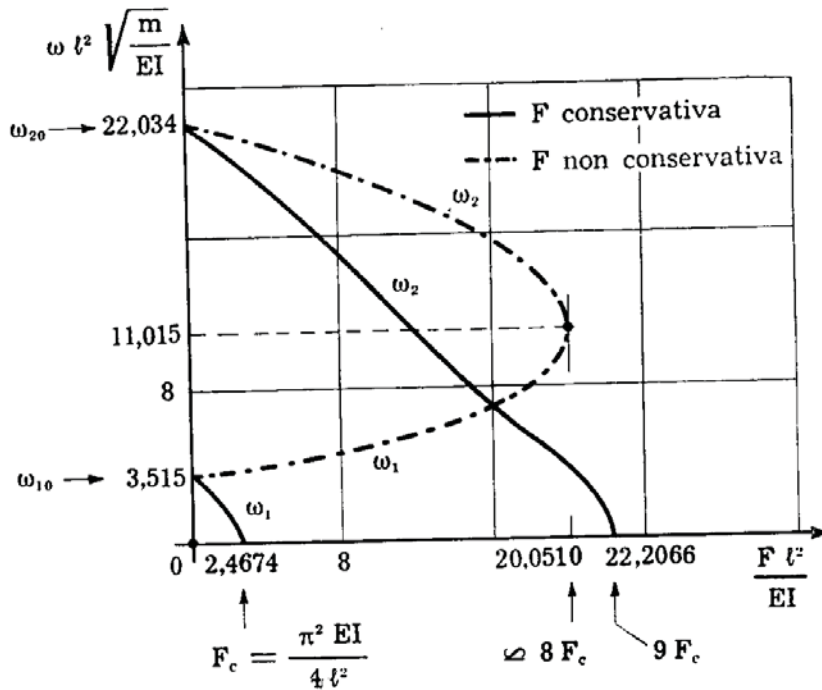


FIG. 1-49

i valori di ω_1 ed ω_2 per forza F conservativa o meno (tratto pieno e tratto punteggiato); le ω_{10} sono le frequenze per $F=0$, e da esse partono i rami

Conviene riferirsi, per dare un esempio di forza conservativa, alla struttura vincolata con appoggio e bipendolo (fig. 1-48).

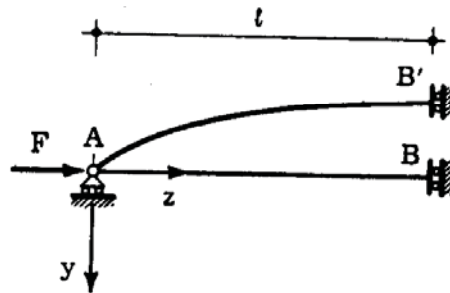


FIG. 1-48

Le condizioni ai limiti sono

$$\begin{aligned} z = 0 & \quad v = 0 & \quad v'' = 0 \\ z = l & \quad v' = 0 & \quad v''' = 0 \end{aligned}$$

da cui, e dalla (z''),

$$\begin{aligned} A & \quad + C & \quad = 0 \\ A \lambda_1^2 & \quad - C \lambda_2^2 & \quad = 0 \end{aligned}$$

da cui $A = C = 0$, e ancora

$$\begin{aligned} B \lambda_1 \cos h \lambda_1 l + D \lambda_2 \cos \lambda_2 l & = 0 \\ B \lambda_1^3 \cos h \lambda_1 l - D \lambda_2^3 \cos \lambda_2 l & = 0 \end{aligned}$$

la cui condizione di compatibilità

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 \cos h \lambda_1 l & \lambda_2 \cos \lambda_2 l \\ \lambda_1^3 \cos h \lambda_1 l & - \lambda_2^3 \cos \lambda_2 l \end{vmatrix} = 0$$

ammette come soluzione

$$\cos \lambda_2 l = 0 \tag{c'''}$$

$$\lambda_2 l = (2n - 1) \frac{\pi}{2} .$$

Corrispondentemente la (u'') ha per soluzione

$$v = \sum D_n \operatorname{sen} \frac{(2n - 1) \pi z}{2l} e^{i \omega t} . \tag{d'''}$$

Per $F \leq 2,0028 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ (Deineko e Leonov) le due radici ω_1 ed ω_2 sono reali e distinte, e quindi il moto è di carattere sinusoidale con ampiezza costante in ogni punto. Per $F = 2,0028 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ le due radici coincidono. Per $F > 2,0028 \frac{\pi^2 EI}{l^2}$, ω_1 ed ω_2 diventano complesse:

$$\omega = m \pm i n$$

e la v è fornita nei due casi da

$$v_1 = f(z) e^{(-n+im)t}$$

$$v_2 = f(z) e^{(n+im)t};$$

per n positivo (o negativo) la v_1 (o la v_2) cresce indefinitamente nel tempo e la struttura è instabile.

Nella fig. 1-47 è riportato nel campo reale il grafico delle frequenze ω in funzione delle forze F ; dove $\omega_1 = \omega_2$ diviene doppia, si ha il passag-

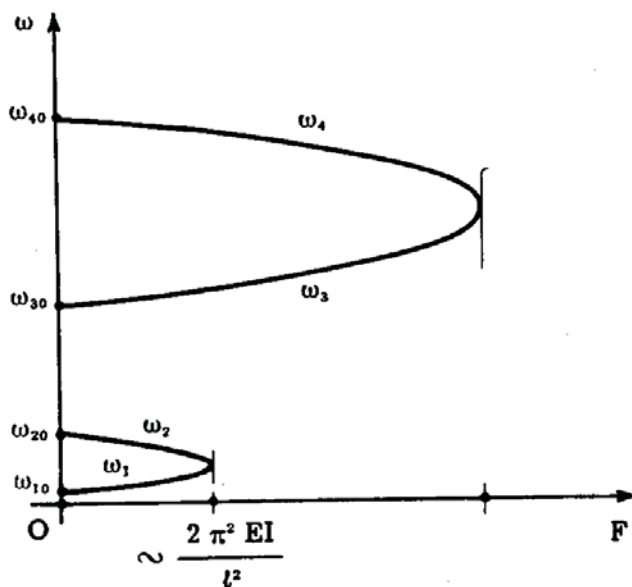


FIG. 1-47

gio della frequenza reale per $F < F_c$ alla complessa per $F > F_c$, e quindi dalla stabilità alla instabilità.

Se la forza F è conservativa la (z'') resta inalterata, le condizioni ai limiti variano.

Le condizioni ai limiti sono

$$\begin{array}{lll} z=0 & f=0 & f'=0 \\ z=l & f''=0 & f'''=0 \end{array}$$

da cui si traggono le quattro relazioni omogenee nelle quattro incognite A B C D.

$$f(0) = A + C = 0$$

$$f'(0) = B \lambda_1 + D \lambda_2 = 0$$

$$f''(l) = A \lambda_1^2 \cos \lambda_1 l + B \lambda_1^2 \sin \lambda_1 l - C \lambda_2^2 \cos \lambda_2 l - D \lambda_2^2 \sin \lambda_2 l = 0$$

$$f'''(l) = A \lambda_1^3 \sin \lambda_1 l + B \lambda_1^3 \cos \lambda_1 l + C \lambda_2^3 \sin \lambda_2 l - D \lambda_2^3 \cos \lambda_2 l = 0$$

Perchè A B C D non siano tutte nulle occorre e basta che si verifichi

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 \cos \lambda_1 l & \lambda_1^2 \sin \lambda_1 l & -\lambda_2^2 \cos \lambda_2 l & -\lambda_2^2 \sin \lambda_2 l \\ \lambda_1^3 \sin \lambda_1 l & \lambda_1^3 \cos \lambda_1 l & \lambda_2^3 \sin \lambda_2 l & -\lambda_2^3 \cos \lambda_2 l \end{vmatrix} = 0 \quad (b''').$$

La (b''') è un'equazione in ω e k , e quindi in ω ed F , che porge il valore della frequenza ω per ogni valore di F .

Dalla tabella 1-1, riportata dal *Timoshenko*, si hanno i valori della prima e seconda frequenza ω_1 ed ω_2 per valori crescenti di F :

TABELLA 1-1

$\frac{F l^2}{\pi^2 EI}$	0	0,5	1	1,5	2	2,001
$\omega_1^2 \frac{\beta l^4}{\pi^4}$	0,125	0,260	0,300	0,460	0,960	0,980
$\omega_2^2 \frac{\beta l^4}{\pi^4}$	4,860	4,200	3,300	2,600	1,020	0,990

Quindi, per qualsiasi valore di F , $\delta_1 V_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 0} > 0$, e si può avere ritorno dalla C_1 alla C_0 . Si ha conferma così di quanto già detto al § 1-1 in tema di forze non conservative.

Secondo il criterio dinamico, invece, si osserva che esiste un valore di F oltre il quale la configurazione rettilinea è instabile. L'equazione delle vibrazioni libere è, sostituendo (*D'Alembert*) le forze d'inerzia con forze normali all'asse,

$$EI v^{iv} + F v'' = - \mu \ddot{v} \quad (s'')$$

dove le derivate con apice sono rispetto a z , quelle con punto rispetto a t , e μ è la massa per unità di lunghezza della trave.

Con le posizioni

$$k^2 = \frac{F}{EI} \quad \beta = \frac{\mu}{EI}$$

la (s'') si scrive

$$v^{iv} + k^2 v'' + \beta \ddot{v} = 0 \quad (t'')$$

la cui soluzione può essere espressa come segue:

$$v = f(z) e^{i\omega t} \quad (u'')$$

Sostituendo nella (t'') si ha

$$f^{iv} + k^2 f'' - \beta \omega^2 f = 0 \quad (v'')$$

il cui integrale generale è

$$f = A \cos h \lambda_1 z + B \operatorname{sen} h \lambda_1 z + C \cos \lambda_2 z + D \operatorname{sen} \lambda_2 z, \quad (z'')$$

con

$$\lambda_1^2 = \sqrt{\beta \omega^2 + \frac{k^4}{4} - \frac{k^2}{2}} \quad (a''')$$

$$\lambda_2^2 = \sqrt{\beta \omega^2 + \frac{k^4}{4} + \frac{k^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{EI f^2 \pi^4}{4 l^4} \int_0^l \cos \frac{\pi z}{l} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi z}{2l} - \cos \frac{\pi z}{l} \right) dz = \\
 &= - \frac{EI f^2 \pi^4}{4 l^4} \left(- \frac{l}{2} + \frac{2}{3} \frac{l}{\pi} \right) = \frac{EI f^2 \pi^3}{24 l^3} (3\pi - 4) > 0.
 \end{aligned}$$

Si ha poi, nel passaggio da C_2 a C_0 ,

a) lavoro del primo ordine della $F_z = F$: esso è pari (§ 1-1) al doppio del lavoro (che risulta del secondo ordine) compiuto dalla stessa F nel passaggio da C_0 a C_2 , cambiato di segno, e cioè a

$$- 2 \frac{F \pi^2 f^2}{16 l} = - \frac{F \pi^2 f^2}{8 l}$$

b) lavoro del primo ordine della F_y ; esso è

$$F_y f = F \left(\frac{dv_2}{dz} \right)_{z=l} f = \frac{F \pi f^2}{2 l};$$

c) lavoro del primo ordine delle forze interne: si ha

$$M_2 = - EI v''_2 = - \frac{EI f \pi^2}{4 l^2} \cos \frac{\pi z}{2l},$$

$$d(d\varphi)_{2 \rightarrow} = \frac{f \pi^2}{4 l^2} \cos \frac{\pi z}{2l},$$

$$- \int_0^l M_2 d(d\varphi)_{2 \rightarrow} = \frac{EI f^2 \pi^4}{16 l^4} \int_0^l \cos^2 \frac{\pi z}{2l} dz = \frac{EI f^2 \pi^4}{32 l^3}.$$

E' perciò

$$\delta_1 V_{2 \rightarrow 0} = \frac{EI f^2 \pi^4}{32 l^3} - \frac{F \pi^2 f^2}{8 l} + \frac{F \pi f^2}{2 l} = \frac{EI f^2 \pi^4}{32 l^3} + \frac{F \pi f^2}{2 l} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) > 0.$$

In assenza della F_y (forze conservative) risulta

$$\delta_1 V_{2 \rightarrow 0} = \frac{EI f^2 \pi^4}{32 l^3} - \frac{F \pi^2 f^2}{8 l}$$

e ancora

$$\delta_1 V_{2 \rightarrow 0} \geq 0 \quad \text{secondo che} \quad F \leq \frac{\pi^2 EI}{4 l^2}.$$

Ciò sarebbe stato sufficiente per assicurare, se le forze fossero state conservative, l'allontanamento dalla configurazione rettilinea, e quindi l'instabilità di questa, per $F > \pi^2 EI/\ell^2$.

Nel caso in esame, invece, si studi il passaggio dalla configurazione C_1 alla C_2 , e poi quello dalla C_2 alla C_0 (fig. 1-46 b).

Si ponga

$$v_1 = \frac{f}{2} \left(1 - \cos \frac{\pi z}{\ell} \right)$$

$$v_2 = f \left(1 - \cos \frac{\pi z}{2\ell} \right)$$

e quindi, nel passaggio da C_1 a C_2 ,

$$M_1 = -EI v''_1 = -EI \frac{f \pi^2}{2 \ell^2} \cos \frac{\pi z}{\ell};$$

$$d(d\varphi)_{1 \rightarrow 2} = -\frac{f \pi^2}{2 \ell^2} \left(\frac{1}{2} \cos \frac{\pi z}{2\ell} - \cos \frac{\pi z}{\ell} \right) dz$$

da cui, poichè la F non compie lavoro (*),

$$\delta_1 V_{1 \rightarrow 2} = - \int_0^{\ell} M_1 d(d\varphi)_{1 \rightarrow 2} =$$

(*) Il segno di $d(d\varphi)$ è stato assunto positivo se corrisponde alla deformazione dovuta ad un momento positivo.

Si tengano presenti, per gli sviluppi che seguono, le relazioni

$$\begin{aligned} - \int_0^{\ell} \cos^2 \frac{\pi z}{\ell} dz &= -\frac{\ell}{2}; \\ \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \cos \frac{\pi z}{\ell} \cos \frac{\pi z}{2\ell} dz &= \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \left(\cos^2 \frac{\pi z}{2\ell} - \sin^2 \frac{\pi z}{2\ell} \right) \cos \frac{\pi z}{2\ell} dz = \\ &= \int_0^{\ell} \cos^3 \frac{\pi z}{2\ell} dz - \int_0^{\ell} \cos \frac{\pi z}{2\ell} \sin^2 \frac{\pi z}{2\ell} dz = -2 \int_0^{\ell} \cos \frac{\pi z}{2\ell} \sin^2 \frac{\pi z}{2\ell} dz + \\ &+ \int_0^{\ell} \cos \frac{\pi z}{2\ell} dz = -\frac{4\ell}{3\pi} \int_0^{\ell} \frac{d}{dz} \left(\sin^3 \frac{\pi z}{2\ell} \right) dz + \frac{2\ell}{\pi} = -\frac{4\ell}{3\pi} \left(\sin^3 \frac{\pi z}{2\ell} \right)_0^{\ell} + \\ &+ \frac{2\ell}{\pi} = \frac{2\ell}{3\pi}. \end{aligned}$$

dalle ultime due si trae

$$\operatorname{tg} h \, kl = 1$$

da cui

$$kl = \infty$$

$$F_c = \infty .$$

(r'')

Da quanto sopra risulta che la configurazione rettilinea è, secondo il criterio statico, stabile per qualsiasi valore di F . Il metodo energetico cade

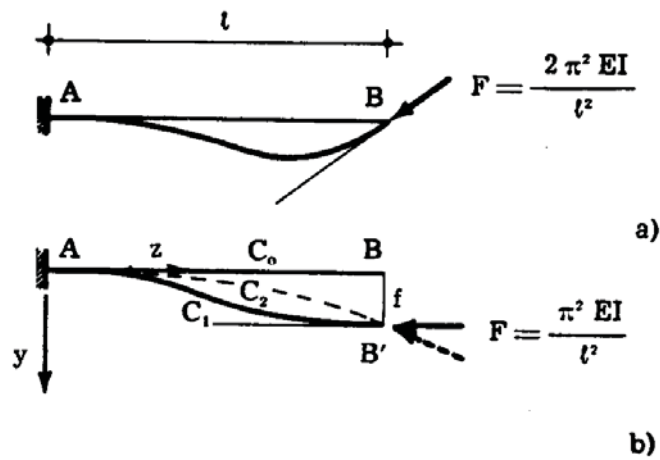


FIG. 1-46

in difetto, perchè le forze in gioco non sono conservative. In particolare, si osserva che, per la variazione δC della fig. 1-46 a, è

$$\delta_1 V_{d \rightarrow o} \geq 0$$

secondo che

$$F \leq 2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} ;$$

per la variazione della fig. 1-46 b è

$$\delta_1 V_{d \rightarrow o} \geq 0$$

secondo che

$$F \leq \frac{\pi^2 EI}{l^2} .$$

Le condizioni ai limiti sono

$$\begin{aligned}
 z = 0 & & v & = 0 \\
 & & v' & = 0 \\
 z = l & & v'' & = 0 \\
 & & v''' & = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{o''}$$

La soluzione della (n'') è

$$v = A \operatorname{sen} kz + B \operatorname{cos} kz + f - \alpha (l - z) ; \tag{p''}$$

dalle (o'') si trae

$$\begin{aligned}
 kA + \alpha & = 0 \\
 B + f - \alpha l & = 0 \\
 A \operatorname{sen} kl + B \operatorname{cos} kl & = 0 \\
 -A \operatorname{cos} kl + B \operatorname{sen} kl & = 0 .
 \end{aligned}$$

Le ultime due porgono

$$\operatorname{tg} kl = \sqrt{-1}$$

e quindi il problema non ha soluzione reale.

Se invece la F è di trazione la (n'') si traduce nell'altra

$$v'' - k^2 v + k^2 f - k^2 \alpha (l - z) = 0 \tag{q''}$$

con le stesse condizioni ai limiti (o''). La soluzione della (q'') è

$$v = A \operatorname{senh} kz + B \operatorname{cosh} kz + f - \alpha (l - z) .$$

Le (o'') porgono

$$\begin{aligned}
 B + f - \alpha l & = 0 \\
 kA + \alpha & = 0 \\
 A \operatorname{senh} kl + B \operatorname{cosh} kl & = 0 \\
 A \operatorname{cosh} kl + B \operatorname{senh} kl & = 0 ;
 \end{aligned}$$

il sistema delle (1-32) quindi è completo di ordine n , e la relativa equazione $\Delta = 0$ è di grado n in F ; quindi l'approssimazione migliora, e le difficoltà aumentano, all'aumentare del numero delle funzioni approssimanti (1-30). Non si può operare invece con il metodo geometrico attraverso equazioni analoghe alla (m''); occorre in tal caso seguire i metodi di risoluzione approssimati poggiati sullo sviluppo in serie di *Fourier* delle autofunzioni, in genere riconducendo l'equazione differenziale ad un'equazione integrale di *Fredholm* di seconda specie, e tutto ciò è, per l'ingegnere, molto più arduo (Cap. II).

12. Il caso delle forze non conservative.

Il caso della fig. 1 c, che rientra in quelli di forze applicate non conservative, offre qualche spunto di particolare interesse. Si affronti prima il problema per via geometrica, ed in presenza di una forza di compres-

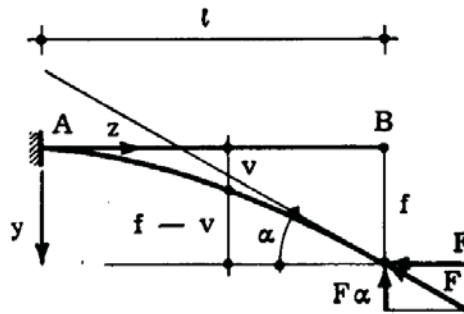


FIG. 1-45

sione (fig. 1-45). Limitandosi nel calcolo del momento ai termini del primo ordine nelle v , si ha

$$M = -F(f - v) + F \alpha (l - z)$$

dove f ed α sono la freccia e l'inclinazione in B ; quindi l'equazione della configurazione diramata è

$$EI v'' = F(f - v) - F \alpha (l - z)$$

e ancora

$$v'' + k^2 v - k^2 f + k^2 \alpha (l - z) = 0 \quad (n'')$$

dove si è posto

$$k^2 = \frac{F}{EI}$$

Si ha così, operando nel metodo energetico,

$$\int_0^l v'^2 dz = \frac{\pi^2}{l^2} \int_0^l \left(\sum v_n n \cos \frac{n \pi z}{l} \right)^2 dz = \frac{\pi^2}{2l} \sum v_n^2 n^2$$

$$\int_0^l v''^2 dz = \frac{\pi^4}{l^4} \int_0^l \left(\sum v_n n^2 \sin \frac{n \pi z}{l} \right)^2 dz = \frac{\pi^4}{2l^3} \sum v_n^2 n^4$$

e quindi, per sezione costante,

$$\delta_2 \mathbf{E} = - F \frac{\pi^2}{4l} \sum v_n^2 n^2 + \frac{EI \pi^4}{4l^3} \sum v_n^2 n^4 . \quad (31)$$

La condizione

$$\frac{\partial \delta_2 \mathbf{E}}{\partial v_n} = 0 \quad (32)$$

si scrive

$$- F_a \frac{\pi^2 n^2}{2l} v_n + \frac{EI \pi^4 n^4}{2l^3} v_n = 0$$

da cui

$$F_a = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} .$$

Seguendo il metodo geometrico invece si ha, sostituendo le (1-30) nella (1-25), e sempre per EI indipendente da z.

$$F_a \sum v_n \sin \frac{n \pi z}{l} - EI \frac{\pi^2}{l^2} \sum v_n n^2 \sin \frac{n \pi z}{l} = 0 ; \quad (m'')$$

poichè la (m'') deve essere valida per qualsiasi z, si deduce ancora la (1-27).

Nel caso di sezione costante — e nella fattispecie di trave appoggiata — il termine generico della (1-30) non varia con il numero delle funzioni approssimanti, quindi la soluzione è valida anche per $n = \infty$, e cioè è esatta; inoltre il metodo energetico e quello geometrico portano a soluzioni immediate.

Non altrettanto succede se EI è funzione di z, o, in genere, se la trave è vincolata altrimenti che con appoggi ai due estremi. In tal caso la (1-32) è un'equazione lineare omogenea nelle v_n che le contiene in genere tutte,

Per $z=0$ è $v=0$, e quindi $B=0$. La (i'') si scrive perciò

$$v = A \operatorname{sen} kz . \quad (l'')$$

Per $z=l$ è $v=0$, e cioè

$$0 = A \operatorname{sen} kl$$

da cui si trae $A=0$ (soluzione $v=0$) oppure

$$\operatorname{sen} kl = 0$$

$$kl = n\pi$$

e, per la (1-26),

$$k^2 = \frac{F}{EI} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}$$

e ancora

$$F_a = n^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2} . \quad (27)$$

Al generico valore (1-27), caratterizzato dal valore di n (n è un qualsiasi numero intero, e perciò l'insieme (1-27) è numerabile), corrisponde (l'') la soluzione della (1-25)

$$v = v_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} \quad (28)$$

con v_n indeterminato.

Il più basso degli F_a è il valore critico di F :

$$F_c = \pi^2 \frac{EI}{l^2} . \quad (29)$$

Se la trave non è di sezione costante, gli F_a devono calcolarsi come autovalori del sistema omogeneo costituito dalla (1-23) associata alle condizioni ai limiti $v=0$ per $z=0$ e per $z=l$, e le soluzioni sono le corrispondenti autofunzioni.

Riportandosi invece dal continuo al discreto, si ponga

$$v = \sum v_n \operatorname{sen} \frac{n \pi z}{l} , \quad (30)$$

ove n è in genere limitato.

e quindi dalla

$$EI v'' = -M$$

si trae,

$$(EI v'')'' + M'' = 0$$

da cui

$$(EI v'')'' + F v'' = 0 .$$

Le (1-24) sono le condizioni ai limiti nelle forze; infatti agli estremi liberi o appoggiati, dove può essere $(\delta v)' \neq 0$, deve essere $v'' = 0$; essendo il taglio agli estremi liberi, dove δv può essere $\neq 0$, fornito dalle due espressioni $F v'$ ed $M' = - (EI v'')'$, queste debbono essere uguali.

Viceversa, se la v è una soluzione di equilibrio, sono valide le (1-23) ed (1-24), e quindi $\delta_1 (\delta_2 E)$ è nullo per qualsiasi δv .

E' appena necessario avvertire che le δv devono rispettare le sole condizioni geometriche di vincolo.

Si ha conferma così di quanto già detto circa l'equivalenza delle (1-12) e delle equazioni dell'equilibrio variato.

Nel caso dei sistemi continui, se il metodo energetico si applica attraverso le variazioni δv esso non differisce, nelle pratiche applicazioni, dal metodo geometrico, perchè porta alla stessa equazione differenziale.

Se invece si sviluppa la $v(z)$ in serie di funzioni, passando così dal continuo al discreto, si palesano le differenze applicative tra i due metodi.

Operando sul continuo, dalla (1-23), nel caso di trave a sezione costante, e appoggiata ai due estremi, si ricava

$$F v + EI v'' = 0$$

e quindi

$$v'' + k^2 v = 0 \tag{25}$$

dove

$$k^2 = \frac{F}{EI} . \tag{26}$$

La (1-25) ammette la soluzione $v = 0$, e l'altra

$$v = A \operatorname{sen} kz + B \operatorname{cos} kz . \tag{i''}$$

da cui

$$\delta_1 (\delta_2 \mathbf{E}) = - F \int_0^l v' (\delta v)' dz + \int_0^l EI v'' (\delta v)'' dz . \quad (h'')$$

Integrando per parti si ha

$$\int_0^l v' (\delta v)' dz = (v' \delta v)_0^l - \int_0^l v'' \delta v dz .$$

Così pure si ha

$$\begin{aligned} \int_0^l EI v'' (\delta v)'' dz &= [EI v'' (\delta v)']_0^l - \int_0^l (EI v'')' (\delta v)' dz = \\ &= [EI v'' (\delta v)']_0^l - [(EI v'')' \delta v]_0^l + \int_0^l (EI v'')'' \delta v dz . \end{aligned}$$

E' perciò

$$\begin{aligned} \delta_1 (\delta_2 \mathbf{E}) &= F \int_0^l v'' \delta v dz + \int_0^l (EI v'')'' \delta v dz - F (v' \delta v)_0^l + \\ &+ [EI v'' (\delta v)']_0^l - [(EI v'')' \delta v]_0^l . \end{aligned}$$

Se per qualsiasi δv si verifica

$$\delta_1 (\delta_2 \mathbf{E}) = 0$$

è pure

$$F v'' + (EI v'')'' = 0 \quad (23)$$

e ancora, agli estremi,

$$\begin{array}{ll} \text{per } \delta v \neq 0 \text{ e } (\delta v)' \neq 0 \text{ (estremo libero)} & v'' = 0 , \quad F v' + (EI v'')' = 0 \\ \text{per } \delta v = 0 \text{ e } (\delta v)' \neq 0 \text{ (appoggio)} & v = 0 , \quad v'' = 0 \\ \text{per } \delta v = 0 \text{ e } (\delta v)' = 0 \text{ (incastro)} & v = 0 , \quad v' = 0 . \end{array} \quad (24)$$

La (1-23) è l'equazione indefinita di equilibrio variato; infatti procedendo da z a $z + dz$ è

$$dM = F v' dz$$

è $w_A = 0$, e quindi $L_2 = 0$. Si ha però in tal caso

$$\varepsilon_z^{(1)} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\varepsilon_z^{(2)} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2,$$

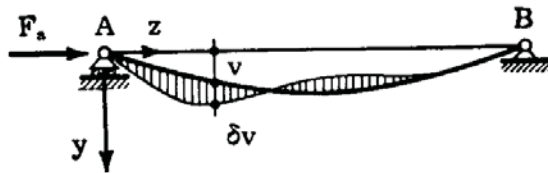
e quindi

$$\begin{aligned} L_2^* &= - \int_V \sigma_z \varepsilon_z^{(2)} dV = - \int_0^l \int_A \sigma_z \varepsilon_z^{(2)} dA dz = \\ &= - F \int_0^l \varepsilon_z^{(2)} dz = - \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 dz. \end{aligned}$$

Si può quindi scrivere, in ambedue i casi,

$$\delta_2 E = - \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dz. \quad (22)$$

La $v(z)$ vari (fig. 1-44) di una qualsiasi funzione $\delta v(z)$, ove δv deve



$$\delta_2 E = - \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dz$$

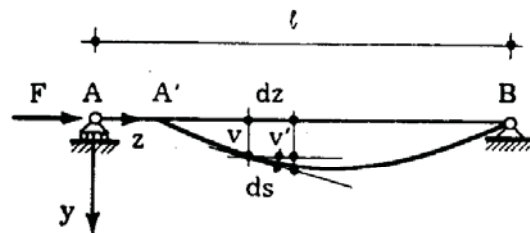
$$\delta, \delta_2 E = 0$$

FIG. 1-44

rispettare solo le condizioni di congruenza imposte dai vincoli. Si ha

$$\begin{aligned} \delta_2 E + \delta(\delta_2 E) &= - \frac{F}{2} \int_0^l [v' + (\delta v)']^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l EI [v'' + (\delta v)'']^2 dz = \\ &= - \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 dz - F \int_0^l v' (\delta v)' dz - \frac{F}{2} \int_0^l (\delta v)'^2 dz + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^l EI v''^2 dz + \int_0^l EI v'' (\delta v)'' dz + \frac{1}{2} \int_0^l EI (\delta v)''^2 dz, \end{aligned}$$

Si supponga che la deformata δC caratterizzata dalle v non comporti



$$w_A = \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz$$

$$\varepsilon_z = 0$$

$$L_2 = \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 dz \quad L_2^* = 0$$

FIG. 1-42

variazioni della lunghezza della trave; si ha così, in seconda approssimazione,

$$dz = ds \cos \varphi = ds \left(1 - \frac{\varphi^2}{2} \right) = ds \left(1 - \frac{v'^2}{2} \right)$$

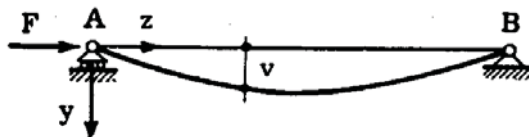
$$\begin{aligned} A'B &= \int_0^l ds \left(1 - \frac{v'^2}{2} \right) = l - \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 ds = l - \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz \left(1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) = \\ &= l - \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz \end{aligned}$$

$$w_A = \frac{1}{2} \int_0^l v'^2 dz \quad (21)$$

Si può quindi scrivere

$$L_2 = \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 dz$$

Poichè si è supposto che le ε_z connesse con le v siano nulle, è $L_2^* = 0$.



$$w = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{2} v'^2$$

$$L_2 = 0 \quad L_2^* = - \frac{F}{2} \int_0^l v'^2 dz$$

FIG. 1-43

Se invece la δC è accompagnata dall'altra condizione $w = 0$ (fig. 1-43),

secondo cioè che

$$\frac{k}{m} \geq \frac{\ell^2}{16} \quad (g'')$$

Per $k/m > \ell^2/16$, e cioè per struttura con m bassa, il che equivale a dire molto deformabile assialmente, non esiste carico critico, e la configurazione rettilinea è sempre stabile. Il contrario accade per struttura poco deformabile; in questo caso esistono due carichi critici, F_1 ed F_2 , soluzioni della (f''), e si verifica che la configurazione r_1 è stabile per $0 < F < F_1$, e per $F_2 < F < \infty$, instabile per $F_1 < F < F_2$. Infatti il diagramma $\delta_2 E(F)$ si presenta come nella fig. 1-41; esso è una parabola, e si osserva che risulta

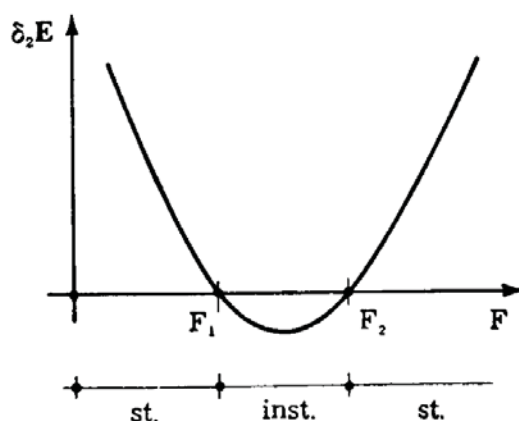


FIG. 1-41

$\delta_2 E = 0$ per i valori che soddisfano la (e''), mentre è $\delta_2 E < 0$ tra F_1 ed F_2 , $\delta_2 E > 0$ a sinistra di F_1 ed a destra di F_2 .

11. I sistemi con deformabilità continua.

Si consideri la trave della fig. 1-42, di una campata, comunque vincolata alle estremità, e soggetta alla forza assiale F di compressione. La configurazione r_1 è quella rettilinea; si supponga trascurabile la deformabilità da sforzo assiale, e si ricerchi il valore F_c in corrispondenza del quale r_1 diviene instabile. La condizione (1-12) deve essere espressa, invece che attraverso le dc_1 , introducendo la variazione della configurazione, e cioè gli spostamenti $\delta v(z)$, piccoli, presi a partire da $v(z) = 0$, che caratterizzano la configurazione r_2 diramata. Per semplicità si indicheranno, da adesso in avanti, e salvo esplicito avviso, i δv con il simbolo v , mentre con δv si chiameranno le variazioni dei δv .

per sezione costante il coefficiente m è pari ad EA/l . La relazione (d'') presuppone ovviamente che l'angolo $d\varphi$ non sia molto elevato, in caso contrario F cede il posto ad $F \cos d\varphi$.

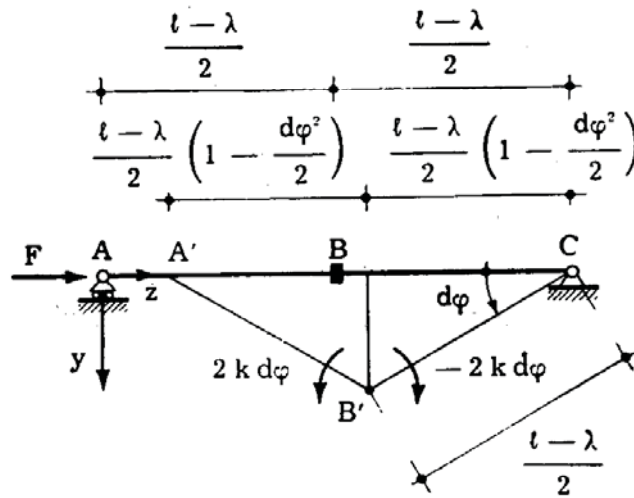


FIG. 1-40

Il sistema è a due gradi di libertà, λ e φ . Si ha, per F costante (e quindi λ costante)

$$w_A = (l - \lambda) \frac{d\varphi^2}{2}$$

$$\delta_2 E = \left[-\frac{F}{2} (l - \lambda) + 2k \right] d\varphi^2$$

da cui, per $\delta_2 E = 0$,

$$-\frac{F_a}{2} \left(l - \frac{F_a}{m} \right) + 2k = 0 \tag{e''}$$

$$F_a^2 - F_a \ell m + 4km = 0 \tag{f''}$$

$$F_a = \frac{m \ell}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 16 \frac{k}{m \ell^2}} \right).$$

Per $m = \infty$ è $\lambda = 0$, ed F_a ha l'unico valore $4 \frac{k}{\ell}$.

Per $m \neq \infty$, la (f'') fornisce due, una o nessuna radice reale, secondo che

$$1 - 16 \frac{k}{m \ell^2} \geq 0,$$

Il primo valore delle (c'') sostituito nelle (b'') porge

$$\begin{aligned} d\varphi_A + d\varphi_B &= 0 \\ -d\varphi_A - d\varphi_B &= 0 \end{aligned}$$

da cui si trae

$$d\varphi_A = -d\varphi_B .$$

Il secondo valore delle (c'') offre invece

$$\begin{aligned} -d\varphi_A + d\varphi_B &= 0 \\ -d\varphi_A + d\varphi_B &= 0 \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$d\varphi_A = d\varphi_B .$$

Le (b'') sono equivalenti alle (r'); si verifica infatti che moltiplicando la prima delle (b'') per 2 e sommandola alla seconda si ottiene la prima delle (r').

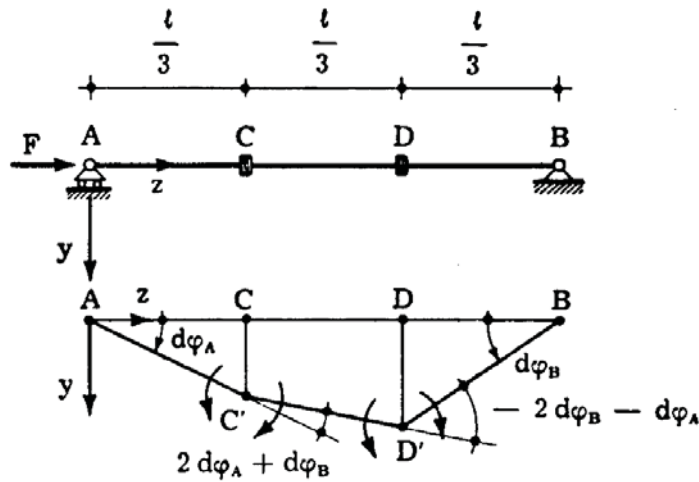
10. Un caso di variazioni non euleriane in un sistema a due gradi di libertà.

Si è già detto che le (1-12) sono agevolmente utilizzabili per la ricerca degli F_a solo se si può supporre che la r_1 sia caratterizzata dall'essere nulle tutte le coordinate lagrangiane c_i per qualsiasi valore di F , oppure che almeno alle dc_h caratterizzanti le δC — che non sono in genere tutte le coordinate lagrangiane, ma solo un gruppo m di esse — corrispondano c_h nulle in r_1 per qualsiasi valore di F . Nel primo caso — *variazioni euleriane* — si può dire che solo per $F < F_c$, ove F_c è il più piccolo degli F_a , la configurazione r_1 è stabile; infatti la δ_2^*E connessa con la δ^*C_1 è fornita dalla (1-2), e se è valutata, quale che sia il valore di F , a partire sempre dalla stessa configurazione, i $\delta^{(2)}s$, i $\delta^{(2)}\varepsilon$ e W non variano con F , e quindi δ_2^*E è funzione decrescente di F . Ciò cade in difetto nel secondo caso. Nel secondo caso, inoltre, la (1-13) non è in genere una equazione di grado m in F . L'esempio che segue, analogo ad altro riportato dallo Zanaboni, è molto istruttivo in proposito.

Si consideri la stessa struttura della fig. 1-7, nella quale però le due aste AB e BC siano elastiche solo a sforzo normale (fig. 1-40). Sia λ la variazione Δl della lunghezza l per effetto della forza F , e si ponga

$$F = m \lambda ; \tag{d''}$$

tà; esse possono essere quelle che esprimono l'equilibrio del tronco AC alla



$$\overline{CC'} = -\frac{l}{3} d\varphi_A \qquad \overline{DD'} = \frac{l}{3} d\varphi_B$$

FIG. 1-39

rotazione intorno a C', e del tronco BD alla rotazione intorno a D'. Si ha così (fig. 1-39)

$$F_a \frac{l}{3} d\varphi_A - k (2 d\varphi_A + d\varphi_B) = 0 \tag{b''}$$

$$F_a \frac{l}{3} d\varphi_B - k (2 d\varphi_B + d\varphi_A) = 0$$

il cui determinante porge

$$\frac{F_a^2 l^2}{3} - 4 F_a k l + 9 k^2 = 0$$

e ancora

$$F_a = \begin{cases} 3 \frac{k}{l} \\ 9 \frac{k}{l} \end{cases} \tag{c''}$$

Si osserva che, a parità di deformata, per $F < F_c$ il termine squilibrante, che è proporzionale ad F , è minore del termine riequilibrante, in-

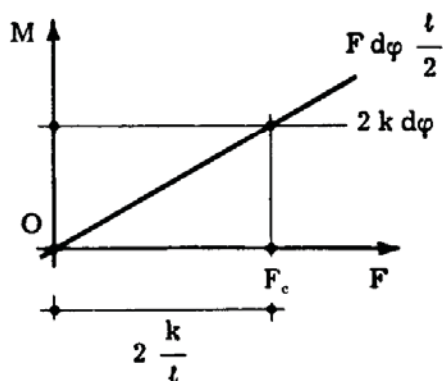


FIG. 1-37

dipendente da F (fig. 1-37), e perciò la struttura tende a ritornare nella sua posizione indeformata; il contrario accade per $F > F_c$.

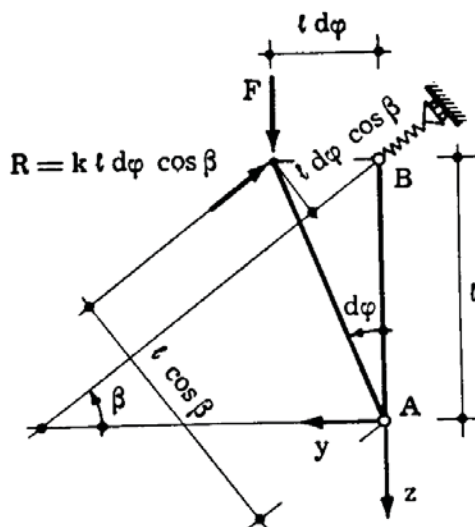


FIG. 1-38

Nel caso della fig. 1-18, pur essa ad un sol grado di libertà, risulta (fig. 1-38)

$$F_c l d\varphi - k l d\varphi \cos \beta \cdot l \cos \beta = 0$$

da cui

$$F_c = k l \cos^2 \beta .$$

Nel caso della fig. 1-30 le equazioni sono due, quanti i gradi di liber-

in D_2 :

$$w_B = \frac{2\ell}{3} (1 - \cos d\varphi_A) + \frac{\ell}{3} (1 - \cos 2d\varphi_A)$$

$$\delta_4^* E = 9 \frac{2F\ell}{3} \frac{d\varphi_A^4}{24}$$

Gli stessi valori, invertiti, si hanno nel caso della fig. 1-35.

9. Il metodo geometrico nell'instabilità di prima e terza specie a variazioni euleriane.

Si è osservato nel § 1-4 che in corrispondenza dei valori di F che soddisfano le (1-12), e in particolare quindi di F_c , esistono due configurazioni di equilibrio vicine sotto la stessa F ; e, viceversa, i valori di F per cui ciò accade soddisfano le (1-12). Quindi la ricerca delle soluzioni F_a delle (1-12) può essere fatto scrivendo le condizioni per cui, sotto la stessa F , sono in equilibrio la configurazione $c_1 = 0$ e quella δ^*C caratterizzata dalle coordinate dc_1 . Si ottengono così, oltre agli n valori F_a , anche le n configurazioni δ^*C che ad essi corrispondono.

Nel caso della struttura della fig. 1-7, ad un sol grado di libertà, la condizione di equilibrio è una sola; per esempio, perchè il tronco AB sia

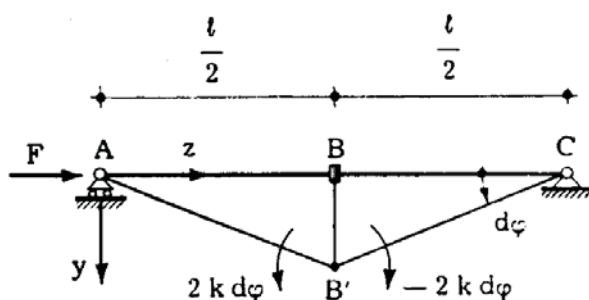


FIG. 1-36

in equilibrio occorre che le forze su esso agenti presentino momento nullo rispetto al punto B' ; si ha perciò (fig. 1-36)

$$- F_c d\varphi \frac{\ell}{2} + 2k d\varphi = 0$$

da cui

$$F_c = 4 \frac{k}{\ell}$$

la cui soluzione (δ^*C_1) è

$$d\varphi_A = d\varphi_B .$$

Ponendo invece nella (z') il secondo valore delle (a'') si ottiene

$$- d\varphi_A \frac{k_s l^2}{9} - d\varphi_B \frac{k_s l^2}{9} = 0$$

$$- d\varphi_A \frac{k_s l^2}{9} - d\varphi_B \frac{k_s l^2}{9} = 0$$

la cui soluzione (δ^*C_2) è

$$d\varphi_A = - d\varphi_B .$$

Sia la δ^*C_1 che la δ^*C_2 sono riportate nella fig. 1-35; il comportamento, in un certo senso duale rispetto a quello della fig. 1-31, è evidente.

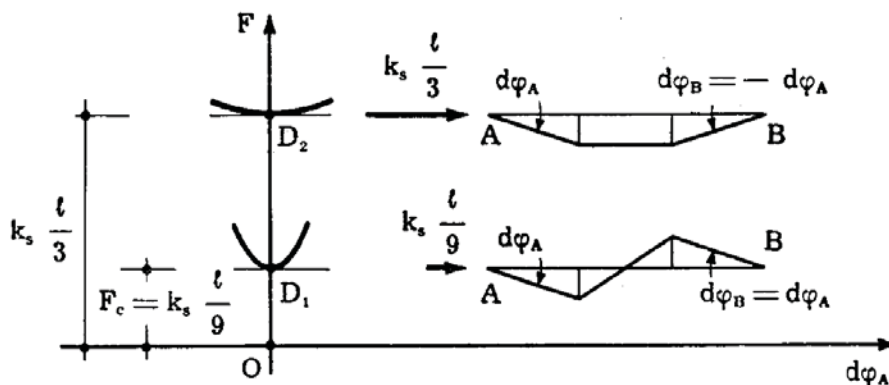


FIG. 1-35

Le (o') e (t') forniscono i valori di F cui corrispondono i punti di diramazione D . Per decidere se la curva effettiva $F d\varphi_A$ presenta in D una concavità o una convessità (instabilità di prima o di terza specie) si deve calcolare il δ_4^*E in D ($\delta_3^*E = 0$); secondo che $\delta_4^*E \geq 0$ si ha instabilità di prima o terza specie.

Nel caso della fig. 1-31 si ha in D_1 :

$$w_B = \frac{2l}{3} (1 - \cos d\varphi_A) = \frac{2l}{3} \left(\frac{d\varphi_A^2}{2} - \frac{d\varphi_A^4}{24} \right)$$

$$\delta_4^*E = \frac{2Fl}{3} \frac{d\varphi_A^4}{24} > 0$$

sono vincolati al suolo con due molle elastiche, di costante k_s , tali cioè da reagire con una forza normale all'asse e proporzionale allo spostamento:

$$R_C = -k_s v_C$$

$$R_D = -k_s v_D .$$

Le due molle siano scariche nella configurazione rettilinea, quindi è da questa che vanno valutati v_C e v_D .

Si ha, con le stesse notazioni dell'esempio precedente,

$$\delta_2^* E = d\varphi_A^2 \left(-F_a \frac{\ell}{3} + k_s \frac{\ell^2}{18} \right) + d\varphi_B^2 \left(-F_a \frac{\ell}{3} + k_s \frac{\ell^2}{18} \right) - F_a \frac{\ell}{3} d\varphi_A d\varphi_B$$

e quindi

$$\frac{\partial \delta_2^* E}{\partial d\varphi_A} = d\varphi_A \left(-\frac{2}{3} F_a \ell + k_s \frac{\ell^2}{9} \right) - d\varphi_B F_a \frac{\ell}{3} = 0 \quad (z')$$

$$\frac{\partial \delta_2^* E}{\partial d\varphi_B} = -d\varphi_A F_a \frac{\ell}{3} + d\varphi_B \left(-\frac{2}{3} F_a \ell + k_s \frac{\ell^2}{9} \right) = 0$$

da cui

$$\Delta = \left(-\frac{2}{3} F_a \ell + k_s \frac{\ell^2}{9} \right)^2 - F_a^2 \frac{\ell^2}{9} = 0$$

le cui soluzioni sono

$$F_a = \begin{cases} k_s \frac{\ell}{9} \\ k_s \frac{\ell}{3} \end{cases} \quad (a'')$$

Sostituendo il primo valore F_a nelle (z') si ha

$$d\varphi_A \frac{k_s \ell^2}{27} - d\varphi_B \frac{k_s \ell^2}{27} = 0$$

$$-d\varphi_A \frac{k_s \ell^2}{27} + d\varphi_B \frac{k_s \ell^2}{27} = 0$$

Per $F = 9 \frac{k}{l}$ invece la (v') porge

$$\delta_2 E = k d\varphi_A^2 \left(-\frac{\rho^2}{2} + \rho - \frac{1}{2} \right);$$

dal diagramma relativo (fig. 1-33 b) si osserva che per $\delta C = \delta^* C_2$, e cioè per $\rho = 1$, è ancora $\delta_2 E = 0$, mentre per ogni altro δC (compreso il $\delta^* C_1$) risulta $\delta_2 E < 0$.

E' interessante osservare che, concentrando il peso elastico totale l/EI di una trave di sezione costante nel suo centro (fig. 1-7) si ha

$$\frac{1}{k} = \frac{l}{EI}$$

$$F_c = 4 \frac{k}{l} = 4 \frac{EI}{l^2};$$

suddividendolo invece nei due punti C e D (fig. 1-30) si ottiene

$$\frac{1}{k} = \frac{l}{2EI}$$

$$F_c = 3 \frac{k}{l} = 6 \frac{EI}{l^2};$$

la soluzione esatta è

$$F_c = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

e ad essa si è più prossimi nel secondo caso che nel primo. Inoltre i due valori di F_c calcolati come sopra risultano più bassi del vero; questo risultato però non è di carattere generale, e infatti se i punti C e D della fig. 1-30 si spostano verso gli estremi, F_c calcolato sullo schema a pesi elastici concentrati supera il valore effettivo.

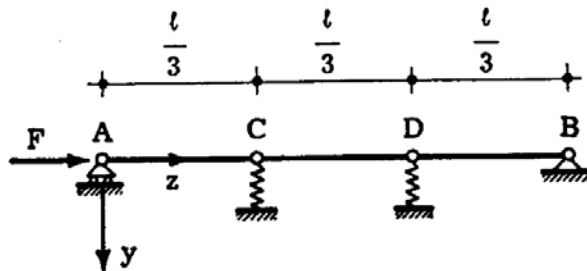


FIG. 1-34

Altro caso interessante è quello della fig. 1-34. La trave AB è costituita da tre parti rigide collegate a cerniera in C e D; gli stessi punti

bisettrici dei due quadranti.

L'espressione del generico $\delta_2 \mathbf{E}$ in funzione del rapporto

$$\rho = \frac{d\varphi_B}{d\varphi_A}$$

che caratterizza la generica δC (rappresentata nel diagramma della fig. 1-33

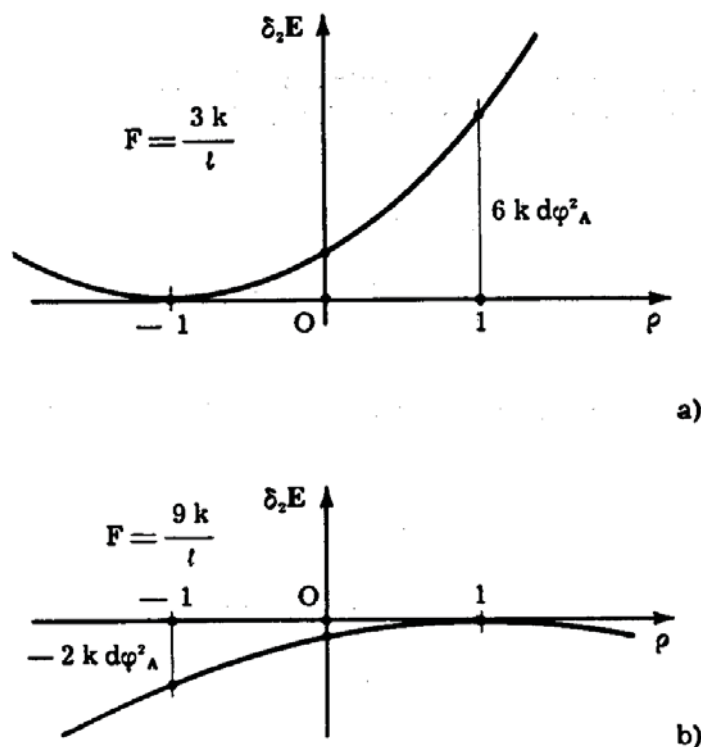


FIG. 1-33

dalla retta per O di coefficiente angolare ρ) è

$$\delta_2 \mathbf{E} = -F \frac{\ell}{3} d\varphi_A^2 (1 + \rho + \rho^2) + \frac{k}{2} d\varphi_A^2 (5\rho^2 + 8\rho + 5). \quad (v')$$

La (v') rappresenta una parabola nel piano $\delta_2 \mathbf{E}, \rho$.

Per $F = 3 \frac{k}{\ell}$ si ha

$$\delta_2 \mathbf{E} = k d\varphi_A^2 \left(\frac{3}{2} \rho^2 + 3\rho + \frac{3}{2} \right);$$

il diagramma è riportato nella fig. 1-33 a, e si osserva come per $\delta C = \delta^* C_1$, e cioè per $\rho = -1$, risulta $\delta_2 \mathbf{E} = 0$, mentre per ogni altro δC è $\delta_2 \mathbf{E} > 0$.

Sostituendo il primo valore delle (s'), che fornisce F_c , nelle (r'), si ottiene

$$3 k d\varphi_A + 3 k d\varphi_B = 0$$

$$3 k d\varphi_A + 3 k d\varphi_B = 0$$

la cui soluzione è

$$d\varphi_A = - d\varphi_B ; \quad (t')$$

la deformata corrispondente, configurazione δ^*C variata rispetto alla rettilinea, e definita a meno di una costante, è riportata nella fig. 31 a. L'altra

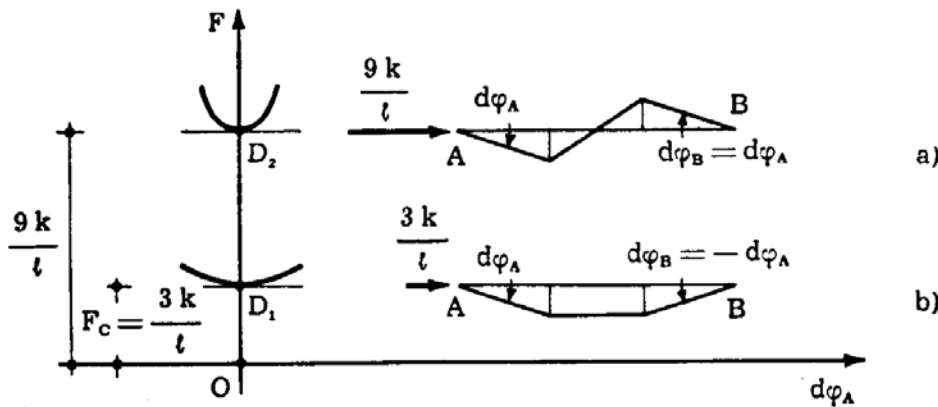


FIG. 1-31

configurazione δ^*C per cui sono pure verificate le (1-12) si ha sostituendo il secondo valore F_a nelle (r'); si ha così

$$- k d\varphi_A + k d\varphi_B = 0$$

$$k d\varphi_A - k d\varphi_B = 0$$

da cui (fig. 1-31 b)

$$d\varphi_A = d\varphi_B . \quad (u')$$

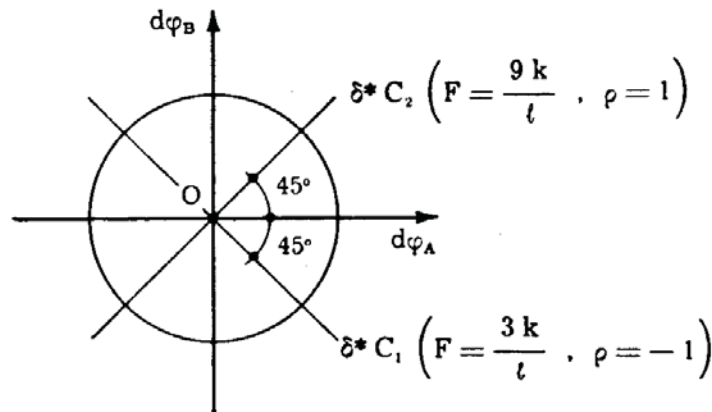


FIG. 1-32

Nel piano $d\varphi_A d\varphi_B$ (fig. 1-32) la (t') e la (u') sono rappresentate dalle

si suppone che il concio risulti scarico quando le aste sono allineate, e perciò il $\Delta\varphi$ deve essere valutato da questa posizione. La configurazione rettilinea è di equilibrio; si vuole calcolare il valore di F cui corrisponde una diramazione. Con gli elementi della fig. 1-30 si ricava, assumendo come dc_1 i due angoli in A e B,

$$\begin{aligned} w_B &= \frac{1}{2} \frac{\ell}{3} d\varphi_A^2 + \frac{1}{2} \frac{\ell}{3} \varphi_{CD}^2 + \frac{1}{2} \frac{\ell}{3} d\varphi_B^2 = \\ &= \frac{\ell}{3} (d\varphi_A^2 + d\varphi_B^2 + d\varphi_A d\varphi_B) \\ \delta_2^* E &= - F_a \frac{\ell}{3} (d\varphi_A^2 + d\varphi_B^2 + d\varphi_A d\varphi_B) + \frac{k}{2} (2 d\varphi_A + d\varphi_B)^2 + \\ &+ \frac{k}{2} (2 d\varphi_B + d\varphi_A)^2 = d\varphi_A^2 \left(- F_a \frac{\ell}{3} + \frac{5}{2} k \right) + \\ &+ d\varphi_B^2 \left(- F_a \frac{\ell}{3} + \frac{5}{2} k \right) + d\varphi_A d\varphi_B \left(- F_a \frac{\ell}{3} + 4 k \right). \end{aligned}$$

Le (1-12) si scrivono

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_2^* E}{\partial d\varphi_A} &= d\varphi_A \left(- \frac{2}{3} F_a \ell + 5 k \right) + d\varphi_B \left(- F_a \frac{\ell}{3} + 4 k \right) = 0 \\ \frac{\partial \delta_2^* E}{\partial d\varphi_B} &= d\varphi_A \left(- F_a \frac{\ell}{3} + 4 k \right) + d\varphi_B \left(- \frac{2}{3} F_a \ell + 5 k \right) = 0 \end{aligned} \quad (r')$$

e la (1-13)

$$\Delta = \left(- \frac{2}{3} F_a \ell + 5 k \right)^2 - \left(- F_a \frac{\ell}{3} + 4 k \right)^2 = 0$$

da cui

$$F_a^2 \frac{\ell^2}{3} - 4 F_a k \ell + 9 k^2 = 0$$

$$F_a = \begin{cases} 3 \frac{k}{\ell} \\ 9 \frac{k}{\ell} \end{cases} \quad (s')$$

e la posizione $d_2 E = 0$ porge

$$F_c = k l \cos^2 \beta .$$

Nella struttura della fig. 1-12 risulta, in seconda approssimazione,

$$d_2 E = - F l \cos \alpha d\varphi^2 + 4 k_f d\varphi^2 + 2 k_n l^2 \cos^2 \alpha d\varphi^2$$

da cui, per $d_2 E = 0$, si avrebbe

$$F_m = 4 \frac{k_f}{l \cos \alpha} + 2 k_n l \cos \alpha ;$$

per $k_n = 0$ si avrebbe

$$F_m = 4 \frac{k_f}{l \cos \alpha}$$

evidentemente errata perchè, in tal caso, non esiste un valore F_m di F per cui la pendenza del diagramma $F \varphi$ cambia di segno. Si consideri, come primo esempio del procedimento basato sulle 1-12, il sistema a due

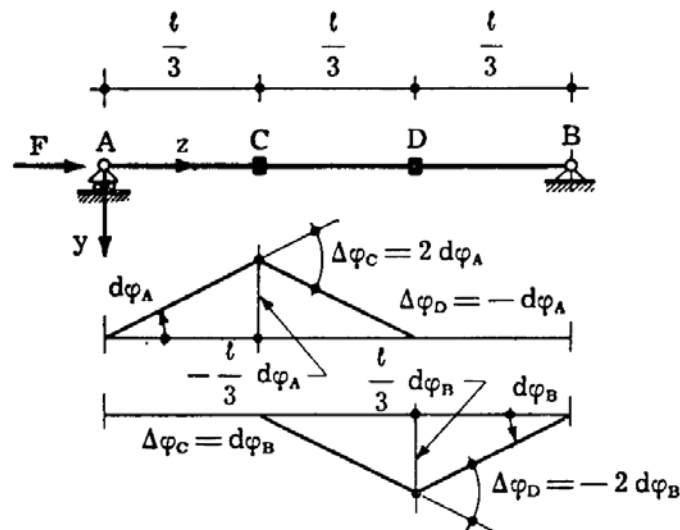


FIG. 1-30

gradi di libertà della fig. 1-30, costituito da tre aste rettilinee rigide allineate, unite da concii elastici di costante k . In questi si ha (*).

$$\mathcal{M} = k \Delta \varphi ;$$

(*) La convenzione circa il segno del $\Delta \varphi$ è, come nel caso della fig. 1-7, quella delle distorsioni; in C, $\Delta \varphi > 0$ se la parte AC di sinistra ruota in senso positivo rispetto alla parte CD di destra. \mathcal{M} è la coppia che si esercita sulla parte di destra CD.

Il ragionamento può ripetersi a ritroso; quindi le (1-12) e le (1-20) sono equivalenti.

La (1-19) è sempre valida, le (1-20) solo se sono valide le (1-12); le (1-20) forniscono tutti i valori F_a .

Se si calcola F_c attraverso la (1-18), conviene ottenere la F_b in funzione delle costanti d^*c_1 non esplicitate e calcolare il valore F_c coincidente con $F_{b \text{ min}}$ e le relative d^*c_1 attraverso le equazioni (1-20), equivalenti alle (1-12).

Dalla (1-19) si trae pure che, calcolando nel caso delle variazioni euleriane gli F_a e quindi F_c attraverso le (1-12) o (1-20), se si opera su configurazioni variate congruenti ma diverse da quelle vere, (ciò può accadere se si approssima la terna $\delta u^* \delta v^* \delta w^*$ con un numero di coordinate lagrangiane minore del vero) si calcola sempre un valore critico in eccesso rispetto al vero (*).

Nei sistemi ad un sol grado di libertà basta la (1-16) a definire F_c ; infatti non è possibile variare i rapporti tra le c_1 , che si riducono ad una, e le (1-12) non hanno più senso. Per esempio, nella struttura della fig. 1-7 è

$$d_2E = - F l \frac{d\varphi^2}{2} + 2 k d\varphi^2$$

da cui, per $d_2E = 0$,

$$F_c = \frac{4 k}{l} ;$$

per $F < F_c$ è $d_2E > 0$, per $F > F_c$ è $d_2E < 0$.

Nella struttura della fig. 1-18 è

$$s_R = l (\text{sen } \beta + \text{sen } d\varphi \cos \beta - \cos d\varphi \text{sen } \beta)$$

e, in seconda approssimazione,

$$s_R = l \cos \beta d\varphi$$

da cui

$$d_2E = - F l \frac{d\varphi^2}{2} + \frac{k}{2} l^2 \cos^2 \beta d\varphi^2$$

(*) Si trae da ciò la conseguenza che il carico critico di una struttura non diminuisce se si aggiungono dei vincoli esterni, non aumenta se si introducono degli snodi.

che può scriiversi pure

$$F (-\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_2^*) + W = 0 \quad (17)$$

si ricava F come funzione delle variazioni d^*c_i :

$$F_b = \frac{W}{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*} . \quad (18)$$

Se si assume per la ricerca approssimata di F_c una δ^*C costituita da un insieme arbitrario di d^*c_i , dalla (1-18) si ricava un valore F_b di F . E' sicuramente $F_b = F_c$ se è rispettata la condizione $\delta_2 E \geq 0$ per le altre δC ; se questa invece non è verificata, risulta $\delta_2 E < 0$, per qualche variazione δC , oltre che in $F = F_b$ anche in $F < F_b$, e quindi $F_c < F_b$.

In ogni caso quindi vale la

$$F_b \geq F_c . \quad (19)$$

La F_b della (1-18), calcolata attraverso una δ^*C che verifica le (1-12), e quindi coincidente con un F_a , è stazionaria rispetto alle dc_i . Infatti dalla

$$\frac{\partial \delta_2^* E}{\partial d^*c_i} = 0$$

si ricava

$$\frac{\partial W}{\partial d^*c_i} + F_b \frac{\partial}{\partial d^*c_i} (-\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_2^*) = 0 ,$$

e ancora

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial d^*c_i} - \frac{W}{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*} \frac{\partial}{\partial d^*c_i} (-\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_2^*) &= 0 \\ \frac{1}{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*} \frac{\partial W}{\partial d^*c_i} - \frac{W}{(\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*)^2} \frac{\partial}{\partial d^*c_i} (\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial d^*c_i} \frac{W}{\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_2^*} &= 0 \end{aligned}$$

e, per la (1-18),

$$\frac{\partial F_b}{\partial d^*c_i} = 0 . \quad (20)$$

8. Il metodo energetico nell'instabilità di prima e terza specie a variazioni euleriane.

In una struttura in cui è da prevedersi una instabilità di prima o terza specie per variazioni euleriane, si esprimono le variazioni $\delta u \delta v \delta w$ attraverso serie di funzioni

$$\Sigma dc_1 f_1(x y z) ; \quad (15)$$

ciascuna delle $f_1(x y z)$ è congruente; le c_1 sono le n variabili lagrangiane. La condizione (1-12) è

$$\frac{\partial \delta_2^* E}{\partial d^* c_1} = 0$$

dove la $\delta_2^* E$ è fornita dalla (1-3):

$$\delta_2^* E = - L_2 + L_2^* + W .$$

In questa, L_2 è il lavoro compiuto dalle forze agenti per effetto delle componenti del secondo ordine degli spostamenti connesse con la (1-15), L_2^* è il lavoro che le forze interne presenti prima della variazione $\delta^* C$ compiono per effetto delle deformazioni del secondo ordine connesse con le (1-15), e W l'energia di deformazione connessa con le (1-15), quella cioè che le (1-15) indurrebbero se agenti sulla struttura scarica. La $\delta_2^* E$ è perciò funzione quadratica delle dc_1 , omogenea e priva di termini lineari, e lineare in F ; le (1-12) sono n equazioni lineari omogenee nelle dc_1 , che ammettono per le dc_1 soluzioni diverse dalla banale solo per quei valori di F che annullano il determinante (1-13) dei coefficienti:

$$\Delta = 0 .$$

L'equazione (1-13) è un'equazione algebrica di grado n in F , che offre n soluzioni F_a per F . Sostituendo uno dei valori F_a nel sistema (1-12), si ottiene la corrispondente soluzione, fornita dai rapporti tra le dc_1 , naturalmente a meno di una costante. Il più basso dei valori F_a è il valore critico F_c .

Dalla condizione

$$\delta_2^* E = - L_2 + L_2^* + W = 0 \quad (16)$$

cui fenomeni dinamici. Questo tipo di instabilità, detto *instabilità di seconda specie*, è caratteristico delle strutture in cui tutte le coordinate lagrangiane sono impegnate fin dai primi valori di F ; si classificano tra queste gli archi di forma qualsiasi, le volte a semplice curvatura, le travi a sezione sottile non diaframmata, i telai caricati in modo qualsiasi.

Il valore F_m è anch'esso un valore critico, sia pure con significato diverso da quello F_c prima definito; per distinguerlo da F_c si può chiamarlo, come già detto, *valore di collasso*.

Il calcolo di F_m non può eseguirsi che rimuovendo l'ipotesi di piccoli spostamenti, e costruendo l'effettivo diagramma F_{c1} ; ciò importa grosse difficoltà. Invece il calcolo di F_c presenta il notevole vantaggio di operare sulla struttura indeformata, e quindi in fase di piccoli spostamenti. Se si calcola F_m , come molte volte accade, attraverso la condizione di stazionarietà del $\delta_2 E$ a partire dalla configurazione indeformata — e cioè considerando il ramo OA della fig. 1-27 c coincidente con l'asse delle F — possono commettersi grossi errori.

La stessa osservazione vale per il calcolo di F_c in presenza di variazioni non euleriane. In questi due casi, il calcolo della F_c o della F_m attraverso la (1-13) può portare ad errori in eccesso o in difetto. In genere si chiama sempre instabilità di prima specie quella che comporta diramazioni, e si dice che per essa non si verificano fenomeni di caduta rapida in configurazioni stabili molto distanti. Questo non corrisponde al vero, perchè i casi come quelli delle figg. 1-29 b e 1-29 c hanno tutti i caratteri dell'instabilità di seconda specie, pur essendo presente la diramazione.

Questi casi costituiscono in realtà una terza categoria, cui si può a buon diritto assegnare il nome di *instabilità di terza specie*.

I casi di prima e terza specie si riconoscono attraverso l'esame della dF/dc_1 e della d^2F/dc_1^2 , e cioè attraverso il valore e il segno del $\delta_3^* E$ e del $\delta_4^* E$.

Un particolare interesse rivestono poi i casi come quello delle figg. 1-9 e 1-10; il ramo passante per l'origine è l'unico possibile per forze crescenti con mutuo rapporto costante (*ramo principale*), ma, se la forza F supera il valore F_d , l'intervento di una sollecitazione finita, che poi scompare, può portare il sistema su un *ramo affiancato*. Questa non può intendersi come instabilità in senso stretto, ma il fenomeno può essere ugualmente pericoloso; se si accettasse una definizione più ampia di stabilità, analoga a quella classica, ma che tenesse conto anche di forze perturbanti finite, occorrerebbe parlare di una *instabilità di quarta specie*.

presenti imperfezioni strutturali o forze tali da generare fin dall'inizio del procedimento di carico una deformata in cui sono diverse da zero le coordinate lagrangiane di cui si considera la variazione per il calcolo del valore F_c , accade che non si ritrovi alcun punto di diramazione. Il caso della fig. 1-10 è in tal senso molto istruttivo; da esso appare evidente come per piccole imperfezioni, o piccole forze non assiali, in prossimità di F_c gli spostamenti subiscono notevoli incrementi all'aumentare del carico, e quindi il calcolo di F_c sulla struttura ideale è opportuno per poter assegnare rispetto ad esso un certo coefficiente di sicurezza. Del resto, anche nel caso della struttura ideale della fig. 1-10 il comportamento è sostanzialmente identico a quello ora descritto, perchè appena superato F_c la struttura imbocca — per l'inevitabile presenza di una sia pur minima imperfezione — il ramo stabile, e su questo prosegue all'aumentare di F , con nulla di drammatico, ma anche qui con l'intervento di grandi incrementi degli spostamenti all'aumentare delle forze.

Questa ora esaminata è la cosiddetta *instabilità di prima specie*. Altre strutture invece presentano il comportamento che si vede rappresentato nel diagramma della fig. 1-27 c. In esse il ramo stabile che parte da $F=0$ è privo di diramazioni; però, per un valore F_m di F , il ramo piega verso il basso. Nel punto A dove ciò accade è

$$\frac{dF}{d\eta} = 0$$

$$\frac{d\eta}{dc_1} \neq 0$$

$$\frac{dF}{dc_1} = 0$$

e, per le configurazioni compatibili,

$$\delta_2^* E = 0$$

$$\delta_1 \delta_2^* E = 0 \tag{14}$$

$$\delta_i^* E \neq 0 \quad \text{per } i \text{ dispari.}$$

Il ramo AB discendente è certamente instabile, e può ridiventare stabile in B, dove ricomincia l'ascesa.

Se la F cresce al di sopra di F_m , la struttura passa violentemente da A a C, con grande ed improvvisa variazione degli spostamenti, e cospicue

L'inclinazione è la stessa, perchè a parità di d^*c i due δ^*E per $\pm dc$ devono avere lo stesso valore.

Il caso $\delta_3^*E = 0$ è quello delle figg. 1-8, 1-19, 1-20; il caso $\delta_3^*E \neq 0$ è quello della fig. 1-21.

Si è detto che la ricerca dei valori F_c di F per cui la stabilità di un ramo ascendente dà luogo per variazioni euleriane delle coordinate all'instabilità, può essere eseguita calcolando prima tutti i valori F_a di F che soddisfano la (1-13). Tra questi, e solo tra questi, possono trovarsi i valori F_c , se esistono. Se gli F_a , in numero infinito nei sistemi continui, sono ordinabili in successione crescente (insieme numerabile), si consideri il più basso di essi, $F_{a \min}$. Al disotto di $F_{a \min}$ il ramo r_1 è stabile, perchè tra 0 ed $F_{a \min}$ non esistono soluzioni della (1-13); in $F_{a \min}$ è rispettata quindi la condizione $\delta_2 E > 0$ per ogni altra δC .

Nei punti F_a dove è verificata la (1-13), e quindi c'è soluzione non banale delle (1-12), il δ_2^*E è sicuramente nullo, per il teorema di Eulero già citato. Poichè in $F_{a \min}$ è pure $\delta_2 E > 0$ per tutte le altre δC , $F_{a \min}$ coincide con F_c .

Le altre soluzioni F_a non possono essere delle F_c , perchè comunque la condizione $\delta_2 E > 0$ non è rispettata; infatti per la variazione δ^*C che in $F = F_c$ importa $\delta_2^*E = 0$ ed, in $F > F_c$, $\delta_2^*E < 0$, è per qualsiasi valore $F > F_c$ ancora $\delta_2^*E < 0$, perchè il termine δL di δ_2^*E che non dipende da F è positivo, il termine δP funzione crescente di F è negativo. Ciò vale anche per F distante da F_c , poichè si opera su variazioni euleriane.

Il valore F_c si chiama, come già detto, *valore critico* del parametro, e *D punto di diramazione*; attese le condizioni legate alla definizione di variazioni euleriane, D si trova sull'asse delle F (fig. 1-29).

Le variazioni euleriane sono da considerarsi un caso limite mai realizzabile, perchè una struttura in cui sia pure in regime di piccoli spostamenti le coordinate lagrangiane sono nulle è un fatto cui nella realtà ci si può solo avvicinare; però, se si ammette di poter operare nelle suddette condizioni, ricadono in tale caso strutture di fondamentale importanza: travi rettilinee a vincoli simmetrici, di una o più campate, di sezione costante o variabile, e caricate assialmente, travature reticolari, telai caricati con condizioni di simmetria (dove le variazioni euleriane sono le componenti della deformazione emisimmetrica), archi sottili sagomati secondo la funicolare dei carichi (che assorbono scarsi momenti flettenti nel ramo r_1), travi alte inflesse (caratterizzate da torsione nel ramo r_2), anelli, tubi o involucri sottili caricati in maniera da non assorbire flessione nel ramo r_1 , piastre sottili, etc.

La trattazione del caso ideale è in tali strutture sempre utile e necessaria; infatti se si affronta per via rigorosa il caso reale, in cui sono

essere orizzontali; se invece non c'è simmetria il δ^*E è di ordine dispari

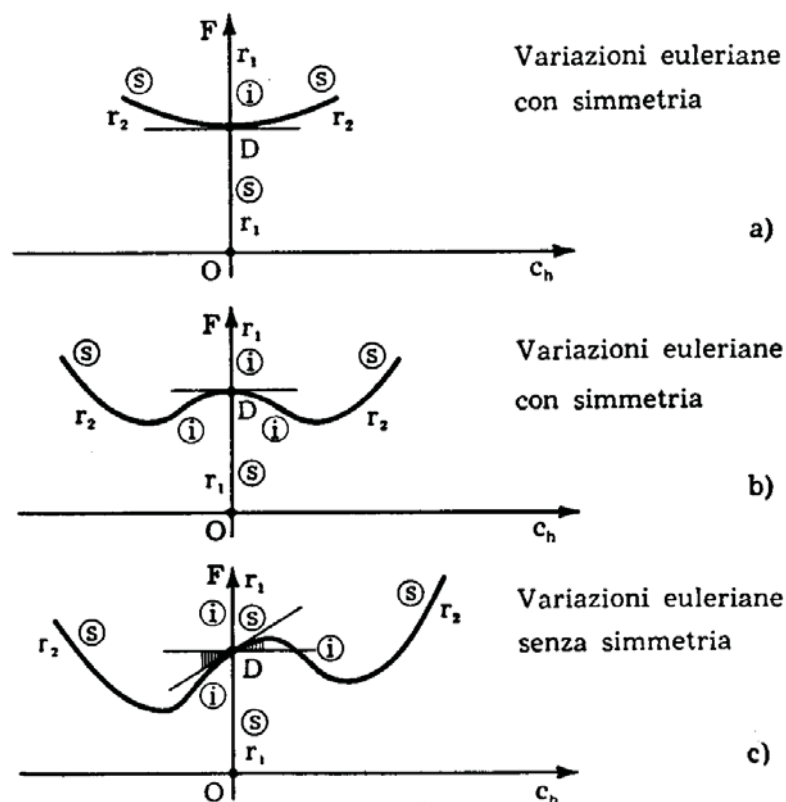


FIG. 1-29

(e può essere $\delta_3^*E \neq 0$), da cui si trae che le tangenti devono essere inclinate sull'orizzontale (*).

(*) Le aree dA comprese tra r_2 e l'orizzontale sono del terzo ordine in dc_h nelle figg. 1-29 a e b, del secondo nella fig. 1-29 c; il δE è del quarto ordine nelle figg. a e b, del terzo nella fig. c. Ciò si spiega attraverso la (f')

$$dA = \delta E \frac{dc_h}{d\eta}$$

e tenendo conto che $d\eta/dc_h$ è del primo ordine; nei casi a e b dA è del terzo ordine, e quindi δE del quarto; nel caso c, dA è del secondo ordine, e δE del terzo.

Dalla relazione

$$\left(\frac{dF}{d\eta} \right)_D = \frac{\left(\frac{dF}{dc_h} \right)_D}{\left(\frac{d\eta}{dc_h} \right)_D} = \frac{0}{0} = \frac{\left(\frac{d^2F}{dc_h^2} \right)_D}{\left(\frac{d^2\eta}{dc_h^2} \right)_D}$$

si osserva che, se $d\eta > 0$ per $\pm dc_h$ ($d\eta^2/dc_h^2 > 0$), il segno di d^2F/dc_h^2 coincide con quello di $dF/d\eta$; in tal caso, se $dF/d\eta > 0$, si ha $\delta^*E > 0$, e nello stesso tempo $d^2F/dc_h^2 > 0$, cioè se $\delta_4^*E > 0$ il ramo r_2 presenta un minimo in D, se $\delta_4^*E < 0$ presenta un massimo.

ricadere se spostata dal ramo r_1 instabile. L'altro caso è quello della fig. 1-27 c, il cui ramo r_1 non presenta diramazioni, ma piega verso il basso. In questo caso il valore F_c si preferisce chiamarlo F_m (*carico di collasso*).

Quindi, in riassunto, le (1-12) sono condizioni necessarie perchè un ramo r_1 ascendente passi da stabile ad instabile. Viceversa, il verificarsi delle (1-12) non basta ad asserire che per il corrispondente valore di F e δ^*C il ramo r_1 passi da stabile ad instabile; è sufficiente invece che, oltre alle (1-12), si verifichino le altre condizioni (1-9).

Le (1-12), coincidenti con le (1-11), sono come già detto lineari omogenee nelle n incognite dc_i ; esse ammettono soluzione non banale se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo:

$$\Delta = 0 \quad (13)$$

Le soluzioni F_a della (1-13) sono nel caso generale in numero pari al gradi di libertà n del sistema. I punti di diramazione o di flessione sono quelli corrispondenti alla forza F_a , alle coordinate c_i ed alle variazioni dc_i soluzioni delle (1-10), (1-12) ed (1-13); le dc_i risultano definite a meno di una costante. Fra i valori F_a così definiti, gli F_c sono quelli per cui si verificano anche le altre delle (1-9). La soluzione del problema è, così impostata, praticamente impossibile. Se però gli incrementi dc sono relativi ad un gruppo di m coordinate lagrangiane c_h che in r_1 risultano nulle, la $\delta_2 E$ è calcolabile con facilità; infatti (1-3) i coefficienti dei termini $-L_2$ ed L_2^* sono in questo caso funzioni delle sole $n - m$ coordinate $c_1 - c_h$, e, se queste risultano funzioni note di F , sono di immediata scrittura; inoltre W è funzione delle sole dc_h .

La maggiore semplicità si consegue però se la struttura lascia supporre lecito che tutte le n coordinate c_i siano nulle in r_1 ; in tal caso (cosiddetto di *variazioni euleriane*) i coefficienti dei termini $-L_2$ ed L_2^* sono delle costanti, il $\delta_2 E$ è funzione lineare di F , sempre decrescente al crescere di F , e la (1-3) è un'equazione algebrica in F , di grado pari ad m . Questa fornisce i valori F_a , tra i quali sono da scegliere gli F_c cui corrisponde il passaggio della configurazione r_1 da stabile ad instabile.

In presenza di un gruppo di variazioni del tipo euleriano il punto D di diramazione è ubicato sull'asse delle F , e se la struttura è simmetrica rispetto alle dc_i , il ramo r_2 è accompagnato dal simmetrico rispetto all'asse delle F (fig. 1-29 a e b).

Il ramo r_2 deve essere in ogni caso accompagnato da un altro ramo che si dirama pure da D, in verso opposto rispetto al ramo r_1 ; infatti se le d^*c sono soluzioni delle (1-12), lo sono anche le $-d^*c$.

In condizioni di simmetria il δ^*E deve essere di ordine pari (e quindi deve essere $\delta_3^*E = 0$), da cui si trae che le tangenti dei due rami r_2 devono

e ancora

$$\delta_1^* \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial c_1} = 0 \quad (*)$$

$$\partial \frac{\delta_1^* \mathbf{E}}{\partial c_1} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (q')$$

Le (q') coincidono con le (p'), e cioè la condizione di stazionarietà del $\delta_2 \mathbf{E}$ (1-11) coincide con quella di esistenza di più soluzioni sotto lo stesso F , quindi esiste una soluzione δC delle equazioni di equilibrio variato; questa non può essere altra che quella $\delta^* C$ cui corrisponde $\delta_2^* \mathbf{E} = 0$, e ciò si osserva dalla (1-12), poichè $\delta_2 \mathbf{E}$ è quadratica omogenea nelle dc_1 , e per il teorema di *Eulero* espresso dalla

$$\left(2f(x_1) = \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1 \right)$$

se, in un punto $dc_1, dc_2 \dots dc_n$, tutte le sue derivate rispetto alle dc sono nulle, è nulla la funzione stessa (non vale il contrario). Quindi la configurazione $r_1 + \delta^* C$ è compatibile in $F = F_c$, ove si verificano le (1-9), ed in questo punto si dirama un secondo ramo r_2 .

Se viceversa in un punto F esiste una soluzione $\delta^* C$ delle (q') (data dai $d^* c_1$ del $\delta_1^* \mathbf{E}$ che in essa compare), essa è anche soluzione delle (1-12), e cioè esiste un $\delta_2^* \mathbf{E} = 0$ (derivante per il teorema di *Eulero* dalle (1-12) stesse), mentre i $\delta_2 \mathbf{E}$ relativi alle δC vicine a $\delta^* C$ sono tutti dello stesso segno.

Perchè sia $F = F_c$, occorre verificare che in F tutti gli altri $\delta_2 \mathbf{E}$ siano positivi, e che per $F = F_c + dF$ sia $\delta_2^* \mathbf{E} < 0$. Può anche darsi però che il ramo r_1 pieghi verso il basso.

Se dal ramo r_1 in $F = F_c$ si dirama un altro ramo r_2 (è la prima delle due alternative di cui sopra) questo può essere ascendente (fig. 1-27 a), o discendente (fig. 1-27 b); in quest'ultima evenienza esso deve risalire a costituire il necessario ramo stabile per $F > F_c$, in cui la struttura possa

(*) Risulta

$$\delta_1^* \mathbf{E} = \Sigma_1 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial c_1} d^* c_1$$

da cui

$$\frac{\partial \delta_1^* \mathbf{E}}{\partial d^* c_1} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial c_1}$$

da cui

$$\sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial c_i \partial c_j} d^*c_j = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (11)$$

Le derivate che compaiono nella (1-11) sono i valori che esse assumono in C; esse sono da considerarsi perciò delle costanti.

Le (1-11), *equazioni dell'equilibrio variato*, risultano perciò lineari omogenee nelle n incognite d^*c_j , ed in numero pari ad n .

La soluzione δ^*C delle (1-11), se esiste, è definita perciò a meno di una costante; per poter impostare le (1-11), occorre conoscere la configurazione C di equilibrio che va variata e la \mathbf{E} relativa, e quindi avere già soddisfatto le (1-10).

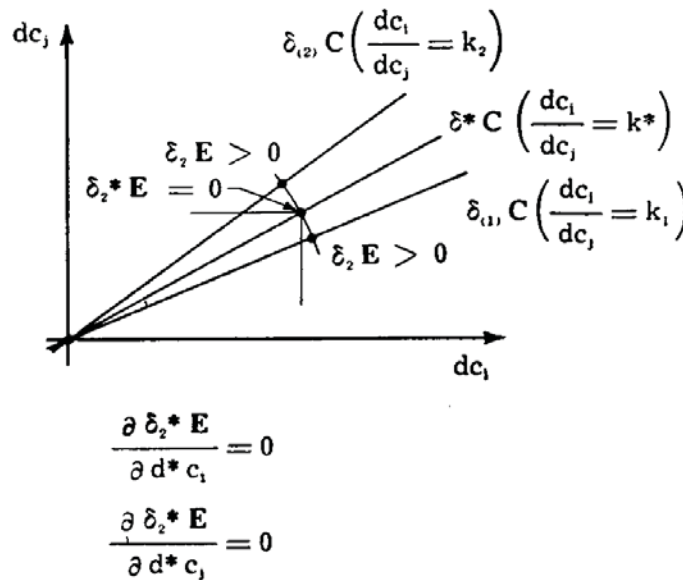


FIG. 1-28

Se in $F = F_c$ si verificano le (1-9), si ha pure, come detto, che $\delta_2^* \mathbf{E}$ è stazionario (fig. 1-28) rispetto a tutte le variazioni delle d^*c_i ; si ha perciò (*)

$$\frac{\partial \delta_2^* \mathbf{E}}{\partial d^*c_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (12)$$

da cui

$$\delta_1^* \frac{\partial \delta_1^* \mathbf{E}}{\partial d^*c_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

(*) Le d^*c_i sono i valori delle dc_i , definite a meno di una costante e quindi attraverso i loro $n-1$ rapporti, corrispondenti alla variazione δ^*C , e che la definiscono.

Si reputa utile precisare che la stazionarietà del $\delta_2^* \mathbf{E}$ importa

$$\frac{\partial \delta_2^* \mathbf{E}}{\partial d^* c_i} = 0$$

rispetto a qualsiasi $d^* c_i$, ma non certo $\delta_3^* \mathbf{E} = 0$, perchè la variazione del $\delta_2^* \mathbf{E}$ è ottenuta passando da $\delta^* C$ ad un'altra δC vicina, mentre il $\delta_3^* \mathbf{E}$ è ottenuto secondo la stessa $\delta^* C$ del $\delta_2^* \mathbf{E}$. Se una configurazione C è di equilibrio sotto determinate forze F , in essa deve aversi, per qualsiasi δC , $\delta_1 \mathbf{E} = 0$, e cioè, per qualsiasi gruppo di dc_i ,

$$\delta_1 \mathbf{E} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial c_i} dc_i = 0,$$

da cui

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n); \quad (10)$$

le (1-10) sono pure condizioni sufficienti di equilibrio.

Le (1-10), *equazioni dell'equilibrio*, sono in genere di ordine qualsiasi nelle c_i . Se la configurazione passa da C a quella vicina $C + \delta^* C$ attraverso gli incrementi $d^* c_i$, la $\delta_1 \mathbf{E}$ secondo δC varia di

$$\delta^* \delta_1 \mathbf{E} = \sum_i \frac{\partial \delta_1 \mathbf{E}}{\partial c_i} d^* c_i = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial c_i \partial c_j} dc_j d^* c_i. \quad (n')$$

Se la δC della $\delta_1 \mathbf{E}$ coincide con la $\delta^* C$ della $\delta^* \delta_1 \mathbf{E}$ la (n') fornisce il $\delta_2^* \mathbf{E}$ secondo $\delta^* C$, come forma quadratica nelle $d^* c_i$.

Perchè la configurazione $C + \delta^* C$ sia anch'essa di equilibrio, sotto le stesse forze F , condizione necessaria e sufficiente è che sia, anche in $C + \delta^* C$, $\delta_1 \mathbf{E} = 0$ per qualsiasi δC ; ciò si scrive

$$\sum_i \frac{\partial (\mathbf{E} + \delta_1^* \mathbf{E})}{\partial c_i} dc_i = 0 \quad (o')$$

per qualsiasi dc_i , che si traduce, per la (1-10), nelle altre n equazioni

$$\frac{\partial \delta_1^* \mathbf{E}}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (p')$$

Si può porre

$$\begin{aligned} -L_2 + L_2^* &= -F a \gamma^2 < 0 \\ W &= b \gamma^2 > 0 \end{aligned}$$

dove a e b sono funzioni (positive) di F , e cioè della configurazione, e ancora della δC ; poichè la variazione si effettua per F costante, le a e b sono quindi, per ogni punto della r_1 , funzioni della sola δC , e cioè costanti una volta fissata la δC .

La $\delta_2 E$ nell'intorno di $F=0$ è in genere positiva, per qualsiasi δC , perchè il termine $-F a \gamma^2$ è qui trascurabile in confronto al termine $b \gamma^2$.

Percorrendo il ramo r_1 a partire da $F=0$, finchè $\delta_2 E$ si mantiene comunque positiva la configurazione r_1 è stabile, e quindi ascendente; accade però che, per un valore F_c di F , si verifica per la prima volta $\delta_2^* E = 0$ per una variazione $\delta^* C$. Possono darsi tre casi:

1) il ramo r_1 continua a salire oltre F_c , e per $F = F_c + dF$ è di nuovo $\delta_2^* E > 0$ (flesso);

2) il ramo r_1 continua a salire oltre F_c , e per $F = F_c + dF$ è $\delta_2^* E < 0$;

3) il ramo r_1 piega verso il basso.

Nei casi 2) e 3) il ramo r_1 in F_c passa da stabile ad instabile.

Può dirsi perciò che condizione sufficiente perchè un ramo r_1 ascendente passi in F_c da stabile ad instabile è in complesso

$$\left. \begin{array}{l} \delta_2^* E > 0 \quad \text{per} \quad F < F_c \\ \delta_2^* E = 0 \quad \text{per} \quad F = F_c \\ \delta_2^* E < 0 \quad \text{per} \quad F = F_c + dF \\ \delta_2 E > 0 \quad \text{per} \quad F \leq F_c \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{per una } \delta^* C \\ \\ \\ \text{per tutte le altre } \delta C \end{array} \quad (9)$$

Questo insieme di condizioni è anche necessario, come si verifica facilmente.

La seconda e la quarta delle (1-9) garantiscono per continuità che la $\delta_2^* E$ calcolata per la variazione $\delta^* C$ nel punto $F = F_c$ di passaggio da stabilità ad instabilità è *stazionaria* ($\delta_1 \delta_2^* E = 0$) rispetto a tutte le altre possibili variazioni δC ; questa quindi è condizione necessaria (ma non sufficiente) per il suddetto passaggio.

Nel seguito si chiamerà *carico critico* il valore F_c di F per cui un ramo r_1 ascendente, stabile per $0 < F < F_c$, diviene instabile.