

CAPITOLO IV

IL CALCOLO A ROTTURA IN PRESENZA DI MOMENTO FLETTENTE E SFORZO NORMALE

1. Generalità.

Nel capitolo precedente si sono studiate le strutture inflesse prescindendo dallo sforzo assiale; questo è in realtà assente solo in alcuni casi particolari, come nelle travi continue, mentre è quasi sempre presente nei portali, nei telai, negli archi. Così pure si è trascurata l'influenza del taglio, sempre presente, salvo casi di momento costante. In questo capitolo si tratterà del contributo dello sforzo assiale, in un capitolo seguente di quello del taglio; si potrà così innanzitutto valutare l'errore commesso nel trascurare questi termini, e si sarà poi in possesso dei mezzi per il calcolo esatto del coefficiente di sicurezza ove non si possa più non chiamare in gioco lo sforzo normale (per es. archi da ponte) o lo sforzo di taglio (per. es. travi corte).

2. La cerniera di snervamento in presenza di momento flettente e sforzo normale.

Si consideri un tronco di trave di lunghezza elementare dz ; la sezione retta è quella della fig. 4-1 a, il tronco è visto secondo la normale all'asse nella fig. 4-1 b.

La sezione sia simmetrica rispetto all'asse y , il materiale sia lo stesso per tutta la sezione (sezione costituita di materiale omogeneo) caratterizzato da due tensioni limiti in genere diverse σ'_0 e σ''_0 a trazione e compressione.

Il tronco sia soggetto ad uno sforzo normale baricentrico N costante, e ad un momento flettente M' positivo variabile, con asse di sollecitazione y .

In assenza di M' , il diagramma delle tensioni è quello della fig. 4-1 c; la presenza di M' modifica il diagramma come nella fig. 4-1 d, finché si rimane in fase elastica. Incrementando il valore di M' , la tensione ad

uno dei bordi, per esempio quello teso, raggiunge il valore limite σ'_o (fig. 4-1 e); sia M'_{SN} il corrispondente valore del momento. Per $M' > M'_{SN}$, il comportamento non è più elastico; il diagramma delle σ si presenta come nella fig. 4-1 f. Aumentando ancora il valore di M' , si raggiunge

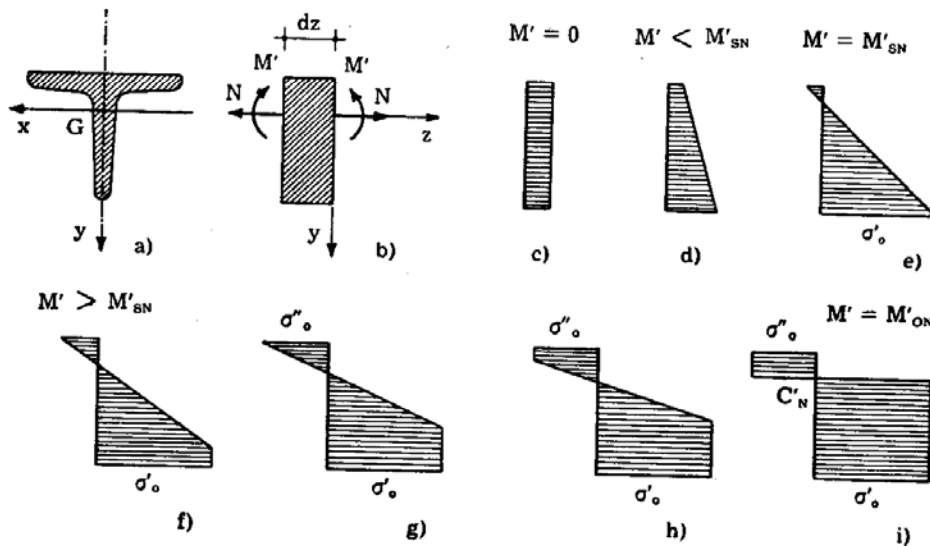


FIG. 4-1

il valore limite della tensione σ''_o anche al bordo compresso (fig. 4-1 g). Per ulteriori aumenti di M' , il diagramma delle tensioni assume l'aspetto della fig. 4-1 h, con due tratti plasticizzati.

L'estensione di questi tratti aumenta all'aumentare di M' , finchè per un valore M'_{ON} di M' , il diagramma delle σ diviene birettangolo (fig. 4-1 i). Il valore M'_{ON} è il più elevato che M' possa attingere; esso è il *momento limite* positivo in presenza dello sforzo normale N , e in presenza di esso la sezione è completamente plasticizzata. L'asse neutro corrispondente ha per traccia il punto C'_N di inversione; sia M'_{ON} che C'_N sono funzioni di N .

La variazione $d\Delta\varphi$ della rotazione relativa $\Delta\varphi$ tra le due facce del tronco dz provocata da una variazione dM del momento è fornita in fase elastica da

$$d\Delta\varphi = \frac{dM \cdot dz}{EI}, \tag{a}$$

dove I è il momento d'inerzia baricentrico di tutta la sezione, ed ha luogo intorno all'asse x baricentrico.

In fase elasto-plastica invece, e nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, la variazione di rotazione è fornita da

$$d\Delta\varphi = \frac{dM \cdot dz}{EI^*} \tag{b}$$

dove I^* è il momento d'inerzia della sola parte A^* a comportamento elastico, rispetto al suo asse baricentrico x^* parallelo ad x , di traccia C^* , e avviene intorno a x^* . Al limite, e cioè per $M = M'_{ON}$, è $I^* = 0$,

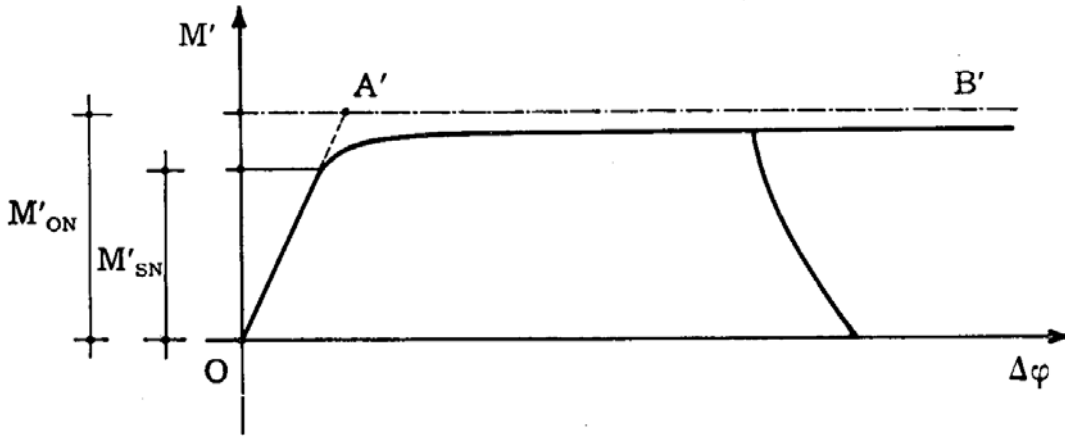


FIG. 4-2

$C^* = C'_N$, e $d \Delta\varphi = \infty$. Il diagramma $M \cdot \Delta\varphi$ si presenta quindi come nella fig. 4-2. Per $0 \leq M' \leq M'_{SN}$, la relazione è lineare omogenea, ed il diagramma è una retta inclinata sull'asse delle ascisse di

$$\operatorname{arctg} \frac{dM}{d \Delta\varphi} = \operatorname{arctg} \frac{EI}{dz} . \quad (c)$$

Per $M' > M'_{SN}$ l'inclinazione del diagramma invece è

$$\operatorname{arctg} \frac{dM}{d \Delta\varphi} = \operatorname{arctg} \frac{EI^*}{dz} , \quad (d)$$

non più costante, ma decrescente con M ; il diagramma è perciò una curva che volge la sua concavità all'asse delle ascisse. Per $M = M'_{ON}$ l'inclinazione (d) è nulla, e cioè la curva $M \cdot \Delta\varphi$ ha tangente orizzontale; e poiché per $M = M'_{ON}$ è pure $\Delta\varphi = \infty$, la retta $M = M'_{ON}$ è un asintoto del diagramma $M \cdot \Delta\varphi$. In realtà il valore M'_{ON} non può essere raggiunto, perchè per un valore inferiore del momento si raggiunge il valore limite della deformazione in uno dei bordi, e quindi si innesca la rottura del concio; il diagramma reale $M \cdot \Delta\varphi$ è perciò quello a tratto intero della fig. 4-2. Nel prosieguo si assume come diagramma ideale $M \cdot \Delta\varphi$ la bilatera che ha per primo lato il segmento OA' , dove A' è il punto ove il tratto elastico incontra l'asintoto, e per secondo lato tutta la semiretta $A'B'$; e cioè si ammette che fino al valore M'_{ON} di M il comportamento sia perfettamente elastico, e per $M = M'_{ON}$ perfettamente plastico. Si trae da ciò che

per $M = M'_{ON}$ è possibile qualsiasi variazione della rotazione relativa $\Delta\varphi$ tra le facce del tronco, purchè questa variazione sia equiversa ad M'_{ON} , e cioè tale che per essa le coppie M'_{ON} applicate sul tronco compiano lavoro positivo; la variazione di $\Delta\varphi$, avviene intorno a C'_N . Quindi per $M = M'_{ON}$ è come se nella sezione fosse presente una cerniera di asse C'_N , a senso di rotazione obbligato. Si trae anche che se nella sezione si attinge il massimo momento, il fenomeno plastico è localizzato nella sezione stessa. Si perviene così, anche in presenza di sforzo normale, al concetto di *cerniera plastica* o *cerniera di snervamento*; sia la sua ubicazione sull'asse y della sezione, che il valore del momento sotto cui sorge, sono funzioni di N .

Se il momento flettente è negativo, la cerniera plastica si forma sotto un valore M''_{ON} diverso in genere da M'_{ON} , e con ubicazione C''_N diversa da C'_N ; il diagramma ideale $M \cdot \Delta\varphi$ completo è quindi quello della fig. 4-3.

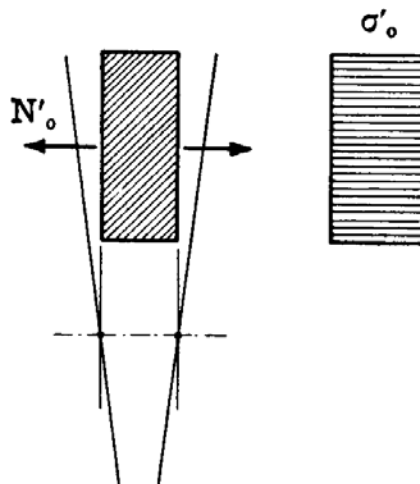


FIG. 4-3

Se in un punto S' del tratto plastico a momento positivo il momento M'_{ON} diminuisce, il comportamento del tronco è tutto elastico, e il diagramma $M \cdot \Delta\varphi$ è il segmento $S'S''$ parallelo ad $A'A''$; in S'' si attinge il momento M''_{ON} , e quindi la plasticizzazione di verso negativo, e il diagramma continua lunga la $S''A''$. Lo stesso avviene se in un punto T'' del tratto plastico a momento negativo il momento aumenta, e cioè decresce in valore assoluto.

Si osservi che perchè possano esistere momenti limiti diversi da zero deve essere $N''_0 < N < N'_0$. Se $N = N'_0$, tutta la sezione è plasticizzata con $\sigma = \sigma'_0$, e alle due facce del tronco è consentita una rotazione relativa intorno a qualsiasi asse, purchè esterno alla sezione, e di segno tale che per essa le fibre si allunghino (fig. 4-4). Si è in presenza del cosiddetto *snodo plastico*. Analogamente si forma uno snodo plastico per $N = N''_0$.

Si è fatta l'ipotesi, in questo paragrafo, che il materiale sia lo stesso per tutta la sezione, e quindi che la σ'_0 e la σ''_0 siano le stesse in ogni punto. I ragionamenti fatti non perdono però di vigore se la σ'_0 e la σ''_0 sono variabili lungo y , purchè siano costanti lungo x ; è questo il caso, per esempio, delle sezioni in conglomerato armato. Al limite, l'asse neutro

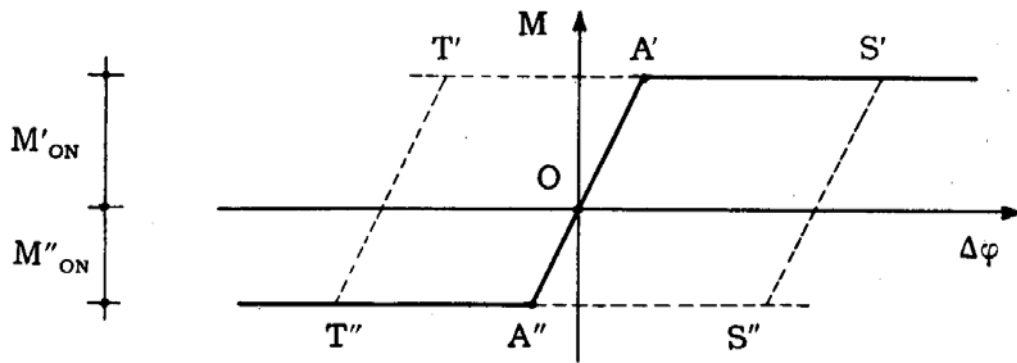


FIG. 4-4

è sempre quella retta che separa la zona tutta plasticizzata a trazione da quella tutta plasticizzata a compressione, ed esso costituisce anche l'asse della cerniera plastica.

Tutti i risultati che seguono sono condizionati dall'ipotesi che σ'_0 e σ''_0 siano funzioni della sola y .

3. I domini di plasticizzazione.

Assunto un riferimento ortogonale NM , si riportino per ogni valore di N i valori dei momenti limiti M'_{ON} ed M''_{ON} cui corrispondono rispettivamente compressioni al lembo superiore e al lembo inferiore. Si ottiene così un dominio chiuso, detto *dominio di plasticizzazione*; il punto $P(NM)$ che definisce un generico stato di sollecitazione deve necessariamente trovarsi nel dominio. Condizione necessaria e sufficiente perchè la sezione sia completamente plasticizzata è che il punto $P(NM)$ giaccia sul contorno del dominio di plasticizzazione.

Tutto quanto si dirà nel seguito sarà — salvo esplicito avviso — condizionato dall'ipotesi di simmetria geometrica rispetto all'asse verticale y , e sempre, come già detto, dall'altra ipotesi che σ'_0 e σ''_0 siano funzioni della sola y . Sotto tali ipotesi è facile verificare che per $\sigma'_0 = -\sigma''_0$ (anche se variabili lungo y) il contorno del dominio di plasticizzazione è caratterizzato da simmetria polare rispetto all'origine (fig. 4-5); infatti, cambiando segno alle σ'_0 ed alle σ''_0 nel diagramma tensionale birettangolo corrispondente ad una coppia di valori (N, M) , si ottiene il diagramma tensionale corrispondente alla coppia $(-N, -M)$. La pro-

prietà ora enunciata è valida anche se i momenti sono valutati rispetto a un punto diverso dal baricentro. Se, oltre all'ipotesi $\sigma'_o = -\sigma''_o$ (anche se variabili lungo y)

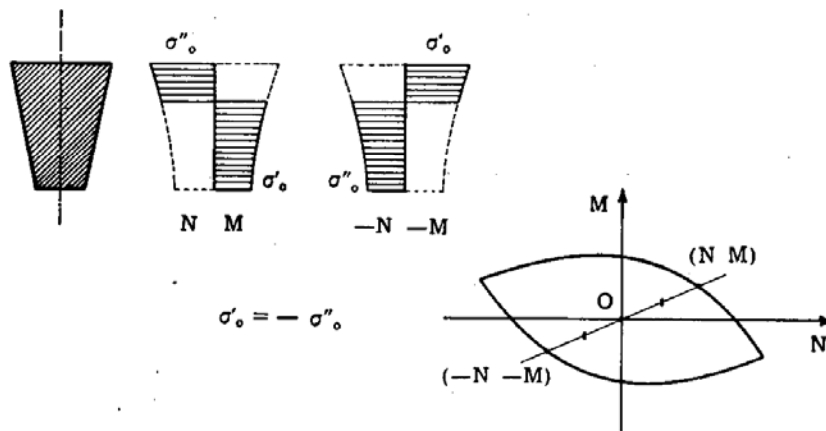


FIG. 4-5

vale quella di simmetria fisica e geometrica della sezione rispetto all'asse orizzontale x , il contorno del dominio di plasticizzazione risulta simmetrico sia rispetto all'asse delle ascisse N che a quello delle ordinate M ; infatti (fig. 4-6), preso

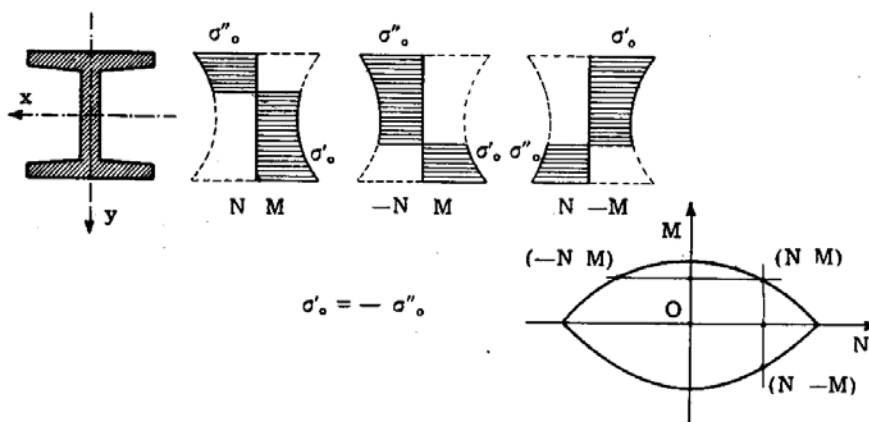


FIG. 4-6

riferimento al diagramma tensionale birettangolo corrispondente ad una coppia di valori (N, M) , i diagrammi birettangoli aventi per asse neutro il simmetrico rispetto ad x dell'asse neutro del primo diagramma corrispondono, per tensioni ai bordi dello stesso segno del primo, alla coppia $(-N, M)$, e per tensioni ai bordi di segno contrario a quelle del primo, alla coppia $(N, -M)$.

Se è $\sigma'_o \neq -\sigma''_o$, ma la sezione è a simmetria geometrica rispetto all'asse orizzontale x , il contorno del dominio di plasticizzazione risulta simmetrico rispetto all'asse delle ascisse N ; infatti (fig. 4-7), con riferimento al diagramma tensionale birettangolo corrispondente ad una coppia (NM) , il diagramma birettangolo avente per asse neutro il simmetrico rispetto ad x e con tensioni ai bordi di segno opposto al primo, corrisponde alla coppia $(N, -M)$.

Il caso più generale di sola simmetria geometrica rispetto ad y può ricondursi

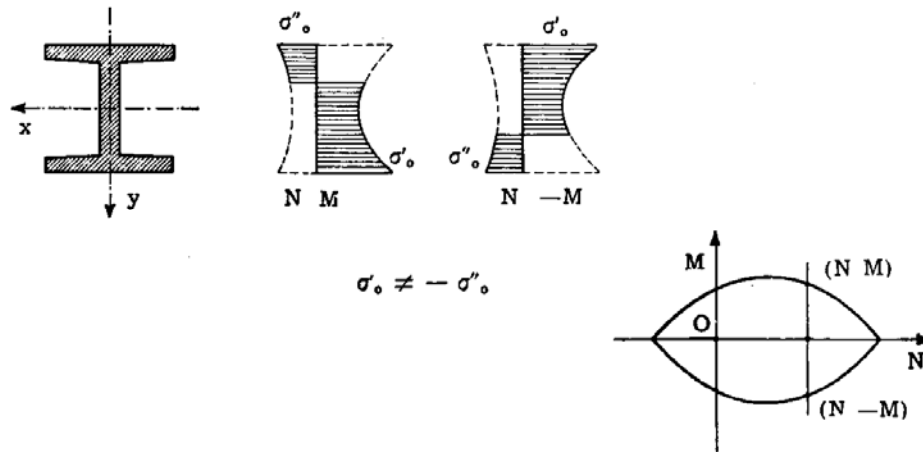


FIG. 4-7

sempre a quello in cui sia pure $\sigma'_o = -\sigma''_o$ e cioè a quello della fig. 4-5.

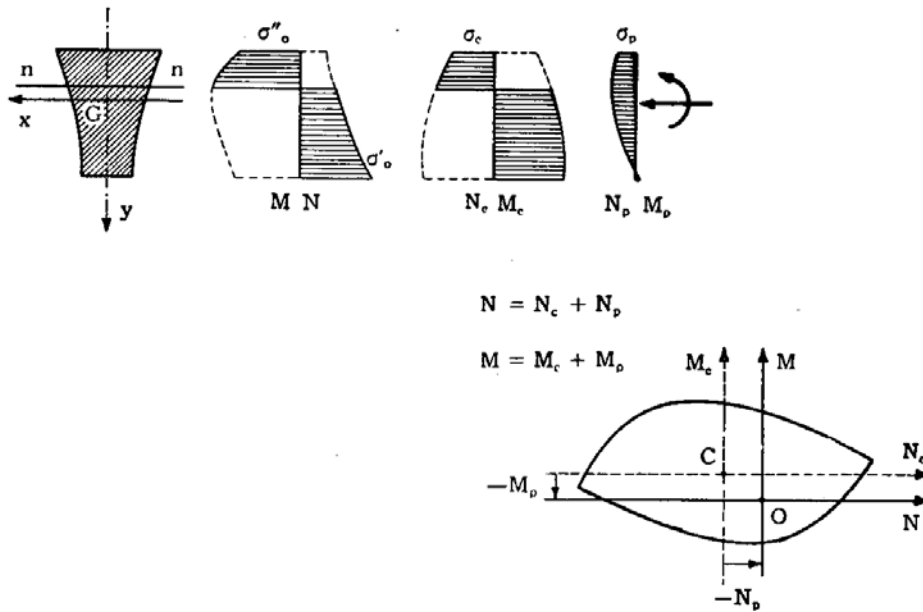


FIG. 4-8

Si può infatti scindere (fig. 4-8) il diagramma delle σ corrispondente ad una qualsiasi coppia limite NM in due, uno pari a

$$\sigma_c = \sigma - \frac{\sigma'_o + \sigma''_o}{2},$$

e l'altro pari a

$$\sigma_p = \frac{\sigma'_o + \sigma''_o}{2}.$$

Il diagramma delle σ_c è quello che corrisponderebbe ad un materiale con tensioni limiti ideali in ogni punto uguali e contrarie, e pari a

$$\sigma'_{o \text{ id}} = \sigma'_o - \frac{\sigma'_o + \sigma''_o}{2}$$

$$\sigma''_{oid} = \sigma''_o - \frac{\sigma'_o + \sigma''_o}{2};$$

le caratteristiche $N_c M_c$ ad esso connesse variano con la posizione dell'asse neutro n , e con riferimento ad una coppia di assi $N_c M_c$ di origine C definiscono un contorno a simmetria polare di polo C .

Il diagramma delle σ_p invece da luogo a due caratteristiche $N_p M_p$ indipendenti dalla posizione di n . Poichè è

$$N = N_c + N_p$$

$$M = M_c + M_p$$

il contorno NM si ottiene da quello già descritto facendo traslare l'asse N_c della quantità $-M_p$ (verso il basso cioè se M_p è positivo), e l'asse M_c della quantità $-N_p$ (verso sinistra se N_p è positivo). Il riferimento reale è perciò quello NM di origine O ; e il contorno è a simmetria polare rispetto al punto C di coordinate $N_p M_p$ rispetto al suddetto riferimento di origine O . Quindi la sola ipotesi di simmetria geometrica rispetto ad y basta a garantire che il contorno del dominio è a simmetria polare; ciò è vero, per quanto più sopra precisato, anche se i momenti sono valutati rispetto ad un punto diverso dal baricentro.

Le condizioni che forniscono le relazioni tra N ed M al limite della plasticizzazione totale sono quelle di equilibrio alla rotazione intorno al-

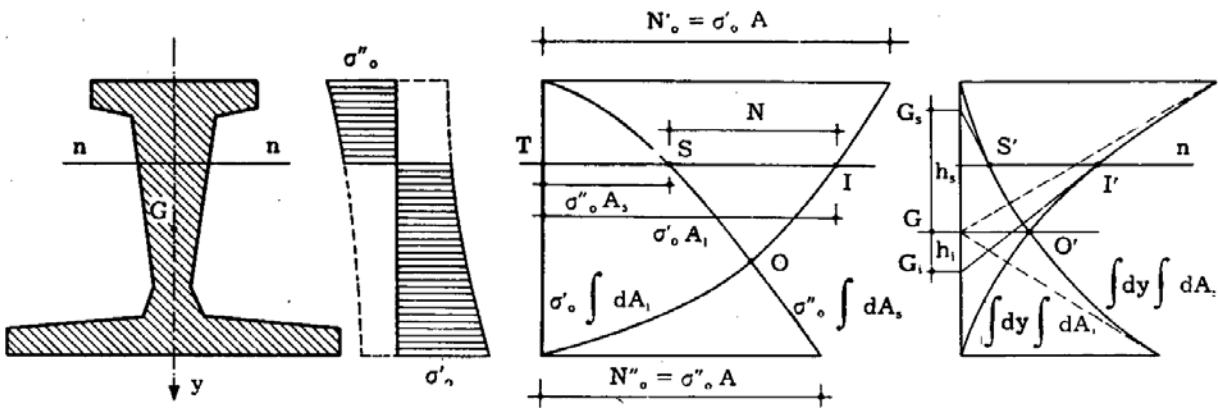


FIG. 4-9

l'asse x , e alla traslazione lungo l'asse z (fig. 4-9). Data la posizione dell'asse neutro n , se si ricerca il momento limite M'_{ON} si ha

$$N = \int_{A_1} \sigma'_o dA_1 + \int_{A_s} \sigma''_o dA_s \tag{e}$$

$$M'_{ON} = h_i \int_A \sigma'_o dA_1 + h_s \int_A \sigma''_o dA_s$$

dove A_1 ed A_s sono le aree al disotto e al disopra dell'asse neutro, h_1 ed h_s le ordinate sull'asse y dei baricentri G_1 e G_s delle due aree. Se si opera graficamente, e nell'ipotesi che σ'_0 e σ''_0 siano costanti con y , si costruisce la curva integrale $\int dA_1$ delle aree inferiori dA_1 a partire dal bordo inferiore, e la curva integrale $\int dA_s$ delle aree superiori dA_s a partire dal bordo superiore; si costruisce poi la $\sigma'_0 \int dA_1$ e la $\sigma''_0 \int dA_s$.

Il segmento IS fornisce N , positivo se I è a destra di S , il segmento IT fornisce $\int_{A_1} \sigma'_0 dA_1$, il segmento ST fornisce $\int_{A_s} \sigma''_0 dA_s$. Dalle curve integrali $\int \int dA_1$ e $\int \int dA_s$ delle curve $\int dA_1$ e $\int dA_s$, curve funicolari delle aree elementari dA_1 e dA_s , si ottengono, costruendo le tangenti in I' ed S' , i baricentri G_1 e G_s , e quindi le distanze h_1 ed h_s . Si hanno così le coppie NM'_{ON} per tutti i valori di N compresi tra $N'_0 = \sigma'_0 A$ (n coincidente con il bordo superiore) ed $N''_0 = \sigma''_0 A$ (n coincidente con il bordo inferiore). Se σ'_0 e σ''_0 sono costanti, ai valori estremi N'_0 ed N''_0 di N corrisponde M nulla, perchè N è baricentrica. All'asse n passante per il punto O di intersezione delle due curve corrisponde il momento limite positivo M'_0 in assenza di sforzo assiale.

Mentre N è sempre compreso tra N'_0 ed N''_0 , qualche M'_{ON} può risultare superiore ad M'_0 (come qualche M''_{ON} può risultare inferiore ad M''_0); e infatti, si osservi che se n sale un po' al disopra di O , i termini $\int_{A_1} \sigma'_0 dA_1$ ed h_s aumentano, i termini $\int_{A_s} \sigma''_0 dA_s$ ed h_1 diminuiscono, quindi ciascuno dei due termini della seconda delle (4-e) può aumentare o diminuire, dipendentemente dalla geometria della sezione, e così pure M'_{ON} .

Nel modo suddetto si traccia il tratto di contorno del dominio corrispondente agli M'_{ON} , e cioè a quei momenti cui si associano compressioni al lembo superiore.

Il tracciamento del contorno relativo ai momenti M''_{ON} (compressioni al lembo inferiore) può essere eseguito in maniera analoga, tracciando le curve $\sigma''_0 \int dA_1$ e $\sigma'_0 \int dA_s$. L'osservazione fatta in questo paragrafo, secondo cui ci si può ricondurre al caso $\sigma'_0 = -\sigma''_0$ operando poi una traslazione degli assi delle ordinate, e l'altra, che assicura essere in tal caso il dominio caratterizzato da simmetria polare, permette di omettere il calcolo degli M''_{ON} , poichè è sufficiente tracciare il simmetrico polare del tratto M'_{ON} rispetto al punto medio del tratto $N'_0 N''_0$.

4. Una rilevante proprietà del contorno del dominio di plasticizzazione.

Una proprietà notevole, valida anche se il materiale costituente la sezione non è unico (e dunque anche se si è in presenza di σ'_o e σ''_o diversi in valore assoluto e variabili con y), è quella che lega la posizione

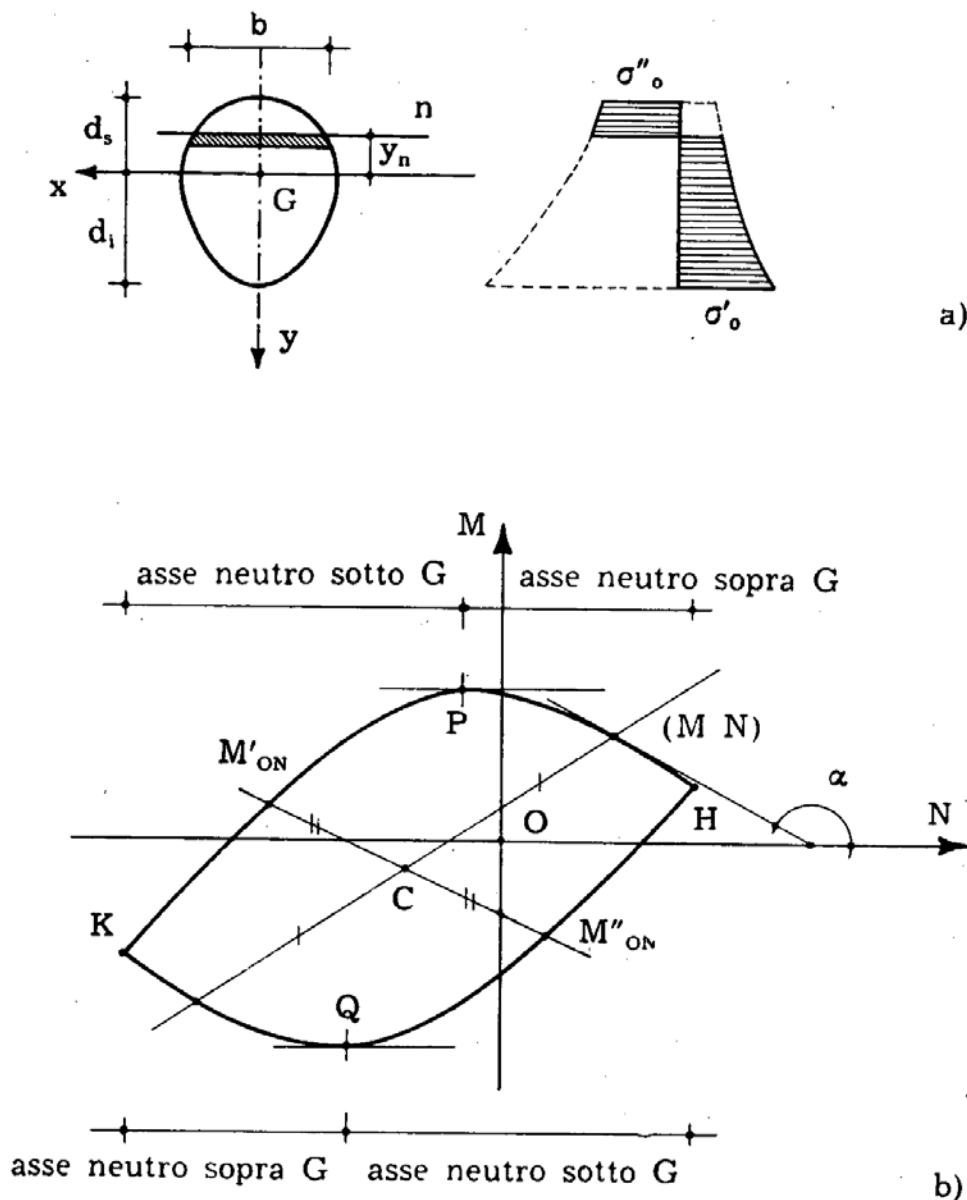


FIG. 4-10

dell'asse neutro n alla tangente al contorno del dominio nel punto di coordinate (NM) corrispondenti ad n . Tale proprietà, rilevata in modo diretto da *Raithel* e *Adriani*, può essere pure tratta in generale dalla legge dello scorrimento (*Augusti*). Si ha infatti (fig. 4-10) che per una variazione positiva dy_n dell'ordinata y_n dell'asse neutro le caratteristiche limiti N ed

M variano di

$$dN = -b dy_n \sigma'_o + b dy_n \sigma''_o = b dy_n (\sigma''_o - \sigma'_o)$$

$$dM = -b dy_n \sigma'_o y_n + b dy_n \sigma''_o y_n = b dy_n (\sigma''_o - \sigma'_o) y_n$$

da cui si ottiene

$$\frac{dM}{dN} = y_n \quad (f)$$

oppure (fig. 4-10 b)

$$\operatorname{tg} \alpha = y_n \quad (g)$$

Se la sezione è tutta tesa ($N = N'_o$, $M = \bar{M}$; in particolare $M = 0$ se la sezione è costituita dallo stesso materiale) occorre distinguere tra due casi: si può infatti pervenire ad $M = \bar{M}$ facendo decrescere gli M'_{ON} ,

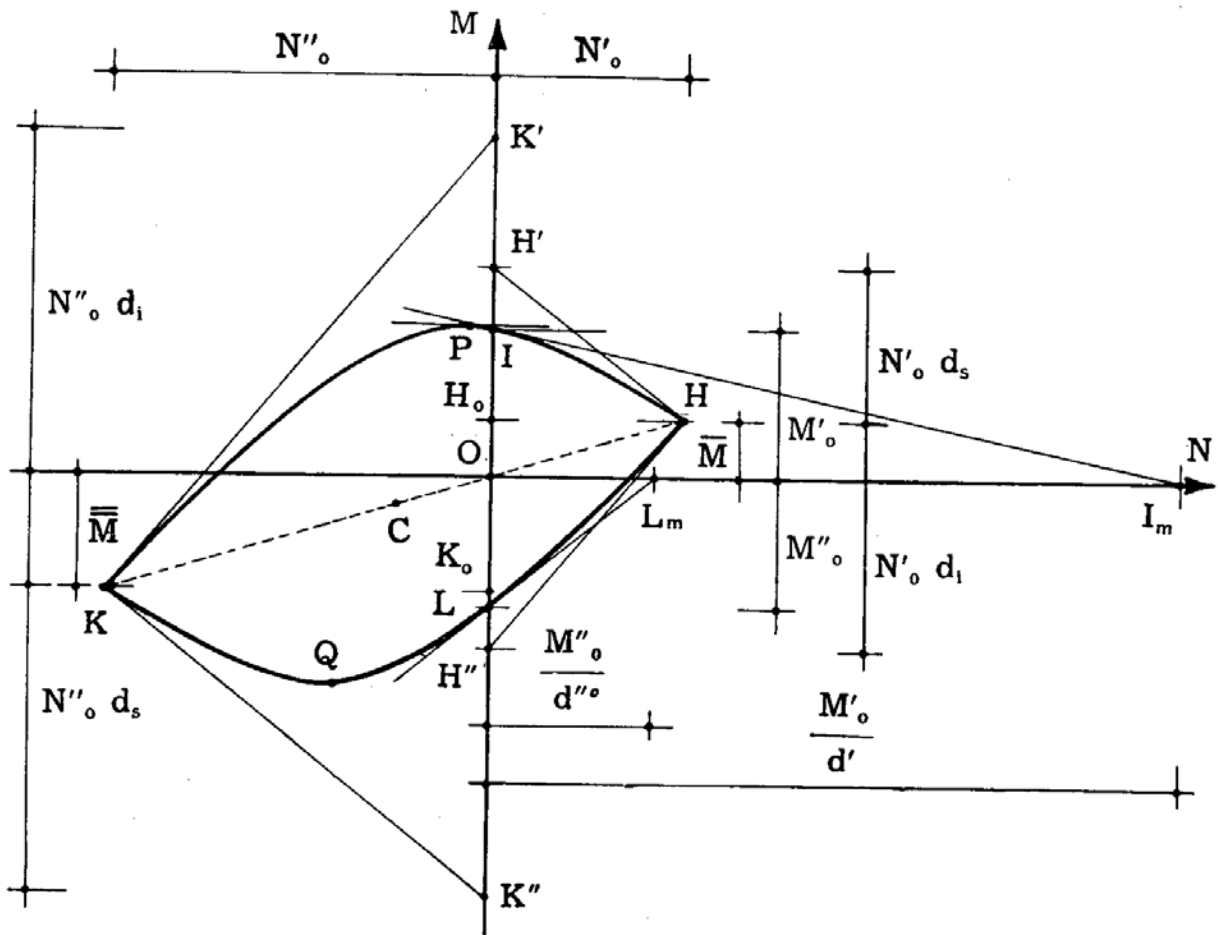


FIG. 4-11

o facendo crescere gli M''_{ON} . Nel primo caso è $y_n = d_s (< 0)$, nel secondo caso è $y_n = d_i (> 0)$.

Si hanno così le due tangenti in H (fig. 4-11) unendo il punto H con gli estremi dei due segmenti $H_0 H' = N'_0 d_s$ ed $H_0 H'' = N'_0 d_i$.

Analogamente si ottengono le due tangenti in K, unendo K con gli estremi dei due segmenti $K_0 K' = N''_0 d_i$ e $K_0 K'' = N''_0 d_s$.

E' immediato constatare che HH' è parallelo a KK'' , e HH'' parallelo a KK' .

La tangente in I ($N = 0, M = M'_0$), determina sull'asse delle N un segmento $OI_m = M'_0/d'$, dove d' è la distanza tra l'asse neutro corrispondente ad M'_0 e il baricentro; se d' è positivo, e cioè se l'asse neutro è al disotto di G, I_m è a sinistra di O. La tangente in L ($N = 0, M = M''_0$), determina sull'asse delle N un segmento $OL_m = M''_0/d''$, dove d'' è la distanza tra l'asse neutro corrispondente ad M''_0 e il baricentro; se d'' è positivo, e cioè se l'asse neutro è al disopra di G, L_m è a sinistra di O.

All'asse neutro baricentrico corrispondono i punti P e Q ove la tangente è parallela all'asse delle ascisse N.

E' importante osservare che le (4-f) e (4-g) valgono anche se il punto R rispetto al quale si valutano i momenti non è il baricentro; in questo caso la y_n è

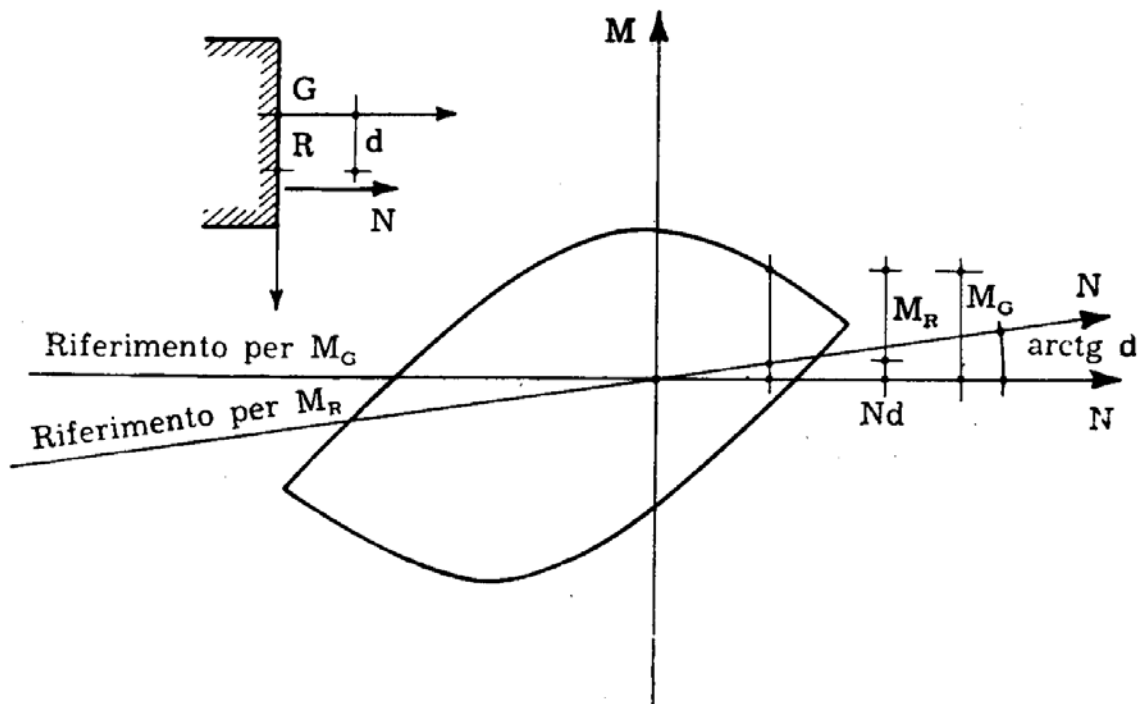


FIG. 4-12

la distanza dell'asse neutro dal punto R. Si osservi pure che, se d è la distanza tra il baricentro G ed R, positiva se R è al disotto di G, si ha

$$M_R = M_G - N d$$

e quindi il dominio $N M_R$ si ottiene da quello $N M_G$ ruotando l'asse delle ascisse di

ove A_1 è la minore delle due aree, ed h la distanza tra di esse. Nel caso in esame perchè si determini una cerniera plastica non è necessario che siano plasticizzate tutte e due le aree A_1 ed A_2 ; basta che sia plasticizzata una sola delle due, per esempio la A_1 , perchè si determini una possibilità di rotazione, senza variazione di caratteristiche, intorno ad A_2 .

Si studi prima il caso dei momenti M'_{ON} . Se è plasticizzato A_1 a compressione, è

$$M'_{ON} = \sigma_0 A_1 h \frac{A_2}{A_1 + A_2} + F h \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

$$N = F - \sigma_0 A_1 ;$$

la relazione tra N ed M è perciò lineare, e la coppia di valori

$$\begin{cases} M'_{ON} = 0 \\ N = -\sigma_0 (A_1 + A_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ M'_{ON} = \sigma_0 A_1 h \end{cases}$$

determina la retta CA (fig. 13-b).

Se è plasticizzato A_2 a trazione, si ha invece

$$M'_{ON} = -F h \frac{A_2}{A_1 + A_2} + \sigma_0 A_2 h \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

$$N = F + \sigma_0 A_2 ;$$

anche in questo caso il diagramma NM è una retta, definita dalla coppia di punti D ed S

$$\begin{cases} M'_{ON} = 0 \\ N = \sigma_0 (A_1 + A_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} N = 0 \\ M'_{ON} = \sigma_0 A_2 h . \end{cases}$$

Il diagramma M'_{ON} è perciò la spezzata CRD; il diagramma M''_{ON} si costruisce in maniera analoga, ed è la spezzata CQD, simmetrica rispetto ad O della CRD.

Un caso analogo a quello ora esaminato è riportato nella fig. 4-14. In corrispondenza del massimo sforzo di trazione (punto D) si ha (fig. 4-14 f)

$$N'_0 = 6 A \sigma_0$$

$\arctg d$ (fig. 4-12); questo corrisponde a variare tutte le inclinazioni dM/dN , e cioè la y_n , della quantità $-d$.

5. Alcuni interessanti esempi e casi particolari.

a) *Sezione ideale costituita da aree molto sottili secondo l'asse di flessione.*

Si consideri innanzitutto la sezione ideale (*Rjanitsyn*) costituita (fig. 4-13 a) da due aree di spessore dy molto piccolo; il materiale sia lo stesso, con $\sigma'_o = -\sigma''_o = \sigma_o$. E' il caso limite di una comune trave in acciaio

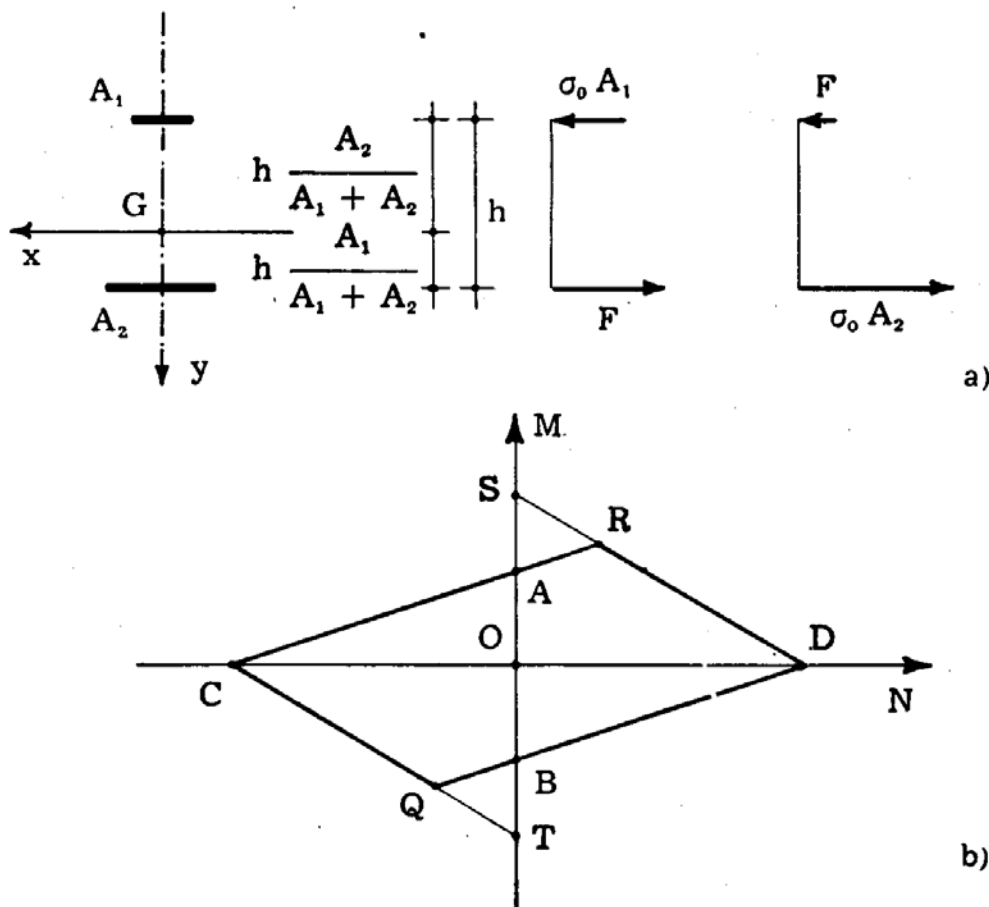


FIG. 4-13

da ponte, ove si trascuri il contributo delle anime, e lo spessore delle soles. Si ha

$$N'_o = - N''_o = (A_1 + A_2) \sigma_o$$

$$M'_o = - M''_o = \sigma_o A_1 h$$

$$\bar{M} = -\frac{3}{2} A \sigma_0 h ;$$

in corrispondenza del massimo sforzo di compressione (punto C) si ha (fig. 4-14 e)

$$N''_0 = -10 A \sigma_0$$

$$\bar{\bar{M}} = -\frac{3}{2} A \sigma_0 h .$$

Se è plasticizzata a compressione l'area superiore (fig. 4-14 c) si ha

$$M = \sigma_0 A \frac{3}{4} h + F \frac{h}{4}$$

$$N = F - \sigma_0 A ;$$

la relazione tra N ed M è lineare, e la retta corrispondente è quella

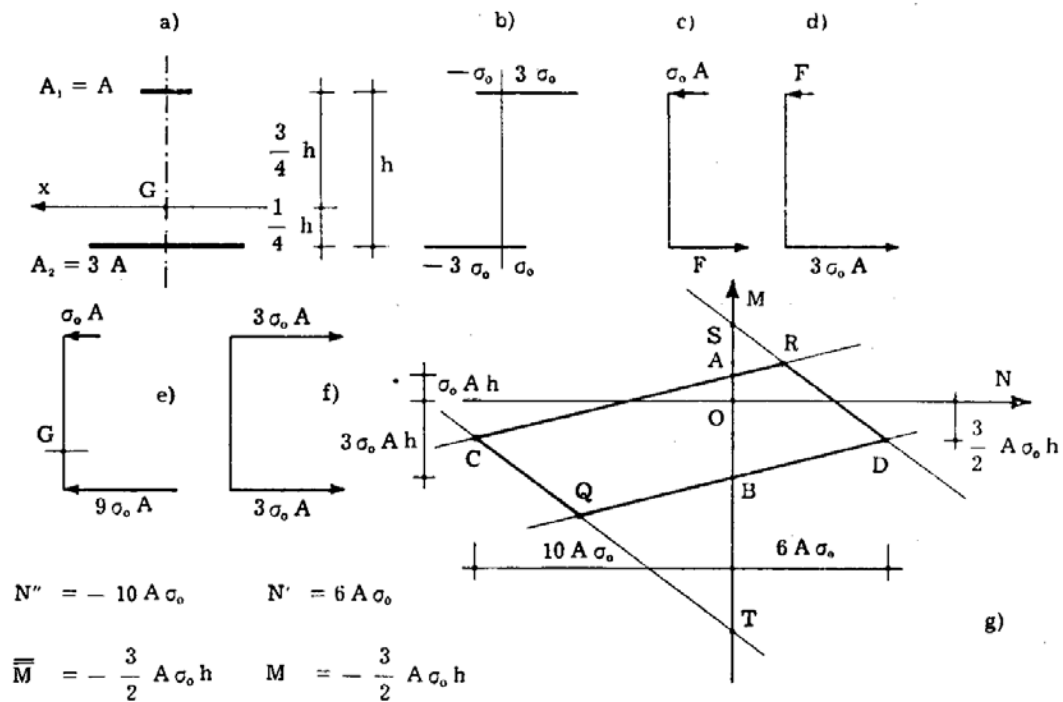


FIG. 4-14

(fig. 4-14 g) che congiunge C (N''_0 , $\bar{\bar{M}}$) con A (0 , $\sigma_0 A h$). Se è plasticizzata a trazione l'area inferiore (fig. 4-14 d) si ha

$$M = 3 \sigma_0 A \frac{h}{4} - F \frac{3}{4} h$$

$$N = F + 3 \sigma_0 A ;$$

la retta corrispondente è quella che unisce il punto D (N'_o, \bar{M}) con S ($0, 3 \sigma_o A h$).

Se è plasticizzata a trazione l'area superiore si ha

$$M = -3 \sigma_o A \frac{3}{4} h + F \frac{h}{4}$$

$$N = F + 3 \sigma_o A ;$$

la retta è la congiungente D con il punto B ($0, -3 \sigma_o A h$).

Se è plasticizzata a compressione l'area inferiore è

$$M = -9 \sigma_o A \frac{h}{4} - F \frac{3}{4} h$$

$$N = F - 9 \sigma_o A ;$$

la retta è la congiungente C con il punto T ($0, -9 \sigma_o A h$).

Il dominio è quindi quello della fig. 4-14. Conformemente a quanto detto nel § 3 di questo capitolo, si ha in corrispondenza della area superiore

$$\sigma_p = \frac{\sigma'_o + \sigma''_o}{2} = \frac{2\sigma_o}{2} = \sigma_o$$

e in corrispondenza dell'area inferiore

$$\sigma_p = \frac{\sigma'_o + \sigma''_o}{2} = -\frac{2\sigma_o}{2} = -\sigma_o ;$$

è perciò

$$N_p = \sigma_o A - 3 \sigma_o A = -2 \sigma_o A$$

$$M_p = -\sigma_o A \frac{3}{4} h - 3 \sigma_o A \frac{h}{4} = -\frac{3}{2} \sigma_o A h .$$

Rispetto al punto C di coordinate N_p, M_p il contorno del dominio risulta simmetrico.

b) *Sezione rettangolare di materiale omogeneo.*

Altro caso semplice è quello della sezione rettangolare (fig. 4-15); siano b ed h le dimensioni secondo x ed y , e sia inoltre $\sigma'_o = -\sigma''_o = \sigma_o$. Nell'ipotesi di fibre inferiori tese e fibre superiori compresse (momenti M'_{ON}) si ha

$$N = \sigma_o b (h_1 - h_2) \tag{h}$$

$$M'_{ON} = \sigma_0 b h_1 \frac{h_2}{2} + \sigma_0 b h_2 \frac{h_1}{2} = \sigma_0 b h_1 h_2$$

dove h_1 e h_2 sono i valori assoluti delle distanze dell'asse neutro dai due bordi.

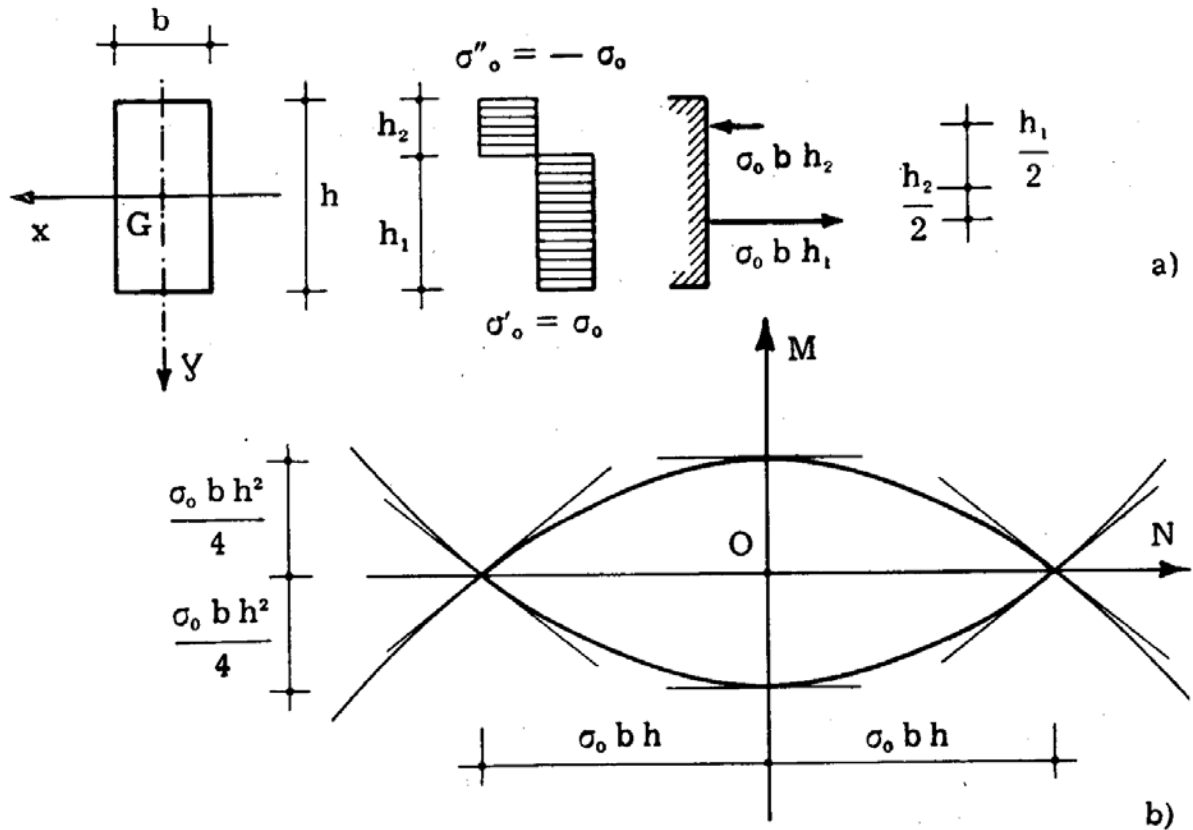


FIG. 4-15

Dalle due relazioni

$$h_1 - h_2 = \frac{N}{\sigma_0 b}$$

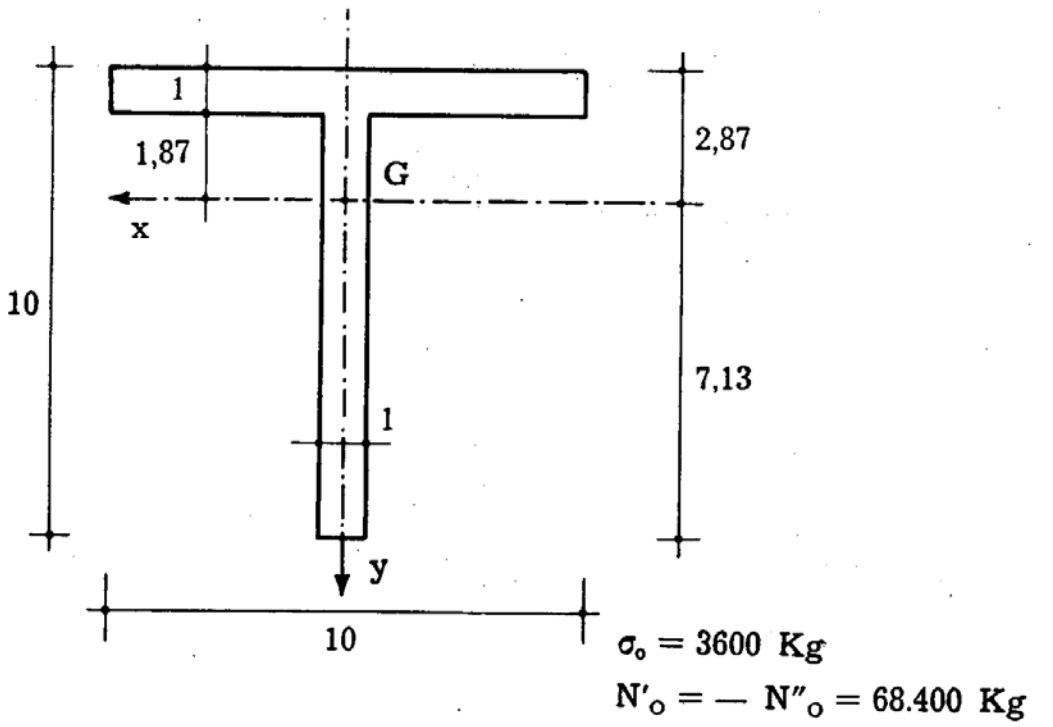
$$h_1 + h_2 = h$$

si trae

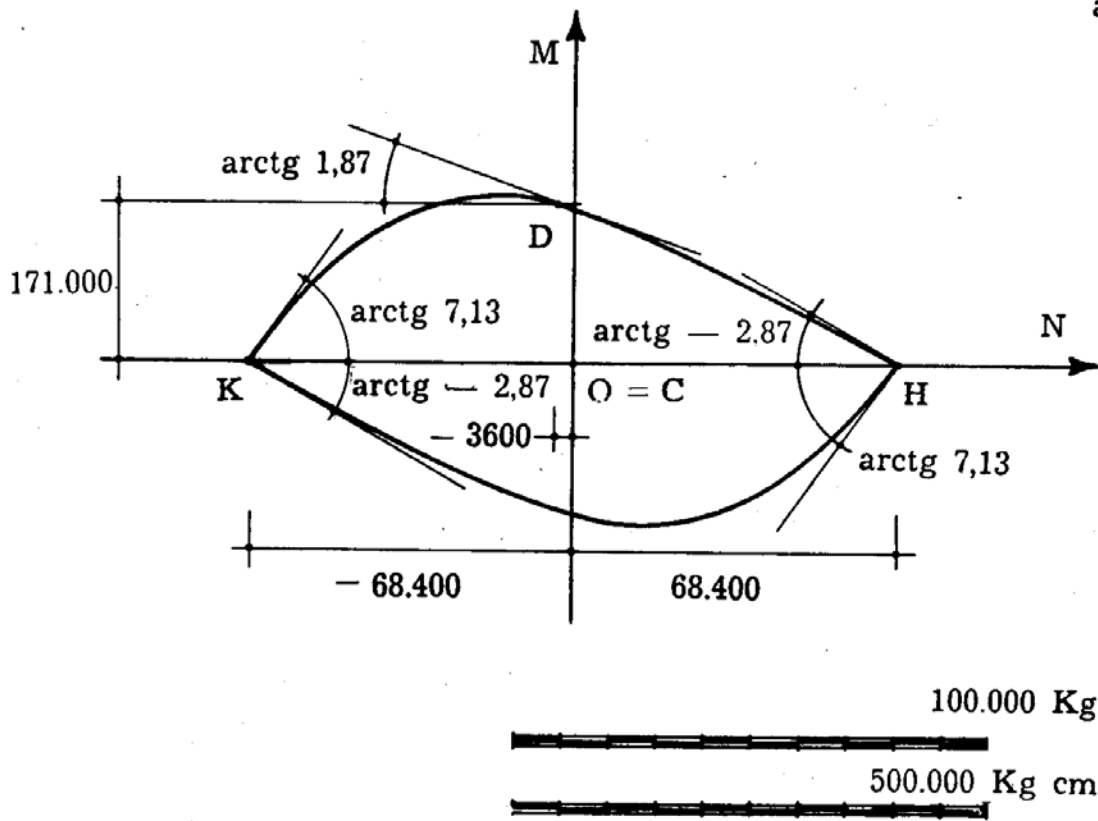
$$h_1 = \frac{\sigma_0 b h + N}{2 \sigma_0 b} = h \frac{N'_0 + N}{2 N'_0}$$

$$h_2 = \frac{\sigma_0 b h - N}{2 \sigma_0 b} = h \frac{N'_0 - N}{2 N'_0}$$

essendo $N'_0 = \sigma_0 b h$, e $M'_0 = -M''_0 = \frac{\sigma_0 b h^2}{4}$



a)



b)

FIG. 4-16

Dalla seconda delle h si trae

$$M'_{ON} = \sigma_0 b h_1 h_2 = \frac{\sigma_0 b h^2}{4} \frac{N'_0{}^2 - N^2}{N'_0{}^2}$$

e cioè in definitiva

$$M'_{ON} = M'_0 \left(1 - \frac{N^2}{N'_0{}^2} \right) \quad (1)$$

La curva $(N M'_{ON})$ è perciò una parabola di asse y ; l'intero contorno del dominio è rappresentato nella fig. 4-15 b.

c) *Sezione di un profilato.*

Nella fig. 4-16 è riportata la costruzione del dominio di plasticizzazione per un profilato a T; poichè è $\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0$ ($\sigma_0 = 3600 \text{ Kg/cm}^2$), il contorno è simmetrico rispetto all'origine. La costruzione è facilitata notevolmente dalla considerazione che per le parti corrispondenti a po-

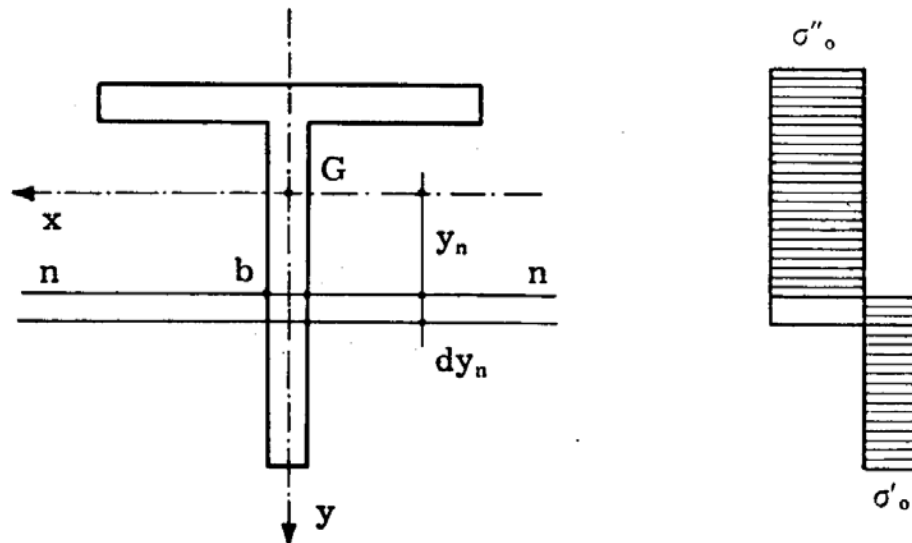


FIG. 4-17

sizioni dell'asse neutro variabili lungo tratti di sezione aventi corda di lunghezza costante (e mantenendosi σ'_0 e σ''_0 costanti), il contorno del dominio è una parabola quadratica di asse parallelo all'asse delle M (si veda § 4). Infatti si ha in tal caso (fig. 4-17)

$$dN = -b dy_n \sigma'_0 + b dy_n \sigma''_0 = b (\sigma''_0 - \sigma'_0) dy_n$$

da cui

$$y_n = c_1 N + c_2$$

$$\frac{dM}{dN} = c_1 N + c_2$$

$$M = c_1 N^2 + c_2 N + c_3 (*) .$$

Si tracci prima il tratto del contorno cui corrispondono compressioni al lembo superiore. Per plasticizzazione completa a compressione si ha (punto K)

$$N = - 3600 \cdot 19 = - 68400 \text{ Kg}$$

$$M = 0 ;$$

poichè l'asse neutro è al lembo inferiore, l'inclinazione in K è pari a 7,13 cm.

Per plasticizzazione completa a trazione si ha (punto H)

$$N = 68400 \text{ Kg}$$

$$M = 0 ;$$

poichè l'asse neutro è al lembo superiore, l'inclinazione in H è pari a -2,87.

Interessa ancora il punto D, corrispondente all'asse neutro che divide i due rettangoli ($y_n = - 1,87$); in esso si ha

$$N = - 3600 \cdot 10 + 3600 \cdot 9 = - 3600 \text{ Kg}$$

$$M = 32800 \cdot 2,63 + 36000 \cdot 2,37 = 171000 \text{ Kgcm} .$$

L'inclinazione in D è pari a -1,87 cm.

Poichè tra K e D si ha una parabola, e tra D e H un'altra parabola, il contorno è definito dai tre punti KDH e dalle tangenti in essi (anzi, in rigore, dai tre punti KDH e dalle sole tangenti in K e H). Il tratto di

(*) Si osservi, con l'occasione, che risulta, nell'ipotesi di fibre superiori compresse (fig. 4-17) ,

$$\frac{d^2M}{dN^2} = \frac{d}{dN} \left(\frac{dM}{dN} \right) = \frac{dy_n}{dN} = \frac{1}{b (\sigma''_o - \sigma'_o)} < 0 ,$$

mentre, nell'ipotesi di fibre inferiori compresse, sarebbe

$$\frac{d^2M}{dN^2} > 0 .$$

Ciò garantisce in ogni caso la convessità del dominio di plasticizzazione. L'osservazione è dovuta a *Raithel* ed *Adriani*.

contorno cui corrispondono compressioni al lembo inferiore è il simmetrico polare del primo rispetto al punto O.

d) *Sezioni di conglomerato armato.*

Di grande interesse è il caso del conglomerato armato; nella fig. 4-20 è riportato il dominio di plasticizzazione per una sezione rettangolare ad armatura semplice. Si fa l'ipotesi semplificativa che l'area del ferro sia occupata anche dal conglomerato; il diagramma delle tensioni limiti è perciò quello della fig. 4-19, da cui risulta che il contorno del dominio è dotato di simmetria polare rispetto al punto C di coordinate

$$M_p = 0 \quad N_p = \frac{\sigma_{oc} b h}{2} .$$

Inoltre i momenti flettenti sono presi rispetto al baricentro del rettangolo $b \cdot h$.

Si usa la seguente simbologia:

$$\begin{array}{l} \text{conglomerato} \\ \text{acciaio} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma'_o = 0 \\ \sigma''_o = \sigma_{oc} \end{array} \right. \quad \sigma'_o = - \sigma''_o = \sigma_{of} .$$

Risulta $\sigma_{oc} < 0$, $\sigma_{of} > 0$.

Si scrive pure .

$$N_{oc} = \sigma_{oc} b h \quad (N_{oc} < 0)$$

$$N_{of} = \sigma_{of} A_f \quad (N_{of} > 0)$$

$$M_{of} = \sigma_{of} A_f \left(\frac{h}{2} - c \right) = N_{of} \left(\frac{h}{2} - c \right) \quad (M_{of} > 0) .$$

Il punto K corrispondente alla plasticizzazione completa per compressione (fig. 4-18) ha coordinate

$$N = \sigma_{oc} b h - \sigma_{of} A_f = N_{oc} - N_{of}$$

$$M = - \sigma_{of} A_f \left(\frac{h}{2} - c \right) = - M_{of} ;$$

in K le due tangenti KK' e KK'' hanno inclinazione uguale e contraria, e pari a $\pm h/2$.

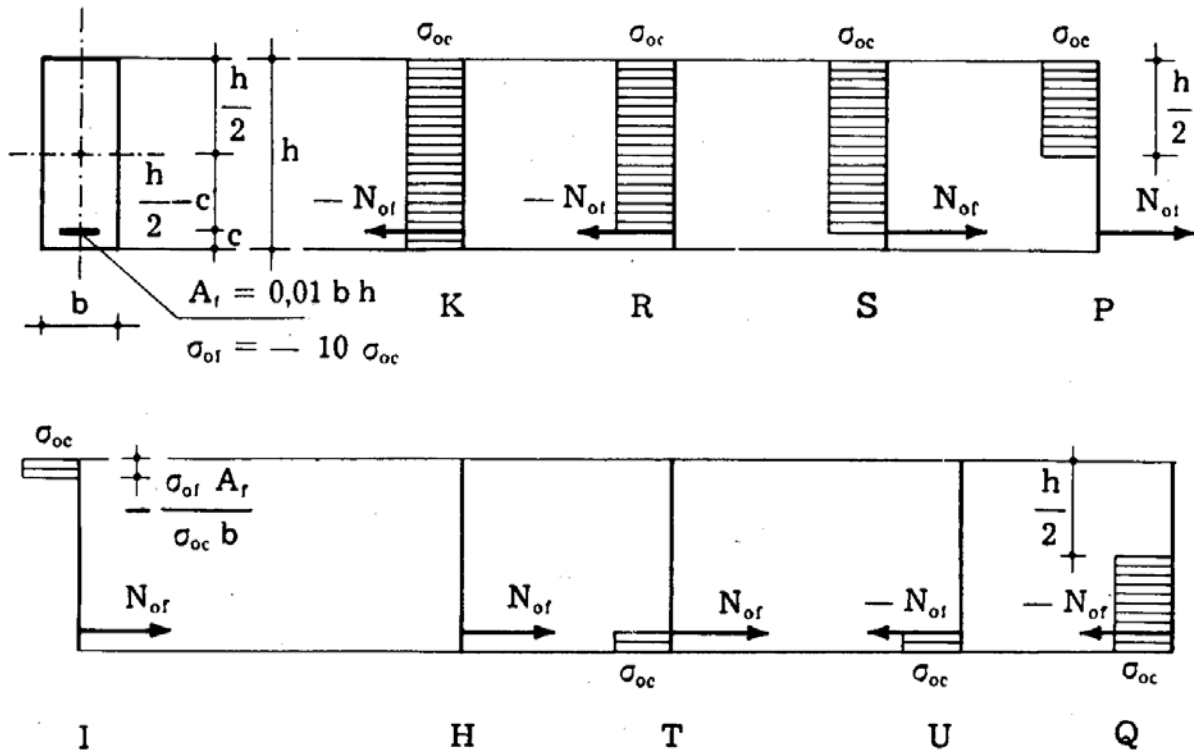


FIG. 4-18

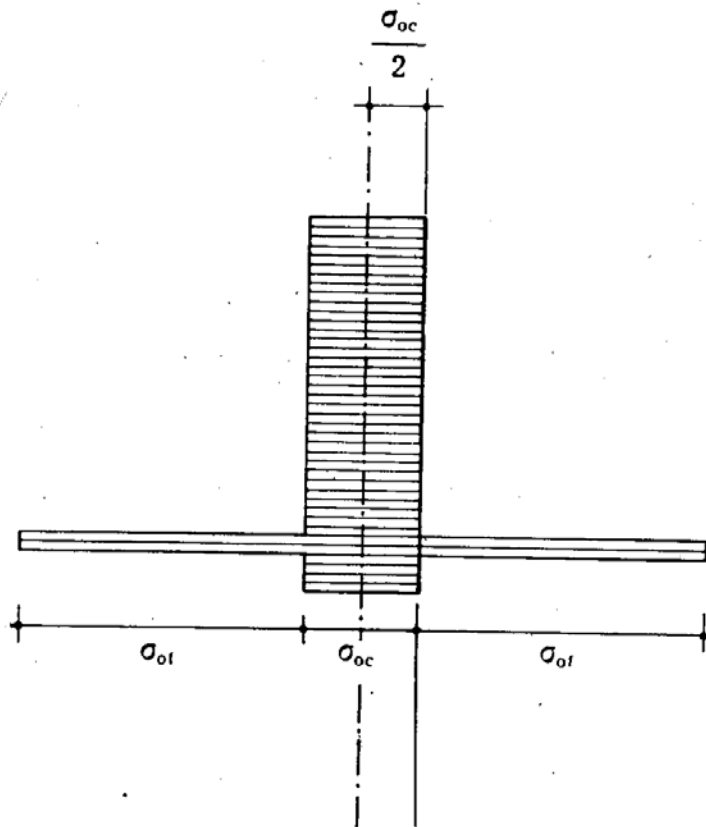


FIG. 4-19

Il punto H corrispondente alla plasticizzazione completa per trazione ha coordinate

$$N = \sigma_{of} A_f = N_{of}$$

$$M = \sigma_{of} A_f \left(\frac{h}{2} - c \right) = M_{of} ;$$

in H le due tangenti HH' ed HH'' hanno inclinazione uguale e contraria, e pari a $\pm h/2$, valore uguale a quello delle due inclinazioni in K.

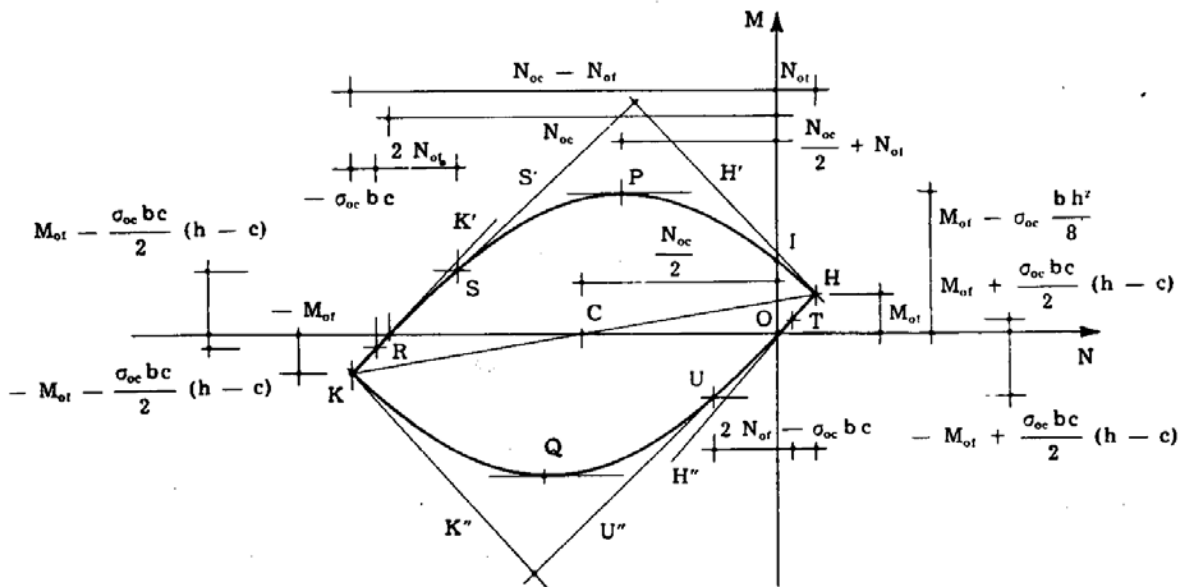


FIG. 4-20

Si studi prima la parte di diagramma corrispondente al lembo superiore compresso. Il punto P ove il momento è massimo ha per tangente una parallela all'asse delle N, e quindi corrisponde all'asse neutro che divide a metà il rettangolo; le sue coordinate sono

$$N = \sigma_{oc} \frac{bh}{2} + N_{of} = \frac{N_{oc}}{2} + N_{of}$$

$$M = \sigma_{of} A_f \left(\frac{h}{2} - c \right) - \sigma_{oc} \frac{bh^2}{8} = M_{of} - \sigma_{oc} \frac{bh^2}{8} .$$

Il punto I corrispondente alla flessione pura ha coordinate

$$N = 0$$

$$M = \sigma_{of} A_f \left(\frac{h}{2} - c \right) + \sigma_{of} A_f \left(\frac{h}{2} + \frac{\sigma_{of} A_f}{2\sigma_{oc} b} \right) =$$

$$= \sigma_{of} A_f \left(h + \frac{\sigma_{of} A_f}{2 \sigma_{oc} b} - c \right);$$

in esso la tangente ha inclinazione

$$- \left(\frac{h}{2} + \frac{\sigma_{of} A_f}{\sigma_{oc} b} \right).$$

Particolare importanza rivestono i punti R e S corrispondenti ad un asse neutro immediatamente sotto e sopra l'area dei ferri, che si suppone di altezza trascurabile rispetto all'altezza della sezione. Il punto R è caratterizzato da

$$N = N_{oc} - N_{of} - \sigma_{oc} b c$$

$$M = - M_{of} - \frac{\sigma_{oc} b c}{2} (h - c).$$

Il punto S è definito da

$$N = N_{oc} + N_{of} - \sigma_{oc} b c$$

$$M = M_{of} - \frac{\sigma_{oc} b c}{2} (h - c).$$

Tra R ed S l'inclinazione è costante, per l'ipotesi già fatta circa la trascurabilità dell'altezza dell'area del ferro, e pari a $\frac{h}{2} - c$; il tratto RS è quindi rettilineo. Tra S e H, e tra K ed R, il contorno è una parabola quadratica con l'asse parallelo all'asse delle M, per quanto già detto in questo stesso paragrafo.

La costruzione del contorno del dominio è perciò immediata una volta fissati i punti KRS e le tangenti in questi (in rigore bastano i quattro punti e le tangenti in due di essi). Il contorno deve passare anche per P ed I.

Ragionamenti del tutto analoghi possono farsi per il tratto inferiore, corrispondente a compressioni sul lembo inferiore; esso però si può tracciare immediatamente come simmetrico polare del primo rispetto a C.

Molto importante è anche il caso della sezione rettangolare in c.a. ad armatura simmetrica (fig. 4-21). Si usano i simboli

$$N_{oc} = \sigma_{oc} b h \quad (N_{oc} < 0)$$

$$N_{of} = 2 \sigma_{of} A_f \quad (N_{of} > 0)$$

$$M_{of} = \sigma_{of} A_f (h - 2c) \quad (M_{of} > 0).$$

Per sezione tutta compressa si ha il punto K di coordinate

$$N = \sigma_{oc} b h - 2 \sigma_{of} A_f = N_{oc} - N_{of}$$

$$M = 0 ;$$

in K le due tangenti sono inclinate di $\pm h/2$

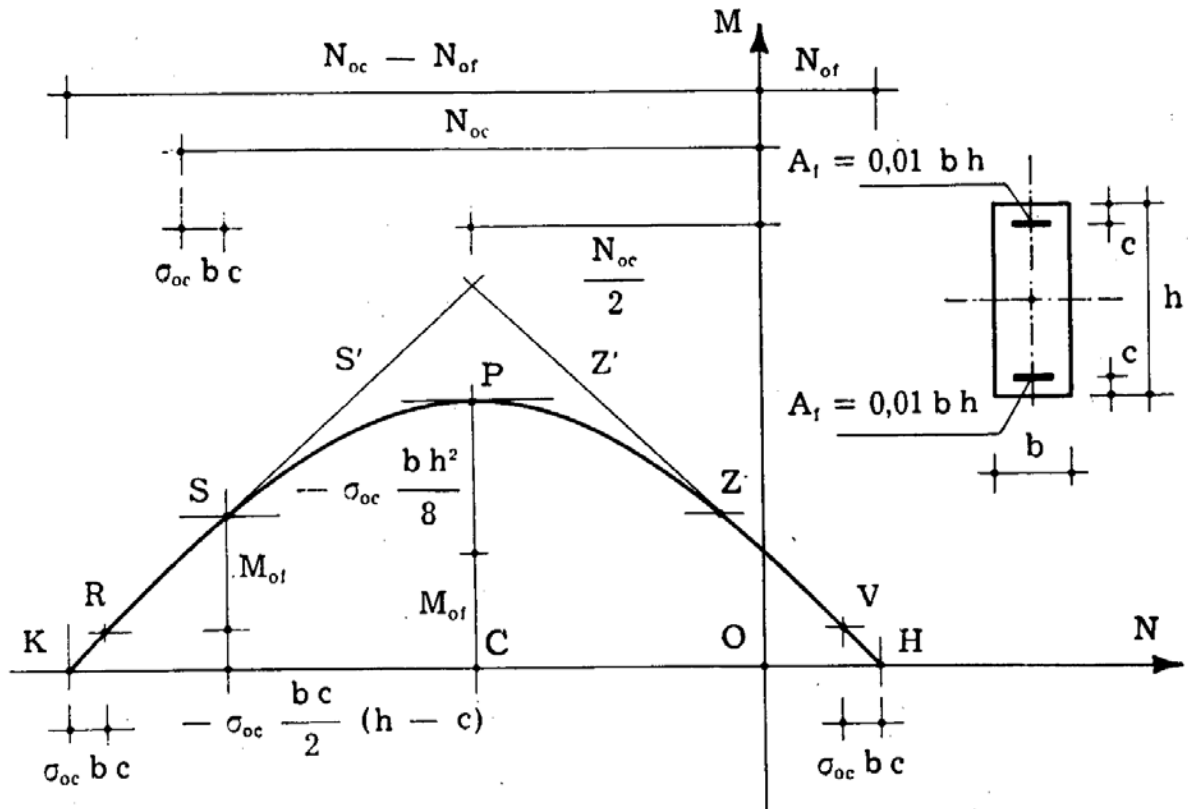


FIG. 4-21

Per sezione tutta tesa si ha il punto H di coordinate

$$N = 2 \sigma_{of} A_f = N_{of}$$

$$M = 0 ;$$

anche in H le due tangenti sono inclinate di $\pm h/2$.

Si studi la parte di contorno relativa al lembo superiore compresso. Il punto P dove il momento è massimo è definito dalle coordinate

$$N = \sigma_{oc} \frac{b h}{2} = \frac{N_{oc}}{2}$$

$$M = M_{of} - \sigma_{oc} \frac{b h^2}{8}$$

Il punto R corrisponde all'asse neutro immediatamente sotto l'area del ferro inferiore; in esso si ha

$$N = N_{oc} - N_{of} - \sigma_{oc} b c$$

$$M = - \sigma_{oc} \frac{b c}{2} (h - c) .$$

Il punto S corrisponde all'asse neutro immediatamente sopra l'area del ferro inferiore; le sue coordinate sono

$$N = N_{oc} - \sigma_{oc} b c$$

$$M = M_{of} - \sigma_{oc} \frac{b c}{2} (h - c) .$$

Sia in S che in R la tangente al contorno è inclinata di $\frac{h}{2} - c$; il tratto RS è rettilineo. Ciò si verifica in ogni caso in corrispondenza delle armature.

Ottenuti i punti KHRS e le tangenti in essi il contorno del dominio è definito; infatti il contorno è simmetrico rispetto all'asse delle N e rispetto alla retta CP asse del segmento HK, e d'altro canto, per lo stesso ragionamento fatto nel caso precedente, i tratti KR, VH ed SZ sono parabolici.

e) *Sezioni di materiale non resistente a trazione.*

Se il materiale è privo di resistenza a trazione (conglomerato non

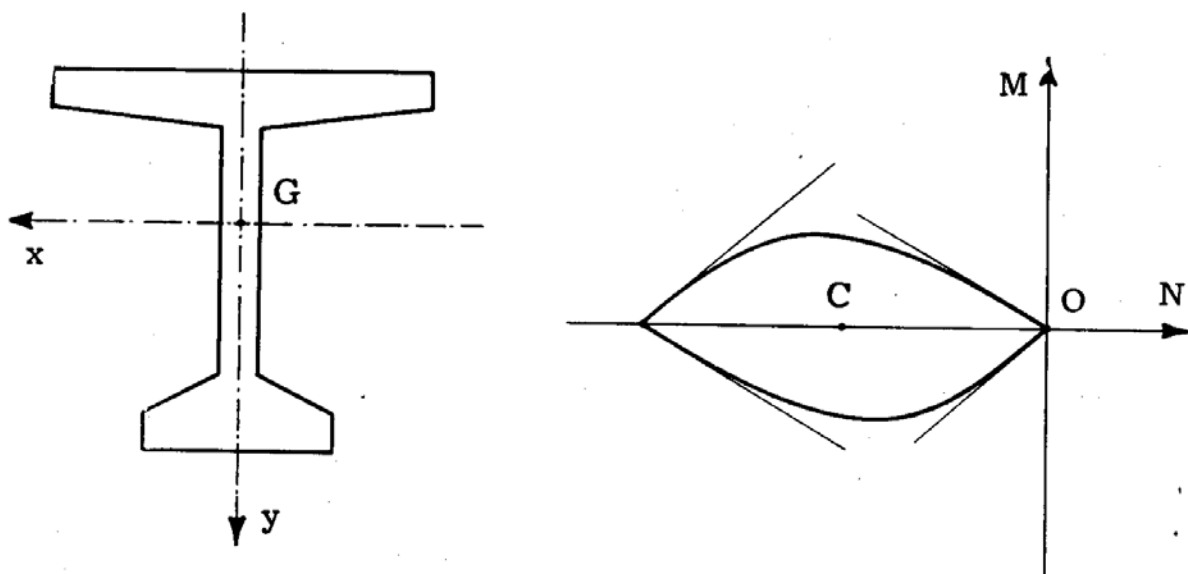


FIG. 4-22

armato, muratura, sezione di imposta di fondazioni dirette) il dominio

si presenta come nella fig. 4-22, completamente ubicato dalla parte delle N negative; risulta in tal caso $N'_o = 0$.

f) *Sezioni di conglomerato precompresso.*

Di notevole interesse è anche il caso di conglomerato precompresso; esso può schematizzarsi (fig. 4-23) in una sezione di materiale non resistente a trazione, soggetta ad uno sforzo normale N_c di compressione, pari alla componente assiale del tiro, applicata nel punto P ove il cavo equivalente incontra la sezione. Se e è la distanza GP (positiva se P è dalla

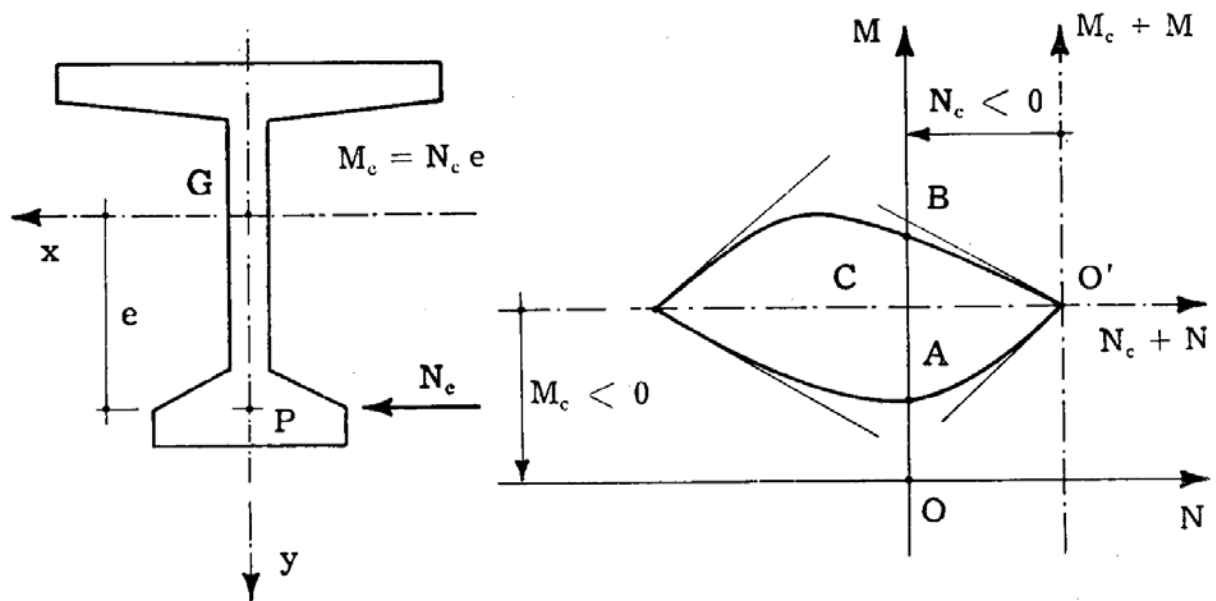


FIG. 4-23

parte delle y positive), la sezione è quindi soggetta ad una compressione semplice N_c ($N_c < 0$) e ad un momento flettente $N_c e$, negativo se e è positivo. Si suppone che in esercizio N_c , e quindi $N_c e$, siano invariabili; questa ipotesi coincide con quella che si premette al calcolo elastico delle strutture in c.a.p.

Alcuni autori propongono di calcolare i momenti di rottura considerando i cavi aderenti al conglomerato, e cioè di operare come se si trattasse di conglomerato ordinario, armato con l'acciaio dei cavi di precompressione. In tal modo si calcolano momenti limiti più elevati, poichè si suppone l'acciaio plasticizzato; ma non sembra consigliabile fare affidamento sull'aderenza tra acciaio e conglomerato per sollecitazioni così elevate, anche perchè tale aderenza non sarebbe garantita, nella maggioranza dei casi, che dall'iniezione di malta di cemento intra guaina, il cui scopo invece è principalmente quello di proteggere l'acciaio dalla corrosione. Inol-

tre i risultati sperimentali, di cui si darà qualche cenno alla fine del libro, pare stiano a confortare l'ipotesi di invarianza del tiro molto più che non quella di aderenza. Le deformazioni consentite prima della rottura sono comunque molto limitate, attesa la fragilità dell'acciaio armonico; in questo caso quindi è particolarmente necessario, nelle strutture iperstatiche, abbinare al calcolo del coefficiente di sicurezza quello delle deformazioni.

Nell'ipotesi suddetta, se N ed M sono le caratteristiche dovute ai carichi agenti — peso proprio e carico accidentale — il dominio $N + N_c$, $M + M_c$ è ancora quello relativo alla sezione non reagente a trazione, disegnato nella fig. 4-23 con riferimento agli assi tratteggiati.

Il dominio NM , essendo N_c ed M_c invariabili, coincide con quest'ultimo, a meno del riferimento, che si ottiene da quello tratteggiato trasladando l'asse $M_c + M$ della quantità N_c , nel verso delle N negative poiché N_c è negativo, e l'asse delle $N + N_c$ della quantità $N_c e = M_c$, nel verso delle M positive se M_c è positivo; così un punto di coordinate $N + N_c$, $M + M_c$ nel vecchio riferimento, ha, nel nuovo riferimento, coordinate $N + N_c - N_c = N$, $M + M_c - M_c = M$.

Dalle considerazioni suddette deriva un metodo di notevole semplicità applicativa per il calcolo di progetto o di verifica a rottura di una struttura inflessa

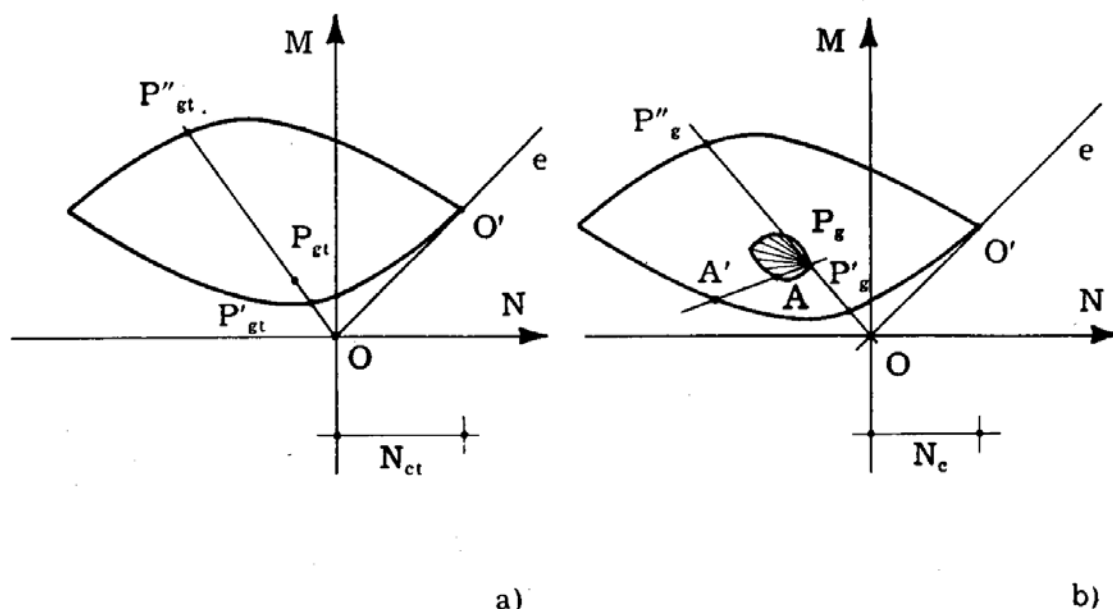


FIG. 4-24

o pressoinflessa isostatica. Una volta nota la geometria della struttura e quindi della generica sezione, in corrispondenza di quest'ultima sono noti il dominio di plasticizzazione a meno del riferimento, (in particolare dell'origine O di esso), le caratteristiche da peso proprio presenti all'atto del tiro, quelle da peso proprio di esercizio, e quelle derivanti dal carico accidentale.

Le altre quantità in gioco sono il tiro, e quindi la N_c , e l'eccentricità e del tiro stesso. Se esse sono note, per ottenere il coefficiente di sicurezza al tiro basta disegnare il dominio di plasticizzazione in posizione tale che il punto O sia ubicato sulla retta e (passante per O ed inclinata di $\arctg e$ sull'asse delle N) ed abbia per ascissa la componente assiale N_{ct} dello sforzo di precompressione all'atto del tiro (fig. 4-24 a). Se P_{gt} definisce le caratteristiche all'atto del tiro, è

$$s_t = \frac{OP_{gt}}{OP'_{gt}};$$

e cioè il peso proprio all'atto del tiro dovrebbe diminuire nel rapporto s_t perchè fossero raggiunte le condizioni di rottura. Il rapporto

$$\frac{OP''_{gt}}{OP_{gt}}$$

relativo all'aumento del peso proprio risulta quasi sempre maggiore del primo.

I coefficienti di sicurezza relativi alla fase di esercizio si ottengono in maniera analoga. Si disegna il dominio in modo che O' giaccia sempre sulla retta e ,

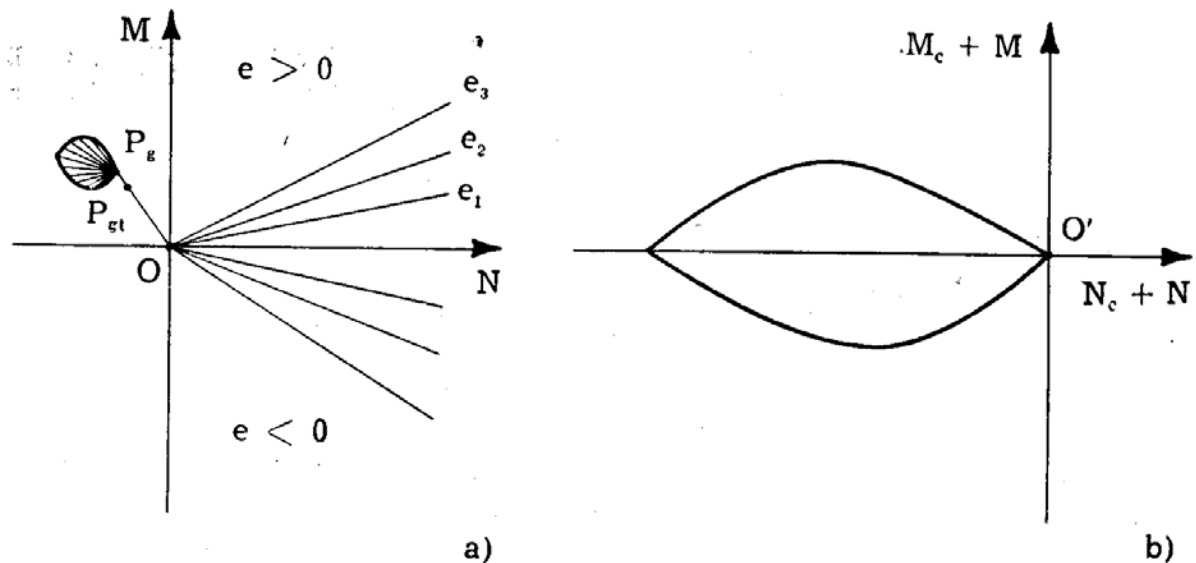


FIG. 4-25

ma con ascissa N_c , dove N_c è la componente normale dello sforzo di precompressione a fluage esaurito (fig. 4-24 b). Se P_g definisce le caratteristiche relative ai carichi fissi, il coefficiente di sicurezza relativo al peso proprio è il più piccolo dei due rapporti

$$s_g = \left\langle \begin{array}{l} \frac{OP_g}{OP'_g} \\ \frac{OP''_g}{OP_g} \end{array} \right.$$

Il coefficiente di sicurezza relativo al carico accidentale si ottiene disegnando con origine P_g il dominio delle caratteristiche $N_a M_a$ (dominio elastico D_e), e calcolando i rapporti $P_g A' / P_g A$ (fig. 4-24 b); il più piccolo di questo è s_a :

$$s_a = \left(\frac{P_g A'}{P_g A} \right)_{\min}$$

Dei tre coefficienti di sicurezza a rottura, s_t può essere scelto convenientemente basso; più elevati devono essere s_g ed s_a , e tra i due s_g più elevato di s_a .
 glio di carta normale il riferimento OMN, i punti P_{gt} e P_g , il dominio D_e , e le rette passanti per O e corrispondenti alle varie eccentricità (fig. 25 a), e su un foglio di carta lucida il dominio di plasticizzazione della sezione considerata non reagente a trazione (fig. 25 b). Facendo scorrere il foglio di carta lucida sull'altro. in modo che O' percorra le rette delle eccentricità, risulta facile fissare N_c ed e in modo da rispettare i coefficienti di sicurezza e le altre condizioni eventualmente imposte.

Si osservi che, se la struttura è semplicemente inflessa, P_{gt} e P_g giacciono sull'asse delle M, ed il dominio D_e si riduce ad un segmento appartenente allo stesso asse.

6. Meccanismo di rottura e coefficiente di sicurezza da collasso statico in presenza di sforzo normale e momento flettente.

La struttura sia soggetta ai carichi g fissi ed a variabili; se i carichi a , in posizione invariabile, aumentano mantenendo inalterati i mutui rapporti, si formano successivamente delle cerniere di snervamento o degli snodi plastici, finchè tutta la struttura, o una sua parte, diventano labili. La struttura ha raggiunto la crisi, ed il moltiplicatore s_a dei carichi a per cui ciò avviene si definisce *coefficiente di sicurezza a rottura*.

Il caso ora esaminato è quello del *collasso statico*. Si distinguono i due casi di *collasso per carico non proporzionale* e *collasso per carico proporzionale*, secondo che g è diverso da zero o uguale a zero; nel secondo caso il coefficiente di sicurezza si indica con s . Basta studiare il caso del carico non proporzionale, perchè l'altro non è che una particolareizzazione di questo.

Se sono note le n sezioni ove si formano le cerniere plastiche, e le posizioni dei relativi assi neutri (fig. 4-26 a), il moltiplicatore s_a si ricava esprimendo una condizione necessaria derivante dall'equilibrio sui singoli tronchi, collegati dalle cerniere plastiche, dei carichi g ed $s_a \cdot a$ e delle caratteristiche (costituite dagli sforzi normali N_1 e dai momenti M_1 , legati dalla condizione di dover definire un punto sul contorno del dominio di plasticizzazione, e dai tagli T_1 , tutte agenti in corrispondenza delle cerniere plastiche).

Lo strumento più idoneo a ciò è il principio dei lavori virtuali; im-

pressa una deformata piccolissima al meccanismo reale di rottura (figura 4-26 b), si ha

$$L'_g + s_a L'_a + \sum M_i \Delta'\varphi_i - \sum N_i \Delta'\varphi_i h_i = 0 \quad (2)$$

da cui

$$s_a = - \frac{\sum M_i \Delta'\varphi_i - \sum N_i \Delta'\varphi_i h_i + L'_g}{L'_a} \quad (3)$$

Se la deformata è impressa nel verso del moto reale di incipiente collasso, risulta

$$\sum M_i \Delta'\varphi_i - \sum N_i \Delta'\varphi_i h_i < 0$$

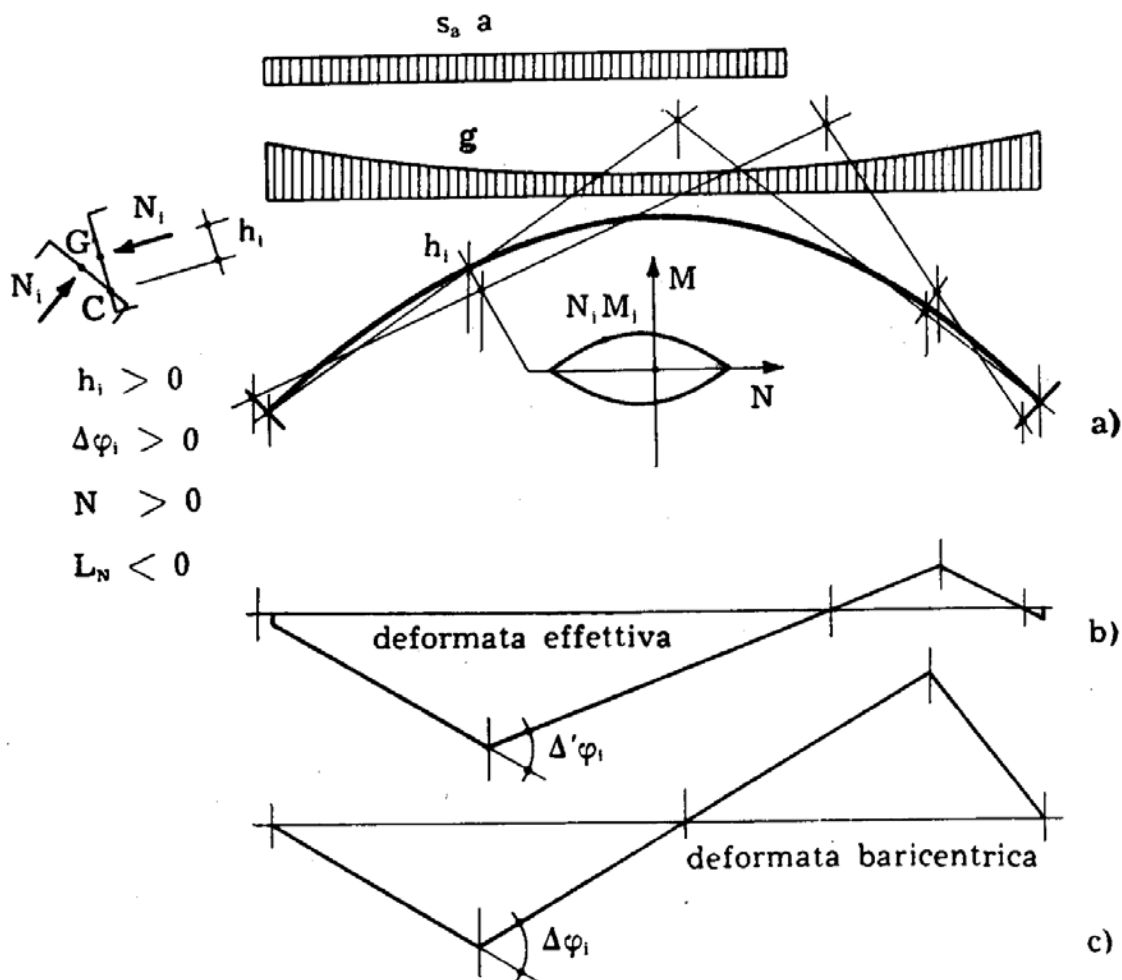


FIG. 4-26

e quindi

$$L'_g + s_a L'_a > 0 .$$

Si ha pure in tal caso $L_a > 0$; ciò si trae considerando che il segno di L_a è lo stesso nel momento che precede il collasso, in cui si ha ancora comportamento elastico, e all'inizio del collasso.

Si prenda in esame il meccanismo ideale costituito dagli stessi tronchi della fig. 4-26 a, collegati con cerniere non più in corrispondenza degli assi neutri, come è nel meccanismo reale, ma in corrispondenza dei baricentri delle sezioni di estremità di ciascun tronco; la deformata relativa (*deformata baricentrica*) è quella della fig. 4-26 c. Con riferimento a questa deformata si ha

$$L_g + s_a L_a + \sum M_i \Delta\varphi_i = 0 \quad (4)$$

da cui

$$s_a = - \frac{\sum M_i \Delta\varphi_i + L_g}{L_a} \quad (5)$$

Se la struttura è un arco, ed il suo asse coincide con una funicolare del peso proprio, è $L_g = 0$ (*), e si ha

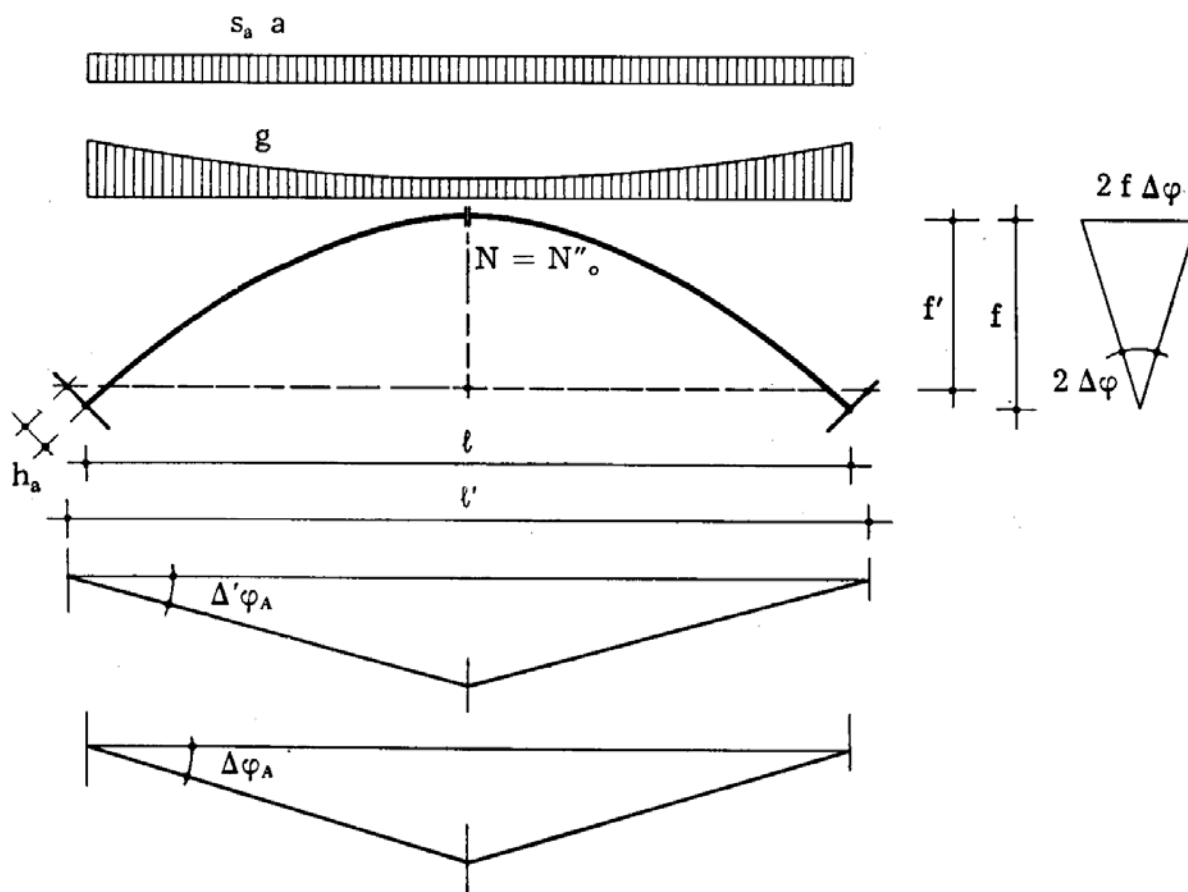


FIG. 4-27

(*) La deformata baricentrica (fig. 4-26 c) può essere in campo elastico interpretata, a meno del segno e della scala, come linea d'influenza del momento flettente in corrispondenza di una delle i sezioni ove si formano le cerniere plastiche, e relative all'arco isostatico in cui esistano cerniere nelle altre $i - 1$

$$s_a = - \frac{\sum M_i \Delta\varphi_i}{L_a}; \quad (6)$$

il peso proprio interviene nel regolare, attraverso gli sforzi normali, i momenti M_i di plasticizzazione.

Nel caso di strutture in c.a., s'intende per asse il luogo dei baricentri delle aree di conglomerato; lo scarto dall'asse baricentrico effettivo risulta trascurabile.

Si osservi che, se si opera su strutture simmetriche con sovraccarico esteso a tutta la luce (fig. 4-27), quasi sempre si ha rottura per formazione di uno snodo plastico in mezzzeria. Si ha in tal caso

$$L'_g + s_a L'_a + 2 M_A \Delta'\varphi_A - 2 N_A \Delta'\varphi_A h_A + 2 N''_o f \Delta'\varphi_A = 0$$

da cui

$$s_a = - \frac{2 M_A \Delta'\varphi_A - 2 N_A \Delta'\varphi_A h_A + 2 N''_o f \Delta'\varphi_A + L'_g}{L'_a}$$

dove h_A ed N''_o sono ambedue negativi.

Con riferimento alla deformata baricentrica si ha

$$s_a = - \frac{2 M_A \Delta\varphi_A + 2 N''_o f \Delta\varphi_A + L_g}{L_a},$$

ove L_g non è più nullo, come nel caso della fig. 4-26.

Se sono note soltanto le n sezioni ove si formano le cerniere plastiche, ma non gli assi relativi, la formula (4-5) non è più sufficiente a fornire s_a ; infatti non sono noti i valori dei momenti M_i da introdurre in essa. Le incognite in questo caso sono $2n + 1$, se n sono le cerniere plastiche, e cioè gli sforzi normali N_i , i momenti M_i ed il coefficiente di sicurezza s_a ; le relazioni che legano queste incognite sono la (4-5) di equilibrio, le n condizioni di appartenenza del punto $N_i M_i$ al contorno del dominio di plasticizzazione in corrispondenza della relativa cerniera plastica (*condizioni di plasticizzazione*), ed altre n relazioni di equilibrio che legano gli sforzi normali limiti N_i ai momenti limiti M_i . Il metodo più semplice per ottenere queste relazioni è, anche nel caso in esame, il prin-

sezioni. Poichè per effetto di g il momento è ovunque nullo nell'ipotesi di asse funicolare di g (e trascurando l'accorciamento assiale da peso proprio), deve anche essere

$$L_g = \int g \eta dz = 0.$$

cipio dei lavori virtuali; con riferimento allo stesso arco della fig. 4-26, si blocchi una cerniera, per esempio la terza, e si introduca in corrispondenza di un'altra cerniera, per esempio la seconda, una sconnessione doppia che permetta, oltre la rotazione relativa, anche lo spostamento assiale relativo delle due sezioni da essa impegnate (fig. 4-28). Impreso uno spostamento virtuale, si ha

$$L_g^* + s_a L_a^* + M_1 \Delta\varphi_1^* + M_2 \Delta\varphi_2^* + M_4 \Delta\varphi_4^* + N_2 \Delta^*u_2 = 0 ; \quad (i)$$

dalle (4-i) e (4-5) si ricava

$$N_2 = c_{20} + \sum_{i=1}^4 c_{2i} M_i . \quad (l)$$

Si osservi che nel caso del carico proporzionale la costante c_{20} è nulla, e la relazione (l) diviene omogenea. Nel caso di carico non proporzionale è $c_{20} \neq 0$ anche

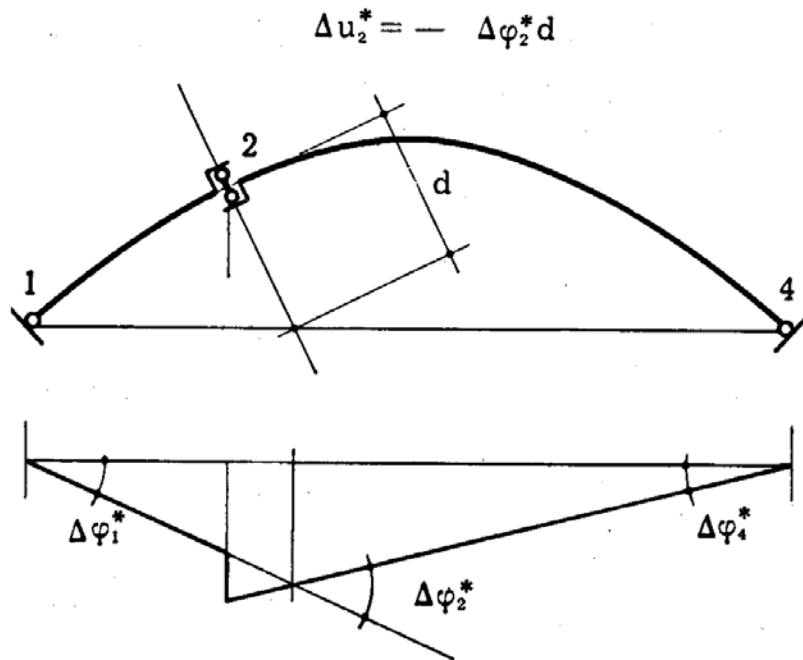


FIG. 4-28

per asse funicolare, perchè L_g è sempre diverso da zero. Si osservi pure che la relazione (l) è indipendente dalla scelta della cerniera che si blocca.

Si ha così il sistema di n relazioni

$$N_i = c_{i0} + \sum_{j=1}^n c_{ij} M_j . \quad (7)$$

In possesso delle (4-7), della (4-5) e dei domini di plasticizzazione delle n cerniere plastiche, il calcolo di s_a può essere condotto agevolmente per

iterazione. Si parte da n valori N_{i1} di N_1 di larghissima approssimazione, pari per esempio a quelli provocati sulla struttura isostatica da g e dai carichi a moltiplicati per un presunto coefficiente di sicurezza; si ricava con essi, attraverso i domini, una prima ennupla di valori M_{i1} .

Sostituiti tali valori nella (4-7), si ricava una seconda ennupla N_{i2} di sforzi normali, partendo dai quali si ripete il procedimento. Una volta pervenuti ai valori N_1, M_1 che soddisfano la (4-7) e definiscono valori relativi ai contorni dei domini di plasticizzazione, la (4-5) fornisce s_a .

Per aumentare la convergenza del procedimento si consiglia il seguente artificio. Pervenuti ai valori N_{i2} , nell'iterare il procedimento si prendono come va-

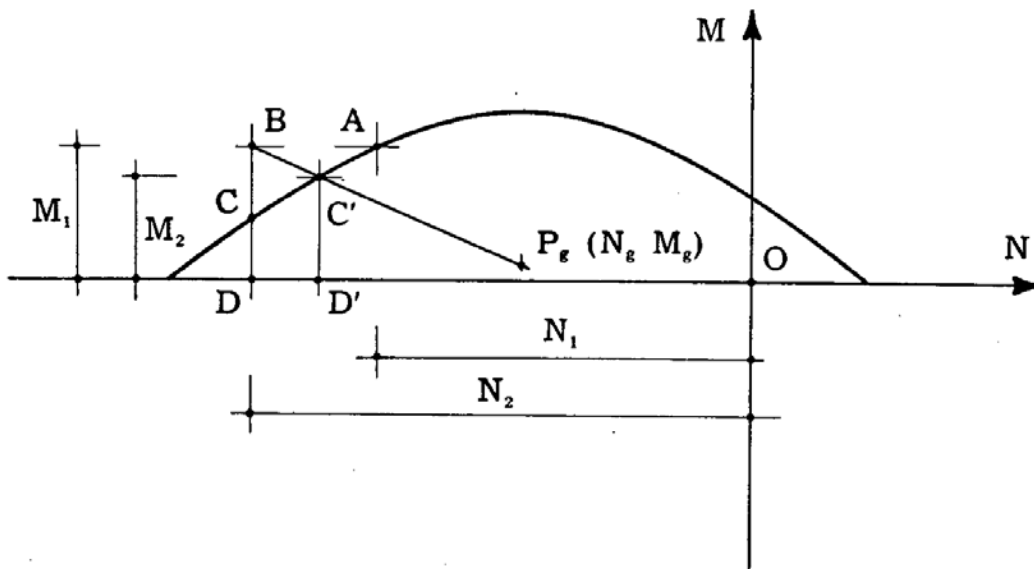


FIG. 4-29

lori di seconda approssimazione M_{i2} dei momenti, non quelli che assieme agli N_{i2} definiscono un punto del contorno (ordinata CD della fig. 4-29), ma gli altri $C'D'$, ottenuti con la costruzione della fig. 4-29; così il rapporto $\frac{M_2 - M_g}{N_2 - N_g}$ è più vicino al rapporto $\frac{M_1 - M_g}{N_1 - N_g}$.

7. Il teorema fondamentale.

Nel precedente paragrafo si è mostrato come calcolare s_a una volta conosciute le sezioni di plasticizzazione. In realtà neppure queste sono note a priori; soccorre il teorema fondamentale, del tutto analogo a quello già dimostrato nel caso dello sforzo normale e della flessione non coesistenti.

Si definisce *coefficiente cinematicamente sufficiente* γ_a un numero che vien fuori come coefficiente di sicurezza da una scelta arbitraria delle sezioni di plasticizzazione.

Un numero ψ_a si definisce *coefficiente staticamente ammissibile* se esiste almeno un insieme di reazioni iperstatiche che assieme ai carichi $g + \psi_a a$ dia luogo sulla struttura isostatica a caratteristiche $N_\psi M_\psi$ tali che in ogni sezione il punto $P(N_\psi M_\psi)$ sia non esterno al relativo dominio di plasticizzazione.

Un γ_a non può essere inferiore ad un ψ_a . Si supponga infatti $\gamma_a < \psi_a$: l'equazione che fornisce γ_a è analoga alla (4-2); essa si scrive con riferimento alla deformata cui corrisponde valore positivo per L'_a , e negativo per il lavoro compiuto dalle caratteristiche limiti:

$$L'_g + \gamma_a L'_a + \sum (M_i - N_i h_i) \Delta' \varphi_i = 0 . \quad (m)$$

Con riferimento alla stessa deformata che fornisce γ_a , e sotto i carichi $g + \psi_a a$, si ha

$$L'_g + \psi_a L'_a + \sum (M_{\psi_i} - N_{\psi_i} h_i) \Delta' \varphi_i = 0 . \quad (n)$$

Sottraendo la (n) dalla (m) si ha

$$(\gamma_a - \psi_a) L'_a + \sum (M_i - N_i h_i) \Delta' \varphi_i - \sum (M_{\psi_i} - N_{\psi_i} h_i) \Delta' \varphi_i = 0 ;$$

poichè $\gamma_a - \psi_a$, per l'ipotesi fatta, sarebbe negativo, ed L'_a è positivo, risulta pure

$$\sum (M_i - N_i h_i) \Delta' \varphi_i - \sum (M_{\psi_i} - N_{\psi_i} h_i) \Delta' \varphi_i > 0 . \quad (o)$$

Il generico termine $M_i - N_i h_i$ è il momento rispetto all'asse neutro; può scriversi quindi

$$(M_i - N_i h_i) \Delta' \varphi_i = \left(\int_{A'} \sigma'_o y \, dA + \int_{A''} \sigma''_o y \, dA \right) \Delta' \varphi_i$$

dove A' ed A'' sono le zone tesa e compressa, ed y è la distanza di dA dall'asse neutro.

Così può scriversi

$$(M_{\psi_i} - N_{\psi_i} h_i) \Delta' \varphi_i = \left(\int_{A'} \sigma_\psi y \, dA + \int_{A''} \sigma_\psi y \, dA \right) \Delta' \varphi_i ,$$

dove le σ_ψ sono le tensioni calcolabili in fase elastica sotto N_{ψ_i} ed M_{ψ_i} .

La (o) pertanto si scrive

$$\begin{aligned} & \Sigma \left(\int_{A'} \sigma'_o \Delta'\varphi_i y \, dA + \int_{A''} \sigma''_o \Delta'\varphi_i y \, dA \right) > \\ & > \Sigma \left(\int_{A'} \sigma_\psi \Delta'\varphi_i y \, dA + \int_{A''} \sigma_\psi \Delta'\varphi_i y \, dA \right). \end{aligned} \quad (p)$$

Nella zona A' è

$$\begin{aligned} \sigma'_o & \geq \sigma \\ \Delta'\varphi_i y & < 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{A'} \sigma'_o \Delta'\varphi_i y \, dA \leq \int_{A'} \sigma_\psi \Delta'\varphi_i y \, dA ;$$

nella zona A'' è

$$\begin{aligned} \sigma''_o & \leq \sigma \\ \Delta'\varphi_i y & > 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$\int_{A''} \sigma''_o \Delta'\varphi_i y \, dA \leq \int_{A''} \sigma_\psi \Delta'\varphi_i y \, dA .$$

Si trae che il generico termine della prima sommatoria (p) è minore o uguale del termine corrispondente della seconda sommatoria; quindi la prima sommatoria non può essere maggiore della seconda, e l'ipotesi $\gamma_a > \psi_a$ è assurda. Si trae da ciò che

$$\psi_a \leq \gamma_a . \quad (8)$$

8. Il calcolo del coefficiente di sicurezza.

Calcolato un γ_a , può subito ottenersi un ψ_a . Sia infatti $N_g M_g$ un insieme di caratteristiche generato da g e da un qualsiasi insieme di reazioni iperstatiche; per esempio, in un arco con asse funicolare dei carichi può porsi

$$\begin{aligned} N_g &= - \frac{H_g}{\cos \alpha} \\ M_g &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

dove H_g è la spinta, ed α l'angolo che la tangente all'asse forma con l'orizzontale. Sia P_g il punto $N_g M_g$ in corrispondenza della generica sezione; l'insieme $N_g M_g$ può comunque con facilità essere scelto in modo che P_g giaccia nell'interno del dominio di ogni sezione, poichè sotto il carico g

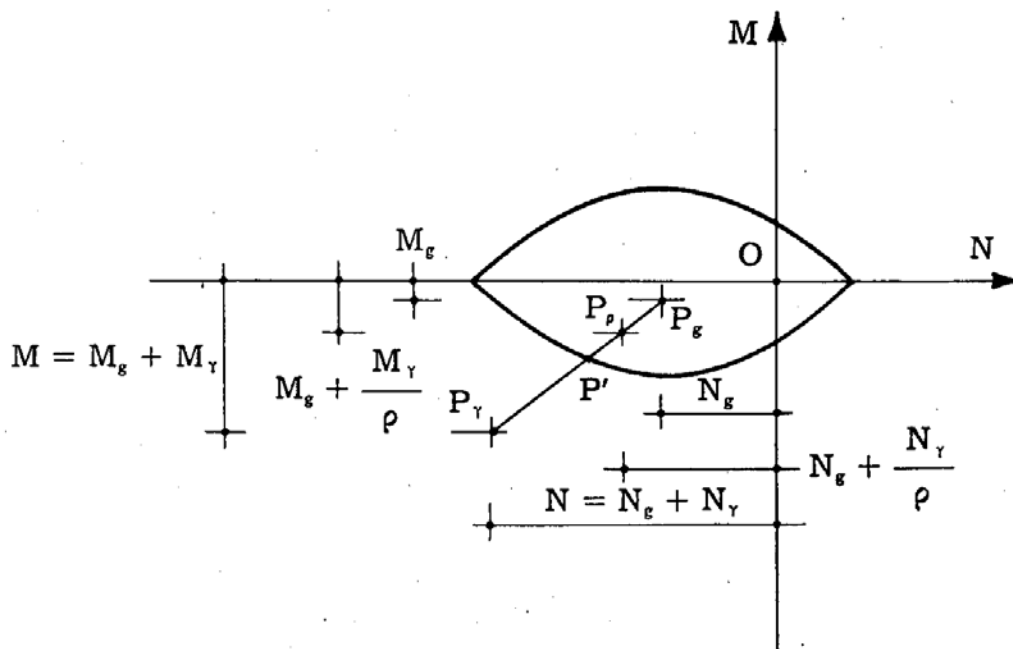


FIG. 4-30

si è in condizioni di ampia sicurezza. Per ogni sezione (in pratica si opera su un numero finito di sezioni) si disegna sul piano NM il dominio di plasticizzazione, il punto $P_g (N_g M_g)$ e il punto P_γ di coordinate N ed M , ove N ed M sono le caratteristiche totali (fig. 4-30); si indichino con N_γ ed M_γ le differenze $N - N_g$, $M - M_g$.

In corrispondenza delle cerniere plastiche P_γ giace sul contorno. Se in tutte le altre sezioni P_γ è interno al dominio, γ_a è pure un ψ_a , e quindi è s_a . Se in qualche sezione P_γ è esterno al dominio, si calcola per ciascuna di esse il rapporto

$$\frac{P_g P_\gamma}{P_g P'} \quad (q)$$

dove P' è il punto di intersezione tra il segmento $P_g P_\gamma$ ed il contorno del dominio, punto univocamente determinato attesa la convessità del contorno.

Sia ρ il più elevato dei rapporti (q); si ha

$$\frac{\gamma_a}{\rho} = \psi_a \quad (r)$$

Infatti in presenza delle forze $g + \frac{\gamma_a}{\rho} a$ esiste un insieme di reazioni iperstatiche che genera sulla struttura le caratteristiche

$$N_g + \frac{N_r}{\rho} \quad , \quad M_g + \frac{M_r}{\rho} \quad ;$$

queste sono definite dai punti P_ρ , i quali, per la convessità dei domini di plasticizzazione, e per essere ρ il più elevato dei rapporti (q), sono ovunque non esterni ai domini stessi.

Per il teorema fondamentale può porsi

$$\frac{\gamma_a}{\rho} \leq s_a \leq \gamma_a \quad . \quad (10)$$

Per restringere l'intervallo (4-10) è in genere sufficiente che nel secondo tentativo si scelgano le cerniere plastiche in corrispondenza delle sezioni ove, nel primo tentativo, i rapporti (q) risultano più elevati.

9. Un esempio numerico.

Si fa riferimento alla struttura da ponte in c.a. della fig. 4-31; si tratta in un arco cellulare incastrato, la cui sezione ha larghezza 6 m ed altezza variabile da 2,50 m all'imposta a 1,80 m in chiave. Le stilate di collegamento sono in corrispondenza delle ascisse 10 m, 20 m, 30 m, a partire dall'imposta; al centro, per una lunghezza di 28 m, la soletta superiore dell'arco costituisce impalcato. L'armatura è la stessa in tutte le sezioni. I pesi propri sono consegnati nella tabella di pag. 189, ove sono riportati nella colonna G_s i carichi trasmessi dalle stilate di collegamento con l'impalcato, e nella colonna G_i i pesi dei conci dell'arco ottenuti con sezioni orizzontalmente equidistanti.

L'asse dell'arco è disegnato coincidente con una funicolare dei pesi riportati in tabella.

Il carico accidentale è pari a 5,25 t/m, e si considera esteso dall'imposta fino all'ascissa 32,4 m, condizione cui corrisponde il massimo momento flettente in regime elastico.

Assunto $\sigma_{oc} = -300 \text{ Kgcm}^{-2}$, $\sigma_{of} = 3000 \text{ Kgcm}^{-2}$, si sono disegnati i domini di plasticizzazione a varie ascisse, riportati nella fig. 4-32; le ascisse sono espresse in t, le ordinate in tm.

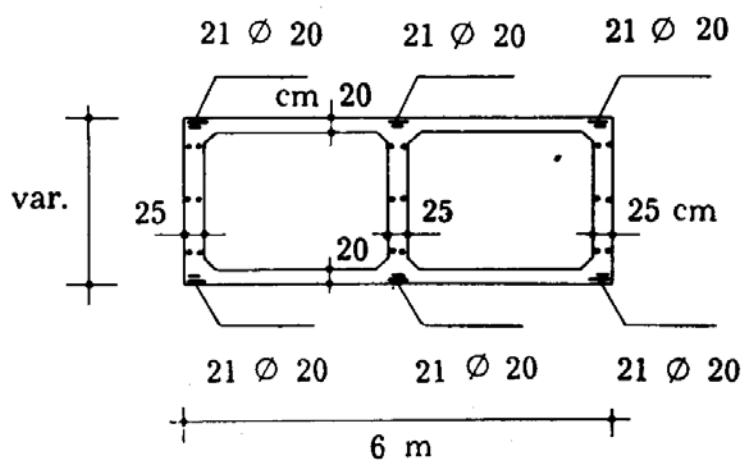
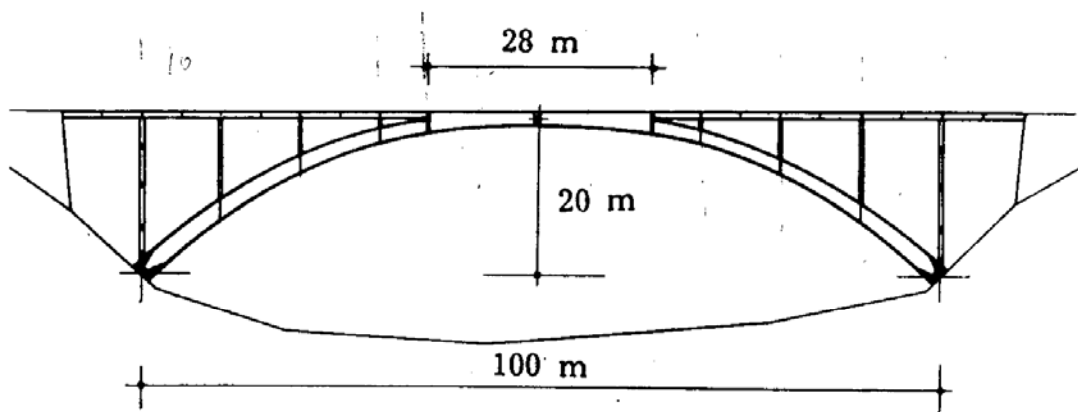


FIG. 4-31

x (m)	G_s (t)	G_a (t)
2,5		64
7,5		61
10	91	
12,5		58
17,5		55
20	84	
22,5		53
27,5		51
30	64	
32,5		49
36	24	
37,5		47
42,5		46
47,5		45

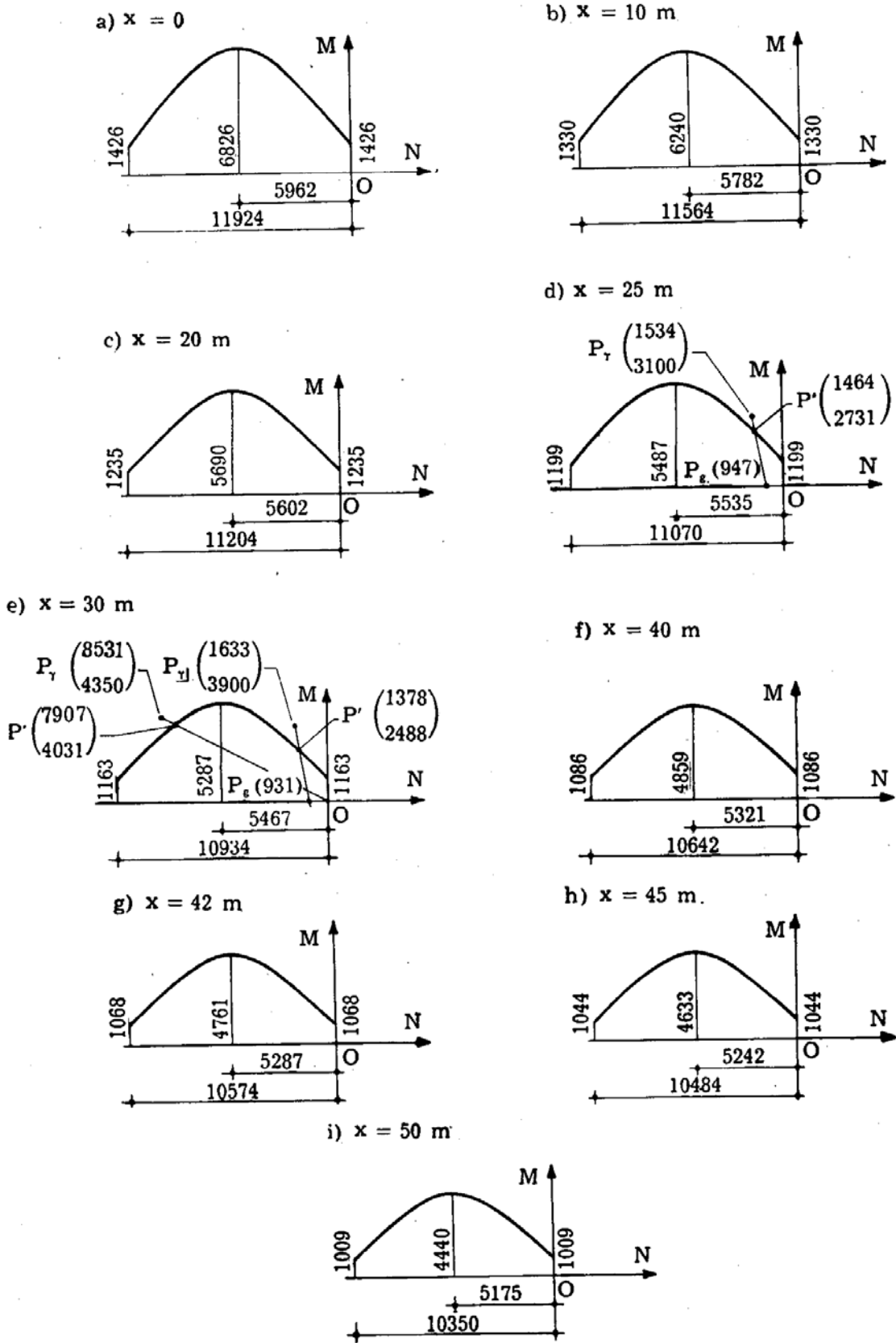


FIG. 4-32

a) Carico proporzionale.

Nel primo tentativo si fissano le cerniere plastiche alle imposte e nelle

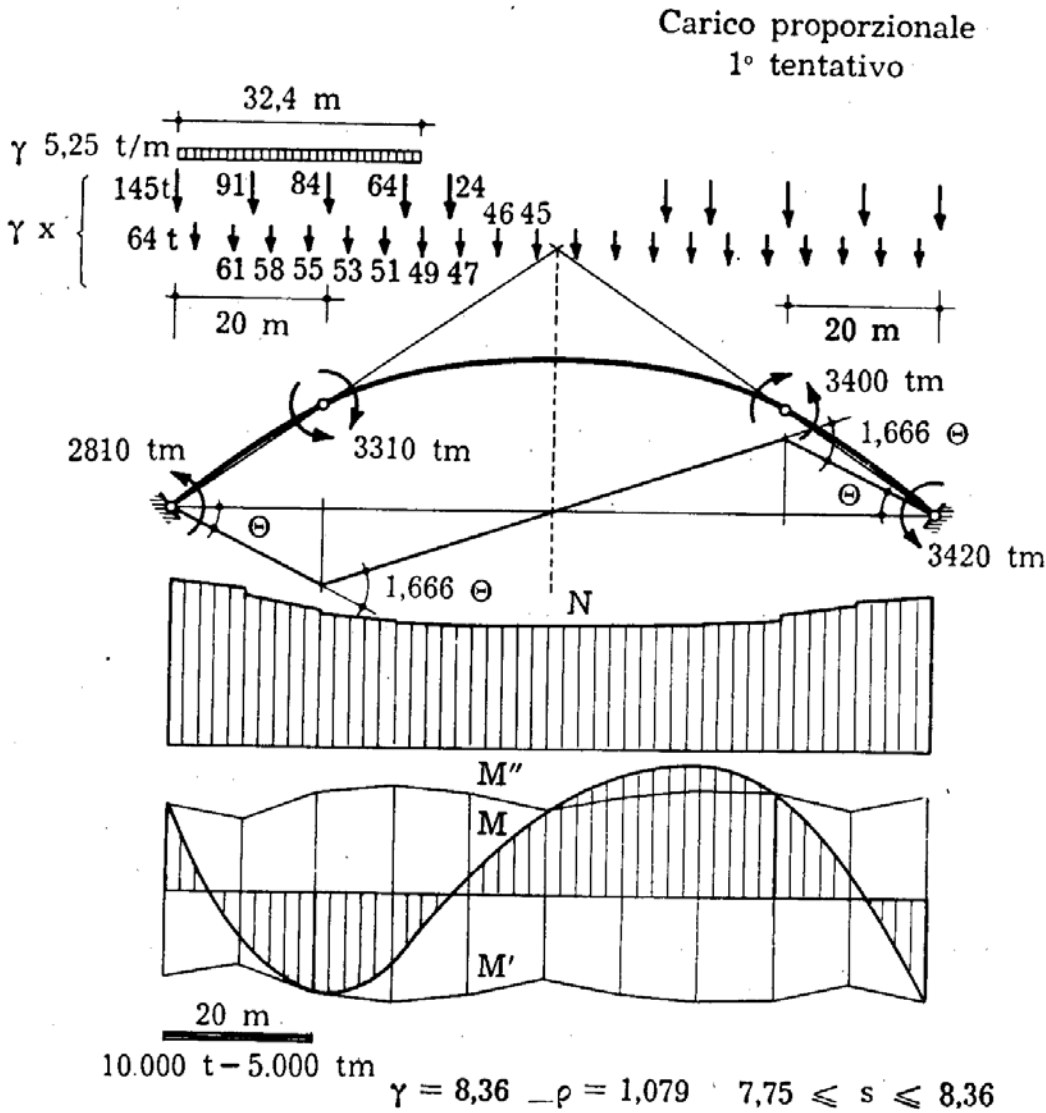


FIG. 4-33

sezioni di ascisse 20 m e 80 m (fig. 4-33). La (4-6), che nel caso in esame si scrive ($L_g = 0$)

$$\gamma = - \frac{\sum M_i \Delta\varphi_i}{L_a}$$

numericamente fornisce

$$= \frac{- M_1 + 1,666 M_2 - 1,666 M_3 + M_4}{5,25 \cdot 396,6} \quad (s)$$

e cioè

$$\gamma = 10^{-3} (-0,48 M_1 + 0,8 M_2 - 0,8 M_3 + 0,4 M_4)$$

dove gli M sono espressi in tm.

Il sistema (4-7) si scrive

$$N_1 = 0,596 M_1 - 1,050 M_2 + 1,103 M_3 - 0,649 M_4$$

$$N_2 = 0,498 M_1 - 0,843 M_2 + 0,906 M_3 - 0,561 M_4$$

$$N_3 = 0,486 M_1 - 0,840 M_2 + 0,902 M_3 - 0,550 M_4$$

$$N_4 = 0,546 M_1 - 0,988 M_2 + 1,041 M_3 - 0,559 M_4$$

dove N sono espressi in t ed M in tm.

Si parte dai valori $N^{(1)}$ pari agli sforzi normali provocati da $g + a$ sull'arco a tre cerniere, moltiplicati per 6; essi sono forniti dalla tabella che segue

Sez.	N_g (t)	N_a (t)	$N^{(1)}$ (t)
1	- 1188	- 117,3	- 7082
2	- 1002	- 85,9	- 6648
3	- 1002	- 79,2	- 6607
4	- 1188	- 64,1	- 7512

La risoluzione per iterazione porta ai valori di M

$$M_1 = - 2810 \text{ tm}$$

$$M_2 = 3310 \text{ tm}$$

$$M_3 = - 3400 \text{ tm}$$

$$M_4 = 3420 \text{ tm} .$$

(t)

Si osservi che il procedimento fornisce fin dalla prima iterazione valori molto prossimi al vero, come si rileva dalla seguente tabella

Sez.	1	2	3	4	5
N_1 (t)	- 7082	- 19462	- 11249	- 10968	- 11127
N_2 (t)	- 6648	- 16107	- 9308	- 9070	- 9196
N_3 (t)	- 6607	- 15297	- 9206	- 8964	- 9100
N_4 (t)	- 7512	- 18167	- 10654	- 10250	- 10398
M_1 (tm)	- 6025	- 3212	- 3012	- 2925	- 2810
M_2 (tm)	5450	3200	3250	3300	3310
M_3 (tm)	- 5487	- 3225	- 3250	- 3360	- 3400
M_4 (tm)	5312	3725	3400	3410	3420

I valori (t) sostituiti in (s) forniscono

$$\gamma = 8,36 .$$

Si disegnano (fig. 4-33) i diagrammi di N , dei momenti limiti M' ed M'' , e dei momenti M . In una zona molto estesa è $|M| > |M''|$; la sezione dove si verifica il più alto rapporto $\frac{OP_\gamma}{OP'}$ è quella all'ascissa 70 m, ove si verifica

$$\rho = 1,079 .$$

Si può quindi scrivere

$$7,75 \leq s \leq 8,36 . \quad (u)$$

Per restringere l'intervallo (u) si effettua un secondo tentativo, spostando la terza cerniera all'ascissa 70 m (fig. 4-34).

Il sistema (4-7) si scrive

$$N_1 = 0,640 M_1 - 1,149 M_2 + 0,954 M_3 - 0,444 M_4$$

$$N_2 = 0,513 M_1 - 0,925 M_2 + 0,784 M_3 - 0,368 M_4$$

$$N_3 = 0,463 M_1 - 0,868 M_2 + 0,734 M_3 - 0,340 M_4$$

$$N_4 = 0,589 M_1 - 1,082 M_2 + 0,901 M_3 - 0,407 M_4 .$$

La soluzione per iterazione porta ai valori

$$M_1 = - 3100 \text{ tm}$$

$$M_2 = 3525 \text{ tm}$$

$$M_3 = - 3550 \text{ tm}$$

$$M_4 = 3550 \text{ tm}$$

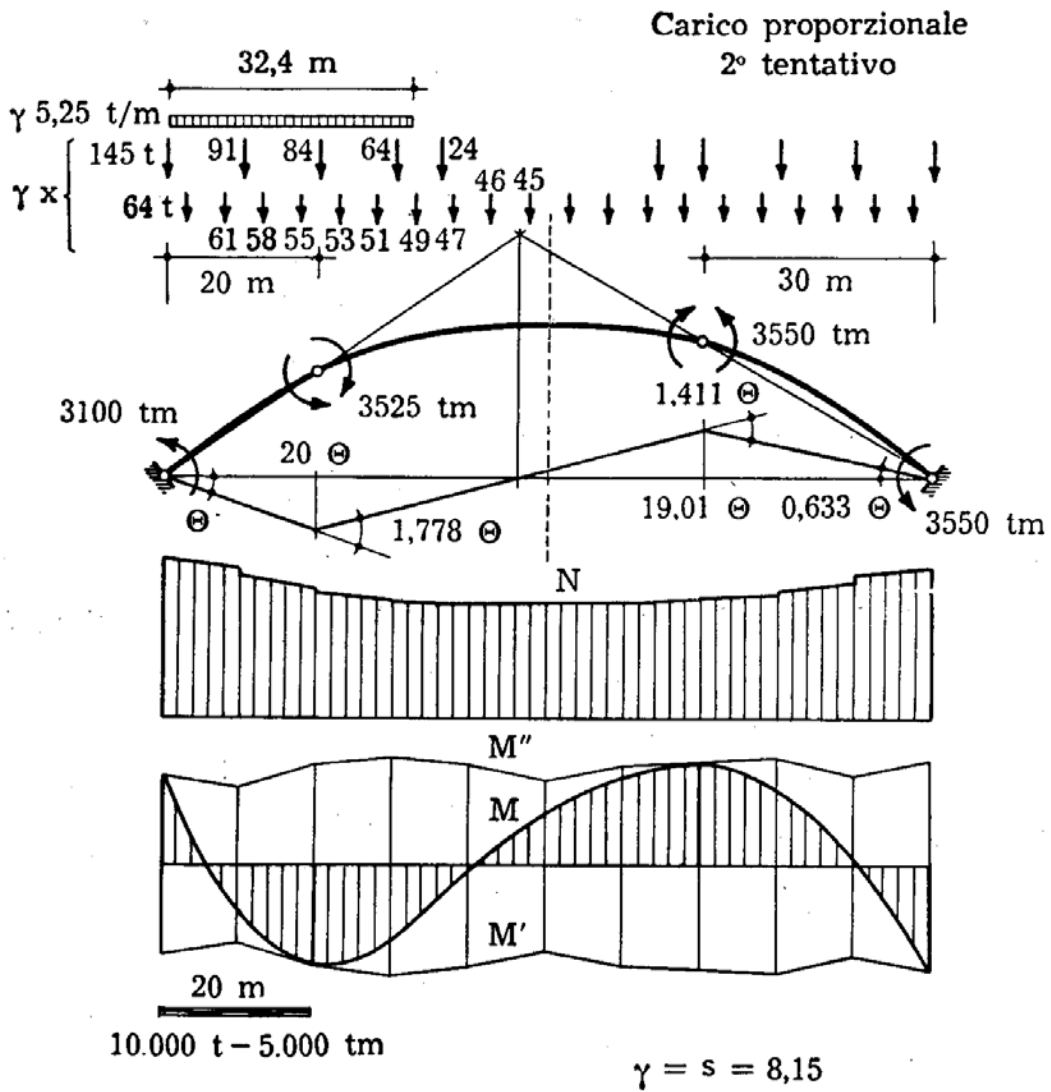


FIG. 4-34

e dalla (s)

$$\gamma = 8,15 .$$

Dai diagrammi M' M'' M si osserva (fig. 4-34) che è

$$s = 8,15 .$$

b) Carico non proporzionale.

Nel primo tentativo la posizione delle cerniere è ancora quella del primo tentativo precedente (fig. 4-35).

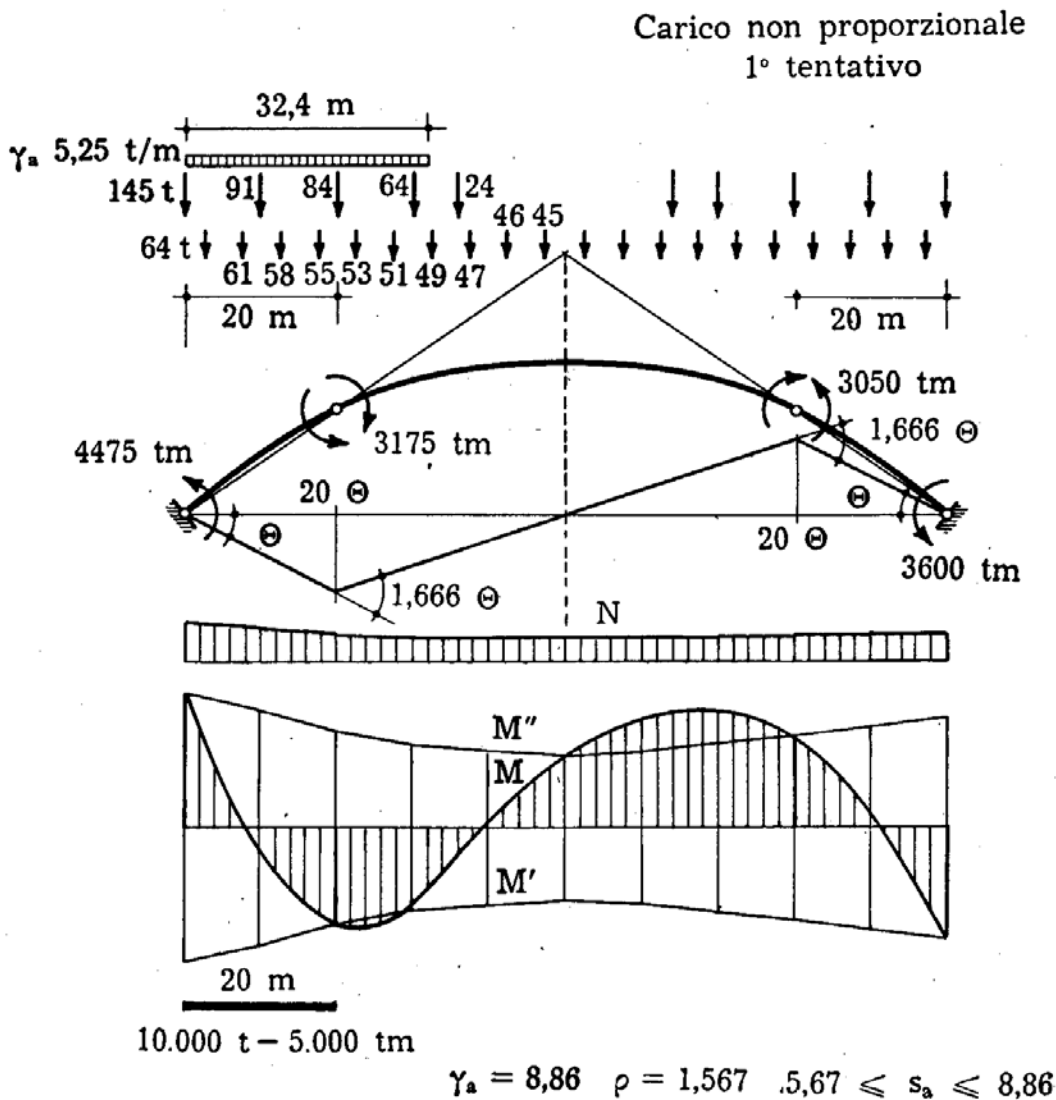


FIG. 4-35

Il sistema (4-7) si scrive

$$N_1 = -1188 + 0,055 M_1 - 0,099 M_2 + 0,152 M_3 - 0,108 M_4$$

$$N_2 = -1002 + 0,017 M_1 - 0,042 M_2 + 0,105 M_3 - 0,080 M_4$$

$$N_3 = -1002 + 0,006 M_1 - 0,038 M_2 + 0,101 M_3 - 0,068 M_4$$

$$N_4 = -1188 + 0,006 M_1 - 0,038 M_2 + 0,091 M_3 - 0,058 M_4 ;$$

la soluzione è

$$M_1 = - 4475 \text{ tm}$$

$$M_2 = 3175 \text{ tm}$$

$$M_3 = - 3050 \text{ tm}$$

$$M_4 = 3600 \text{ tm} .$$

L'espressione di γ_a è sempre la (s), poichè $L_g = 0$; essa fornisce

$$\gamma_a = 8,86 .$$

Nella fig. 4-35 sono riportati i diagrammi di N, M', M'' ed M; il valore più elevato del rapporto $\frac{P_g P_r}{P_g P'}$ si riscontra ancora all'ascissa 70 m, ove si ha

$$\rho = 1,57 .$$

Si può quindi scrivere

$$5,67 \leq s_a \leq 8,86 .$$

Il secondo tentativo si effettua sullo schema della fig. 4-36, dove la terza cerniera è spostata all'ascissa 70 m. Il sistema (4-7) diviene

$$N_1 = - 1188 + 0,057 M_1 - 0,113 M_2 + 0,132 M_3 - 0,076 M_4$$

$$N_2 = - 1002 + 0,022 M_1 - 0,051 M_2 + 0,090 M_3 - 0,076 M_4$$

$$N_3 = - 931 + 0,007 M_1 - 0,046 M_2 + 0,090 M_3 - 0,051 M_4$$

$$N_4 = - 1188 + 0,007 M_1 - 0,046 M_2 + 0,079 M_3 - 0,039 M_4$$

che porge

$$M_1 = - 4250 \text{ tm}$$

$$M_2 = 2975 \text{ tm}$$

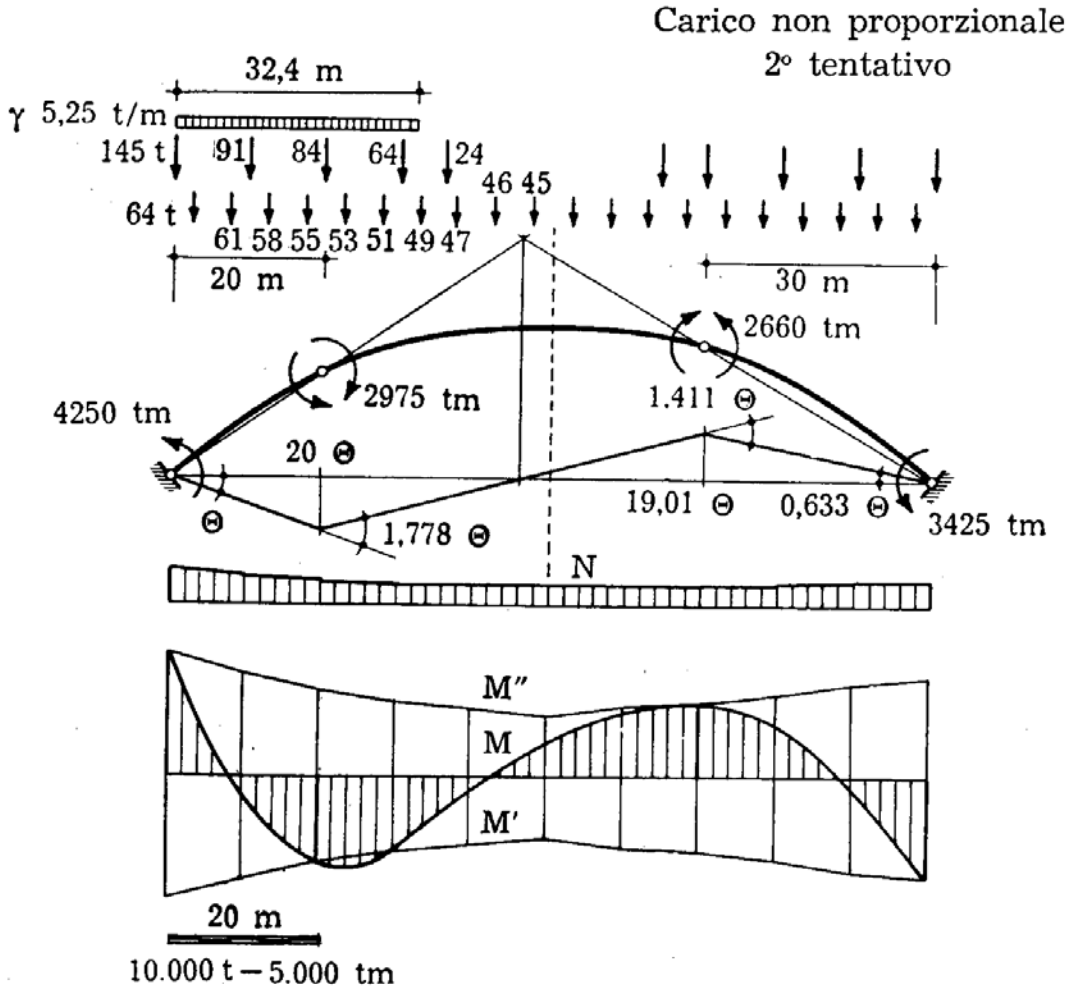
$$M_3 = - 2660 \text{ tm}$$

$$M_4 = 3425 \text{ tm} ;$$

ne deriva

$$\gamma_a = 7,58 .$$

Il maggior rapporto $\frac{P_g P_r}{P_g P'}$ si verifica all'ascissa 25 m, dove si ha $\rho = 1,13$.



$$\gamma_a = 7,58 \quad \rho = 1,135 \quad 6,68 \leq S_a \leq 7,58$$

FIG. 4-36

Si può scrivere quindi

$$6,68 \leq s_a \leq 7,58 ,$$

intervallo abbastanza ristretto per le esigenze della tecnica.

10. Una variante del procedimento già esposto.

Una bella variante al procedimento ora illustrato è stata ultimamente proposta dall'Adriani; essa consente di evitare il calcolo dei valori N ed M soddisfacenti nello stesso tempo le (4-7) e le condizioni di plasticizzazione.