

## CAPITOLO II

### IL CALCOLO A ROTTURA DELLE TRAVATURE RETICOLARI

#### 1. Il procedimento pedissequo.

Le travature reticolari a nodi cerniera sono l'esempio più elementare che si possa porgere in tema di calcolo a rottura, poichè in esse il regime statico è rigorosamente manoassiale; ciò non toglie che alcune circostanze ingenerino nel calcolatore dubbi di non breve portata. L'allungamento massimo che un'asta può sopportare senza spezzarsi, infatti, non è, come già fatto notare, quello relativo al provino regolamentare, e tanto meno può assumersi pari a quello della prova di piegamento, che riflette bene il fatto flessionale, ma non quello in esame; nell'asta snervata a trazione si ha infatti un fenomeno di strizione, del tutto analogo a quello del provino regolamentare, e occorre fare riferimento a questo fenomeno nel valutare il massimo allontanamento degli estremi che l'asta può tollerare. Entra in gioco in ciò la forma della sezione, oltre al rapporto tra le dimensioni longitudinale e trasversale dell'asta, e solo accurate e numerose prove sperimentali potranno consentire una parola definitiva in merito.

Per lo meno però si può con tranquillità accettare il valore  $\sigma'_0$  A come sforzo normale limite  $N'_0$  alla trazione, ove  $\sigma'_0$  è la tensione limite a trazione, ed A l'area della sezione retta. A compressione invece non può in rigore assumersi  $\sigma''_0$  A come valore dello sforzo normale limite  $N''_0$  alla compressione, ove  $\sigma''_0$  è la tensione limite a compressione, ottenuta, come è noto, operando su provino tozzo; infatti  $N''_0$  è il limite a cui tende lo sforzo di crisi quando la snellezza tende a zero, ma in realtà la crisi si ha sempre per perdita di stabilità dell'equilibrio (elastico o elasto-plastico, a seconda del valore della snellezza), e quindi per un valore  $N_{cr}$  sempre inferiore in valore assoluto ad  $N''_0$ .

E' in ogni caso però lecito considerare un diagramma sforzi-accorciamenti idealmente elasto-plastico poichè almeno nell'ambito dei piccoli spostamenti e della teoria di V. Kármán, si verificano accorciamenti di qualsiasi entità sotto lo sforzo  $N_{cr}$  (basta pensare che N non supera il valore di  $N_{cr}$ ) (\*).

---

(\*) Secondo studi del Britvec il diagramma carico assiale-accorciamento, inten-

Si fa in genere l'ipotesi che tutti i carichi applicati crescano conservando inalterati i mutui rapporti, in modo che una qualsiasi situazione di carico è definita dal valore di un solo parametro  $k$  (moltiplicatore dei carichi, preso in genere con riferimento alla situazione di esercizio, talchè in tale situazione sia  $k = 1$ ); a volte si suppone invece che una parte dei carichi, in genere il peso permanente, sia inalterato, e che crescano secondo un comune moltiplicatore  $k_a$  soltanto i carichi accidentali. Nel primo caso si perviene al cosiddetto *coefficiente di sicurezza a rottura  $s$  per carichi proporzionali*, nel secondo al *coefficiente di sicurezza a rottura  $s_a$  per carichi non proporzionali*. I due coefficienti hanno uguale importanza, ma diverso significato; il primo non riflette una possibilità reale, ma definisce la sicurezza nei riguardi degli errori di calcolo e di esecuzione; il secondo invece fornisce l'effettivo margine di sicurezza della struttura nei riguardi del sovraccarico. Si vada alla ricerca del valore di  $s$  per una struttura reticolare iperstatica (fig. 2-1 a); il caso della struttura isosta-

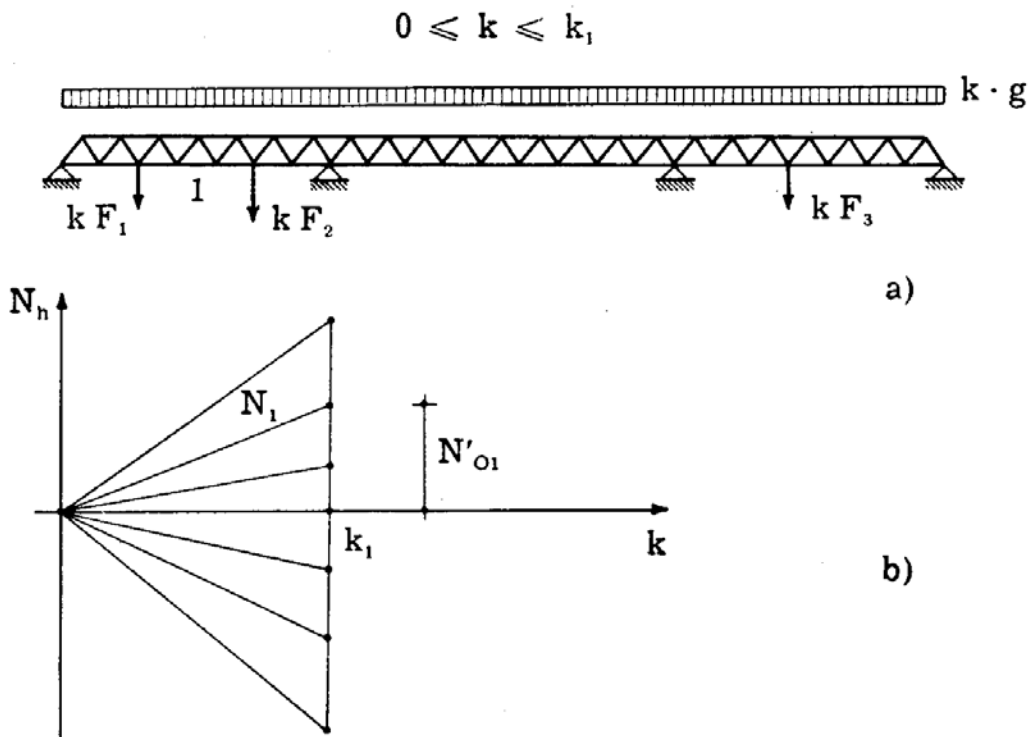


FIG. 2-1

dendo per accorciamento quello connesso con gli spostamenti trasversali, parte dell'asse delle ordinate (carichi) con una tangente non parallela all'asse delle ascisse (accorciamenti); confondere la tangente con la parallela fa operare però in condizioni di maggior sicurezza, poichè la derivata carichi-accorciamenti è positiva (S. J. BRITVEC - Post-Buckling Behaviour of Frames - Ph. D. Dissertation, Cambridge University, 1960).

tica è di immediata soluzione, perchè in essa il coefficiente  $s$  è il più basso dei rapporti  $N_{oh}/N_h$  calcolati per tutte le aste, ove  $N_h$  è lo sforzo di esercizio nell'asta generica, ed  $N_{oh}$  lo sforzo limite dello stesso segno di  $N_h$ .

Il procedimento più spontaneo è il seguente. Si calcolano gli sforzi  $N_h$  di esercizio; la relazione tra il generico  $N_h$  e  $k$  è lineare omogenea nel campo  $0 \leq k \leq k_1$  (fig. 2-1 b), ove  $k_1$  è il valore di  $k$  per cui in una prima asta (asta 1) si attinge il valore limite  $N'_{o1}$  dello sforzo assiale. Il periodo elastico è limitato al campo  $0 \leq k \leq k_1$ ; per  $k > k_1$  l'asta 1 è soggetta allo sforzo  $N'_{o1}$ , invariabile al variare di  $k$ , mentre nelle altre aste gli sforzi  $N_h$  si calcolano in fase elastica sulla struttura della fig. 2-2 a; il diagramma  $k N_h$  è ancora lineare, ma la retta corrispondente ha una pendenza diversa da quella valida per  $k \leq k_1$ , e quindi non passa più per l'origine (fig. 2-2 b).

La struttura della fig. 2-2 a e il diagramma della fig. 2-2 b sono da considerare finchè  $k$  raggiunge il valore  $k_2$  per cui in una seconda asta (asta 2)

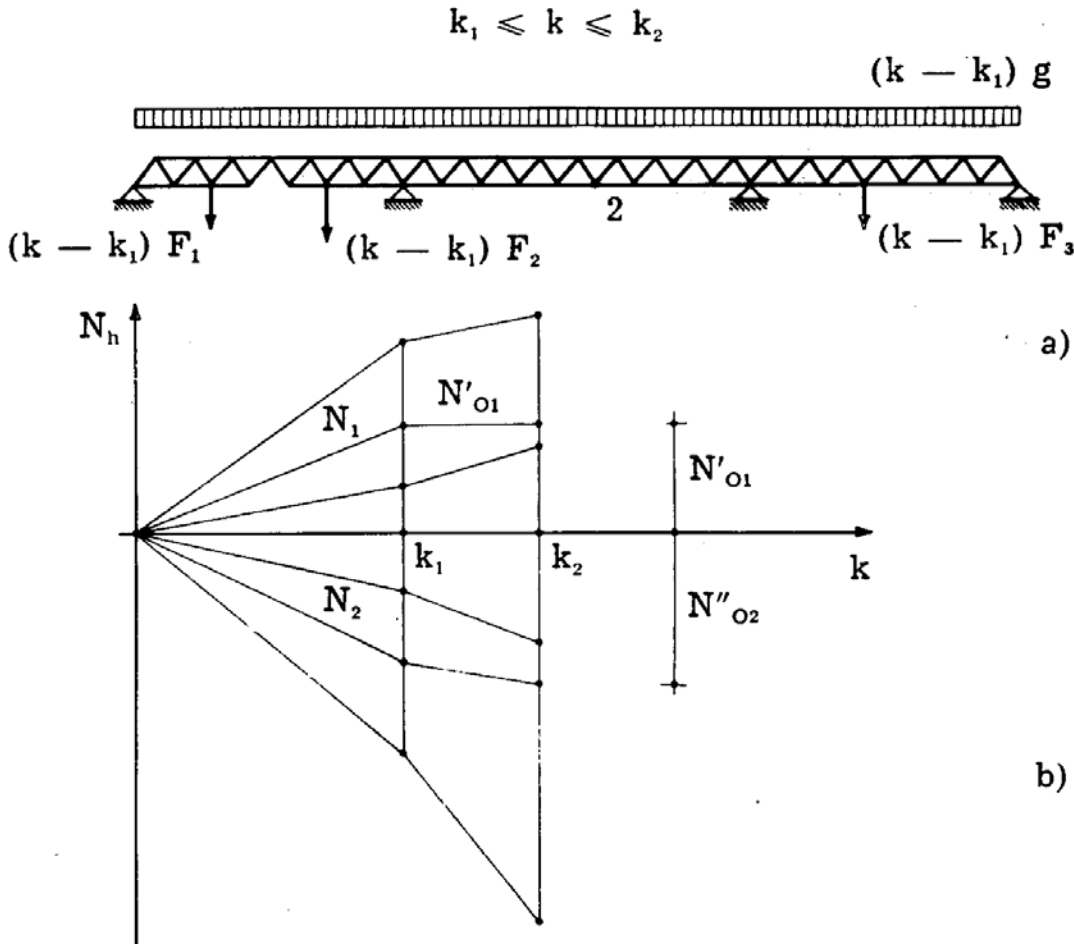


FIG. 2-2

si verifica lo sforzo limite  $N''_{o2}$ . Per  $k > k_2$  l'asta 1 è soggetta allo sforzo  $N'_{o1}$  e l'asta 2 allo sforzo  $N''_{o2}$ , invariabili con  $k$ ; gli sforzi  $N_h$  si calcolano, an-

cora in fase elastica, sulla struttura della fig. 2-3 a, ed i diagrammi  $k N_h$  sono forniti dalla fig. 2-3 b. Il valore massimo  $k_3$  che  $k$  può assumere

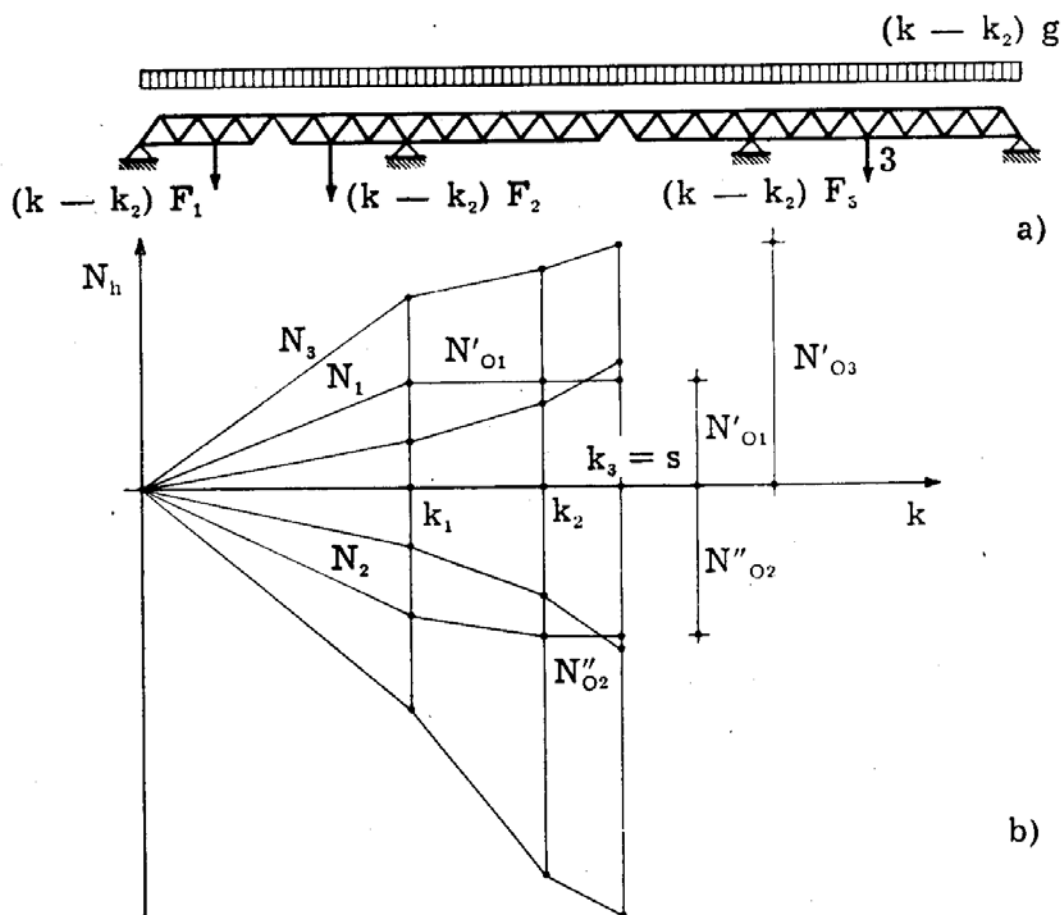
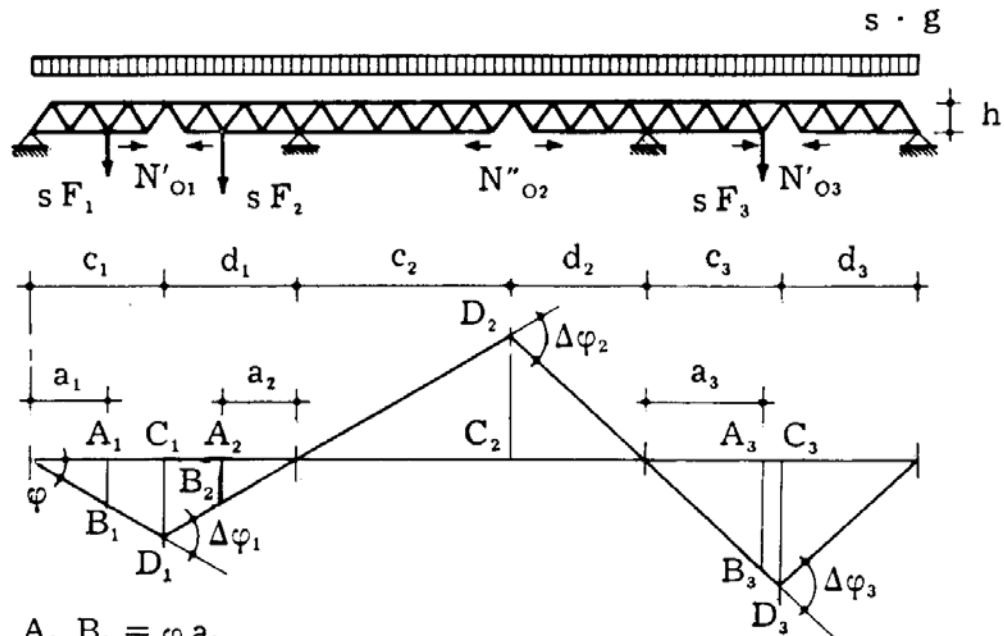


FIG. 2-3

è quello per cui in una terza asta (asta 3) si raggiunge lo sforzo limite  $N'_{03}$ . La struttura è così divenuta labile (fig. 2-4), e non può sopportare ulteriori aumenti di carico;  $k_3$  è il coefficiente  $s$  di sicurezza. Si avverte che, a partire dal valore  $k_2$  di  $k$  per cui si snerva il secondo elemento, può darsi che le forze  $(k - k_2) F$  inducano, sulla struttura della fig. 2-3 a, uno spostamento relativo fra gli estremi dell'asta 1 di verso contrario a quello corrispondente al segno di  $N_{01}$ ; in tal caso l'asta 1 ritorna in fase elastica, e la struttura da considerare non è più quindi quella della fig. 2-3 a, ma quella in cui la sola asta 2 è soppressa. Il ritorno in fase elastica è però poco frequente nelle costruzioni correnti, e comunque interessa solo nel procedimento che si sta esponendo. Questo procedimento, detto dagli anglosassoni « *step by step* », segue la struttura nel successivo formarsi degli elementi snervati; esso, di estrema spontaneità, si riduce al calcolo in fase elastica di tante strutture il cui grado di iperstaticità diminuisce ogni volta di un'unità, fino ad annullarsi. Operando come sopra, si può con-

trollare — sotto le riserve già avanzate — se in realtà le deformazioni plastiche sono tali da essere sopportate dal materiale; infatti gli spostamenti relativi degli estremi delle aste plasticizzate si calcolano in fase elastica



$$A_1 B_1 = \varphi a_1$$

$$C_1 D_1 = \varphi c_1$$

$$A_2 B_2 = \varphi \frac{c_1}{d_1} a_2$$

$$C_2 D_2 = \varphi \frac{c_1}{d_1} c_2$$

$$A_3 B_3 = \varphi \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} a_3$$

$$C_3 D_3 = \varphi \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} c_3$$

$$\Delta\varphi_1 = \varphi \left(1 + \frac{c_1}{d_1}\right)$$

$$\Delta\varphi_2 = \varphi \frac{c_1}{d_1} \left(1 + \frac{c_2}{d_2}\right)$$

$$\Delta\varphi_3 = \varphi \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} \left(1 + \frac{c_3}{d_3}\right)$$

$$s = \frac{N'_{o1} \left(1 + \frac{c_1}{d_1}\right) h + N''_{o2} \frac{c_1}{d_1} \left(1 + \frac{c_2}{d_2}\right) h + N'_{o3} \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} \left(1 + \frac{c_3}{d_3}\right) h}{F_1 a_1 + F_2 \frac{c_1}{d_1} a_2 + F_3 \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} a_3 + g \left[ c_1 (c_1 + d_1) - \frac{c_1}{d_1} c_2 (c_2 + d_2) + \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} c_3 (c_3 + d_3) \right]}$$

FIG. 2-4

sugli stessi schemi strutturali ad iperstaticità ridotta che sono a base del calcolo degli snervamenti successivi.

## 2. Il procedimento al limite di rottura.

Se si conoscono le aste plasticizzate all'atto del crollo, e non interessano i valori degli allungamenti plastici massimi, si può pervenire immediatamente al valore del coefficiente di sicurezza  $s$  esprimendo la condizione che la struttura una volta labile presente all'atto del crollo sia in equilibrio sotto le forze applicate  $sF$  e gli sforzi limiti intesi come forze applicate alla struttura; tale infatti è la situazione che immediatamente precede il crollo. Esprimendo tutti gli spostamenti in funzione dell'angolo di rotazione  $\varphi$  del primo elemento (fig. 2-4), il principio dei lavori virtuali permette di scrivere.

$$\begin{aligned}
 & s F_1 \varphi a_1 + s F_2 \frac{c_1}{d_1} a_2 + s F_3 \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} a_3 + \\
 & + s g \left[ \varphi c_1 (c_1 + d_1) - \varphi \frac{c_1}{d_1} c_2 (c_2 + d_2) + \varphi \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} c_3 (c_3 + d_3) \right] - \\
 & - N'_{o1} \varphi \left( 1 + \frac{c_1}{d_1} \right) h - N''_{o2} \frac{c_1}{d_1} \varphi \left( 1 + \frac{c_2}{d_2} \right) h - N'_{o3} \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} \left( 1 + \frac{c_3}{d_3} \right) h = 0
 \end{aligned}$$

da cui si trae

$$s = \frac{N'_{o1} \left( 1 + \frac{c_1}{d_1} \right) h + N''_{o2} \frac{c_1}{d_1} \left( 1 + \frac{c_2}{d_2} \right) h + N'_{o3} \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} \left( 1 + \frac{c_3}{d_3} \right) h}{F_1 a_1 + F_2 \frac{c_1}{d_1} a_2 + F_3 \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} a_3 + g \left[ c_1 (c_1 + d_1) - \frac{c_1}{d_1} c_2 (c_2 + d_2) + \frac{c_1 c_2}{d_1 d_2} c_3 (c_3 + d_3) \right]}$$

L'uso del principio dei lavori virtuali è nel caso in esame particolarmente conveniente, poichè esiste un'unica incognita. Il procedimento esposto, che mette a fuoco la struttura all'atto del collasso, non preoccupandosi di tutto quanto precede questo stadio, si chiama *procedimento al limite di rottura* o, con termine inglese, « *limit design* ». Esso evita qualsiasi calcolo in fase elastica, ed è perciò estremamente più rapido del procedimento « *step by step* »; inoltre, come si mostrerà nel capitolo seguente, permette il calcolo delle deformazioni permanenti massime. Si esige però la conoscenza preventiva degli elementi plasticizzati all'atto della crisi. Questa difficoltà si supera attraverso il teorema fondamentale del calcolo a rottura (Franciosi 1955), sintesi dei due teoremi di Greenberg e Prager (1949) e di Feinberg (1948).

### 3. Il teorema fondamentale del calcolo a rottura; definizione dei coefficienti staticamente ammissibile e cinematicamente sufficiente.

Un numero  $\psi$  si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* delle forze applicate  $F$ , se esiste un insieme di iperstatiche che assieme alle forze  $\psi F$  dia luogo ad un sistema di sforzi normali  $N_{\psi h}$  ovunque rispettanti la condizione

$$N''_{oh} \leq N_{\psi h} \leq N'_{oh} \quad (a)$$

Un numero  $\gamma$  si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* delle forze applicate  $F$  se vien fuori come coefficiente di sicurezza da una arbitraria scelta delle aste plasticizzate (\*). Il teorema fondamentale assicura che, dati un generico  $\psi$  ed un generico  $\gamma$ , è sempre il primo non maggiore del secondo:

$$\psi \leq \gamma \quad (1)$$

Si supponga il contrario della (2-1), e cioè che esista un  $\psi$  maggiore di un  $\gamma$ ; con riferimento alla deformata utilizzata per il calcolo di  $\gamma$  si ha

$$\gamma L_F + L_N = 0 \quad (b)$$

dove  $L_F$  è il lavoro delle forze applicate  $F_i$ , ed  $L_N$  il lavoro svolto dalle forze  $N_{oi}$ .

Per definizione, esiste un insieme di sforzi interni  $N_{\psi h}$  provocato sulla struttura resa isostatica dalle forze  $\psi F$  e da un qualunque insieme di

(\*) Per ottenere un  $\psi$  si possono calcolare gli sforzi normali  $N_h$  provocati sulla struttura isostatica dalle forze  $kF$  e da un qualunque insieme di reazioni iperstatiche, ed effettuare per ogni asta il rapporto tra  $N_h$  e lo sforzo limite dello stesso segno; se  $\rho$  è il più grande di questi rapporti, si riconosce che  $k/\rho$  è un  $\psi$ .

Per ottenere un  $\gamma$  si sceglie un insieme di  $i$  aste tali che la loro soppressione renda una volta labile l'intera struttura, o una sua parte; si considera lo spostamento virtuale di segno tale che per esso il lavoro totale delle forze applicate sia positivo; si applicano sulla struttura in corrispondenza degli estremi di ogni asta soppressa due forze uguali e contrarie, pari allo sforzo normale limite  $N'_{oi}$  a trazione e convergenti se per effetto dello spostamento considerato i due estremi si allontanano, pari allo sforzo normale limite  $N''_{oi}$  a compressione e divergenti se i due estremi si avvicinano; si è così ricostruito quello che sarebbe il movimento di collasso imminente se la struttura si rompesse per la plasticizzazione delle aste prescelte, e la condizione di equilibrio

$$\gamma L_F + L_N = 0$$

fornisce  $\gamma$ . Si osservi che  $L_F$ , lavoro delle  $F$ , è positivo,  $L_N$ , lavoro delle  $N_{oi}$ , è negativo, e perciò  $\gamma$  è positivo.

iperstatiche (un insieme di sforzi, cioè, *compatibile* con le forze  $\phi F$ ) e ovunque rispettante la condizione (a); la stessa struttura una volta presa in considerazione per il calcolo di  $\gamma$  è in equilibrio perciò anche sotto le forze applicate  $\phi F$  ed  $N_{\psi_i}$ , dove  $N_{\psi_i}$  sono i valori che gli  $N_{\psi_h}$  assumono in corrispondenza delle aste supposte plasticizzate nel calcolo di  $\gamma$ . Ancora il principio dei lavori virtuali permette perciò di scrivere

$$\phi L_F + L_{\psi N} = 0 . \quad (c)$$

Dalle (b) e (c) si ha

$$(\gamma - \phi) L_F + L_N - L_{\psi N} = 0 ;$$

dall'ipotesi  $\phi > \gamma$  si trarrebbe quindi, poichè  $L_F > 0$ ,

$$L_N - L_{\psi N} > 0 . \quad (d)$$

La (d) può anche scriversi

$$\sum_i (N_{oi} - N_{\psi_i}) \Delta \ell_i > 0 \quad (e)$$

dove  $i$  è la generica delle aste considerate plasticizzate per il calcolo di  $\gamma$ , e  $\Delta \ell_i$  lo spostamento relativo fra gli estremi congiunti dall'asta  $i$ -esima nello spostamento virtuale con cui si sono scritte le (b) e (c), considerato positivo se gli estremi si avvicinano.

Si consideri il generico termine della (e): se è  $N_{oi} = N'_{oi}$ , è  $\Delta \ell_i < 0$ . Infatti  $\Delta \ell_i$  è positivo se per esso compiono lavoro positivo le  $N$  positive agenti dall'asta  $i$  sulla struttura, e cioè se gli estremi congiunti dall'asta si avvicinano; e come spostamento virtuale si sceglie, come già detto, quello il cui segno corrisponde al primo movimento di collasso. Inoltre, se  $N_{oi} = N'_{oi}$  è anche  $N_{oi} \geq N_{\psi_i}$ ; quindi risulta

$$(N_{oi} - N_{\psi_i}) \Delta \ell_i \leq 0 .$$

Se è  $N_{oi} = N''_{oi}$ , è  $\Delta \ell_i > 0$ ,  $N_{oi} \leq N_{\psi_i}$ , e quindi ancora

$$(N_{oi} - N_{\psi_i}) \Delta \ell_i \leq 0 .$$

Poichè la somma di termini tutti nulli o negativi non può essere positiva, la (e) è un assurdo, e perciò non può essere  $\phi > \gamma$ . Poichè il coefficiente di sicurezza  $s$ , definito come quel moltiplicatore delle forze per cui la struttura o una sua parte diventano labili, è nello stesso tempo un  $\phi$  ed un  $\gamma$ , si può porre, dati un  $\phi$  ed un  $\gamma$  generici,

$$\phi \leq s \leq \gamma . \quad (2)$$



E cioè si può enunciare: « il coefficiente di sicurezza  $s$  è il più elevato dei moltiplicatori staticamente ammissibili, ed il più basso dei moltiplicatori cinematicamente sufficienti ».

Scaturisce dalla (2-2) un procedimento generale di notevole semplicità ed eleganza, dovuto a Prager e Greenberg (1949), che permette di definire al primo tentativo un intervallo in cui  $s$  è sicuramente compreso: ottenuto un  $\gamma$ , si calcolano gli sforzi normali  $N_h$  provocati dalle  $\gamma F$  e dalle  $N_{oi}$ , ed i rapporti tra ogni  $N_h$  ed il corrispondente sforzo normale limite dello stesso segno. Se  $\rho$  è il più elevato di questi rapporti, è facile riconoscere che  $\gamma/\rho$  è un  $\psi$ , e quindi può scriversi

$$\frac{\gamma}{\rho} \leq s \leq \gamma \quad (3)$$

Per restringere l'intervallo così ottenuto, giova nel secondo tentativo considerare plasticizzate le aste dove nel primo tentativo erano più elevati i rapporti  $N_h/N_{oh}$ .

Dalla (2-2) deriva il *teorema di unicità del coefficiente di sicurezza*. Se infatti esistessero due coefficienti di sicurezza diversi  $s_1$  ed  $s_2$ , e fosse  $s_1 > s_2$ , si avrebbe l'assurdo di un  $\psi$  maggiore di un  $\gamma$ , poichè  $s_1$  è un  $\psi$ , ed  $s_2$  è un  $\gamma$ .

Può darsi però che esista più di una configurazione di rottura, ognuna dipendente cioè da un diverso insieme di aste plasticizzate; a tutte, comunque, deve corrispondere lo stesso coefficiente di sicurezza.

Si pone in evidenza come passando dal calcolo elastico al calcolo a rottura le condizioni di equilibrio restino invariate, mentre le condizioni di congruenza cedono il posto a quelle cosiddette *di compatibilità*, espresse sinteticamente attraverso le (2-a).

#### 4. Il caso dei carichi non proporzionali.

Si è trattato nel paragrafo precedente il caso dei carichi proporzionali; la trattazione non muta se si va alla ricerca del coefficiente di sicurezza  $s_a$  per carichi non proporzionali. Il peso permanente  $g$  rimane inalterato, i carichi accidentali  $a$  variano conservando inalterati i mutui rapporti. In perfetta analogia con quanto già detto nel precedente paragrafo, un numero  $\psi_a$  si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* delle forze  $a$  se esiste almeno un insieme di iperstatiche che assieme alle forze  $g + \psi_a a$  dia luogo ad un insieme di sforzi normali  $N_h$  che ovunque rispettino la disuguaglianza (2-a). Un numero  $\gamma_a$  si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* delle forze  $a$  se vien fuori come coefficiente

di sicurezza da una scelta arbitraria delle aste plasticizzate; esso è fornito dalla relazione analoga alla (2-a)

$$L_g + \gamma_a L_a + L_N = 0 \quad (f)$$

ove  $L_g$ ,  $L_a$  ed  $L_N$  sono i lavori virtuali svolti dai carichi  $g$ ,  $a$  ed  $N_{oi}$ . La deformata si sceglie di segno corrispondente a quella di incipiente collasso. In tal caso è

$$\begin{aligned} L_N &< 0 \\ L_g + \gamma_a L_a &> 0 . \end{aligned}$$

E'  $L_a > 0$ , perchè il segno del lavoro del carico  $a$  è lo stesso nel momento precedente il collasso e in quello seguente. Inoltre è pure

$$L_g + L_N < 0 ,$$

perchè in caso contrario sarebbe

$$\gamma_g = - \frac{L_N}{L_g} < 1$$

Risulta in tal modo

$$\gamma_a = - \frac{L_N + L_g}{L_a}$$

maggiore di zero.

Anche nel caso in esame può dirsi che, dati un generico  $\psi_a$  ed un generico  $\gamma_a$ , è sempre

$$\psi_a \leq \gamma_a . \quad (4)$$

Si supponga infatti che sia  $\psi_a > \gamma_a$ ; dalla (2-f) e dalla

$$L_g + \psi_a L_a + L_{\psi N} = 0 \quad (g)$$

si trae

$$(\gamma_a - \psi_a) L_a + L_N - L_{\psi N} = 0$$

da cui

$$L_N - L_{\psi N} > 0 ,$$

proposizione assurda come la (2-d).

Dalla (2-4) deriva l'altra, analoga alla (2-2),

$$\psi_a \leq s_a \leq \gamma_a . \quad (5)$$

Ottenuto un  $\gamma_a$  da una qualsiasi scelta di aste plasticizzate, si calcolano gli sforzi normali  $N_h$  provocati da  $g + \gamma_a a$ , e dalle  $N_{oi}$ . Si fissa poi un qualsiasi insieme di sforzi  $N_{gh}$  compatibili con  $g$ , e cioè provocato sulla struttura isostatica da  $g$  e da un qualunque insieme di reazioni ipersta-

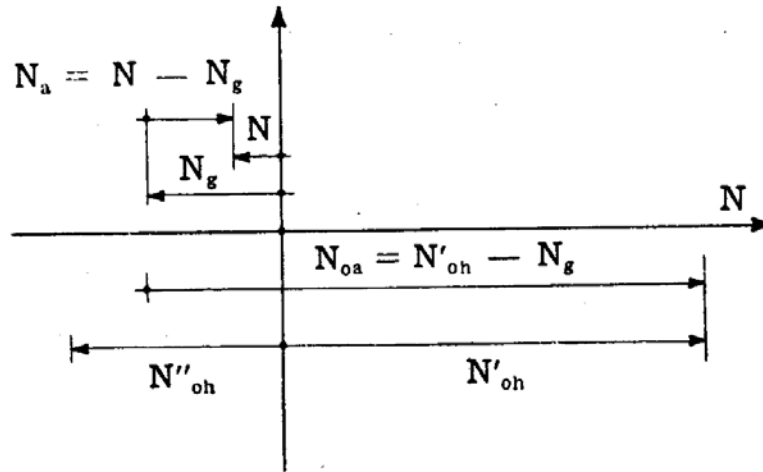


FIG. 2-5

tiche; restano così definiti gli insiemi residui  $N_{ah} = N_h - N_{gh}$  ed  $N_{oah} = N_{oh} - N_{gh}$ , ove  $N_{oh}$  è dello stesso segno di  $N_{ah}$  (fig. 2-5). Si calcolano i rapporti  $N_{ah}/N_{oah}$ ; se  $\rho$  è il più elevato di tali rapporti, il numero  $\gamma_a/\rho$  è un  $\psi_a$ . Infatti gli sforzi

$$N_{gh} + \frac{\gamma_a}{\rho} N_{ah}$$

sono compatibili con le forze  $g + \frac{\gamma_a}{\rho} a$ , e ovunque risulta rispettata la

condizione

$$N''_{oh} \leq N_{gh} + \frac{\gamma_a}{\rho} N_{ah} \leq N'_{oh} \quad (h)$$

Può quindi scriversi

$$\frac{\gamma_a}{\rho} \leq s_a \leq \gamma_a \quad (6)$$

Il teorema di unicità rimane invariato.

### 5. Il collasso parziale.

L'esempio della fig. 2-4 è relativo ad una struttura che all'atto del collasso diviene labile nel suo complesso; è il caso del *collasso totale*. Sovente però la crisi avviene per plasticizzazione di un numero di aste che rende labile solo una parte della struttura, e cioè per *collasso parziale*.

Il teorema fondamentale dimostrato ai §§ 2-3 e 2-4 comprende anche il caso del collasso parziale; infatti il  $\gamma$ , o il  $\gamma_a$ , è calcolato per un insieme di aste che rendano labile l'intera struttura, o una sua parte.

Così pure il caso del collasso parziale è compreso nel teorema di unicità del coefficiente di sicurezza; si può essere pertanto sicuri che il coefficiente di sicurezza, calcolato per una certa condizione di carico e per collasso parziale, non può risultare superiore ad altro coefficiente di sicurezza calcolato per collasso totale.

E' necessaria soltanto una precisazione relativa al procedimento di Prager (§ 2-3) per il calcolo di un intervallo in cui il coefficiente di sicurezza sia compreso. Una volta ottenuto  $\gamma$ , gli sforzi normali  $N_h$  provocati dalle  $\gamma F$  e dalle  $N_{ol}$  sono in genere, nel caso del collasso parziale, univocamente determinati solo nella parte labilizzata; nel resto della struttura il calcolo delle  $N_h$  dipende dalla scelta delle incognite iperstatiche, che può essere fatta in maniera qualsiasi. Infatti si va alla ricerca di un  $\phi$ , e cioè di un insieme di sforzi interni che sia compatibile, e cioè in equilibrio, con le forze applicate  $\phi F$ , ma che non deve rispettare altre condizioni all'infuori di questa. Lo stesso vale per il caso del carico non proporzionale.

Un caso di collasso parziale che si presenta con frequenza è quello della fig. 2-6. Si calcola il  $\gamma$  supponendo plasticizzate a trazione le aste di corrente nelle sezioni C D E; la sola parte labilizzata è perciò la trave

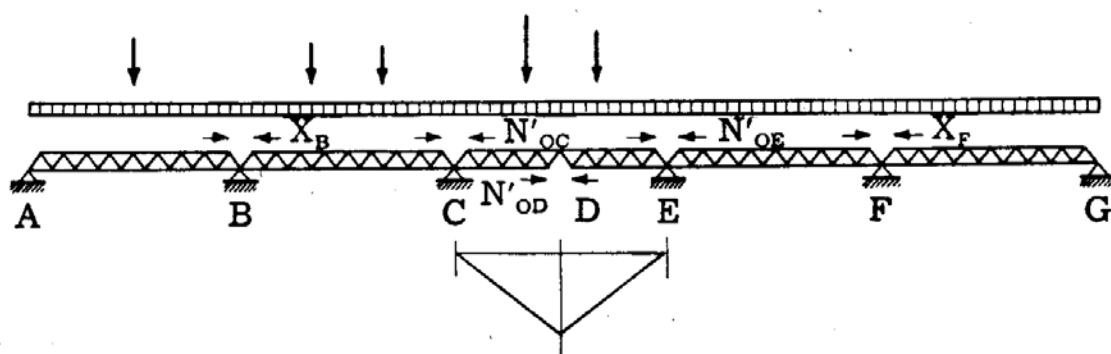


FIG. 2-6

CE, e nel calcolo del  $\gamma$  entrano in gioco soltanto le forze che su essa agiscono. Gli sforzi  $N_h$  connessi con le  $\gamma F$  e le  $N'_{OC}$ ,  $N'_{OD}$ ,  $N'_{OE}$  sono uni-

vocamente determinati nella sola trave CE; nella restante struttura infatti essi dipendono anche dai valori di  $X_B$  ed  $X_F$ , che possono essere scelti arbitrariamente.

Ad ogni coppia di  $X_B$  ed  $X_F$  corrisponde in genere un diverso  $\rho$ , e quindi un diverso limite inferiore  $\gamma/\rho$  della (2-3), o della (2-6).

#### **6. La ricerca del coefficiente di sicurezza in presenza di più condizioni di carichi e distorsioni comunque alternantisi sulla struttura.**

Altre critiche che si appuntano al procedimento di calcolo esposto sono le seguenti. Spesso una struttura è realizzata in tempi successivi, in modo che alcune parti del peso proprio non impegnano tutta la struttura finale, ma soltanto sue parti. Questo accade per esempio in un arco reticolare ove le aste dei correnti si montino in un primo momento con una sezione ridotta, facendo agire sull'arco così realizzato parte del peso proprio, e ciò sia per semplificare le operazioni di montaggio, sia per ridurre gli effetti dei primi cedimenti delle imposte. Altre volte il peso proprio agisce, tutto o in parte, sulla struttura isostatica, e questo allo scopo di annullare gli effetti dei primi cedimenti vincolari; per esempio nella trave della fig. 2-6 si può fare agire il peso proprio, tutto o in parte, in assenza delle aste del corrente superiore in B, C, E, F, che sono invece presenti per la restante parte del peso proprio (per esempio per la massicciata) e per il carico accidentale. Questi provvedimenti influiscono anche profondamente sullo stato tensionale del complesso, e sui valori dei carichi per i quali appaiono le prime deformazioni permanenti, ma ai lumi del calcolo a rottura non inducono alcuna variazione nel coefficiente di sicurezza; infatti i valori degli sforzi normali limiti sono delle costanti, e il quadro tensionale collegato con una certa scelta di aste plasticizzate che rendano labile in tutto o in parte la struttura non dipende dal procedimento di esecuzione della struttura stessa. Questo paradosso è però del tutto apparente; e l'invarianza del coefficiente di sicurezza rispetto alle modalità esecutive è confermata completamente dalle esperienze di B. N. Gorbounov (\*).

Si pone poi a carico del limit design un altro paradosso: i cedimenti vincolari, le variazioni termiche, il ritiro e in genere qualsiasi distorsione non influiscono sul valore del coefficiente di sicurezza relativo ai carichi applicati, ed anzi il coefficiente di sicurezza relativo alle sole distorsioni è infinitamente grande. Ciò deriva dal fatto che, plasticizzatesi delle aste in numero sufficiente a rendere la struttura isostatica, la struttura

---

(\*) A. R. Rjanitsyn - Calcul a la rupture. Dunod - Parigi 1959.

divenuta tale può sopportare qualsiasi incremento della distorsione senza incrementi di sollecitazione.

Una terza obiezione, avanzata in ispecie dai costruttori di ponti, è quella di non potere, in presenza di carichi mobili, fissare la condizione di carico cui corrisponde il più basso coefficiente di sicurezza; ciò è particolarmente grave nei casi in cui il carico è segmentabile, come accade nei manufatti stradali.

La terza critica ed anche, sia pure parzialmente, la seconda sono superate considerando la possibilità che diverse condizioni di carico non sovrapponibili e comunque alternantisi inducano plasticizzazioni successive, di segno, numero e ubicazione tali da corrispondere ad un meccanismo che impegni l'intera struttura o una sua parte, pur non essendo attinta da nessuna delle condizioni di carico la soglia di rottura per *collasso statico* (*static collapse*), intendendo come tale quello già studiato, relativo ad un unico insieme di carichi che crescano mantenendo inalterati i mutui rapporti. E' questo il cosiddetto *collasso da carichi ripetuti* o *collasso incrementale* (*incremental collapse*). La fondamentale differenza tra i due tipi di collasso è che il primo è di carattere istantaneo, e si verifica sotto una determinata situazione di carichi esterni, mentre il secondo deriva dal sommarsi di successivi atti di moto rigido, che alla fine portano a spostamenti intollerabili; ogni atto di moto rigido è corrispondente allo stesso meccanismo, ma in realtà non si verifica in ogni parte contemporaneamente, e quindi sotto una determinata condizione di carico, ma deriva a sua volta dal verificarsi di plasticizzazioni successive nelle  $i$  aste che danno luogo con la loro eliminazione al meccanismo in questione, plasticizzazioni provocate in ognuna delle  $i$  aste o in un gruppo di esse — generalmente non in tutte — da una delle condizioni di carico in gioco.

Un'altra possibilità che può darsi in presenza di sollecitazioni esterne comunque variabili è che in un'asta si attingano (successivamente) ambedue gli sforzi limiti  $N'_0$  ed  $N''_0$ ; il verificarsi di plasticizzazioni di segno opposto porta dopo brevi ripetizioni alla rottura localizzata (*collasso per plasticizzazione alternata*). L'effetto è simile a quello della fatica in campo elastico, ma mentre in quest'ultimo caso il numero dei cicli necessari per giungere alla crisi è dell'ordine delle migliaia o dei milioni, nel collasso per plasticizzazione alternata il numero dei cicli è dell'ordine delle decine o al massimo delle centinaia. In altre parole, in presenza di sollecitazioni esterne comunque variabili si dà luogo ad un concetto generalizzato di sicurezza nei riguardi della crisi: condizione necessaria e sufficiente perchè una struttura, soggetta a cicli comunque variabili e numerosi delle sollecitazioni esterne, entri in crisi è che il lavoro dissipato per deformazioni plastiche — calcolato nell'ipotesi della durata indefinita della struttura — cresca indefinitamente. Può perciò anche dirsi che condizione necessaria e sufficiente perchè una struttura soggetta a cicli

comunque variabili e numerosi delle sollecitazioni esterne, non entri in crisi è che il lavoro dissipato per deformazioni plastiche — calcolato nell'ipotesi della durata indefinita nella struttura — sia limitato. Ciò equivale ancora a dire che condizione necessaria e sufficiente per la sicurezza è che dopo un certo numero di cicli di carico non si verificino più deformazioni permanenti; il che significa che dopo un certo numero di cicli (che può anche essere infinito) è presente nella struttura non minacciata di crisi uno stato di coazione dovuto a deformazioni permanenti, non più variabile nel tempo, intorno al quale le tensioni oscillano in fase completamente elastica. Questo stato di coazione è detto *insieme residuo di stabilizzazione*; la struttura, pur presentando deformazioni permanenti, si adatta a quella situazione di carico, o, con termine dovuto al Prager, è in fase di *shake down*.

La crisi, e cioè l'aumento indefinito del lavoro dissipato per deformazioni plastiche, può aversi soltanto in uno dei due modi su esposti, che comprendono tutti i possibili casi di deformazioni plastiche che non inducano di per se deformazioni elastiche nella struttura (e cioè comprendono tutti i possibili casi di sistemi atensionali di distorsioni). Infatti la nuova definizione di crisi implica non la rottura, intesa come il labilizzarsi della struttura — il che si ha nel caso del collasso statico — ma un verificarsi indefinito di deformazioni permanenti su una struttura che, a parte l'impossibilità di sopportare tali deformazioni o per superamento dei limiti ammissibili degli spostamenti o per fenomeno di fatica plastica, deve per altro essere in grado di tollerare le suddette deformazioni.

Si osservi che questo secondo modo di riguardare la crisi, possibile solo in presenza di sollecitazioni esterne variabili, è più restrittivo del primo, sua sola alternativa, nell'ipotesi beninteso di materiale ad allungamento plastico indefinito, è la labilizzazione, e cioè il collasso statico, che è però un suo caso limite. Ciò premesso, è da ammettere che in un fenomeno indefinito, regolato da cause agenti da sole o raggruppate con una qualsiasi legge temporale ma in numero finito, determinati effetti debbano ripetersi, a distanze di tempo  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ , in genere variabili. Se nell'intervallo generico  $\Delta t_i$  uno sforzo normale residuo  $\bar{N}_h$  variasse di  $\Delta \bar{N}_h$ , i contributi  $\Delta \bar{N}_h$  nei  $\Delta t_i$  successivi si sommerebbero, ed  $\bar{N}_h$  crescerebbe oltre ogni limite; ciò è inammissibile. Quindi le deformazioni permanenti nel generico intervallo  $\Delta t_i$  devono essere tali da non indurre variazioni nelle sollecitazioni interne, e cioè devono costituire un insieme di distorsioni atensionali; ciò si ottiene solo se esse sono quelle che possono derivare da un meccanismo, o se sono uguali e di segno opposto in una stessa asta. Un classico teorema enunciato la prima volta dal *Bleich* (1932), dimostrato in forma completa dal *Mélan* (1936) e da *Prager e Symonds* (1950), ed esteso al continuo dal *Koiter* (1956), stabilisce che se esiste un possi-

bile insieme residuo di stabilizzazione e cioè un insieme di tensioni in equilibrio con carichi nulli tale che le massime e minime tensioni calcolate in fase elastica e riportate a partire da esse non superino mai le tensioni limiti (\*) la struttura non entra in crisi.

Il teorema si dimostra come segue. Siano  $\varepsilon_e$  ed  $\varepsilon_p$  le deformazioni elastiche e plastiche,  $\varepsilon$  la deformazione totale,  $\sigma$  la tensione, nel generico punto e al generico tempo  $t$ ; si può scrivere

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_p . \quad (i)$$

Siano poi  $\varepsilon_f$  e  $\sigma_f$  le deformazioni e le tensioni che si avrebbero se la struttura si comportasse sempre elasticamente; un insieme residuo di tensioni si chiama  $\sigma_r$ , ed è definito, al tempo  $t$ , da

$$\sigma_r = \sigma - \sigma_f \quad (l)$$

ove le tre  $\sigma$  sono funzioni del tempo e relative allo stesso tempo  $t$ . Un qualsiasi insieme residuo di stabilizzazione  $\bar{\sigma}$  deve rispettare le condizioni di equilibrio per forze applicate nulle, e la disuguaglianza

$$\sigma''_o < \bar{\sigma} + \sigma_f < \sigma'_o ; \quad (m)$$

le  $\bar{\sigma}$  sono indipendenti dal tempo, le  $\sigma_f$  funzioni del tempo; la (m) deve essere valida per qualsiasi valore del tempo.

Si consideri la quantità

$$\mathcal{L} = \int \frac{1}{2E} (\sigma_r - \bar{\sigma})^2 dV \quad (n)$$

ove l'integrale è esteso a tutto il volume della struttura; derivando rispetto al tempo si ha

$$\dot{\mathcal{L}} = \int \frac{\dot{\sigma}_r}{E} (\sigma_r - \bar{\sigma}) dV . \quad (o)$$

Dalle (l) ed (i) si ha

$$\frac{\dot{\sigma}_r}{E} = \frac{\dot{\sigma}}{E} - \frac{\dot{\sigma}_f}{E} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_p - \dot{\varepsilon}_f$$

e dalla (l)

$$\sigma_r - \bar{\sigma} = \sigma - (\bar{\sigma} + \sigma_f) .$$

Quindi la (o) si scrive

$$\mathcal{L} = \int (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_f) [\sigma - (\bar{\sigma} + \sigma_f)] dV - \int \dot{\varepsilon}_p [\sigma - (\bar{\sigma} + \sigma_f)] dV . \quad (p)$$

(\*) Si precisa che tale insieme può anche non essere quello che realmente corrisponde allo *shake down*.



Poichè le  $\dot{\epsilon}$  ed  $\dot{\epsilon}_f$  sono congruenti, e le  $\sigma - (\bar{\sigma} + \sigma_f)$  sono in equilibrio con forze esterne nulle, il principio dei lavori virtuali assicura che il primo integrale della (p) è nullo; può quindi scriversi

$$\dot{\mathcal{L}} = - \int \dot{\epsilon}_p [\sigma - (\bar{\sigma} + \sigma_f)] dV . \quad (q)$$

Se  $\dot{\epsilon}_p > 0$ , la  $\sigma$  nello stesso punto e allo stesso tempo è pari a  $\sigma'_0$ ; dalle (m) risulta quindi

$$\bar{\sigma} + \sigma_f < \sigma$$

e ancora

$$\sigma - (\bar{\sigma} + \sigma_f) > 0$$

$$\dot{\epsilon}_p [\sigma - (\bar{\sigma} + \sigma_f)] > 0 ;$$

se è  $\dot{\epsilon}_p < 0$ , la  $\sigma$  è pari a  $\sigma''_0$ , e dalla (m) risulta

$$\bar{\sigma} + \sigma_f > \sigma$$

$$\sigma - (\bar{\sigma} + \sigma_f) < 0$$

$$\dot{\epsilon}_p [\sigma - (\bar{\sigma} + \sigma_f)] > 0 ;$$

se è  $\dot{\epsilon}_p = 0$ , è

$$\dot{\epsilon}_p [\sigma - (\bar{\sigma} + \sigma_f)] = 0 .$$

Quindi dalla (q) si ha

$$\dot{\mathcal{L}} \leq 0 , \quad (r)$$

ove il segno di uguaglianza vale se è ovunque  $\dot{\epsilon}_p = 0$ , e cioè se nel tempo  $dt$  non si hanno deformazioni plastiche; è cioè, per ogni deformazione plastica,  $\mathcal{L}$  diminuisce. Poichè dalla (n) si osserva che  $\mathcal{L}$  è quadratica omogenea, al massimo  $\mathcal{L}$  può diminuire fino a zero; quindi le deformazioni plastiche devono ad un certo momento cessare, e cioè la struttura non entra in crisi.

Il teorema è stato dimostrato ponendo nella (m) solo il segno di disuguaglianza; in realtà la definizione di insieme residuo di stabilizzazione implica la condizione

$$\sigma''_0 \leq \bar{\sigma} + \sigma_f \leq \sigma'_0 . \quad (s)$$

Dal punto di vista pratico però il teorema continua ad essere valido, perchè basta una piccola variazione di  $\sigma'_0$  e  $\sigma''_0$  per riportarsi dalla (s) alla (m).

L'esistenza quindi di un possibile insieme residuo di stabilizzazione è condizione necessaria — per la stessa definizione di crisi — e sufficiente perchè la struttura non entri in crisi. Il *coefficiente di sicurezza*  $s_v$  è il più elevato numero per cui possono moltiplicarsi le condizioni di carico variabile senza giungere alla crisi. Il teorema di Bleich-Mélan permette di stabilire, attraverso la costruzione di un insieme residuo di stabilizzazione,

se un moltiplicatore  $k$  delle condizioni di carico variabile è tale da garantire la sicurezza; si pone in tale caso

$$k \leq s_v . \quad (t)$$

Il calcolo perciò si effettua per successivi tentativi, approssimandosi ad  $s_v$  per difetto. Per quanto già detto circa la natura della crisi,  $k$  coincide con  $s_v$  solo se si ha un esaltarsi del lavoro disperso per deformazioni plastiche; ciò si ha se e solo se i massimi e minimi sforzi normali calcolati come se la struttura si comportasse elasticamente, sommati agli sforzi normali del sistema residuo prescelto, attingono i valori limiti in un numero di aste sufficiente a rendere labile tutta la struttura o una sua parte (collasso incrementale), o in corrispondenza di un'asta attingono ambedue i valori limiti (collasso per plasticizzazione alternata).

Il procedimento che si passa ad esporre (*Sparacio*, 1960) permette invece di ottenere fin dal primo tentativo un intervallo in cui  $s_v$  è compreso, e ciò operando in tutta analogia con quanto già detto in sede di collasso statico; esso quindi è un superamento del procedimento che deriva dal teorema di Bleich-Mélan.

Siano assegnate le sollecitazioni esterne fisse  $g$  e quelle variabili  $a$  in fase di esercizio, in queste comprese le distorsioni; in base ad esse si calcolano, in fase elastica, gli sforzi normali  $N_{gh}^e$ ,  $N_{vh \max}^e$ ,  $N_{vh \min}^e$ . Incrementando le sollecitazioni variabili secondo il moltiplicatore unico  $k$  si giunge ad un valore  $k = s$  per cui si attinge il collasso incrementale o quello per plasticizzazione alternata. Nel primo caso in un numero  $i$  di aste, che con la loro eliminazione rendono labile tutta la struttura o una sua parte, dando luogo al cosiddetto *meccanismo di collasso incrementale*, si ha

$$N_{gi}^e + s_v N_{vi \max}^e + \bar{N}_i = N'_{oi} \quad (u)$$

oppure

$$N_{gi}^e + s_v N_{vi \min}^e + \bar{N}_i = N''_{oi}$$

e nelle altre aste si ha invece

$$N_{gh}^e + s_v N_{vh \max}^e + \bar{N}_h \leq N'_{oh} \quad (v)$$

$$N''_{oh} \leq N_{gh}^e + s_v N_{vh \min}^e + \bar{N}_h .$$

Nel secondo caso poi si ha in un'asta

$$N_{gi}^e + s_v N_{vi \max}^e + \bar{N}_i = N'_{oi} \quad (z)$$

$$N_{gi}^e + s_v N_{vi \min}^e + \bar{N}_i = N''_{oi} ,$$

mentre nelle altre si verificano sempre le (v).

Gli sforzi normali  $\bar{N}_h$  costituiscono l'insieme (reale) residuo di stabilizzazione. Il numero  $s_v$  è il *coefficiente di sicurezza a rottura*.

Se è noto il meccanismo di collasso incrementale, il coefficiente  $s_v$  è di immediata determinazione; infatti il lavoro degli  $\bar{N}_h$  per il movimento consentito al meccanismo è nullo, essendo gli  $\bar{N}_h$  in equilibrio con forze esterne nulle, e perciò dalle (u) si trae

$$\begin{aligned} \sum_i N_{gi}^e \Delta l_i + s_v [\sum_{i'} N_{vi \max}^e \Delta l_i + \sum_{i''} N_{vi \min}^e \Delta l_i] = \\ = \sum_{i'} N'_{oi} \Delta l_i + \sum_{i''} N''_{oi} \Delta l_i, \end{aligned} \quad (a')$$

dove  $i'$  e  $i''$  sono rispettivamente le aste plasticizzate per trazione e per compressione.

Se gli  $N$  derivano da una sola condizione di carico, è

$$\sum_i N_{gi}^e \Delta l_i + s_v \sum_i N_{vi}^e \Delta l_i + L_g + s_v L_v = 0$$

e quindi la (a') si scrive

$$L_g + s_v L_v + \sum_{i'} N'_{oi} \Delta l_i + \sum_{i''} N''_{oi} \Delta l_i = 0 \quad (b')$$

che coincide con la (f).

Un numero  $\phi_v$  si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* delle condizioni di carico variabili se esiste per esso almeno un possibile insieme residuo di stabilizzazione, se esiste cioè almeno una distribuzione  $\bar{N}_h$  tale che per ogni asta siano soddisfatte le relazioni

$$N_{gh}^e + \phi_v N_{vh \max}^e + \bar{N}_h \leq N'_{oh} \quad (7)$$

$$N''_{oh} \leq N_{gh}^e + \phi_v N_{vh \min}^e + \bar{N}_h .$$

Un numero  $\gamma_v$  si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* delle condizioni di carico variabili se vien fuori come coefficiente di sicurezza da una scelta arbitraria del meccanismo di collasso incrementale, o dell'asta soggetta a plasticità alternata; esso è fornito quindi da una relazione analoga alla (a'). In rapporto al segno prescelto nella deformata del meccanismo si scelgono le aste  $i'$  ed  $i''$  che entrano in gioco nel coefficiente di  $\gamma_v$  nella (a').

Il teorema fondamentale si enuncia, anche nel caso in esame, come segue: un qualsiasi moltiplicatore  $\gamma_v$  cinematicamente sufficiente non può essere inferiore ad un qualsiasi moltiplicatore  $\phi_v$  staticamente ammissibile.

Si può cioè scrivere, dati un qualsiasi  $\phi_v$  ed un qualsiasi  $\gamma_v$ ,

$$\phi_v \leq \gamma_v . \quad (8)$$

L'equazione che fornisce  $\gamma_v$  è, come già detto, analoga alla (a'):

$$\begin{aligned} \sum_i N_{gi}^e \Delta l_i + \gamma_v [\sum_{i'} N_{vi \max}^e \Delta l_i + \sum_{i''} N_{vi \min}^e \Delta l_i] = \\ = \sum_{i'} N'_{oi} \Delta l_i + \sum_{i''} N''_{oi} \Delta l_i . \end{aligned} \quad (c')$$

Sia  $\bar{N}_h$  il sistema di sforzi normali connesso con  $\phi_v$  in rispetto della definizione di moltiplicatore staticamente ammissibile; poichè le  $\bar{N}_h$  sono anch'esse in equilibrio con forze esterne nulle, con riferimento allo stesso meccanismo che fornisce  $\gamma_v$  si può scrivere

$$\sum_i \bar{N}_i \Delta l_i = 0 . \quad (d')$$

Ponendo

$$\begin{aligned} N_{h \max} &= N_{gh}^e + \phi_v N_{vh \max}^e + \bar{N}_h \\ N_{h \min} &= N_{gh}^e + \phi_v N_{vh \min}^e + \bar{N}_h \end{aligned}$$

la (d') permette di scrivere

$$\begin{aligned} \sum_i N_{gi}^e \Delta l_i + \phi_v [\sum_{i'} N_{vi \max}^e \Delta l_i + \sum_{i''} N_{vi \min}^e \Delta l_i] = \\ = \sum_{i'} N_{i \max} \Delta l_i + \sum_{i''} N_{i \min} \Delta l_i . \end{aligned} \quad (e')$$

Se  $\phi_v > \gamma_v$ , dal confronto tra le (c') ed (e') risulta, tenendo conto che il termine in parentesi quadra è negativo,

$$\sum_{i'} (N'_{oi} - N_{i \max}) \Delta l_i + \sum_{i''} (N''_{oi} - N_{i \min}) \Delta l_i > 0 . \quad (f')$$

Ma si verifica per le (2-7) che nei termini della prima sommatoria è  $N'_{oi} - N_{i \max} \geq 0$ ,  $\Delta l_i < 0$ , e nei termini della seconda sommatoria è  $N''_{oi} - N_{i \min} \leq 0$ ,  $\Delta l_i > 0$ ; dunque i termini della (f') sono tutti nulli o negativi, e la loro somma non può essere positiva. Se ne trae che l'ipotesi  $\phi_v > \gamma_v$  è assurda; e quindi vale la (2-8).

Un moltiplicatore  $\gamma_v$  può anche essere calcolato come coefficiente di sicurezza da plasticizzazione alternata in una certa asta  $i$ ; anche in tal caso, dato un qualsiasi  $\phi_v$ , risulta  $\phi_v \leq \gamma_v$ . Infatti dalle (z) scritte per  $\gamma_v$  si ricava

$$= \frac{N'_{oi} - N''_{oi}}{N_{vi \max}^e - N_{vi \min}^e} \quad (9)$$

Nell'asta  $i$  si ha poi, per definizione di  $\phi_v$ ,

$$\begin{aligned} N_{gi}^e + \phi_v N_{vi \max}^e + \bar{N}_i &\leq N'_{oi} \\ N_{gi}^e + \phi_v N_{vi \min}^e + \bar{N}_i &\geq N''_{oi} \end{aligned}$$

da cui

$$\psi_v (N_{vi \max}^e - N_{vi \min}^e) \leq N'_{oi} - N''_{oi}$$

e ancora

$$\psi_v \leq \gamma_v .$$

Poichè  $s_v$  è nello stesso tempo un  $\psi_v$  ed un  $\gamma_v$ , dati un qualsiasi  $\gamma_v$  ed un qualsiasi  $\psi_v$  può scriversi in ogni caso

$$\psi_v \leq s_v \leq \gamma_v . \quad (10)$$

Dalla (2-10) deriva il *teorema di unicità del coefficiente di sicurezza*.

Anche nel caso del collasso incrementale è possibile ottenere da un  $\gamma_v$  un  $\psi_v$ , e quindi un intervallo in cui  $s_v$  è compreso. Si calcolano attraverso le relazioni

$$N_{gi}^e + \gamma_v N_{vi \max}^e + \bar{\bar{N}}_i = N'_{oi}$$

oppure

(g')

$$N_{gi}^e + \gamma_v N_{vi \min}^e + \bar{\bar{N}}_i = N''_{oi} ,$$

analoghe alle (u), i valori di  $\bar{\bar{N}}_i$  nelle  $i$  aste plasticizzate; da esse si risale al valore degli sforzi normali  $N_h$  in tutte le altre aste. Ciò in maniera univoca se tutta la struttura è resa labile dalla soppressione delle  $i$  aste; in maniera qualsiasi — purchè nel rispetto della statica — nelle parti non labili, in caso di collasso parziale. Si calcolano poi per tutte le aste i rapporti

$$\frac{\gamma_v N_{ah \max}^e}{N'_{oh} - N_{gh}^e - \bar{\bar{N}}_h} ; \quad (h')$$

$$\frac{\gamma_v N_{ah \min}^e}{N''_{oh} - N_{gh}^e - \bar{\bar{N}}_h} ;$$

sia  $\rho$  il più elevato tra i suddetti rapporti. Si può asserire che

$$\frac{\gamma_v}{\rho} = \psi_v ; \quad (11)$$

infatti è in ogni asta

$$\frac{\gamma_v N_{ah \max}^e}{N'_{oh} - N_{gh}^e - \bar{\bar{N}}_h} \leq \rho$$

$$\frac{\gamma_v N_{ah \min}^e}{N''_{oh} - N_{gh}^e - \bar{\bar{N}}_n} \leq \rho$$

da cui si ottiene

$$N_{gh}^e + \frac{\gamma_v}{\rho} N_{ah \max}^e + \bar{\bar{N}}_n \leq N'_{oh}$$

$$N''_{oh} \leq N_{gh}^e + \frac{\gamma_v}{\rho} N_{ah \min}^e + \bar{\bar{N}}_n ;$$

per le (2-7) e perciò valida la (2-11).

Se  $\gamma_v$  è calcolato come coefficiente di sicurezza da plasticizzazione alternata vale lo stesso procedimento per risalire da un  $\gamma_v$  ad un  $\psi_v$ ;  $\bar{\bar{N}}_i$  nell'asta  $i$  si calcola attraverso l'una e l'altra delle due relazioni ( $g'$ ), valide ambedue per l'unica asta plasticizzata, e gli  $N_h^*$  si calcolano in tutta la struttura nel solo rispetto della statica, e con la condizione che in  $i$  siano pari al già ottenuto valore di  $\bar{\bar{N}}_i$ .

La relazione (2-11) si scrive pure

$$\frac{\gamma_v}{\rho} \leq s_v \leq \gamma_v \quad (12)$$

L'intervallo (2-12) si restringe se il meccanismo di secondo tentativo si sceglie in modo che tra le aste plasticizzate siano comprese quelle per le quali nel primo tentativo si attingevano i valori più elevati dei rapporti ( $h'$ ).

Se  $\rho = 1$ , è  $\gamma_v = s_v$ ; in questo caso, se il meccanismo è tale da rendere labile tutta la struttura, risulta ovunque  $\bar{\bar{N}}_h = \bar{\bar{N}}_h$ ; se invece il collasso è parziale, o deriva da plasticizzazione alternata, la coincidenza  $\bar{\bar{N}}_h = \bar{\bar{N}}_h$  è garantita solo nella parte labile della struttura, o nell'asta di rottura a fatica. Infatti le ( $g'$ ) e le ( $u$ ) forniscono nelle sezioni di plasticizzazione gli stessi valori di  $\bar{\bar{N}}_i$  ed  $\bar{\bar{N}}_i$ .

## 7. Un esempio numerico.

Si esegue la ricerca del coefficiente di sicurezza a rottura per carichi non proporzionali, relativamente al collasso statico ed a quello incrementale o per plasticizzazione alternata, operando su una travatura reticolare continua a quattro appoggi, il cui schema è riportato nella fig. 2-7 a.

Le aste dei correnti hanno la sezione quadrata cava riportata nella fig. 2-7 b, con gli spessori  $t$  indicati per i due correnti nella fig. 2-7 a. Assumendo

$$\sigma'_0 = -\sigma''_0 = \sigma_0 = 4000 \text{ Kg/cm}^2$$

gli sforzi normali limiti  $N_0 = \sigma_0 A$  valgono rispettivamente:

$$t = 30 \text{ mm} \quad N_0 = 1776 \text{ t}$$

$$t = 35 \text{ mm} \quad N_0 = 2044 \text{ t}$$

$$t = 45 \text{ mm} \quad N_0 = 2556 \text{ t}$$

E' facile controllare che il carico critico euleriano  $N_{cr}$  delle aste risulta in valore assoluto molto maggiore dei valori  $\sigma_0 A$ ; può quindi assumersi  $\sigma_0 A$  come valore limite sia a trazione che a compressione.

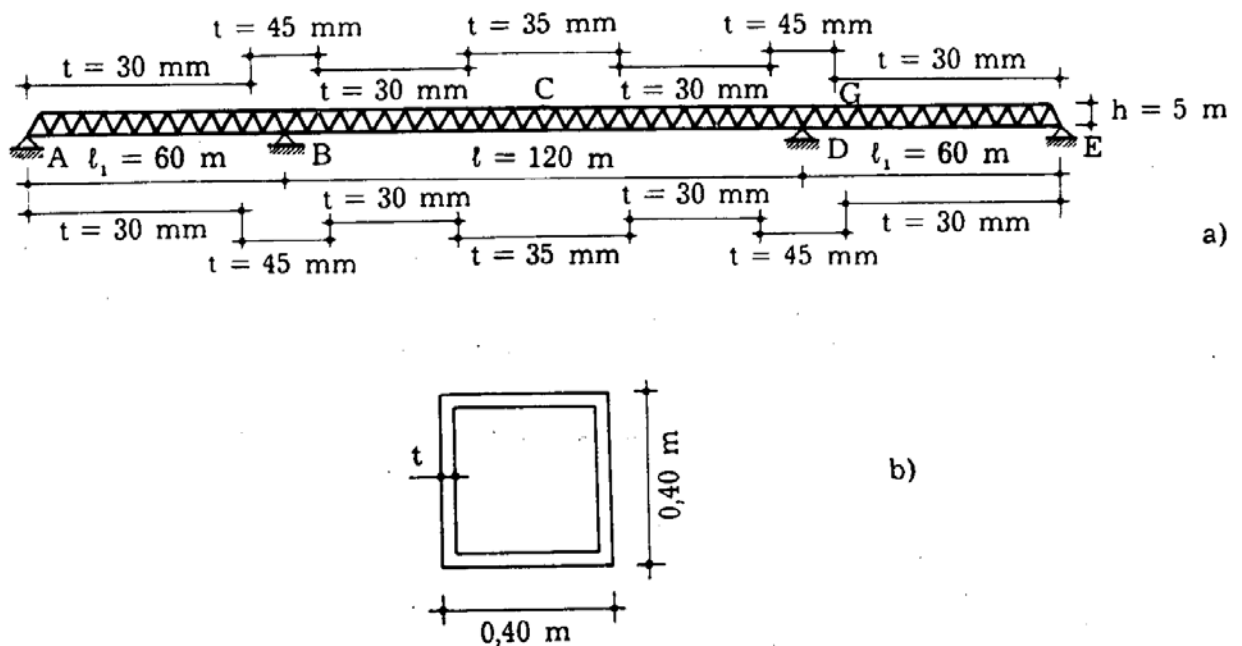


FIG. 2-7

Sui nodi del corrente inferiore della travatura si considerano agenti carichi permanenti  $G = 10 \text{ t}$ , e carichi accidentali di esercizio  $F = 15 \text{ t}$ : le varie possibili condizioni di carico sono date dalla presenza o dall'assenza dei carichi  $F$ .

a) Si studi innanzitutto il collasso statico quando i carichi  $F$  sono applicati a tutti i nodi della campata centrale  $BD$ . Operando secondo il procedimento al limite di rottura, come meccanismo di primo tentativo

si sceglie quello fornito dalla plasticizzazione delle aste indicate con F, C e G nella fig. 2-7 a: il diagramma degli spostamenti verticali del corrente inferiore è riportato nella fig. 2-8.

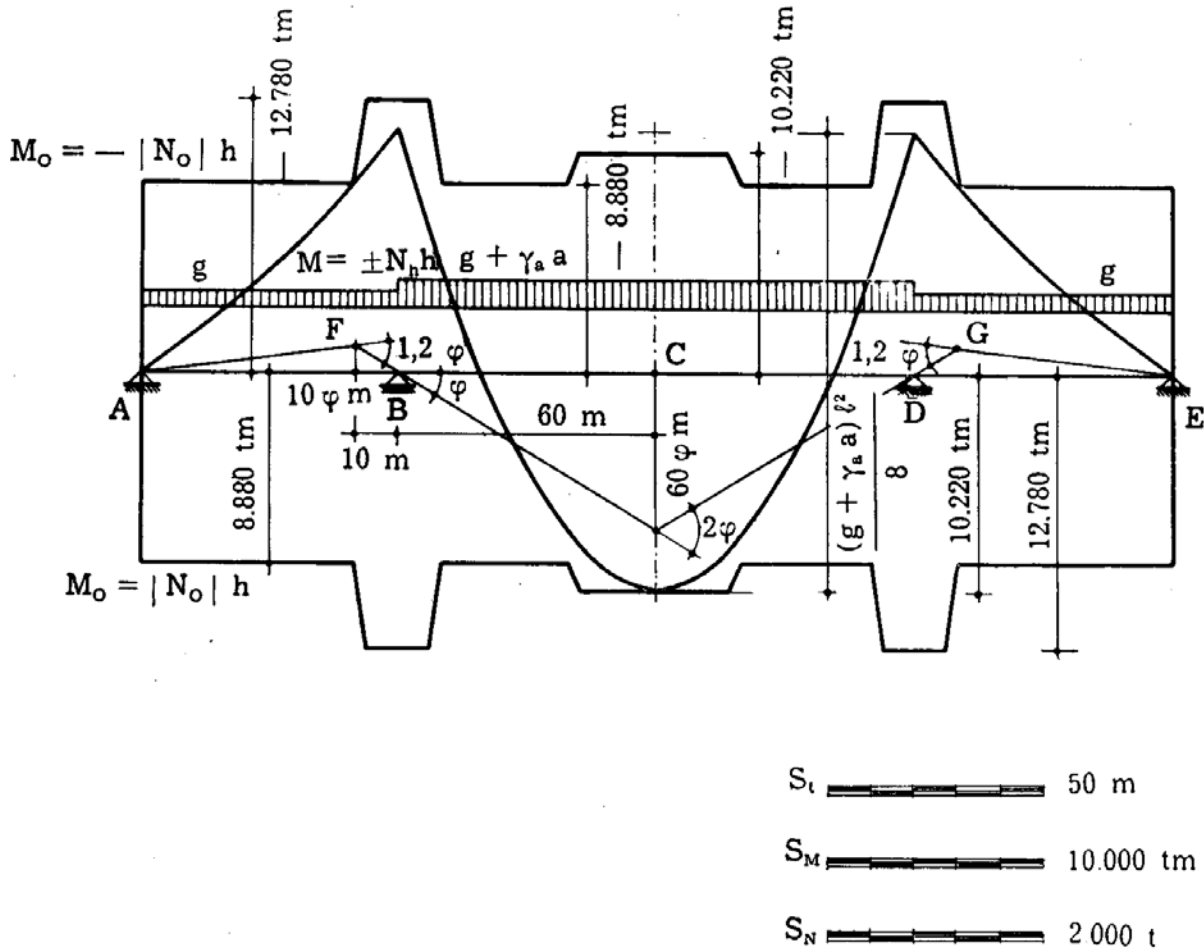


FIG. 2-8

Poichè l'altezza e i campi della travatura sono piccoli in rapporto alle campate (5 : 60; 5 : 120), si possono semplificare i calcoli sostituendo ai carichi concentrati nei nodi i corrispondenti carichi uniformemente distribuiti, pari a

$$g = \frac{10 t}{5 m} = 2 t/m$$

$$a = \frac{15 t}{5 m} = 3 t/m .$$

La condizione di carico in esame si riduce pertanto a quella indicata nella fig. 2-8.



I lavori che compaiono nella (f), tenendo conto delle relazioni geometriche della fig. 2-8, sono dati da

$$\begin{aligned} L_N &= (-1,2 N_{oF} + 2 N_{oC} - 1,2 N_{oG}) h \varphi = \\ &= -(2 \cdot 1,2 \cdot 1776 + 2 \cdot 2044) 5 \varphi = \\ &= -41752 \varphi \text{ tm} \\ L_g &= 2 \left( 120 \frac{60 \varphi}{2} - 2 \cdot 60 \frac{10 \varphi}{2} \right) = 6000 \varphi \text{ tm} \\ L_a &= 3 \cdot 120 \frac{60 \varphi}{2} = 10800 \varphi \text{ tm} . \end{aligned}$$

Il moltiplicatore cinematicamente sufficiente è dato da:

$$\gamma_a = \frac{-41752 + 6000}{10800} = 3,30 .$$

Si disegna adesso, considerando la trave come se fosse a parete piena, il diagramma dei momenti  $M$  in equilibrio con i carichi  $g = 2 \text{ t/m}$  e  $\gamma_a a = 9,90 \text{ t/m}$ , che assume in corrispondenza delle aste plasticizzate, i valori:

$$\begin{aligned} M_{oF} &= M_{oG} = -1776 \cdot 5 = -8880 \text{ tm} \\ M_{oC} &= 2044 \cdot 5 = 10220 \text{ tm} . \end{aligned}$$

Questo diagramma, diviso per  $h = 5 \text{ m}$ , dà con buona approssimazione i valori degli sforzi normali nelle aste di corrente: pertanto, per semplicità, si opererà d'ora innanzi su questo e analoghi diagrammi..

Il tracciamento del diagramma è il seguente (fig. 2-8): fissata la ordinata  $M_{oC} = +10220 \text{ tm}$  in corrispondenza della sezione C, si riporta verso l'alto la grandezza

$$\frac{g + \gamma_a a}{8} \ell^2 \quad (\ell = 120 \text{ m})$$

ottenendo i valori del diagramma sugli appoggi B e D: si inserisce quindi la parabola.

Nelle campate AB e DE, si inseriscono le parabole di freccia  $\frac{g}{8} \ell^2$  ( $\ell = 60 \text{ m}$ ). Si verifica quindi che in corrispondenza delle sezioni F e G sia  $M = M_{oF} = -8800 \text{ tm}$ , ottenendo così un controllo del tracciamento grafico.

Nella fig. 2-8 è riportato anche il diagramma del *momento limite*  $M_o = \pm |N_o| h$ .

Si riconosce che in ogni sezione della trave si ha  $M'_o \leq M \leq M''_o$ . Il valore di  $\gamma_a$  trovato coincide quindi con il coefficiente di sicurezza della condizione di carico in esame:

$$s_{BD} = 3,30 .$$

Per applicare il procedimento « passo per passo » bisogna anzitutto risolvere la struttura in fase elastica, ricercando gli sforzi  $N_{hg}$  ed  $N_{ha}$  causati, nell'asta  $h$ -esima, rispettivamente dal carico permanente ed accidentale. Il moltiplicatore  $k_1$  per cui si verifica la prima plasticizzazione è dato dalla più piccola radice delle  $h$  equazioni come (\*):

$$| N_{hg} + k N_{ha} | = N_{oh} .$$

La più piccola radice si trova in effetti in corrispondenza delle aste F e G (fig. 2-7 a) (la contemporaneità è dovuta alla simmetria) per le quali si ha:

$$N_{Fg} = N_{Gg} = 253 \text{ t}$$

$$N_{Fa} = N_{Ga} = 469 \text{ t}$$

$$N_{oF} = N_{oG} = 1776 \text{ t}$$

e quindi

$$k_1 = \frac{1776 - 253}{469} = 3,25 .$$

Quindi, quando il carico accidentale raggiunge il valore  $k_1 a = 9,75 \text{ t/m}$ , le aste F e G si plasticizzano, e da questo punto in poi continuano ad allungarsi senza variazioni dello sforzo normale. In questa fase la struttura può schematizzarsi come in fig. 2-9 a, la cui condizione di carico può ancora considerarsi somma delle due indicate in fig. 2-9 b e c.

Gli sforzi normali provocati dai carichi della fig. 2-9 b coincidono con quelli  $N_{hg} + k_1 N_{ha}$  trovati per la struttura di partenza; si indichino con  $N'_{ha}$  quelli connessi con i carichi della fig. 2-9 c, per  $k - k_1 = 1$ .

Il moltiplicatore dei carichi  $k_2$  per cui si plasticizza un'altra asta, e quindi la struttura diventa labile, è data dalla più piccola radice delle  $h-2$  equazioni come:

$$| N_{hg} + k_1 N_{ha} + (k - k_1) N'_{ha} | = N_o .$$

Questa radice si trova per l'asta C, in cui si ha:

$$N_{Cg} + k_1 N_{Ca} = - 1977 \text{ t}$$

---

(\*) Avendo già applicato il procedimento al limite di rottura, ci si può anche limitare a considerare le aste plasticizzate nel meccanismo di collasso, in quanto nella grande maggioranza dei casi non si hanno « ritorni » in fase elastica, e quindi le aste plasticizzate in condizione di crollo imminente sono le uniche che hanno subito deformazioni plastiche durante il carico.

$$N'_{Ca} = - 1080 \text{ t}$$

$$N_{oC} = 2044 \text{ t}$$

da cui:

$$k_2 - k_1 = \frac{2044 - 1977}{1080} = 0,06$$

$$k_2 = 3,25 + 0,06 = 3,31$$

coincidente con il valore di  $s_a$  trovato applicando il procedimento al limite di rottura.

Resta da controllare che gli allungamenti plastici  $\varepsilon_p$ , che le aste F e G subiscono mentre il carico accidentale varia da  $k_1 a$  ad  $s_a a = k_2 a$ , siano conte-

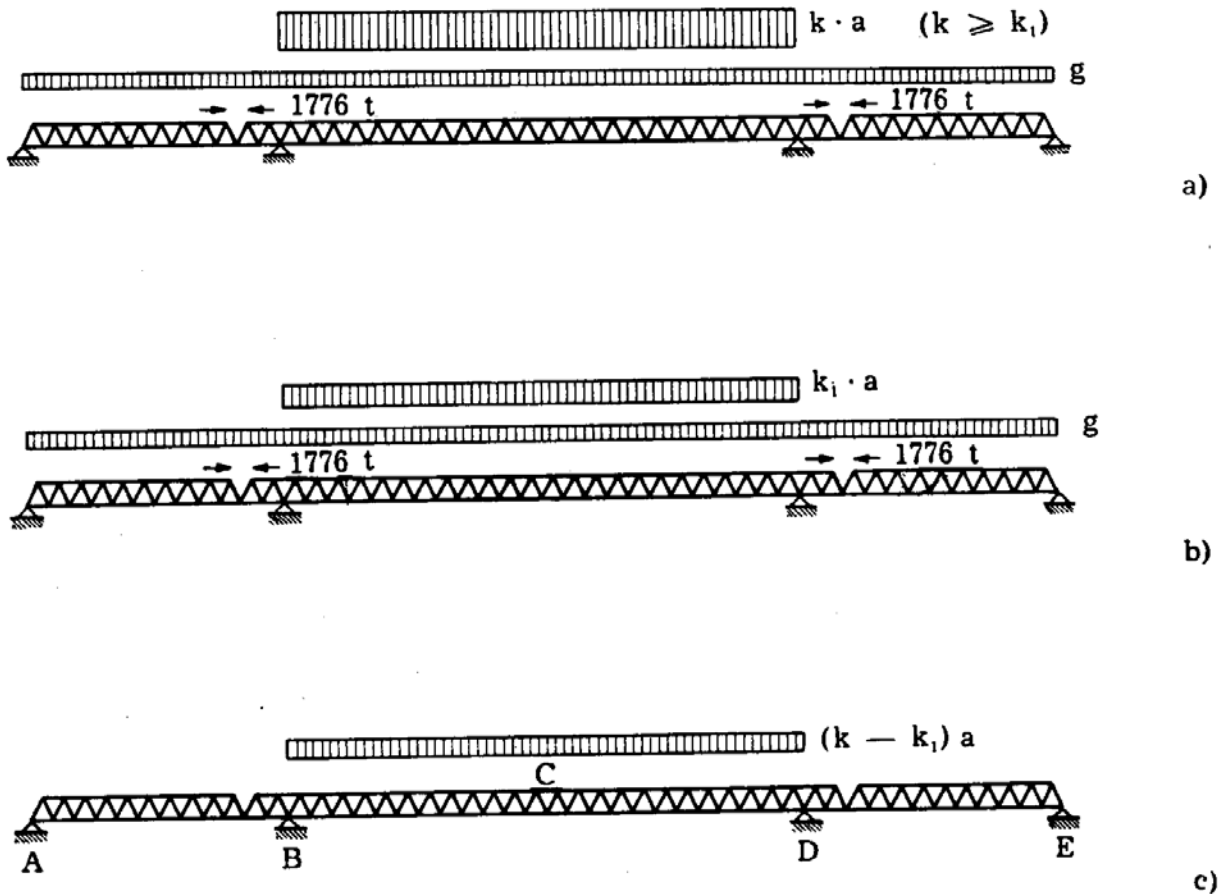


FIG. 2-9

nuti in limiti accettabili. Basta per questo calcolare lo spostamento relativo  $\Delta$  degli estremi delle aste soppresse sullo schema (elastico) della fig. 2-9 c, per  $k - k_1 = 0,06$ .

Il principio dei lavori virtuali porge:

$$\Delta = \frac{1}{2} \Sigma \frac{(k_2 - k_1) N'_{ha} \ell_h}{EA_h}$$

Introducendo i valori numerici risulta

$$\Delta = \frac{0,06}{2} = 0,174 \text{ m}$$

e quindi

$$\varepsilon_p = \frac{0,06}{2} \frac{0,174}{5} = 0,1 \%$$

valore più che accettabile.

b) Si ricerchi adesso, secondo il procedimento al limite di rottura, il coefficiente di sicurezza al collasso statico, essendo i carichi accidentali applicati contemporaneamente alle campate AB e BD (fig. 2-10). Si sceglie

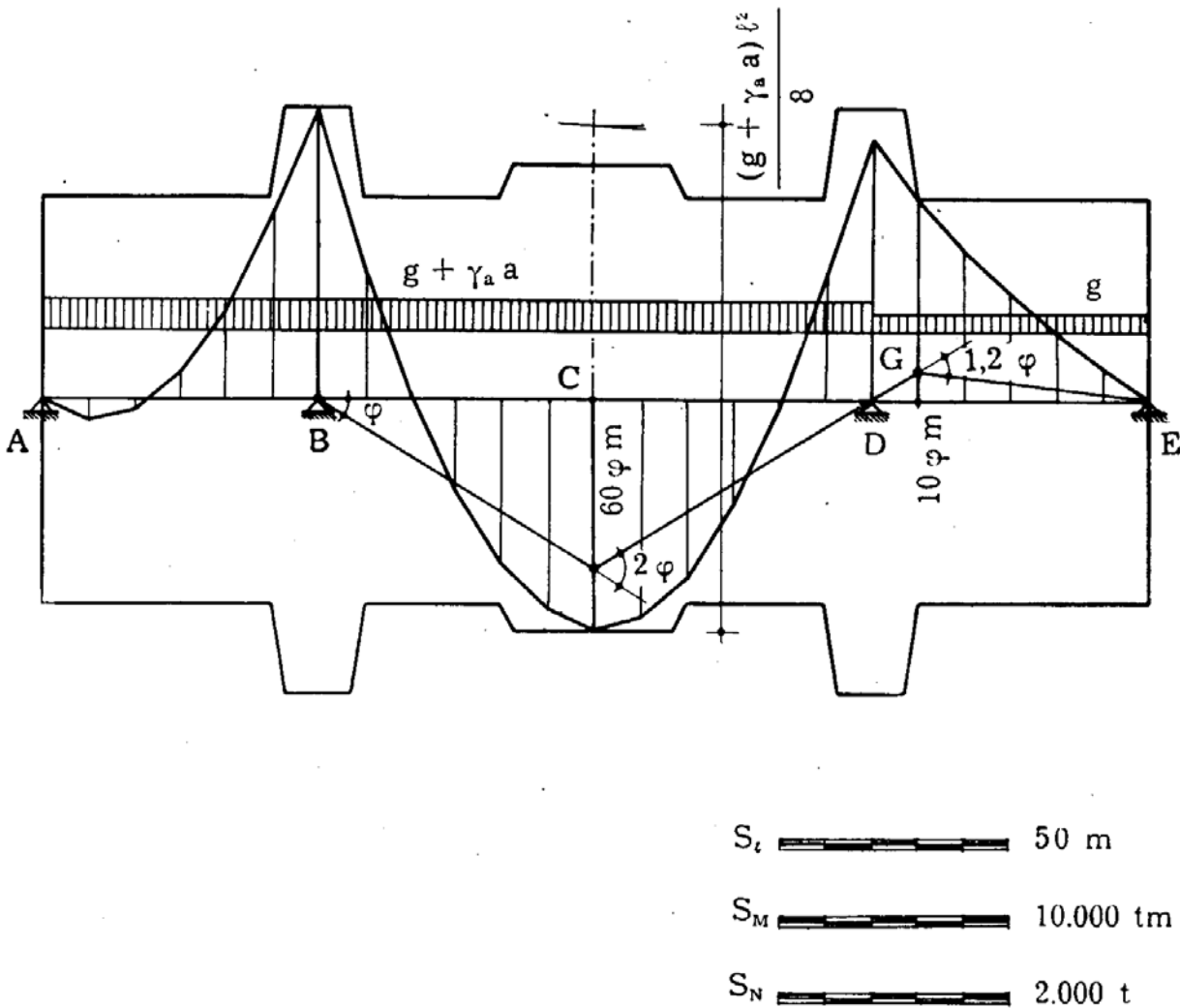


FIG. 2-10

il meccanismo fornito dalla plasticizzazione delle aste del corrente superiore nelle sezioni B, C e G. Operando analogamente a quanto fatto

nella precedente condizione di carico, si ha:

$$L_N = - 43876 \varphi \text{ tm}$$

$$L_g = 6600 \varphi \text{ tm}$$

$$L_a = 10800 \varphi \text{ tm}$$

e quindi

$$\gamma_a = - \frac{- 43876 + 6600}{10800} = 3,45 .$$

Confrontando il diagramma dei momenti flettenti  $M$  con quello dei

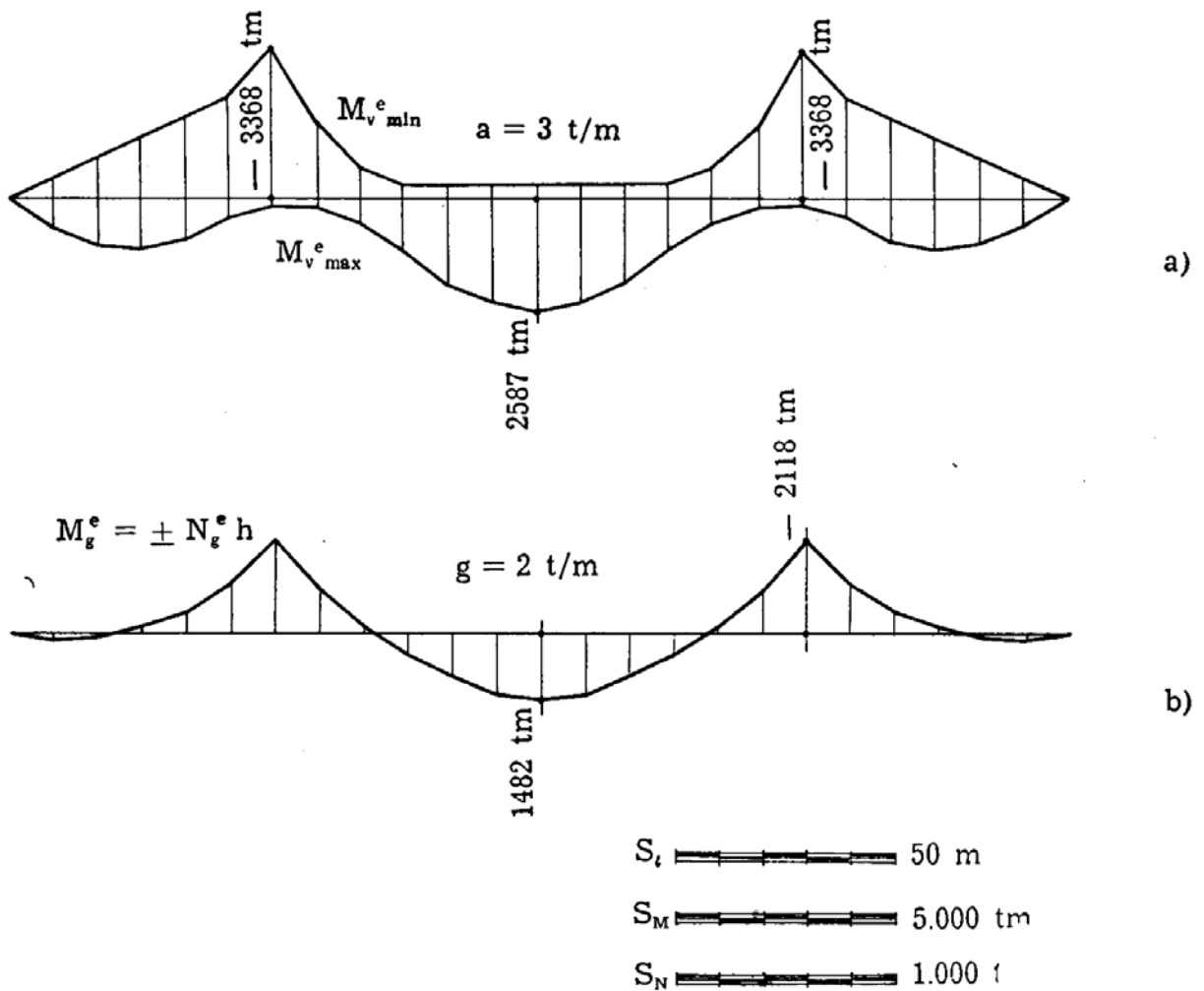


FIG. 2-11

momenti limiti  $M_o = \pm N_o h$  si vede che anche stavolta il  $\gamma_a$  trovato è l'effettivo coefficiente di sicurezza. Pertanto

$$S_{AD} = 3,45 .$$

c) Si ricerchi adesso il coefficiente di sicurezza relativo ai carichi ciclici. Le possibili condizioni di carico sono costituite da tutte le distese di carico accidentale, comunque segmentate, che si sommano al carico permanente.

Considerando ancora la trave come se fosse a parete piena, a momento d'inerzia variabile, si determinano innanzitutto i diagrammi dei momenti massimi  $M_{v \max}^e$  e minimi  $M_{v \min}^e$ , in campo elastico, connessi

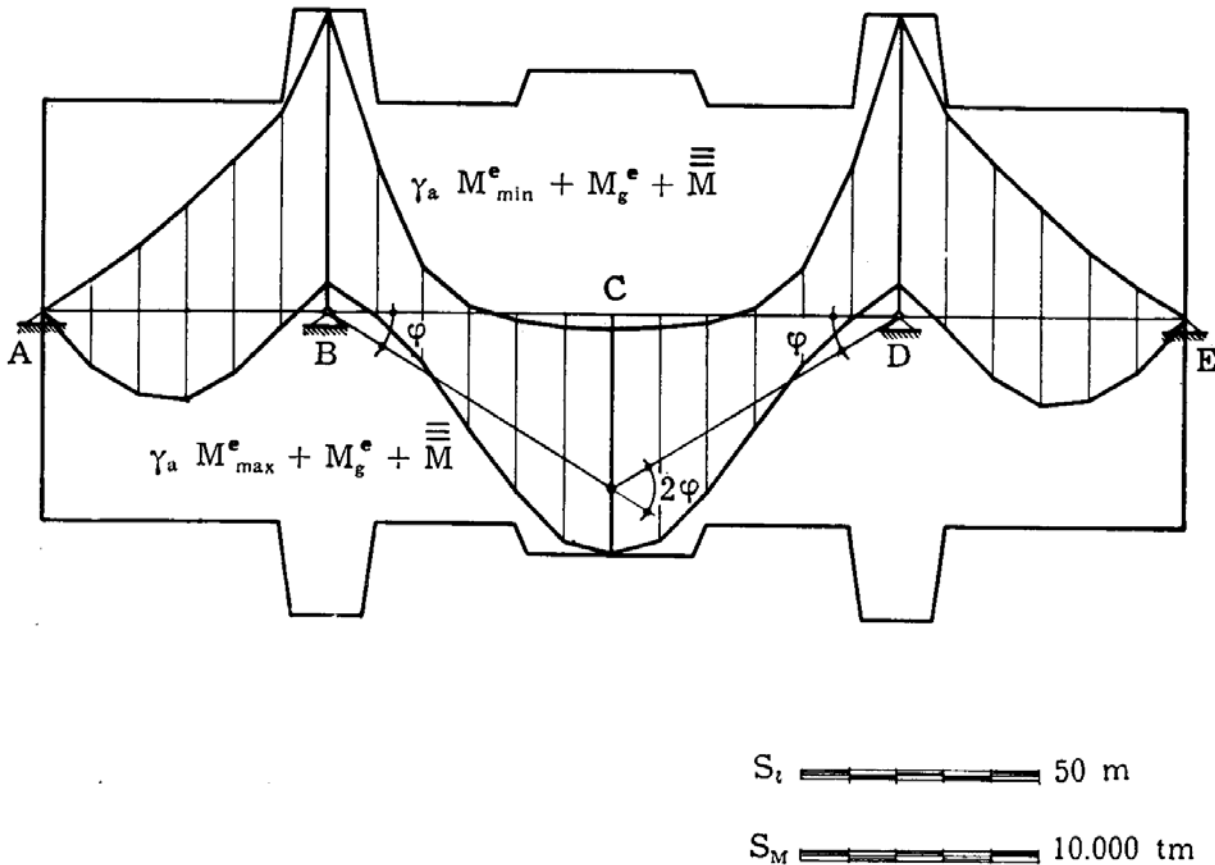


FIG. 2-12

con tutte le possibili distese di carico accidentale  $a = 3 \text{ t/m}$ , secondo il procedimento indicato in S. d. C. al Cap. XX, n. 9 (fig. 2-11 a). Per quanto già detto, con ottima approssimazione nelle aste del corrente inferiore si ha

$$N_{v \max} = \frac{M_{v \max}}{h}, \quad N_{v \min} = \frac{M_{v \min}}{h}$$

e nelle aste del corrente superiore

$$N_{v \max} = -\frac{M_{v \min}}{h}, \quad N_{v \min} = -\frac{M_{v \max}}{h}$$

Si determina inoltre il diagramma dei momenti flettenti provocati — ancora in campo elastico — dal carico permanente  $g = 2 \text{ t/m}$  (fig. 2-11 b).

Si scelga, come meccanismo di collasso incrementale di primo tentativo, quello corrispondente a successive plasticizzazioni delle aste del corrente superiore nelle sezioni B, C, D (fig. 2-12). Il corrispondente moltiplicatore cinematicamente sufficiente  $\gamma_v$  è fornito dalla (c').

Tenendo conto che, con buona approssimazione, è

$$N_i \Delta l_i = N_i h \Delta \varphi_i = M_i \Delta \varphi_i$$

si ha (fig. 2-12):

$$\gamma_v = \frac{2 M_{oC} + M_{oB} + M_{oD} - (2 M_{gC} - M_{gB} - M_{gD})}{2 M_{a \max C} - M_{a \min B} - M_{a \min D}}$$

e introducendo i valori numerici (fig. 2-11) (\*):

$$\begin{aligned} \gamma_v &= \frac{2 (10220 + 12780) - 2 (1482 + 2118)}{2 (2587 + 3368)} = \\ &= \frac{23000 - 3600}{5955} = 3,26 . \end{aligned}$$

Si calcolano quindi i momenti residui  $\bar{M}$  dalle (u) scritte nelle sezioni B, C e D; essi, nel caso in esame, coincidono con i momenti residui reali di

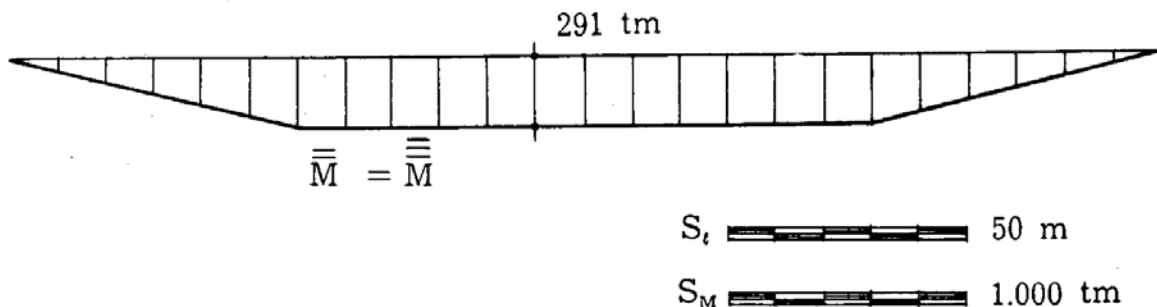


FIG. 2-13

stabilizzazione  $\bar{M}$ . Si trova che nella campata centrale il momento residuo è costante e vale

$$\bar{M} = \bar{M}_B = \bar{M}_C = \bar{M}_D = 291 \text{ tm} ;$$

nelle campate laterali il momento residuo varia linearmente, annullandosi sugli appoggi estremi (fig. 2-13).

(\*) Il termine  $\Sigma M_{gi} \Delta \varphi_i$  può più rapidamente calcolarsi come  $-L_g$ :

$$L = gA = 2 \cdot \frac{1}{2} 120 \cdot 60 = 2 \cdot 3600 \text{ tm} .$$

Si controlla che i rapporti ( $h'$ ) non superino l'unità, cioè che

$$\rho = 1 .$$

Pertanto il  $\gamma_v$  trovato è anche il coefficiente di sicurezza per carichi variabili. Tra le infinite condizioni di carico possibili le tre il cui alternarsi provoca il collasso incrementale sono quelle che provocano rispettivamente il minimo momento in B, il massimo in C, il minimo in D e cioè:

- 1) carico accidentale sulle campate AB e BD;
- 2) carico accidentale sulla campata BD;
- 3) carico accidentale sulle campate BD e DE.