

CAPITOLO III

IL CALCOLO A ROTTURA DELLE STRUTTURE INFLESSE

1. Generalità.

Le travature reticolari sono le strutture più semplici perchè in ogni punto lo stato tensionale è monoassiale, e la tensione normale è uniformemente distribuita su ogni sezione retta, sulla quale è presente la sola caratteristica N della sollecitazione interna; dal diagramma $\sigma \varepsilon$ si passa quindi al diagramma $N \Delta l$ per semplice proporzionalità. Nelle strutture inflesse, invece, in ogni punto lo stato tensionale è in genere biassiale, per la presenza della tensione tangenziale sulla sezione retta; in ogni sezione retta sono presenti inoltre tre caratteristiche della sollecitazione interna; M , N e T . In molti casi però, in particolare in tutti gli usuali telai per fabbricati civili, l'influenza di M è nettamente preponderante, come si mostrerà su esempi concreti; è perciò del tutto giustificato un primo studio che chiami in gioco la sola caratteristica flettente. Ciò in perfetta analogia con quanto è lecito in campo elastico, ove nella grande maggioranza dei casi il calcolo delle iperstatiche dei telai si esegue operando sui soli momenti flettenti.

2. Il momento limite e la cerniera plastica.

Si consideri (fig. 3-2) un tronco elementare, compreso cioè tra due sezioni rette molto vicine, di una trave inflessa; sia M il momento flettente in corrispondenza del tronco, supposto positivo, dz la distanza tra le due sezioni rette che lo delimitano, E il modulo elastico del materiale (supposto uguale a trazione e a compressione), I il momento d'inerzia rispetto all'asse neutro x ; la sezione retta sia inoltre simmetrica (a simmetria normale), rispetto all'asse y di flessione, coincidente perciò con l'asse di sollecitazione, e normale all'asse neutro.

In campo elastico, se si prescinde dallo sforzo di taglio, le sezioni rette restano piane, e l'ampiezza della rotazione relativa tra le sezioni estreme è fornita da

$$d\varphi = \frac{M dz}{EI} ; \quad (a)$$

il diagramma $d\varphi \cdot M$ è una retta passante per l'origine, ed inclinata di $\arctg \frac{EI}{dz}$ sull'asse delle $d\varphi$ (fig. 3-4).

Il diagramma delle tensioni è quello della fig. 3-2 b; esso si annulla in corrispondenza del baricentro G. Aumentando M, si giunge ad un valore

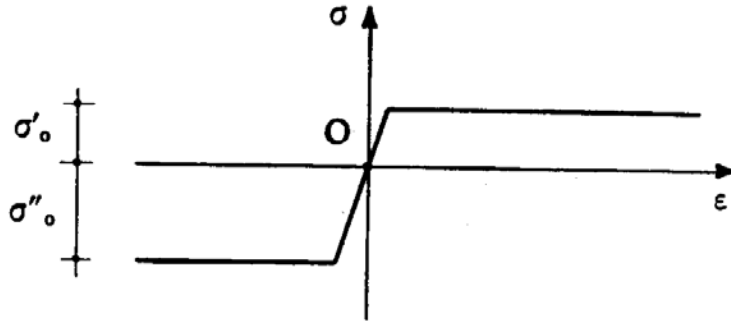


FIG. 3-1

M_s per cui in corrispondenza di uno dei due lembi si attinge il valore limite della tensione; per esempio, al bordo superiore, ove, atteso il segno di M, si raggiunge il limite σ''_0 a compressione (fig. 3-2 c). Se M cresce al di là di M_s , la (a) cade in difetto, e così tutte le conclusioni tratte dallo

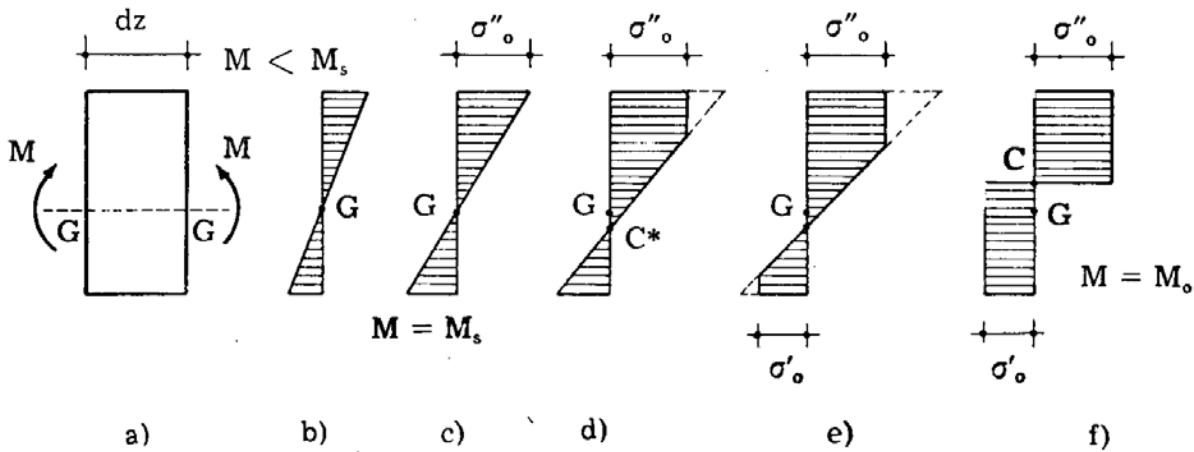


FIG. 3-2

studio in fase elastica. Occorre, per conoscere quanto accade per $M > M_s$, fare delle ipotesi: si accetta un diagramma $\sigma \epsilon$ idealmente elasto-plastico del tipo riportato nella fig. 1-3, con valori limiti della tensione a trazione σ'_0 e a compressione σ''_0 , generalmente diversi (fig. 3-1), e si ammette che le sezioni rette continuino a conservarsi piane. E' da rilevare che esperienze molto accurate confortano tale ipotesi; possono ad esempio

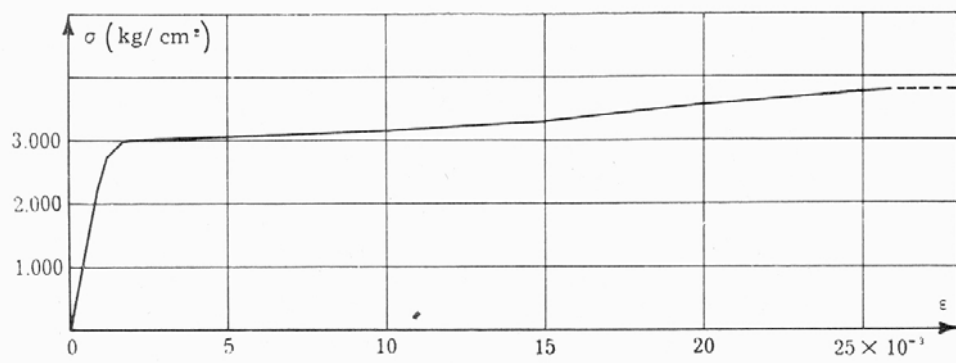
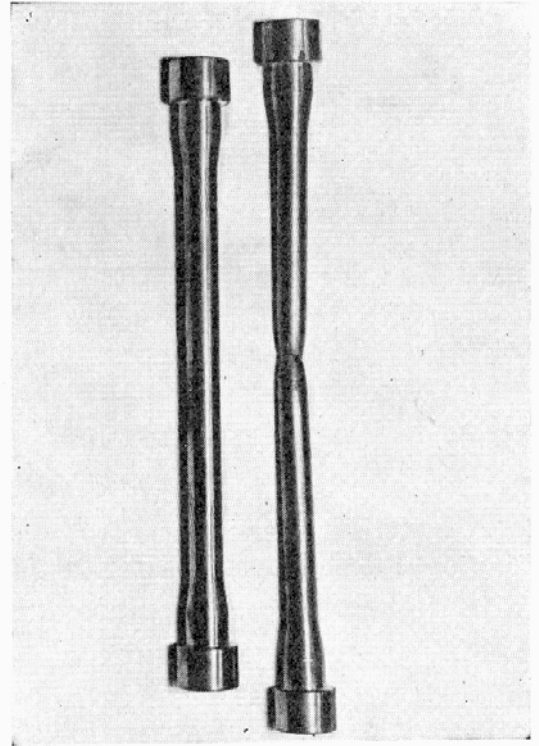
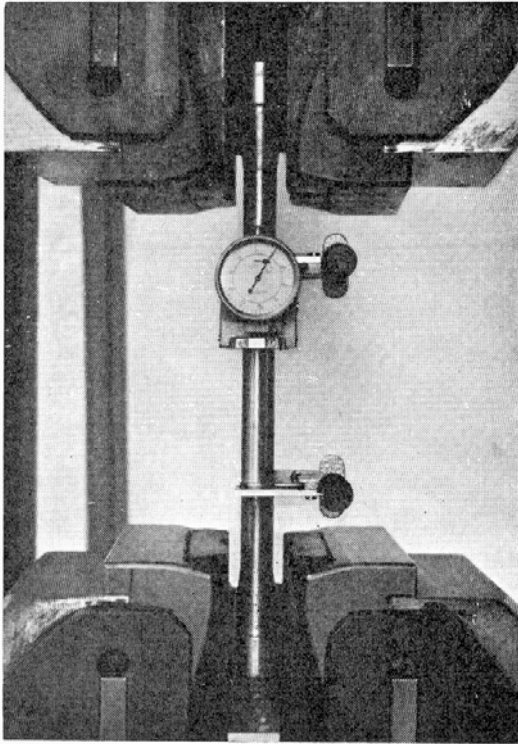


FIG. 3-3 a

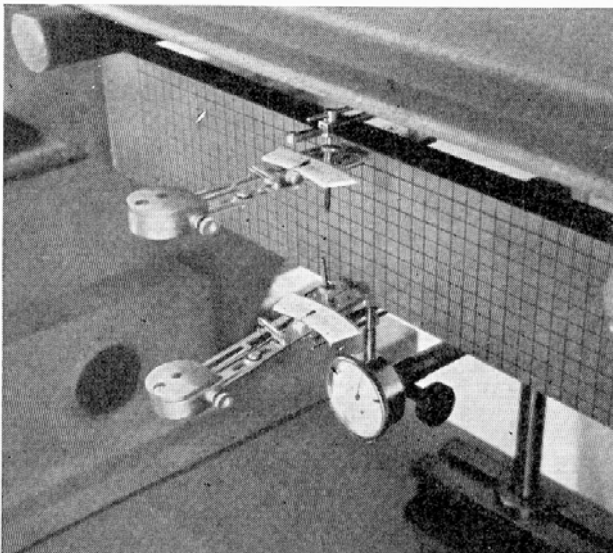
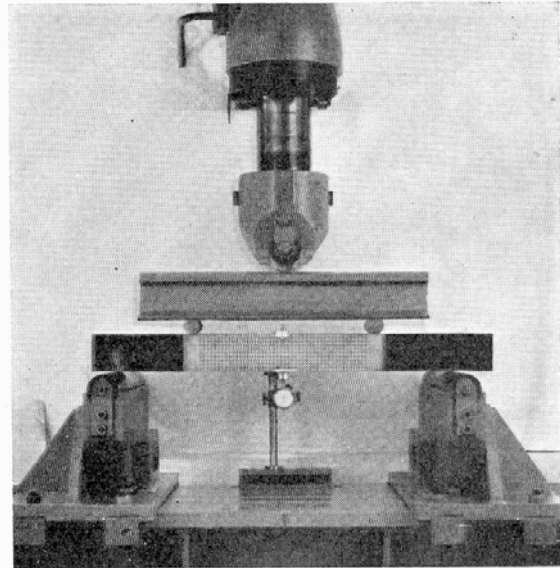
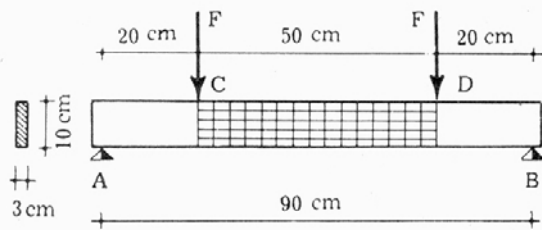


FIG. 3-3 b

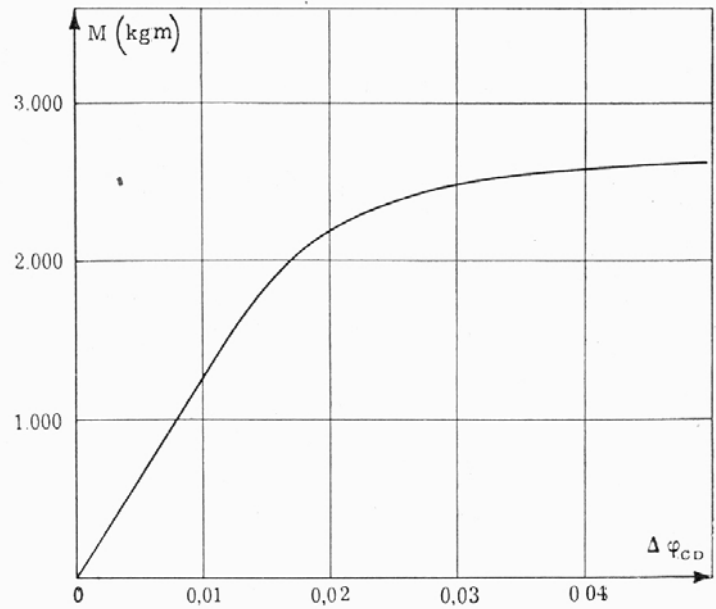
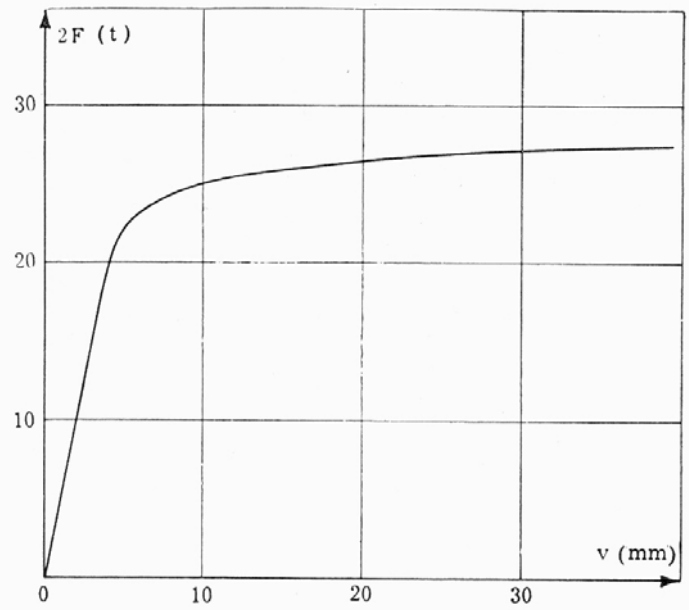
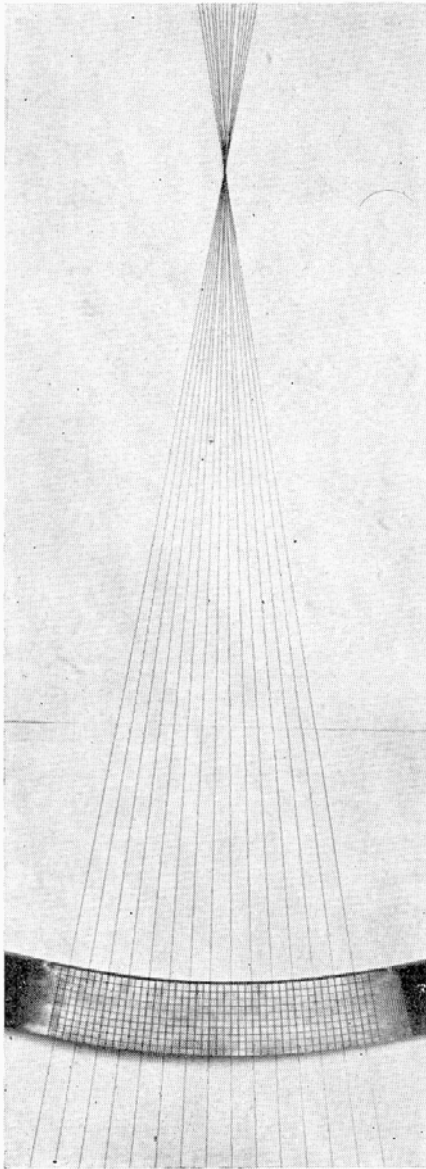


FIG. 3-3 c

citarsi quelle del *Tourkin*, (C.N.I.P.S., 1935) riportate dal *Rjanitsyn*, svolte tracciando sulla faccia di un provino metallico una serie di rette mutuamente ortogonali, di cui una avente la direzione dell'asse, e controllando che dopo forti deformazioni flessionali in campo plastico le linee ortogonali all'asse restano rette. In fig. 3-3 è documentata in sintesi una analoga esperienza eseguita recentemente presso il Laboratorio dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria di Napoli, a conferma di quanto detto innanzi.

Nelle ipotesi fatte, il diagramma delle ε_z per $M > M_s$ è ancora lineare, e il diagramma delle σ si presenta come nella fig. 3-2 d: per una certa altezza (e cioè per tutta la zona in cui ε_z è superiore a quella cui in fase elastica corrisponde $\sigma = \sigma''_o$) la σ è costante, per il tratto rimanente la σ varia linearmente, annullandosi in un punto C^* diverso da G . Un aumento dM del momento provoca in questa fase un aumento $d\varphi$ della rotazione $d\varphi$ pari a

$$d\varphi = \frac{dM dz}{EI^*} \quad (b)$$

dove I^* è il momento d'inerzia della sola parte di sezione che reagisce ancora elasticamente, rispetto alla parallela ad x condotta per il baricentro di tale parte.

Aumentando ancora M , si raggiunge il valore della tensione limite (σ'_o) anche al lembo inferiore; dopo di che il diagramma delle σ è quello della fig. 3-2 e, e l'espressione di $d\varphi$ è sempre la (b). Il valore massimo che M può attingere è quello per cui su tutta la sezione si instaura la σ limite,

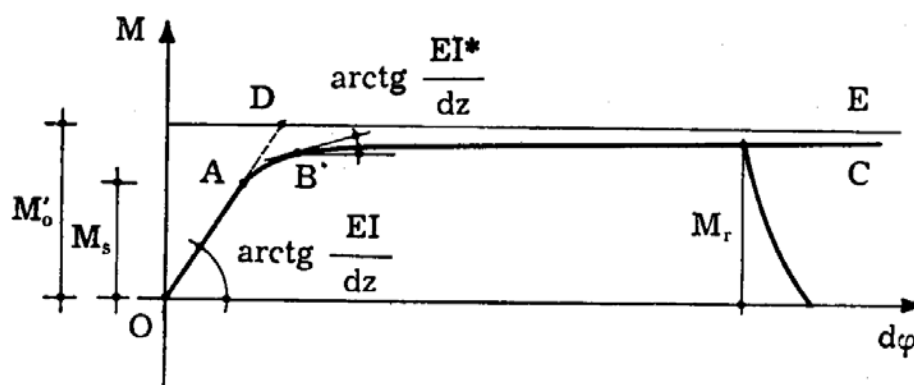


FIG. 3-4

a trazione o a compressione; è quello cioè cui corrisponde il diagramma delle σ della fig. 3-2 f. Esso si chiama M'_o per indicare che è il *momento limite positivo*; ad esso corrisponde un $d\varphi = \infty$, essendo $I^* = 0$.

Riportando in ascissa i valori di $d\varphi$ e in ordinata quelli di M si ottiene il diagramma della fig. 3-4. Per $0 \leq M \leq M_s$ il diagramma è una retta passante per l'origine e inclinata di $\arctg \frac{EI}{dz}$ sull'asse delle $d\varphi$, come si ricava dalla (a). Per $M_s \leq M \leq M'_0$ il diagramma è curvilineo; l'inclinazione EI^*/dz sull'asse delle $d\varphi$ diminuisce all'aumentare di M , e diviene nulla per $M = M'_0$. Poichè il diagramma delle ε è lineare sull'altezza della sezione, ed affine secondo il coefficiente $1/E$ al diagramma delle σ nel tratto a comportamento elastico, ad $M = M'_0$ corrispondono ε infinite, e quindi $d\varphi$ infinito.

L'angolo $d\varphi$ è fornito da

$$d\varphi = \frac{\varepsilon dz}{h}$$

essendo ε la dilatazione in corrispondenza della fibra alla distanza h generica dall'asse neutro, in zona elastica. Poichè per $M = M'_0$ è ovunque $\sigma = \sigma_0$, e quindi $\varepsilon > \varepsilon_0$, comunque sia piccola h , è pure $d\varphi = \infty$.

Ciò equivale a dire che il diagramma $M d\varphi$ ammette l'asintoto orizzontale $M = M'_0$ (retta DE della fig. 3-4). Tutto quanto sopra è stato tratto nell'ipotesi di diagramma $\sigma \varepsilon$ indefinito; poichè in realtà il diagramma $\sigma \varepsilon$ è limitato alla ε_r di rottura (fig. 1-4), il diagramma $M d\varphi$ è valido fino al valore M_r per cui la ε ad uno dei due lembi raggiunge il valore ε_r (fig. 3-4). Nel calcolo a rottura si fa invece l'ipotesi che il diagramma $M d\varphi$ sia indefinito, e possa confondersi con la bilatera ODE, ove il primo tratto OD rappresenta il periodo elastico, il secondo tratto DE il periodo plastico. Il diagramma ideale $M d\varphi$ che si pone a base del calcolo a rottura è quindi quello della fig. 3-5 a; i due tratti orizzontali sono a quota diversa M'_0 (momento limite positivo) ed M''_0 (momento limite negativo), uguali solo se $\sigma'_0 = \sigma''_0$, come si mostrerà meglio in seguito. Poichè il tratto del $d\varphi$ elastico è molto limitato rispetto a quello reale del $d\varphi$ plastico, si può anche assumere come diagramma $M d\varphi$ quello della fig. 5 b; esso poi è del tutto equivalente al diagramma della fig. 5 a, nell'ipotesi di tratto plastico indefinito.

Si avverte fin d'ora che in realtà perchè i risultati del calcolo a rottura siano validi non è necessario che il tratto del $d\varphi$ plastico sia indefinito, ma solo abbastanza lungo perchè si possano formare prima della rottura tutte le cerniere previste dal calcolo.

Sotto un momento M'_0 od M''_0 il tronco può quindi assumere qualsiasi valore $d\varphi$ della rotazione relativa; in ciò vi è perfetta analogia tra

il diagramma $M d\varphi$ della fig. 3-5 e quello $\sigma \varepsilon$ della fig. 3-2. L'analogia è anche nel fatto che il processo non è reversibile; sotto M'_0 costante il $d\varphi$ può avvenire solo nel verso stesso di M'_0 , e cioè in modo che le fibre superiori si accorcino e le inferiori si allungino, mentre un $d\varphi$ di segno contrario può aversi solo con diminuzione di M , e in fase elastica, secondo un tratto parallelo a quello iniziale (fig. 3-5 a); analogo comportamento si

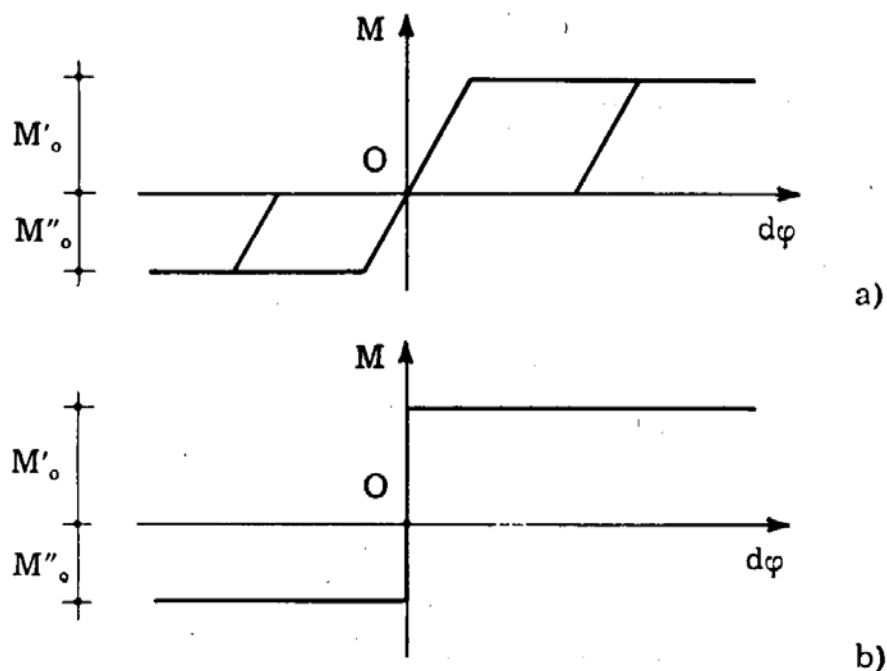


FIG. 3-5

ha sotto il momento limite negativo M''_0 . Da quanto sopra perciò si evince che se in una sezione di una trave si raggiunge il momento limite, al tronco elementare corrispondente è consentita, senza variazione del momento in esso agente, e nei limiti prima precisati circa il segno, una rotazione di qualsiasi ampiezza; il tronco funziona cioè come una cerniera con verso di rotazione obbligato (snodo unilaterale).

È questa la cosiddetta *cerniera plastica* o *cerniera di snervamento*. Essa, per sezioni simmetriche anche rispetto all'asse x e per $\sigma'_0 = \sigma''_0$, è situata in corrispondenza del baricentro G ; in genere è spostata rispetto a questo, e la sua posizione C (fig. 3-2) si determina unitamente alla ricerca di M'_0 ed M''_0 .

3. La determinazione del momento limite.

Si consideri una sezione con asse di simmetria y coniugato alla direzione ad esso normale x (fig. 6); la posizione dell'asse neutro in assetto

limite è definito dalla condizione di equilibrio alla traslazione lungo l'asse del solido. Deve cioè essere

$$\sigma'_o A_i = - \sigma''_o A_s \quad (1)$$

se il momento è positivo, e

$$\sigma''_o A_i = - \sigma'_o A_s \quad (2)$$

se il momento è negativo; A_i ed A_s sono le aree delle parti della sezione ubicate rispettivamente al disotto e al disopra dell'asse neutro. La posizione dell'asse neutro (la cui traccia è indicata nella fig. 3-6 con C' nel caso

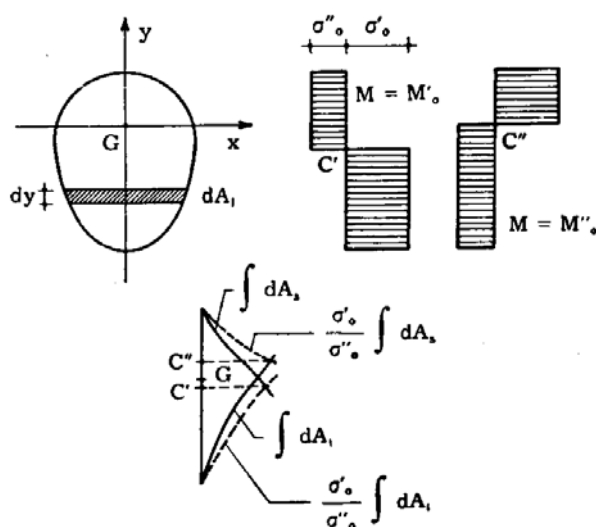


FIG. 3-6

di momento positivo, con C'' nel caso di momento negativo) si determina tracciando le due curve integrali delle aree dA definite da due corde parallele all'asse x e distanti dy , con origine il lembo inferiore ($\int dA_i$) e il lembo superiore ($\int dA_s$). L'intersezione della curva $\int dA_s$ con la curva

$$\frac{\sigma'_o}{\sigma''_o} \int dA_i$$

fornisce C' , l'intersezione della curva $\int dA_i$ con la curva

$$\frac{\sigma'_o}{\sigma''_o} \int dA_s$$

fornisce C'' . L'orizzontale per C' (fig. 3-7) incontra in H e K le due curve $\int dy \int dA_s$ e $\int dy \int dA_i$; la tangente in H alla curva $\int dy \int dA_s$ definisce nell'intersezione con AB il baricentro G'_s dell'area al disopra dell'asse neutro; la tangente in K alla curva $\int dy \int dA_i$ definisce nell'inter-

sezione con AB il baricentro G'_1 dell'area al disotto dell'asse neutro. Il

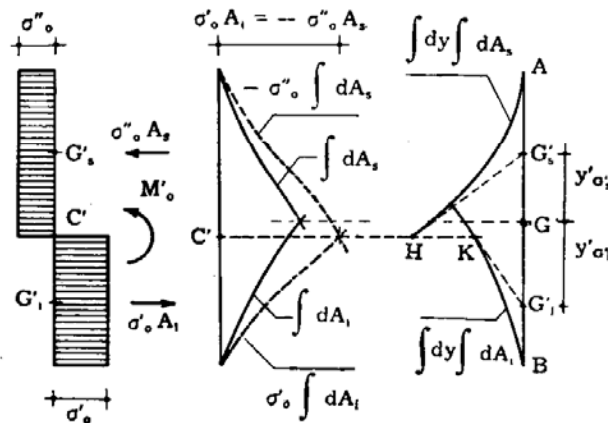


FIG. 3-7

momento limite M'_o è fornito da

$$M'_o = \sigma'_o A_t (y_{G'_1} + y_{G'_s}) . \tag{3}$$

In maniera analoga si ricercano i baricentro G''_1 e G''_s in presenza di mo-

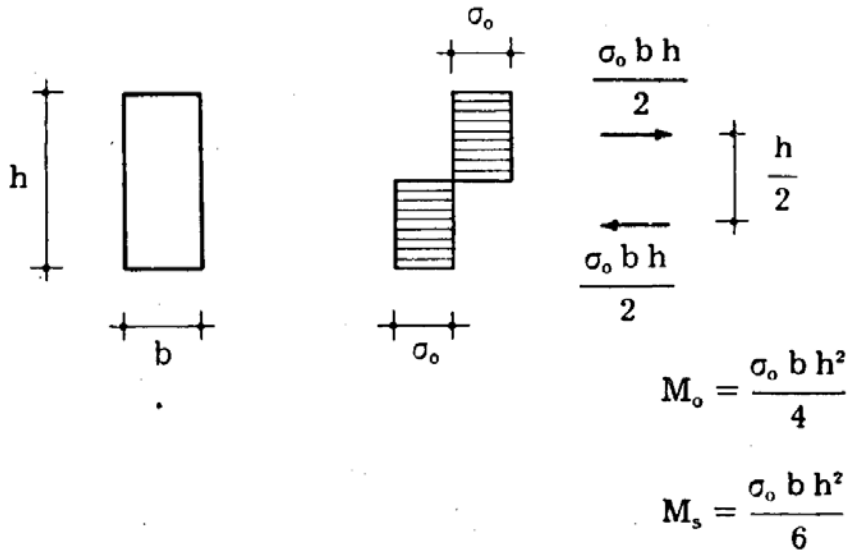

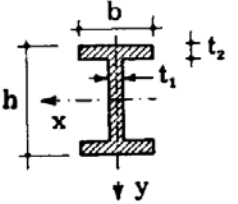
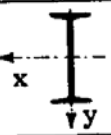
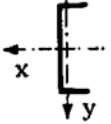
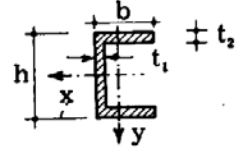
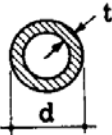
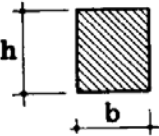
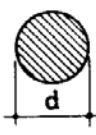
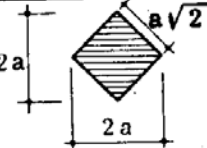
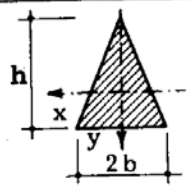


FIG. 3-8

mento negativo, e si calcola M''_o :

$$M''_o = - \sigma''_o A_t (y_{G''_1} + y_{G''_s}) . \tag{4}$$

Se è $\sigma'_o = - \sigma''_o$, C' coincide con C'' ed M'_o con $-M''_o$. Per sezione rettangolare, e per $\sigma'_o = - \sigma''_o$, è (fig. 3-8)

Sezione	Momento limite	Rapporto $\frac{M_o}{M_s}$
	$\sigma_o \frac{A h}{2}$	1,00
	asse x: $\sigma_o \left[b t_2 (h - t_2) + \frac{1}{4} t_1 (h - 2t_2)^2 \right]$ asse y: $\sigma_o \left[\frac{1}{2} b^2 t_2 + \frac{1}{4} (h - 2t_2) t_1^2 \right]$	—
		asse x: ~ 1,15 asse y: ~ 1,67
		asse x: ~ 1,17
	asse x: come per la sezione a doppio T	—
	$\sigma_o \frac{1}{6} d^3 \left[1 - \left(1 - \frac{2t}{d} \right)^3 \right]$	(per $t = \frac{1}{10} d$) 1,40 (per $t \ll d$) 1,27
	$\sigma_o \frac{b h^2}{4}$	1,50
	$\sigma_o \frac{d^3}{6}$	1,70
	$2 \sigma_o \frac{a^3}{3}$	2,00
	asse x: $\sigma_o b h^2 \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$ asse y: $\sigma_o \frac{b^2 h}{3}$	2,34 2,00

$$M_o = \frac{\sigma_o b h^2}{4}; \quad (5)$$

poichè il momento M_s corrispondente all'apparire delle prime deformazioni permanenti è pari a

$$M_s = 2 \frac{I \sigma_o}{h} = W \sigma_o = \frac{\sigma_o b h^2}{6}$$

risulta

$$\frac{M_o}{M_s} = 1,5.$$

Per sezione rombica, e per $\sigma'_o = -\sigma''_o$, è (fig. 3-9)

$$M_o = \frac{\sigma_o b h^2}{3}$$

$$M_s = \frac{\sigma_o b h^2}{6}$$

$$\frac{M_o}{M_s} = 2$$

Nella tabella di pag. 54 sono riportati i valori M_o/M_s per vari tipi di sezioni; si nota che nelle sezioni meglio utilizzate elasticamente, come i

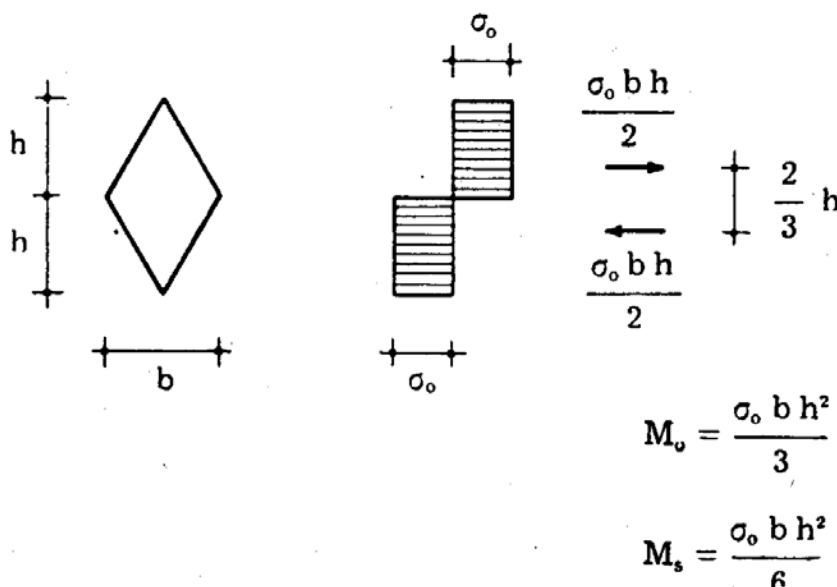


FIG. 3-9

profilati, il rapporto M_o/M_s è minore. Per una trave in c.a. a semplice armatura è $M'' = 0$; il valore di M'_o si ottiene supponendo completamente

plasticizzati a trazione l'armatura metallica, ed a compressione una zona

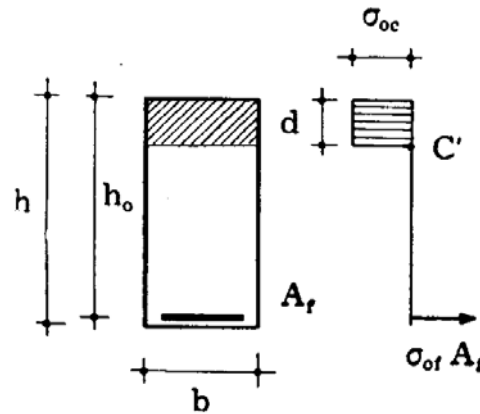


FIG. 3-10

di conglomerato di altezza d . Per sezione rettangolare (fig. 3-10) ponendo

$$\sigma'_{oc} = 0 \quad , \quad \sigma''_{oc} = -\sigma_{oc}$$

(σ_{oc} valore assoluto della tensione limite a compressione del conglomerato) risulta

$$b d \sigma_{oc} = \sigma_{of} A_f$$

$$d = \frac{\sigma_{of} A_f}{\sigma_{oc} b} \quad (6)$$

$$M'_o = \sigma_{of} A_f \left(h_0 - \frac{\sigma_{of} A_f}{2 \sigma_{oc} b} \right) \quad (7)$$

Per sezione a T, con i simboli della fig. 3-11, si ha

$$d = \frac{\sigma_{of} A_f}{\sigma_{oc} B} \quad \text{per } d < s$$

$$d = \frac{\sigma_{of} A_f - \sigma_{oc} s (B - b)}{\sigma_{oc} b} \quad \text{per } d > s .$$

Si ottiene perciò

$$M'_o = \sigma_{of} A_f \left(h_0 - \frac{\sigma_{of} A_f}{2 \sigma_{oc} B} \right) \quad \text{per } d < s$$

$$M'_o = \sigma_{oc} B s \left(h_0 - \frac{s}{2} \right) + (\sigma_{of} A_f - \sigma_{oc} B s) \left(h_0 - s - \frac{d-s}{2} \right) = \quad (8)$$

$$= \sigma_{of} A_f \left(h_0 - \frac{s+d}{2} \right) + \sigma_{oc} B s \frac{d}{2} \quad \text{per } d > s .$$

Per i valori più comuni delle armature e delle dimensioni della sezione risulta quasi sempre $d < s$. E' importante osservare che, essendo d mol-

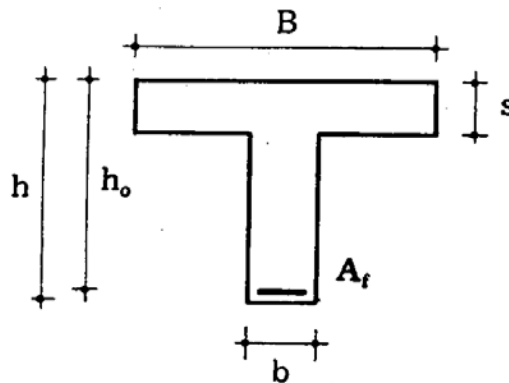


FIG. 3-11

to minore di h_0 , il momento limite M_0 non varia sensibilmente anche per notevoli variazioni di σ_{oc} ; il momento M'_0 dipende quindi molto più da σ_{of} che da σ_{oc} , e proprio questa circostanza permette di applicare il calcolo a rottura alla struttura in conglomerato armato, pur non essendo definibile un preciso valore di σ_{oc} , in dipendenza della forma del diagramma $\sigma \varepsilon$ per il conglomerato.

Se la sezione è a doppia armatura, un valore approssimato di M'_0 si ottiene trascurando il contributo dell'armatura compressa; se si vuole tenere conto di quest'ultima, chiamando A'_f la sua area ed A_f l'area dell'ar-

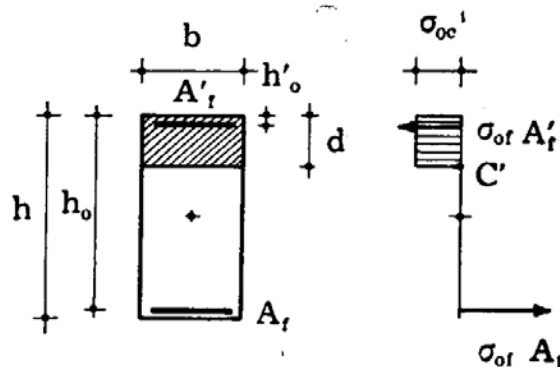


FIG. 3-12

matura tesa, per $A'_f < A_f$ si può ammettere tutta l'armatura compressa plasticizzata in condizioni limiti. In tal caso (fig. 3-12) risulta

$$\sigma_{of} A_f = \sigma_{of} A'_f + \sigma_{oc} b d$$

$$d = \frac{\sigma_{of} A_f - \sigma_{of} A'_f}{\sigma_{oc} b} \quad (9)$$

$$M'_o = \sigma_{of} A'_f (h_o - h'_o) + \sigma_{oc} b d \left(h_o - \frac{d}{2} \right). \quad (10)$$

Le forze costituenti la coppia interna pari alla (3-7) e alla (3-10) sono uguali, e date da $\sigma_{of} A'_f$; il braccio nel primo caso è $b_1 = h_o - d/2$, nel secondo caso è la distanza b_2 tra la $\sigma_{of} A'_f$ e la risultante della $\sigma_{of} A'_f$ e $\sigma_{oc} b d$. Se $h'_o < d/2$, ove d è calcolato con la (3-6), la $\sigma_{of} A'_f$ sposta verso l'alto la risultante di compressione; il contrario accade se $h'_o > d/2$.

Il primo caso si dà con maggior frequenza; in esso il trascurare la presenza dell'armatura compressa porta a calcolare momenti limiti in difetto, e perciò ad operare a vantaggio della sicurezza.

Se $A'_f > A_f$, per ragioni di equilibrio non si può supporre l'intera area metallica A'_f plasticizzata. Se A'_f assorbe una forza F , è

$$\sigma_{of} A'_f = F + \sigma_{oc} b d$$

$$d = \frac{\sigma_{of} A'_f - F}{\sigma_{oc} b}$$

$$M'_o = F (h_o - h'_o) + \sigma_{oc} b d \left(h_o - \frac{d}{2} \right)$$

La condizione

$$\frac{d M'_o}{d d} = \frac{\partial M'_o}{\partial d} + \frac{\partial M'_o}{\partial F} \frac{d F}{d d} = 0$$

porta a

$$\sigma_{oc} b h_o - \sigma_{oc} b d - (h_o - h'_o) \sigma_{oc} b = 0$$

da cui

$$d = h'_o$$

$$F = \sigma_{of} A'_f - \sigma_{oc} b h'_o$$

$$M'_o = \sigma_{of} A'_f (h_o - h'_o) + \sigma_{oc} b \frac{h'_o}{2}. \quad (11)$$

4. Il teorema fondamentale nel caso della flessione.

La rottura è raggiunta quando, all'aumentare di tutti i carichi o di una loro parte, nella struttura si sono formate cerniere plastiche in numero e posizione tali da rendere labile l'intera struttura o una sua parte. Come nel caso delle travature reticolari, può seguirsi il procedimento *step by step* (cap. II, § 1). Secondo questo, si calcola il valore k_1 del mol-

tiplicatore dei carichi F per cui in una prima sezione S_1 si attinge il valore del momento limite M_{o1} (fig. 3-13 a). Si prende poi in esame la struttura, ove in S_1 è introdotta una cerniera, soggetta alle forze $(k - k_1) F$, traendo il valore k_2 di k per cui il momento flettente, somma di quello

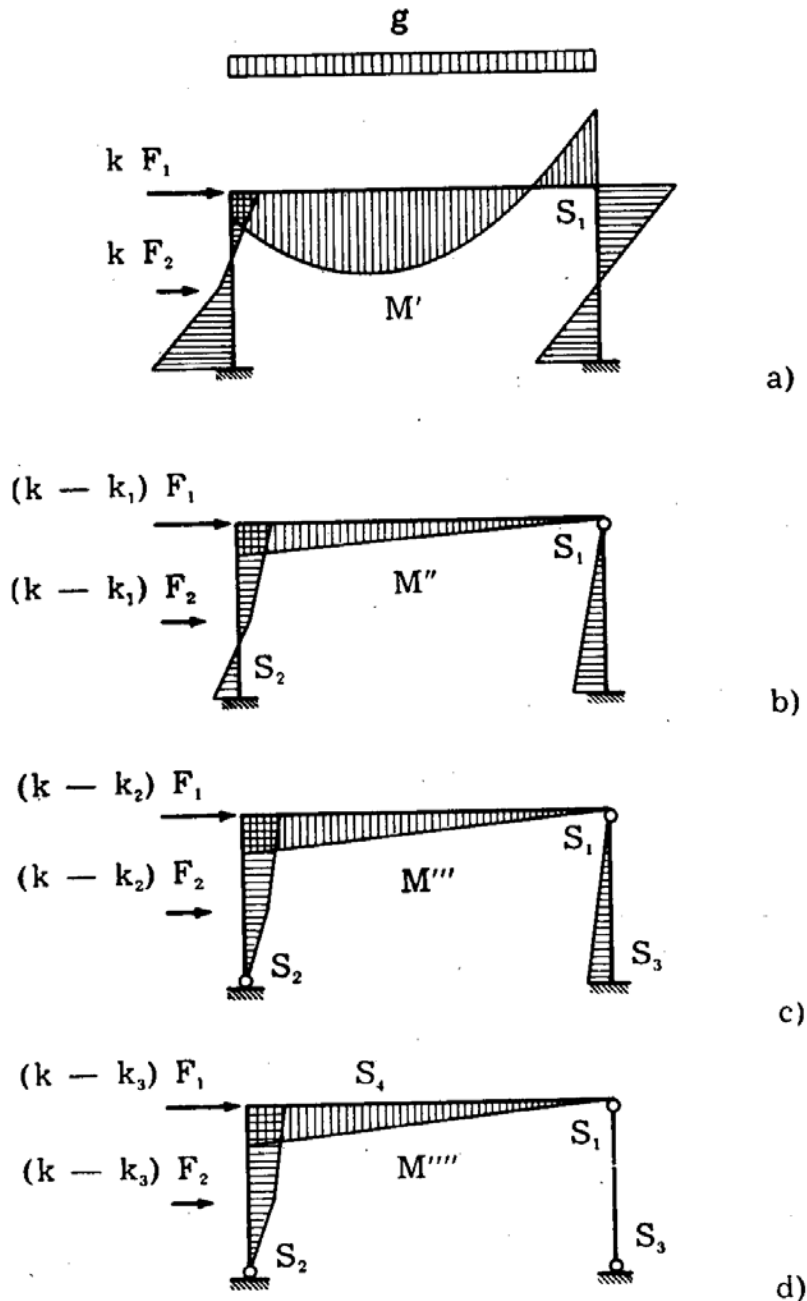
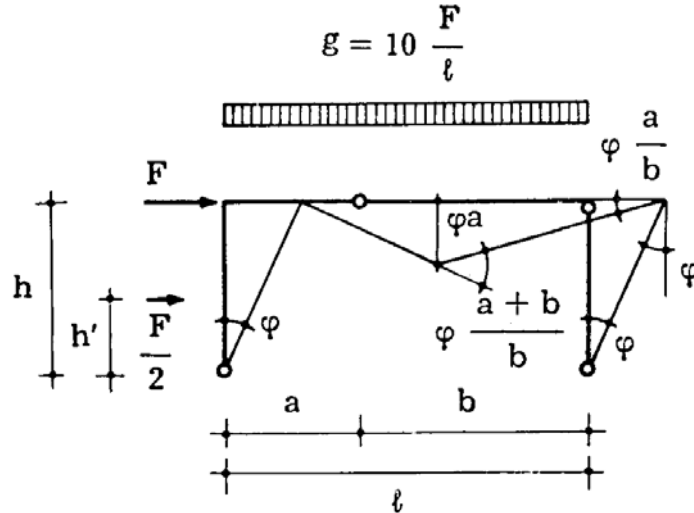


FIG. 3-13

calcolato sulla prima struttura per $k = k_1$ e di quello calcolato sulla seconda struttura, raggiunge in una seconda sezione S_2 il momento limite M_{o2} (fig. 3-13 b). Si continua così fino a che la struttura o una sua parte diventano labili; il valore di k per cui ciò accade è il coefficiente di si-

curezza s (per carichi proporzionali) o s_a (per carichi non proporzionali).

Se si conosce l'ubicazione delle cerniere plastiche, il coefficiente di sicurezza si ricava immediatamente attraverso la condizione di equilibrio del sistema olonomo così come si presenta all'atto del collasso, condizione esprimibile analiticamente in modo molto semplice attraverso il principio dei lavori virtuali (fig. 3-14). E' questo il già esposto procedimento al limite di rottura (cap. II, § 2 e segg.). Esso non consente il cal-



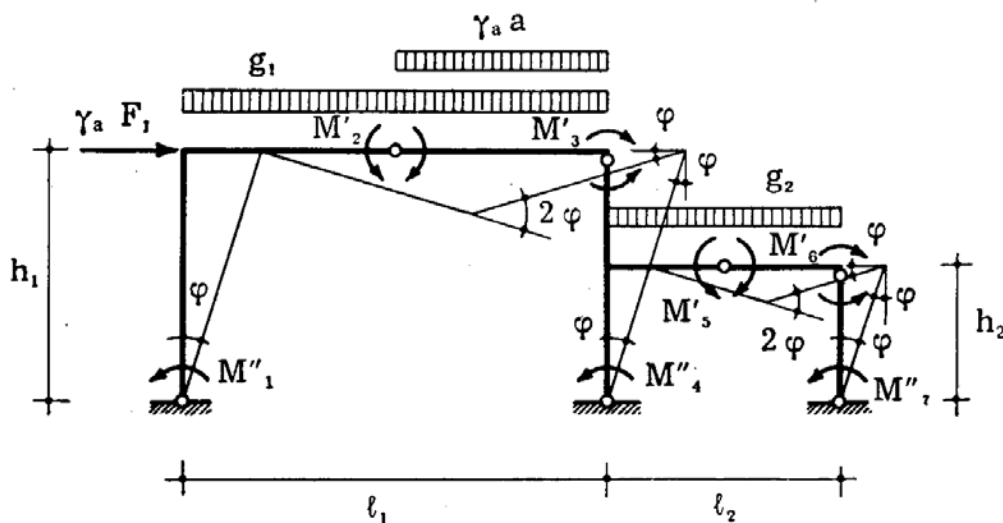
$$\begin{aligned}
 & g = 10 \frac{F}{l} \\
 & s_a F \varphi h + s_a \frac{F}{2} \varphi h' + g \frac{\varphi a l}{2} = \\
 & = M_{or} \left(\varphi + \varphi + \frac{a+b}{b} \varphi \right) + M_{ot} \frac{a+b}{b} \varphi \\
 & s_a = \frac{\frac{a+3b}{b} M_{or} + \frac{a+b}{b} M_{ot} - g \frac{a l}{2}}{F h + \frac{F}{2} h'}
 \end{aligned}$$

FIG. 3-14

colo delle deformazioni permanenti massime, mentre il procedimento *step by step* fornisce le rotazioni relative tra le cerniere plastiche sullo schema ideale, il che permette almeno di farsi un'idea della tollerabilità delle deformazioni permanenti massime. E' da dire però a tale proposito che anche il procedimento al limite di rottura offre la possibilità

di determinare, sia pure in maniera un po' sommaria, gli spostamenti precedenti immediatamente la fase di crollo.

Inoltre, il procedimento al limite di rottura presuppone la conoscenza dell'ubicazione delle cerniere plastiche; ma questa difficoltà si supera utilizzando il teorema fondamentale del calcolo a rottura. Questo teorema è stato già dimostrato al cap. II, § 3 per le strutture soggette a puro sforzo assiale. Limitandosi al caso del carico non proporzionale, che comprende come caso particolare quello del carico proporzionale, un numero ϕ_a si definisce *moltiplicatore staticamente ammissibile* delle forze a se esiste



$$\begin{aligned} & \gamma_a F_1 h_1 \varphi + \gamma_a a \varphi \frac{l_1}{2} \frac{l_1}{4} + g_1 \varphi \frac{l_1}{2} \frac{l_1}{2} + g_2 \varphi \frac{l_2}{2} \frac{l_2}{2} = \\ & = M''_1 \varphi + M'_2 2\varphi + M'_3 2\varphi + M''_4 \varphi + M'_5 2\varphi + M'_6 2\varphi + M''_7 \varphi \\ & \gamma_a = \frac{M''_1 + 2M'_2 + 2M'_3 + M''_4 + 2M'_5 + 2M'_6 + M''_7 - g_1 \frac{l_1^2}{4} - g_2 \frac{l_2^2}{4}}{F_1 h_1 + a \frac{l_1^2}{8}} \end{aligned}$$

FIG. 3-15

almeno un insieme di iperstatiche che assieme alle forze $g + \phi_a a$ dia luogo ad un diagramma di momenti flettenti M_ψ che ovunque rispettino la disuguaglianza

$$M''_o \leq M_\psi \leq M'_o \quad (12)$$

Un numero γ_a si definisce *moltiplicatore cinematicamente sufficiente* delle forze a se ottenuto o ottenibile come coefficiente di sicurezza da una

scelta arbitraria delle sezioni di formazione delle cerniere plastiche; esso è fornito (fig. 3-15) dall'equazione dei lavori virtuali:

$$L_g + \gamma_a L_a + L_M = 0, \quad (13)$$

ove L_g è il lavoro dei carichi fissi g , L_a il lavoro delle forze incrementabili a , L_M il lavoro compiuto dalle coppie limiti.

La deformata si sceglie in genere di segno tale da corrispondere a quella di incipiente collasso; in tal caso è $L_a > 0$, perchè il lavoro compiuto dall'incremento del carico incrementabile per effetto degli spostamenti di collasso deve essere positivo. Poichè L_M è negativo (anzi il generico termine della somma costituente L_M è negativo, poichè è il lavoro compiuto dalle caratteristiche limiti agenti sulle due facce unite dalla generica cerniera plastica per effetto della rotazione relativa di quest'ultima effettuata nel verso dell'avvenuta plasticizzazione), ed $L_M + L_g$ è pur esso negativo (in caso contrario sarebbe $\gamma_g = -L_M/L_g < 1$), risulta

$$\gamma_a = -\frac{L_M + L_g}{L_a} > 0. \quad (14)$$

Dati un generico γ_a ed un generico ψ_a , il teorema fondamentale assicura che è sempre

$$\psi_a \leq \gamma_a.$$

Ottenuto un γ_a , si traccia il diagramma dei momenti flettenti M connessi con le forze $g + \gamma_a a$ e con le coppie limiti; esso è univocamente determinato nella parte labilizzata della struttura, mentre nella rimanente parte (che esiste solo nel caso del collasso parziale) si può tracciare come si vuole, con il solo rispetto della statica.

Detto M_g un qualsiasi diagramma di momenti in equilibrio con g , (che si suppone ovunque rispettante le condizioni di plasticizzazione), si esegua, in corrispondenza di ogni sezione ove non è rispettata la condizione $M''_o \leq M \leq M'_o$, il rapporto

$$\frac{M - M_g}{M'_o - M_g},$$

dove per M'_o si sceglie il valore M'_o se $M > 0$, M''_o se $M < 0$. Sia ρ il più alto di tali rapporti; risulta

$$\frac{\gamma_a}{\rho} = \psi_a. \quad (15)$$

Infatti i momenti

$$M_g + \frac{M - M_g}{\rho}$$

sono in equilibrio con i carichi

$$g + \frac{\gamma_a}{\rho} a ;$$

inoltre risulta in ogni sezione

$$M''_o - M_g \leq \frac{M - M_g}{\rho} \leq M'_o - M_g$$

e cioè

$$M''_o \leq M_g + \frac{M - M_g}{\rho} \leq M'_o .$$

Può scriversi perciò

$$\frac{\gamma_a}{\rho} \leq s_a \leq \gamma_a . \quad (16)$$

Ottenuto così un intervallo di definizione del coefficiente di sicurezza, se esso è troppo ampio si passa ad un secondo tentativo per restringerlo; conviene nel calcolo del nuovo γ_a prevedere cerniere plastiche nelle sezioni ove, nel primo tentativo, il rapporto

$$\frac{M - M_g}{M_o - M_g}$$

risulta più elevato.

5. Esempi elementari di calcolo al limite di rottura.

Si prenda in esame il portale della fig. 3-16. Il traverso è soggetto al

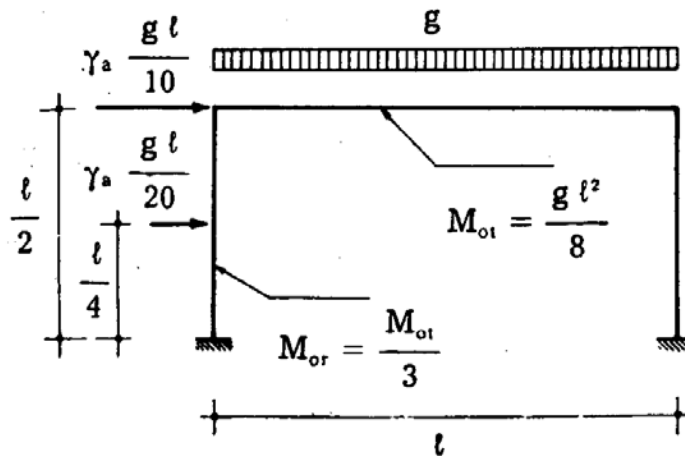


FIG. 3-16

peso proprio g , il ritto di sinistra è soggetto alle due forze orizzontali

$$F_1 = \frac{gl}{10} \quad \text{ed} \quad F_2 = \frac{gl}{20};$$

per il traverso è

$$M'_o = -M''_o = M_{ot} = \frac{gl^2}{8},$$

per i ritti

$$M'_o = -M''_o = M_{or} = \frac{M_{ot}}{3}.$$

Si ricerca il coefficiente di sicurezza relativo alle forze orizzontali. In un

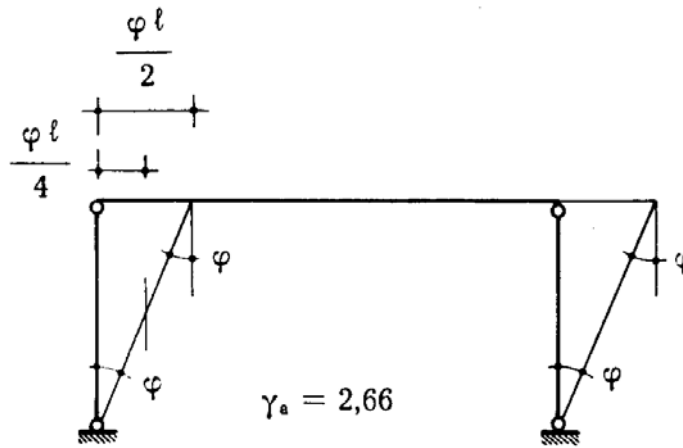


FIG. 3-17

primo tentativo si ipotizza il meccanismo della fig. 3-17; la (3-13) porge, essendo $L_g = 0$,

$$4 \frac{M_{ot}}{3} \varphi = \gamma_a \left(\frac{gl}{10} \varphi \frac{l}{2} + \frac{gl}{20} \varphi \frac{l}{4} \right)$$

da cui

$$\frac{4}{3} M_{ot} = \frac{5}{80} \gamma_a gl^2 = \frac{5}{10} \gamma_a M_{ot} \quad (c)$$

$$\gamma_a = \frac{40}{15} = 2,66.$$

Il diagramma dei momenti M connessi con le forze g e $\gamma_a F$, e con le coppie limiti, è quello della fig. 3-18; risulta $M > M'_o$ in un tratto del traverso a sinistra della sezione di mezzeria. E' perciò $s_a < 2,66$. Per

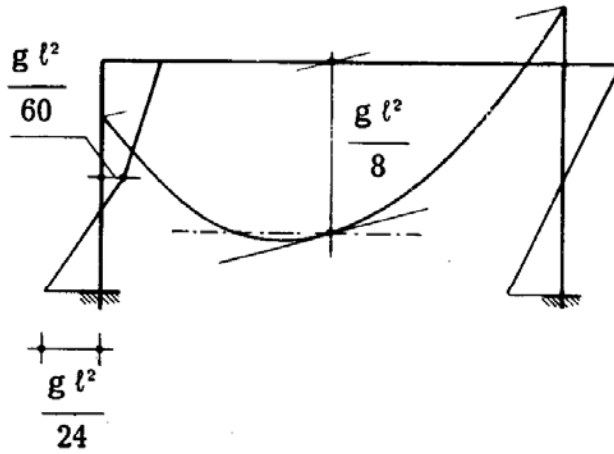


FIG. 3-18

ottenere un intervallo in cui s_a sia compreso, si assume come diagramma compatibile dei momenti M_g derivanti dal carico fisso quello della

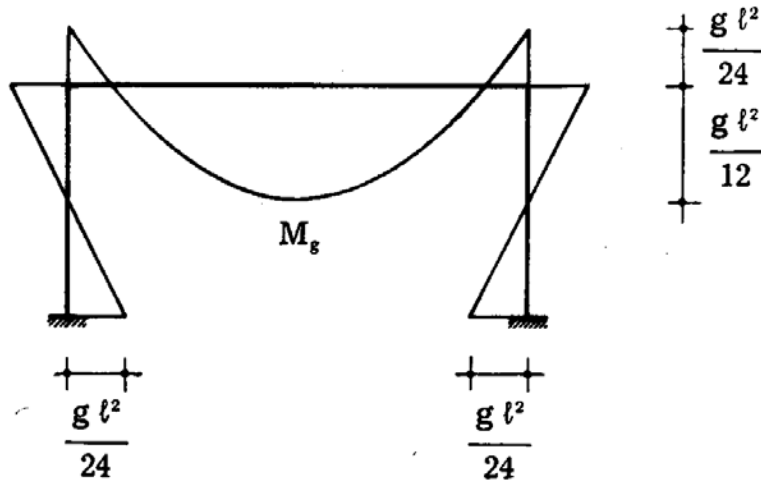


FIG. 3-19

fig. 3-19. I diagrammi $M - M_g$ ed $M_o - M_g$ si riportano nella fig. 3-20;

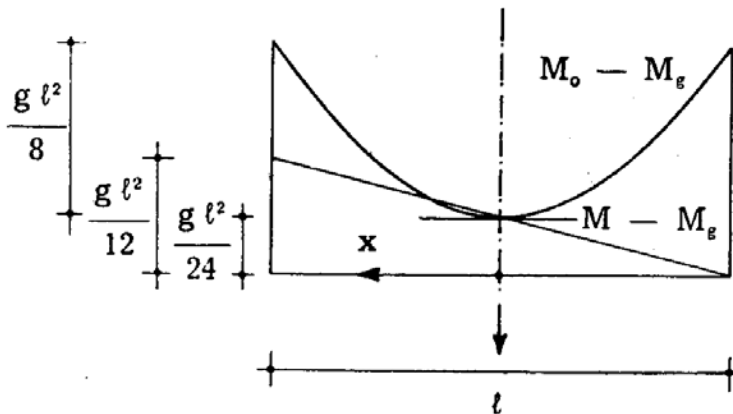


FIG. 3-20

la ricerca del massimo rapporto tra le ordinate corrispondenti dei due