

CAPITOLO VI
TORSIONE E TAGLIO

1. Torsione.

Si ammette che in uno stato di tensione tangenziale pura ($\sigma_x = \tau$, $\sigma_y = -\tau$, $\sigma_z = 0$), quale per esempio si verifica nella torsione, il diagramma $\tau \gamma$ sia identico nella forma a quello $\sigma \varepsilon$ già accettato per i regimi

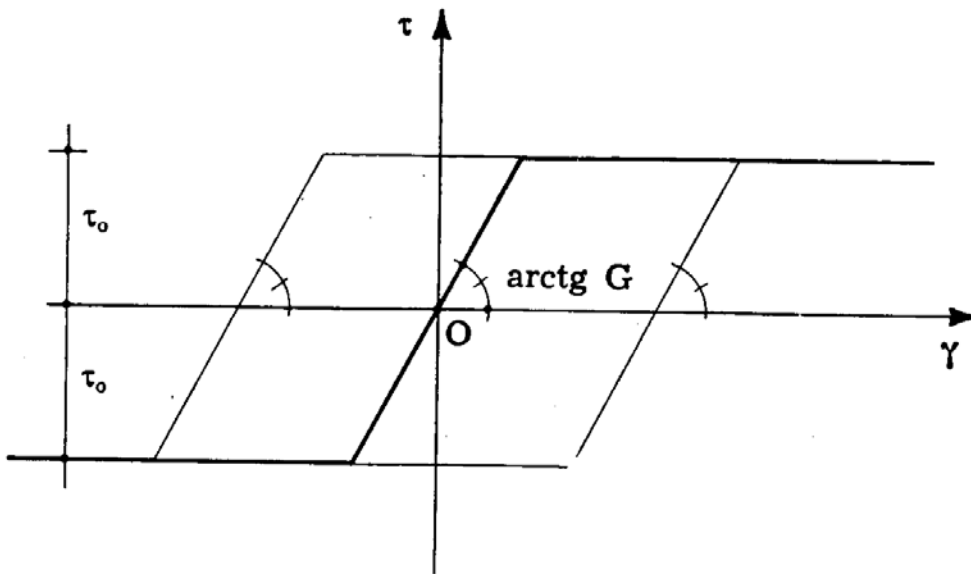


FIG. 6-1

tensionali monoassiali ($\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$); e cioè esso consta (fig. 6-1) di un tratto a carattere elastico perfetto

$$\frac{\tau}{\gamma} = G$$

e di un tratto a carattere plastico perfetto

$$\tau = \tau_0 .$$

Nella trattazione della torsione attraverso la funzione di flusso (Scienza delle Costruzioni, Cap. XIV, § 10) la posizione

$$\begin{aligned}\tau_{zx} &= \frac{\partial F}{\partial y} \\ \tau_{zy} &= - \frac{\partial F}{\partial x}\end{aligned}\tag{1}$$

è valida anche in regime elasto plastico; essa infatti corrisponde a soddisfare la condizione

$$\text{div. } \bar{\tau}_z = 0 ,$$

che è una condizione di equilibrio, da rispettare comunque. Non è più da rispettare invece la condizione

$$\text{rot } \bar{\tau}_z = \text{cost}$$

che corrisponde alla

$$\Delta_2 F = - r ,\tag{a}$$

e che è una condizione di congruenza. Alla (5-1), in luogo della (a) si abbina la condizione di plasticizzazione

$$\tau \leq \tau_0 .\tag{2}$$

Dalle (6-1) deriva (loco citato) che il flusso del vettore τ_z attraverso una qualsiasi curva chiusa, in un dominio mono o pluriconnesso, è nullo; la F può ancora chiamarsi perciò *funzione di flusso*. Inoltre su una qualsiasi linea di flusso delle τ_z la F ha un valore costante, e ciò accade in particolare in corrispondenza dei contorni esterno o interno, in cui le costanti assumono però valori diversi per ciascun contorno. Le linee di flusso delle τ_z coincidono perciò con le linee di livello del solido $F(x, y) = z$.

Si conserva pure la proprietà

$$\tau_z = - \frac{\partial F}{\partial n}\tag{3}$$

(loco citato for. 14-44); il valore della τ_z in un punto P coincide quindi (fig. 6-2) con il valore della derivata direzionale di F effettuata secondo la

normale in P alla traiettoria di τ_z passante per P, e cioè con la *pendenza* della superficie $F(x, y) = z$ nel punto P_F dove la normale per P al piano x, y incontra la superficie stessa (inclinazione in P_F della linea c ottenuta sezionando la superficie $F(x, y) = z$ con il piano normale ad x, y e pas-

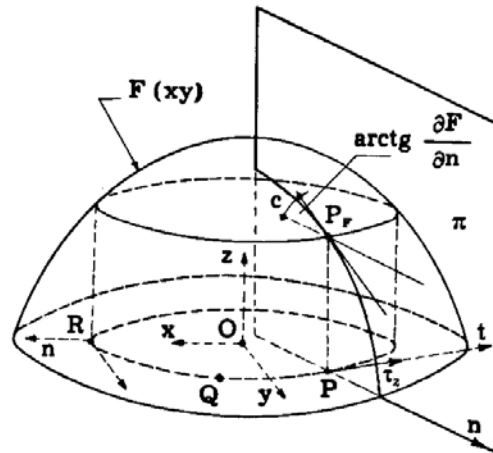


FIG. 6-2

sante per la normale in P_F alla curva di livello). Il segno della (6-3) assicura che l'osservatore che discende seguendo la superficie $F(x, y) = z$ vede il vettore τ_z positivo orientato alla sua sinistra.

E' ancora valida anche la relazione

$$M_t = 2 V . \tag{4}$$

Il problema è quindi risolto se si riesce a costruire sulla sezione retta una superficie che si appoggi al contorno esterno, che abbia valore costante dell'ordinata lungo ogni contorno interno, e che sia caratterizzata da pendenza costante (cond. 6-2). Si avverte subito che questa è una soluzione del problema, ma non può in rigore assicurarsi che sia l'unica.

Un'idea di tale superficie si può avere spandendo della sabbia su una superficie della stessa forma della sezione retta (*analogia del cono di sabbia, Nadai*); la costruzione geometrica è immediata attraverso il disegno delle linee di livello. Fissata la distanza Δz tra i piani di tali linee, e la pendenza p costante, si disegna la prima linea interna al contorno, e distante da questa, in ogni punto, del segmento costante $\Delta z/p$. Analogamente si procede per le altre linee (fig. 6-3 a). Il procedimento è valido anche per sezioni con cavità (fig. 6-3 b).

Dopo il disegno delle linee di livello, il volume V è immediatamente determinabile sommando quelli delle singole fette di altezza Δz . Per

una sezione circolare di raggio R la superficie F è un cono di altezza $-pR = \tau_0 R$; quindi risulta

$$V = \frac{\pi R^3 \tau_0}{3}$$

ed il momento limite è

$$M_{to} = \frac{2}{3} \pi R^3 \tau_0 . \quad (5)$$

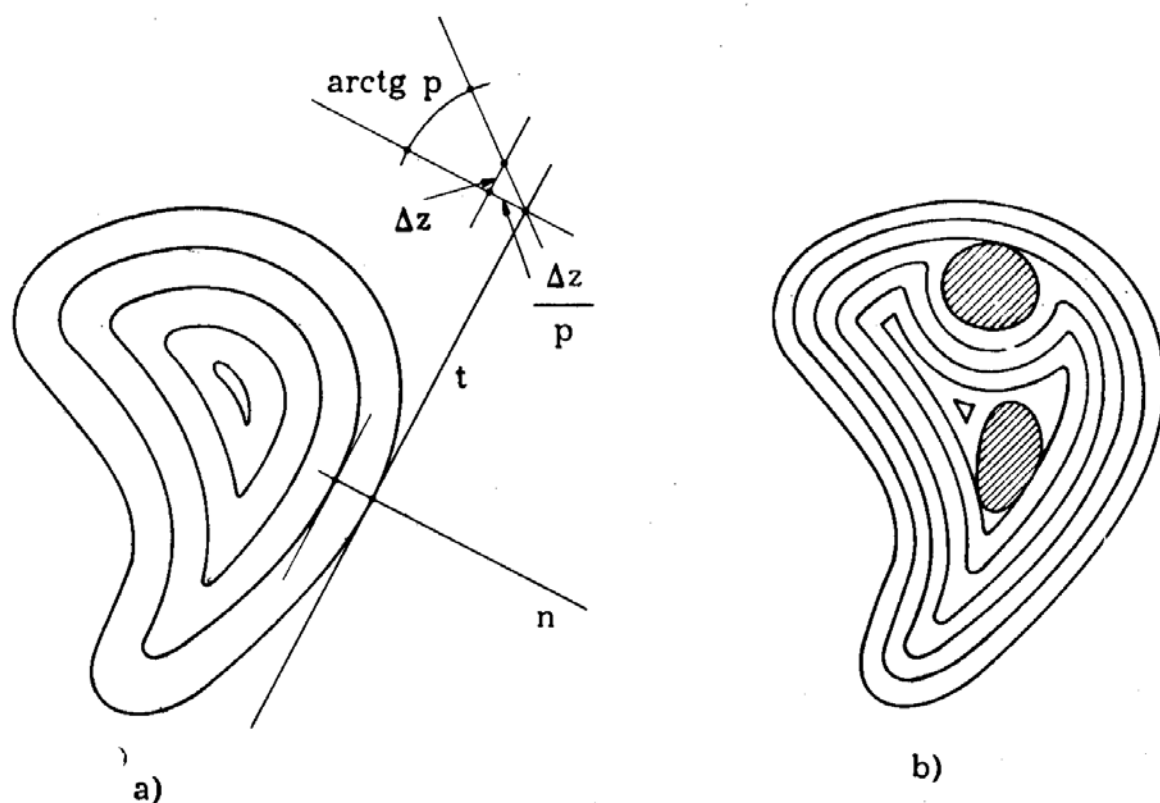


FIG. 6-3

Il rapporto tra il momento M_{to} e quello M_{ts} di prima plasticizzazione è pari a (14-31)

$$\frac{M_{to}}{M_{ts}} = \frac{\frac{2}{3} \pi R^3 \tau_0}{\frac{\pi R^3 \tau_0}{2}} = \frac{4}{3} \cong 1,33 .$$

Nel quadrato di lato l , la superficie è una piramide di altezza $-p \frac{l}{2} = \tau_0 \frac{l}{2}$. E' perciò (loco citato § 14-22)

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{l^3}{6} \tau_0 \\
 M_{to} &= \frac{l^3}{3} \tau_0 \\
 \frac{M_{to}}{M_{ts}} &= \frac{\frac{l^3}{3} \tau_0}{0,208 l^3 \tau_0} \cong 1,6 .
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Per un rettangolo di lati b e h ($h > b$) la funzione F risulta quella

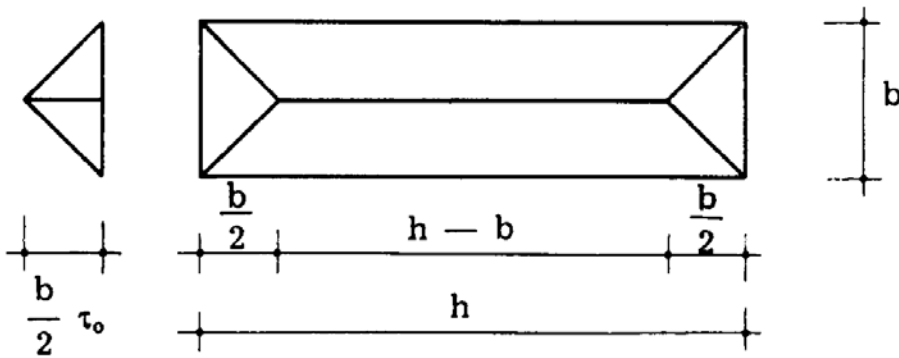


FIG. 6-4

della fig. 6-4, costituita da un prisma retto e dalla somma di due semi-piramidi. E' perciò

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} b \frac{b}{2} \tau_0 (h - b) + \frac{1}{3} b^2 \frac{b}{2} \tau_0 = \frac{b^2 \tau_0}{12} (3h - b) \\
 M_{to} &= \frac{b^2}{6} (3h - b) \tau_0 .
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Per una sezione rettangolare allungata $b \times h$ ($h > b$) è (loco citato § 14-17)

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{h b^2}{4} \tau_0 \\
 M_{to} &= \frac{h b^2}{2} \tau_0 \\
 \frac{M_{to}}{M_{ts}} &= \frac{\frac{h b^2}{2} \tau_0}{\frac{h b^2}{3} \tau_0} = 1,5 .
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Per un profilato o un insieme di profilati, ed in genere per una sezione aperta riducibile ad uno o più rettangoli allungati, il rapporto M_{to}/M_{ts} rimane pari ad 1,5; ciò sempre che la lunghezza della trave, in rapporto alle dimensioni della sezione retta, sia notevole.

2. La torsione nelle sezioni sottili chiuse.

Nel caso della sezione doppiamente connessa (loco citato § 14-21) la formula di *Bredt* rimane invariata, essendo poggiata su considerazioni di equilibrio. E' perciò in rigore, chiamando A l'area racchiusa nella linea media e δ_{min} lo spessore minimo,

$$M_{to} = 2 A \tau_o \delta_{min} \quad (9)$$

$$\frac{M_{to}}{M_{ts}} = 1 .$$

Nel caso delle sezioni più volte connesse, resta valida la condizione $\tau\delta = \text{cost}$ per ogni canale, e restano valide le relazioni di equilibrio nei nodi e quella di equilibrio intorno all'asse z ; cadono invece le relazioni basate sull'applicazione del teorema di *Stokes*, in cui interviene la costanza della rotazione di τ_z , e cioè una condizione di congruenza. Il nu-

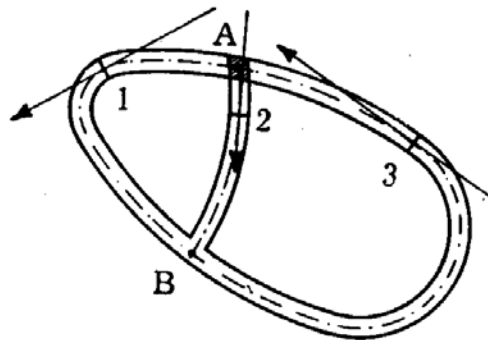


FIG. 6-5

mero delle incognite è perciò maggiore di quello delle equazioni, e può intervenire una redistribuzione delle tensioni, con maggiorazione del rapporto M_{to}/M_{ts} rispetto all'unità. Nel caso della fig. 6-5 si hanno le due equazioni di equilibrio

$$\tau_1 \delta_1 + \tau_2 \delta_2 + \tau_3 \delta_3 = 0 \quad (b)$$

$$2 \tau_1 \delta_1 A_{12} - 2 \tau_3 \delta_3 A_{32} = M_{to} ,$$

tra le tre incognite $\tau_1 \tau_2 \tau_3$. Si può quindi imporre che τ_1 e τ_3 siano pari a τ_0 ed a $-\tau_0$, ricavando così M_{t0} :

$$M_{t0} = 2 (\delta_{1 \text{ min}} A_{12} + \delta_{3 \text{ min}} A_{32}) \tau_0 . \tag{10}$$

Ne viene come conseguenza dalla (b)

$$\tau_2 \delta_2 = \tau_0 (\delta_{3 \text{ min}} - \delta_{1 \text{ min}}) .$$

Perchè la (6-10) sia valida è ovviamente necessario che sia

$$\tau_{2 \text{ max}} \leq \tau_0 ;$$

in caso contrario nella prima delle (b) si fissano τ_1 e τ_2 pari a τ_0 , ricavando il valore di $\tau_3 \delta_3$ che si pone nella seconda delle (b) stesse.

3. Influenza del taglio sul valore del momento flettente limite.

La presenza del taglio può far diminuire sensibilmente il valore del momento limite; ciò può accadere nelle sezioni di applicazione di forze concentrate, esterne o di reazione. Per valutare l'ordine di grandezza di tali variazioni, si fa riferimento alla sezione rettangolare sollecitata a flessione secondo una mediana. Si fa l'ipotesi semplificativa che la distribuzione delle tensioni lungo l'altezza sia la stessa (fig. 6-6) che si verifi-

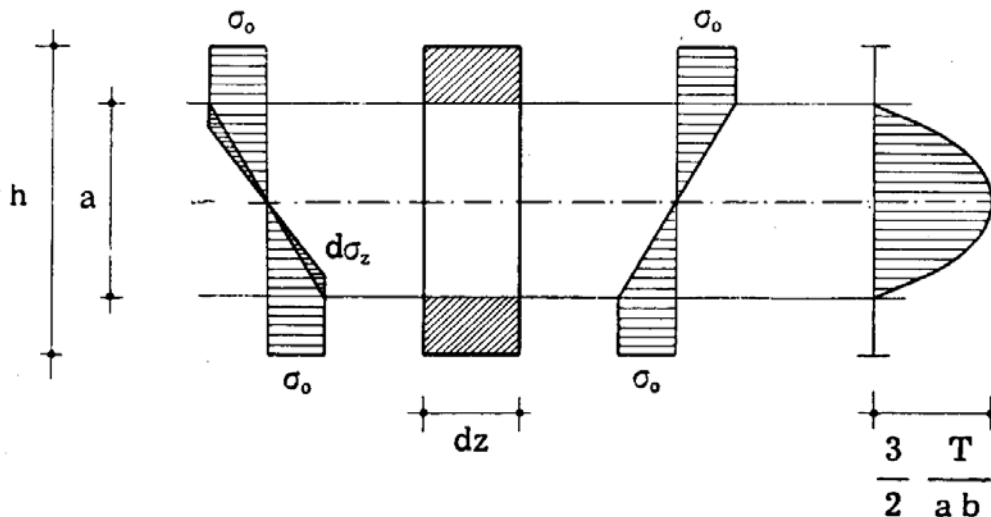


FIG. 6-6

cherebbe in assenza di taglio, e cioè sia costituita da due tratti estremi di valore costante (zone plasticizzate) e di un tratto centrale ad andamento

lineare (zona a comportamento elastico). Ripetendo il ragionamento a base della trattazione di *Jourawski* (Scienza delle Costruzioni Cap. XV, § 5), che resta invariato, le $\tau_{yz} b dz$ risultano equilibrate dalla risultante delle $d\sigma_z \cdot dA$, che sono generate dalla variazione di momento $T dz$ sulla sola parte centrale a comportamento elastico, di altezza a . Si ha perciò

$$\tau = - \frac{T S}{I b}$$

dove S è il momento statico rispetto all'asse neutro della sola parte elastica al disopra di b , ed I il momento d'inerzia della sola parte elastica rispetto all'asse neutro. E' perciò (loco citato Cap. XV, for. t)

$$\tau_{zy} = \frac{6 T}{b a^3} \left(\frac{a^2}{4} - y^2 \right); \quad (c)$$

la τ_{zy} ha cioè l'andamento riportato nella fig. 6-6, dato ancora da una parabola quadratica che attinge il valore massimo in corrispondenza dell'asse neutro:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{a b}. \quad (11)$$

Il più elevato sforzo di taglio, sotto il momento M che lascia una zona elastica di altezza a , è fornito perciò da

$$T_{\max} = \frac{2}{3} a b \tau_0. \quad (12)$$

Accettando il criterio di *Hencky* e *Mises* (loco citato Cap. VIII, for. 33) è

$$\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}; \quad (13)$$

la (6-12) si scrive pure, in tale caso,

$$T_{\max} = \frac{2}{3 \sqrt{3}} a b \sigma_0. \quad (14)$$

Si faccia il caso di $M > 0$; il momento M è fornito, in funzione di a , da

$$M = M_0 - \frac{\sigma_0 a}{4} \frac{a}{3} b = M_0 - \frac{\sigma_0 b a^2}{12}. \quad (d)$$

Dalla (6-14) e dalla (d) si ottiene

$$M = M_0 - \frac{9}{16} \frac{T^2}{b \sigma_0} \quad (e)$$

e, con la notazione

$$T_0 = b h \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}, \quad (f)$$

si ha

$$\frac{M}{M_0} = 1 - \frac{9}{16} \frac{T^2 h}{T_0 \sqrt{3}} \frac{4}{b h^2 \sigma_0} \frac{b h \sigma_0}{T_0 \sqrt{3}} = 1 - \frac{3}{4} \frac{T^2}{T_0^2}$$

da cui la relazione che lega M e T

$$\frac{M}{M_0} + \frac{3}{4} \frac{T^2}{T_0^2} = 1. \quad (15)$$

Nella fig. 6-7 è riportato il dominio MT . Per $T = 0$, $M = M_0$; per

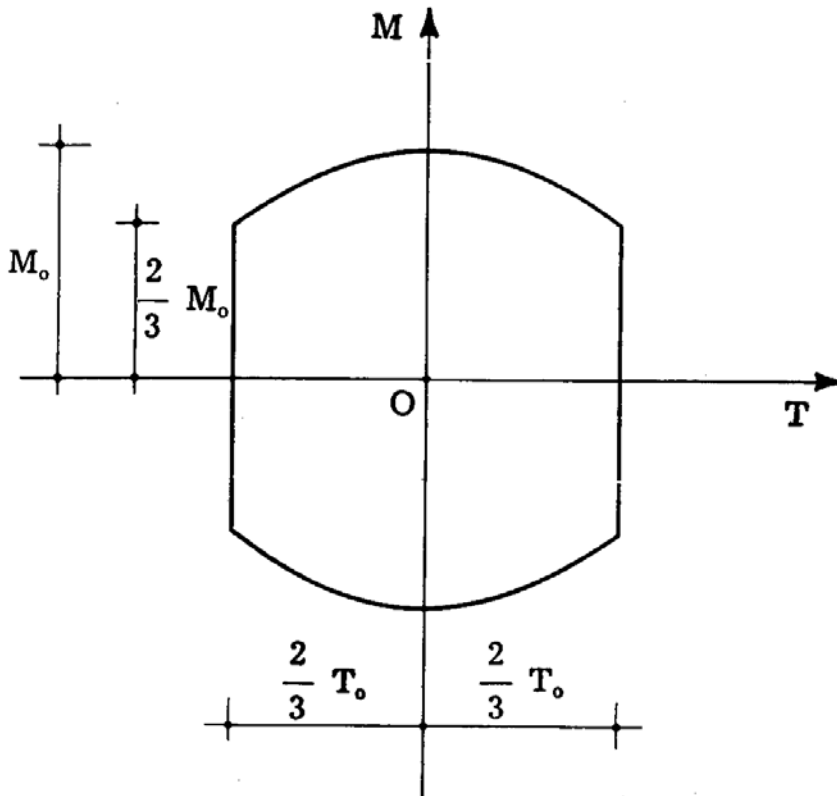


FIG. 6-7

$T = \frac{2}{3} T_0$, $M = \frac{2}{3} M_0$. Nel tratto intermedio, l'andamento è parabolico.

Si osservi che nel tratto a comportamento elastico è

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_0 \frac{2y}{a} \\ \tau &= \frac{3}{2} \frac{T}{ba} \left(1 - 4 \frac{y^2}{a^2}\right).\end{aligned}\quad (g)$$

La condizione di *Hencky* e *Mises* si scrive, in presenza di una σ e di una τ ,

$$s^2 (\sigma^2 + 3\tau^2) = \sigma_0^2 \quad (16)$$

e, in condizione di plasticizzazione,

$$\sigma^2 + 3\tau^2 = \sigma_0^2. \quad (17)$$

Per le (g), il primo membro della (6-17) si scrive

$$\sigma_0^2 \left[4 \frac{y^2}{a^2} + \left(1 - 4 \frac{y^2}{a^2}\right)^2 \right] = \sigma_0^2 \left(1 - 4 \frac{y^2}{a^2} + 16 \frac{y^4}{a^4}\right) \quad (h)$$

e questo termine è uguale a σ_0^2 per $y = 0$ ed $y = \pm a/2$, mentre è inferiore a σ_0^2 per i valori intermedi. Nell'ipotesi assunta, quindi, la condizione di plasticizzazione (6-17) non è raggiunta dovunque, e di conseguenza il momento limite in presenza di T che si ricava dalla formula (6-15) è valutato in difetto, cioè con vantaggio di sicurezza. I maggiori scarti dal vero si hanno per i valori più elevati di a , e cioè di T .

4. Il taglio nel conglomerato armato.

Il taglio in una sezione di una trave in conglomerato armato non può essere assorbito che in minima parte dal conglomerato, per la inattitudine di quest'ultimo a sopportare sforzi di trazione. E' preferibile quindi affidare l'intero sforzo di taglio a particolari armature (staffe e ferri piegati, o meglio staffe e ferri longitudinali distribuiti lungo l'altezza della sezione). Perciò il momento limite di una sezione in conglomerato armato non subisce l'influenza del taglio; bisogna però abbinare alla ricerca del coefficiente di sicurezza a rottura per flessione o pressoflessione quella relativa alla rottura localizzata da taglio nelle varie sezioni.

L'osservazione della curva intrinseca del conglomerato porta alla conclusione che lungo quasi tutta l'altezza, ove la σ è nulla, e quindi si è in presenza di sola τ , le linee di frattura sono inclinate di 45° (fig. 6-8).

Effettuata perciò una sezione a 45° e nel verso tale che le due facce ri-

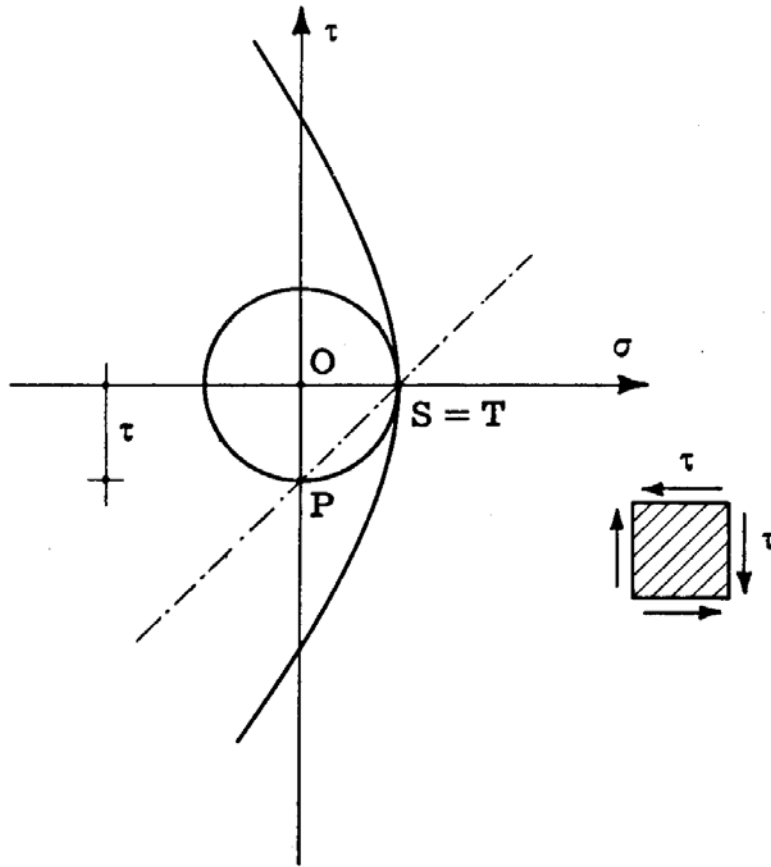


FIG. 6-8

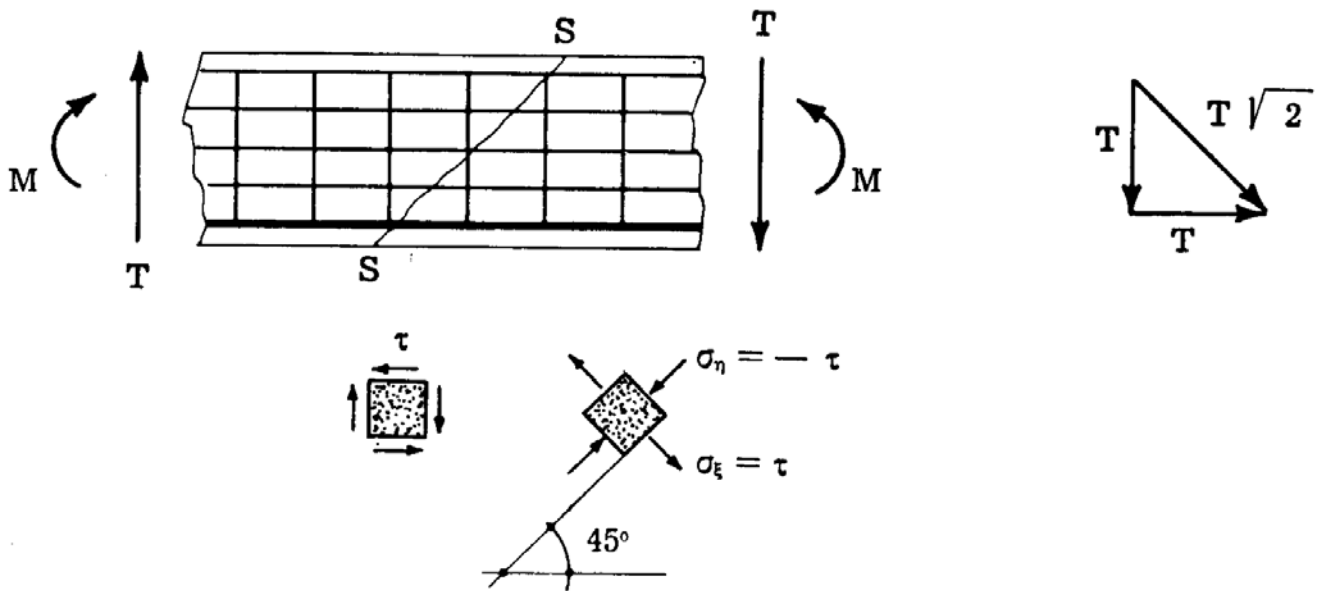


FIG. 6-9

sultanti tendano a staccarsi per effetto del taglio (fig. 6-9), elementari considerazioni (cerchio di Mohr o altre) portano a stabilire che su una

sezione siffatta esistono esclusivamente tensioni di trazione pari a τ , la cui risultante è perciò con una certa approssimazione fornita da $T\sqrt{2}$, dove T è il valore medio del taglio nel tratto interessato dalla sezione.

Si ricordi che nel conglomerato può porsi con buona approssimazione $\tau = \frac{T}{bh}$, e quindi la risultante delle $\sigma_x dA$ sulla sezione in esame è pari a $\sigma_x bh\sqrt{2} = \tau bh\sqrt{2} = T\sqrt{2}$.

Se A_{fs} è l'area delle staffe che impegnano la sezione a 45° , ed A_{fd} l'area dei ferri orizzontali distribuiti lungo l'altezza della trave in corrispondenza della stessa sezione, il coefficiente di sicurezza s calcolato per la flessione non è diminuito se risulta

$$s_t = \sigma_{of} \frac{A_{fs} + A_{fd}}{2T} \geq s, \quad (18)$$

ove T è il taglio calcolato nella fase di rottura.

Se invece dei ferri longitudinali esistono ferri piegati, tutta la forza $T\sqrt{2}$ è assorbita da questi, e l'area delle staffe non interviene nell'espressione (6-18) che nel caso in esame è

$$s_t = \sigma_{of} \frac{A_{fp}}{T\sqrt{2}} \geq s. \quad (19)$$

Poichè nel caso dei ferri piegati il regolamento del c.a. impone che almeno metà del taglio sia assorbita da staffe, supponendo, ai fini di un confronto economico, che ad A_{fp} si accompagni una area $A_{fs} = A_{fp}/\sqrt{2}$, a parità di T , σ_{of} , ed s , scegliendo nelle (6-18) o (6-19) il segno di uguaglianza, le aree di ferro sono nel primo caso

$$\frac{2Ts_t}{\sigma_{of}}$$

e nel secondo

$$\sqrt{2} \frac{Ts_t}{\sigma_{of}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Con riferimento al tronco di lunghezza h occupato dalla sezione a 45° , i volumi di ferro sono nei due casi

$$2 \frac{Ths_t}{\sigma_{of}} \quad (i)$$

$$2 \frac{T h s_t}{\sigma_{of}} + \frac{T h s_t}{\sigma_{of}} . \quad (l)$$

Si ha conferma così dei vantaggi che si ottengono adoperando armature longitudinali distribuite invece di ferri piegati.

5. La verifica allo sfilamento nel conglomerato armato.

Un'altra verifica quasi sempre indispensabile nelle costruzioni in conglomerato armato è quella intesa ad accertarsi se non si verifichi lo sfilamento dei ferri prima che sia raggiunto il coefficiente di sicurezza calcolato per formazione di un meccanismo. In questa verifica gioca ruolo determinante ancora il taglio. Considerato infatti un generico tronco di lunghezza dz , isolato dalla struttura in fase di collasso iniziale per formazione di meccanismo, la differenza tra le due forze cui l'acciaio è soggetto alle due estremità del tronco è data da

$$\Delta F = A_f \frac{d\sigma_f}{dz} dz . \quad (m)$$

Nel caso della flessione semplice, chiamando b_i il braccio della coppia interna, si può porre

$$\sigma_f = \frac{M}{A_f b_i}$$

$$\frac{d\sigma_f}{dz} dz = \frac{dM}{dz} \frac{1}{A_f b_i} dz = \frac{T}{A_f b_i} dz ; \quad (n)$$

la (m) fornisce quindi

$$\Delta F = \frac{T}{b_i} dz . \quad (o)$$

La differenza ΔF deve essere assorbita come sforzo di aderenza tra acciaio e conglomerato. L'aderenza limite tra acciaio e conglomerato può essere assunta pari a quella a taglio puro del conglomerato, che coincide con quella a trazione semplice σ'_{oc} . Se p_f è il perimetro della sezione di acciaio, lo sforzo limite di aderenza nel tratto dz è fornito quindi da

$$\sigma'_{oc} p_f dz . \quad (p)$$

Dalle (o) e (p) si trae che, per non aversi sfilamento prima della rottura per meccanismo, deve essere in ogni sezione

$$\frac{\sigma'_{oc} p_f b_1}{T} \geq s \quad (20)$$

dove T e b_1 sono calcolati sulla struttura in fase di incipiente collasso per formazione di meccanismo, ed s è il relativo coefficiente di sicurezza.

Nel caso della pressoflessione la (6-20) resta inalterata, e b_1 assume il significato di distanza tra il baricentro dell'area dei ferri e la risultante delle compressioni del conglomerato. Infatti, chiamando y la distanza tra il baricentro e la risultante delle compressioni (positiva se tale risultante è sotto il baricentro) si ha

$$\sigma_f A_f b_1 = M - N y$$

da cui

$$\frac{d\sigma_f}{dz} dz A_f b_1 = T - N \frac{dy}{dz} - \frac{dN}{dz} y$$

che può con buona approssimazione scriversi, nello stesso spirito in cui si è trascurato il termine $-\frac{M}{b^2} \frac{db}{dz} dz$ nella (n),

$$\frac{d\sigma_f}{dz} dz A_f b_1 = T ,$$

espressione coincidente con la (n).