

## CAPITOLO V

### FLESSIONE E SFORZO NORMALE IN ASSENZA DI SIMMETRIA

#### 1. Flessione deviata.

Nei due capitoli precedenti si è fatta l'ipotesi di simmetria geometrica della sezione rispetto all'asse di sollecitazione  $y$ , e di tensioni limiti funzioni della sola  $y$ ; in questo caso l'asse neutro è ortogonale all'asse di sollecitazione, e la flessione è retta.

Se l'ipotesi di simmetria non è più valida, l'asse neutro risulta in genere non ortogonale all'asse di sollecitazione, si è quindi in presenza di flessione deviata.

Si faccia l'ipotesi che le due tensioni limiti siano uguali in valore assoluto e invarianti col punto. Se  $n$  è l'asse neutro, esso divide la sezione

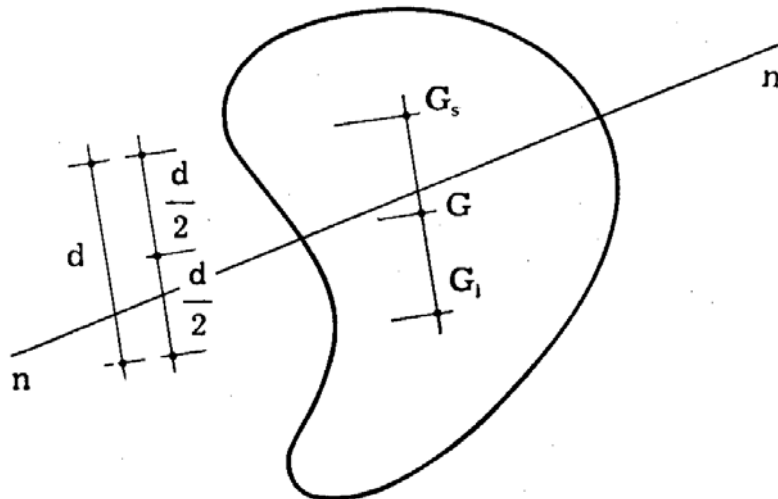


FIG. 5-1

in due parti di area uguale e pari ad  $A/2$ , per l'equilibrio alla traslazione lungo l'asse del solido. Se  $G_1$  e  $G_s$  sono i baricentri delle due parti della sezione, e  $d$  è la loro distanza (fig. 5-1) il momento limite è fornito da

$$M_{On} = \sigma_o \frac{A}{2} d . \quad (1)$$

Inoltre il baricentro di tutta la sezione è il punto medio del segmento  $G_1 G_2$ . Se l'asse neutro ruota,  $G_1$  e  $G_2$  descrivono una curva chiusa  $g$  chiamata curva dei baricentri delle mezze sezioni (*Rjanitsyn*), che gode di particolari proprietà. A partire da un asse neutro  $n$  qualsiasi (fig. 5-2)

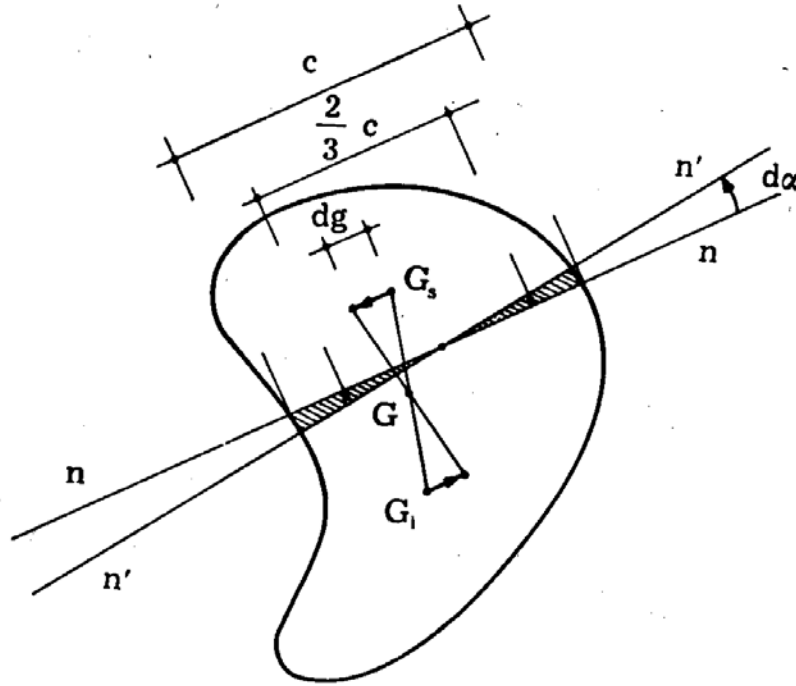


FIG. 5-2

si faccia ruotare  $n$  di  $d\alpha$  passando ad un asse neutro  $n'$  vicinissimo; per la conservazione della uguaglianza delle due aree superiore ed inferiore, la rotazione deve avvenire intorno al punto medio della corda baricentrica  $c$ . La rotazione  $d\alpha$  corrisponde ad aggiungere all'area superiore l'area triangolare di sinistra

$$\frac{c^2}{8} d\alpha$$

ed a toglierle invece l'area di destra, di pari valore. Quindi il baricentro  $G_2$  si sposta verso sinistra di un segmento  $dg$  parallelo ad  $n$ , e fornito dalla relazione

$$\frac{A}{2} dg = \frac{c^2}{8} d\alpha \frac{2}{3} c ;$$

e cioè  $dg$  è pari a

$$dg = \frac{c^3}{6A} d\alpha . \quad (a)$$

Si deduce, dall'essere  $dg$  parallelo ad  $n$ , che, dato un asse di sollecitazione  $s$ , l'asse neutro  $n$  è parallelo alle tangenti alla curva  $g$  nei due punti

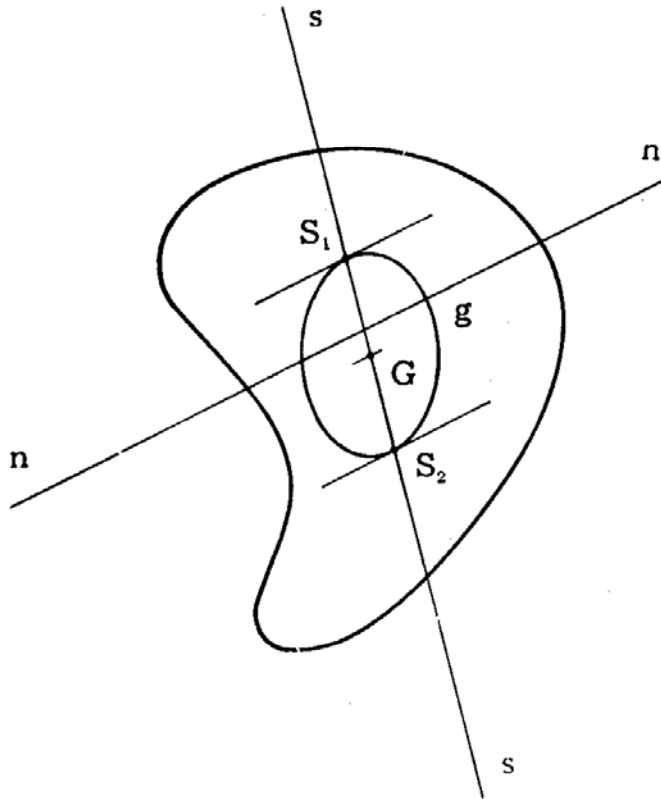


FIG. 5-3

$S_1$  ed  $S_2$  ove  $s$  incontra  $g$  (fig. 5-3); in ciò esiste analogia con l'utilizzazione dell'ellisse d'inerzia nel caso elastico.

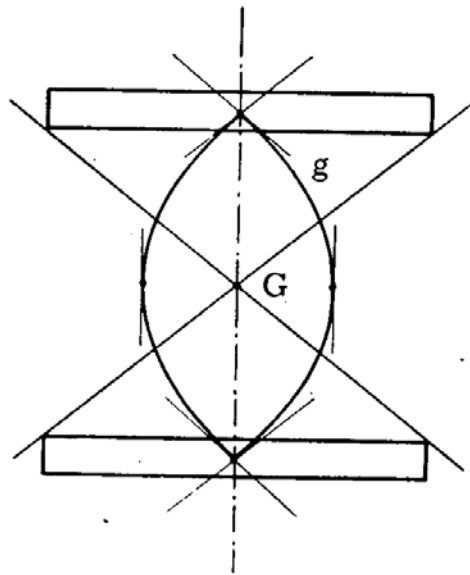


FIG. 5-4

La curva  $g$  è a simmetria polare rispetto al baricentro  $G$ ; l'asse neutro non passa in genere per  $G$ .

La curvatura della  $g$  è fornita dalla (a):

$$\frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{dg} = \frac{6A}{c^3} \quad (2)$$

Poichè la tangente alla curva  $g$  ruota sempre nello stesso verso, la  $g$  è convessa; essa presenta dei punti angolosi se in qualche zona l'asse neutro non taglia la sezione (fig. 5-4).

Si studi il rettangolo di dimensioni  $b \times h$  (fig. 5-5).

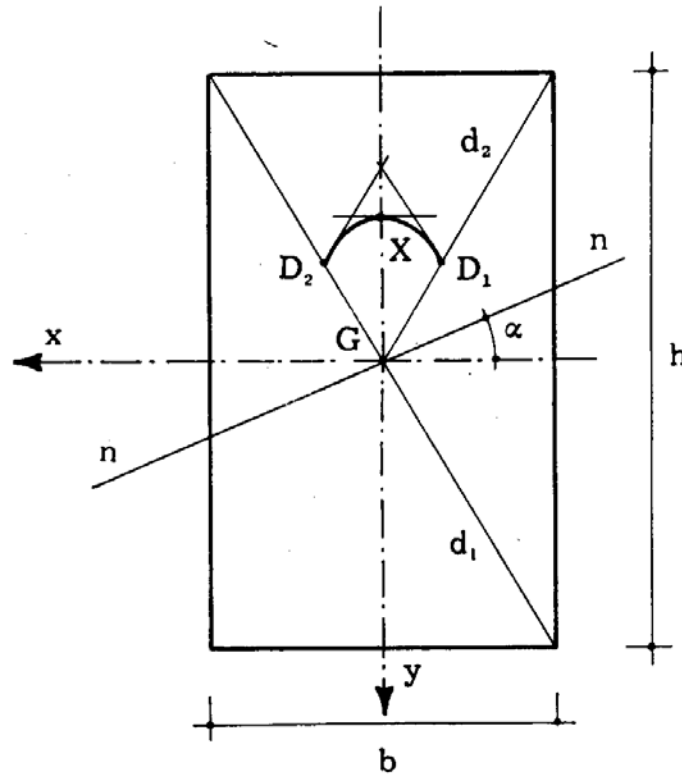


FIG. 5-5

Poichè la corda  $c$  è fornita da

$$\frac{b}{\cos \alpha}$$

dove  $\alpha$  è l'inclinazione dell'asse neutro sulla mediana parallela alla dimensione  $b$ , si ha

$$\frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{dg} = \frac{6A \cos^3 \alpha}{b^3}$$

e quindi

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{6 A \cos^3 \alpha}{b^3} \quad (b)$$

E' inoltre (fig. 5-6)

$$\cos \alpha = \frac{dx}{dg} = \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}} \quad (c)$$

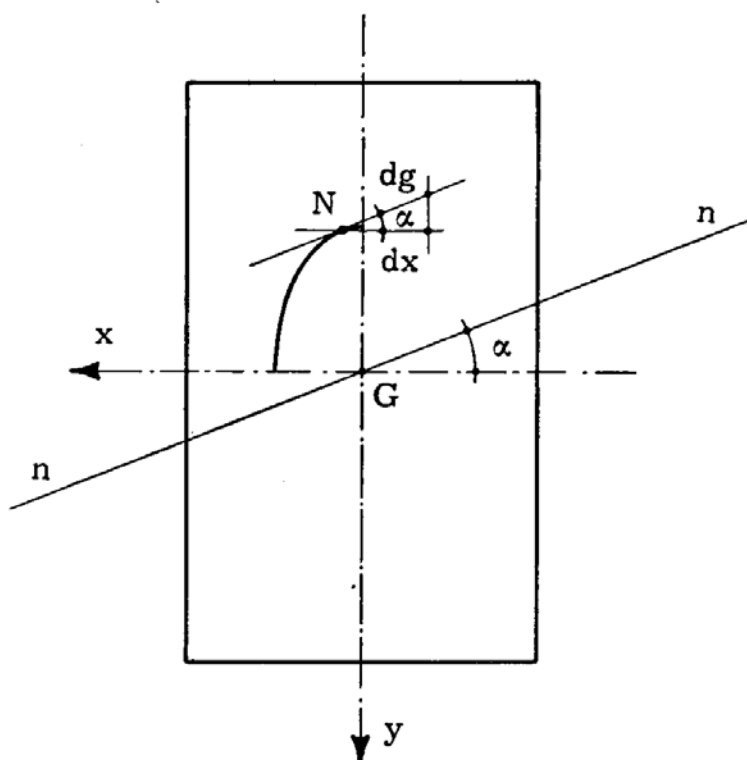


FIG. 5-6

Dalle (b) e (c) si trae

$$y'' = \frac{6 A}{b^3} = \frac{6 h}{b^2} .$$

Poichè la  $y''$  è costante, la curva  $g$  è una parabola del secondo grado. Essa nel settore corrispondente ad  $n$  che varia da  $d_1$  a  $d_2$  passa per il punto  $X$  a distanza  $h/4$  da  $G$ , e per i punti  $D_1$  e  $D_2$  a distanza  $d/6$  da  $G$ , ove  $d$  è la lunghezza della diagonale. Gli altri quattro segmenti di parabola negli altri quattro settori si traggono in maniera identica.

## 2. Flessione composta deviata.

Il caso della flessione composta con asse di sollecitazione coincidente con l'asse di simmetria geometrica della sezione è stato studiato nel capitolo quarto. In assenza di tale asse, o nel caso che l'asse di sollecitazione

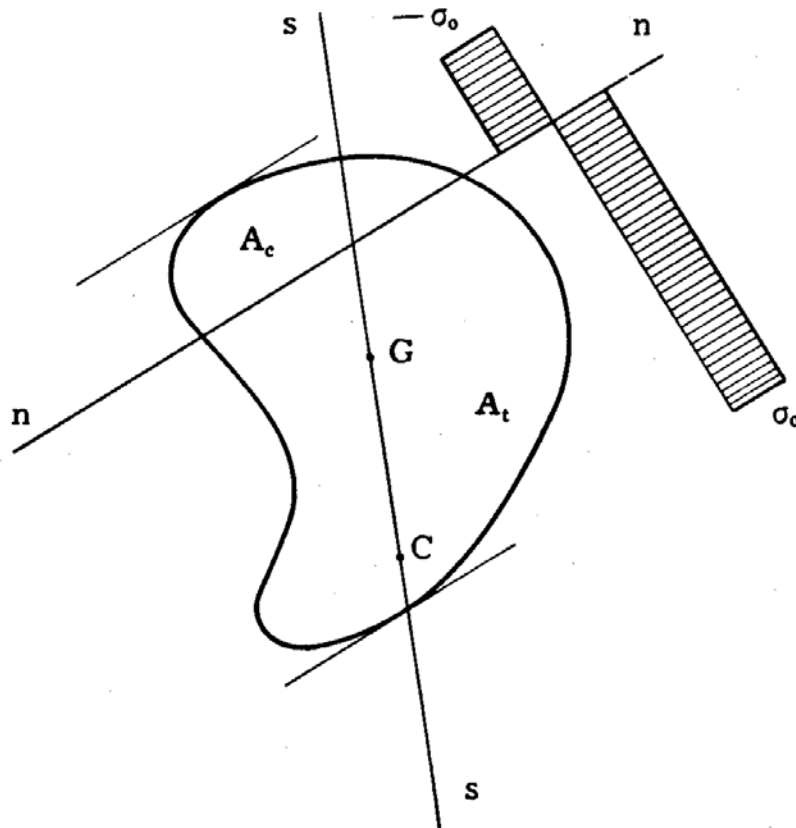


FIG. 5-7

non coincida con l'asse di simmetria, le equazioni che determinano l'asse neutro sono, nell'ipotesi  $\sigma'_o = -\sigma''_o = \sigma_o$ , costante su tutta la sezione, le seguenti (fig. 5-7)

$$A_t + A_c = A$$

$$(A_t - A_c) \sigma_o = N ,$$

(d)

dove si è indicato con  $A_t$  l'area della zona tesa, con  $A_c$  l'area della zona compressa, con  $A$  l'area totale, con  $N$  lo sforzo normale, positivo se di trazione.

Occorre inoltre che il baricentro della massa  $A_t$  applicata in  $G_t$  e della massa  $A_c$  applicata in  $G_c$  coincida con il centro  $C$  di sollecitazione.

Dalle (d) si ha

$$A_t = \frac{A}{2} + \frac{N}{2\sigma_0} .$$

Indicando con  $\xi$  il rapporto tra  $N$  ed  $N_0$  ( $-1 \leq \xi \leq 1$ )

$$\xi = \frac{N}{A\sigma_0} \quad (e)$$

si ricava (*Rjanitsyn*)

$$A_t = \frac{1 + \xi}{2} A \quad (f)$$

$$A_c = \frac{1 - \xi}{2} A .$$

Sia  $N$ , e quindi  $\xi$ , costante. Se l'asse  $s$  di sollecitazione (congiungente del baricentro  $G$  con il centro di sollecitazione  $C$ ) ruota, l'asse neutro (ret-

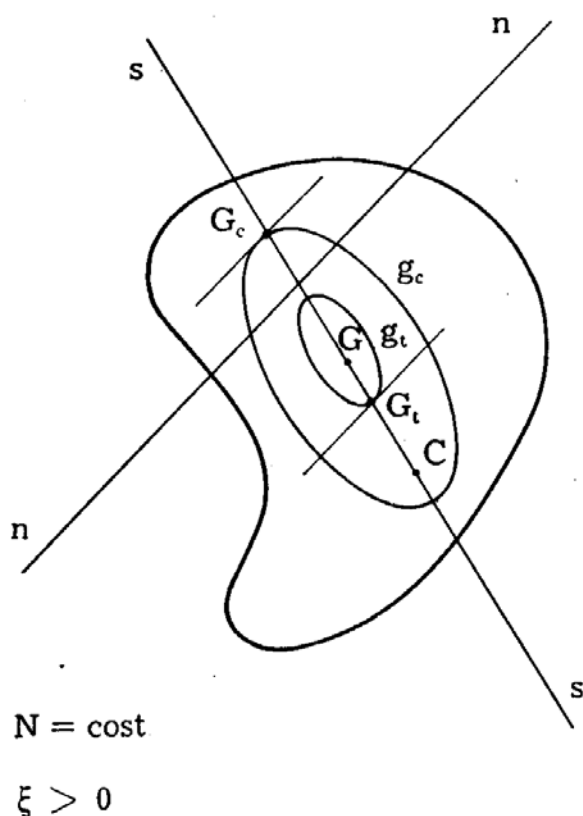


FIG. 5-8

ta che separa  $A_t$  da  $A_c$ ) ruota anche esso, ed i centri di gravità  $G_t$  e  $G_c$  delle zone tesa e compressa descrivono due curve chiuse  $g_t$  e  $g_c$  (isocen-

triche). Se  $N$  è nullo ( $\xi = 0$ )  $g_t$  e  $g_c$  coincidono con la curva  $g$  descritta nel primo paragrafo; se  $N = \sigma_0 A$  ( $\xi = 1$ ) una delle due curve ( $g_t$ ) si riduce al baricentro, e l'altra ( $g_c$ ) all'involuppo delle rette tangenti e non secanti il contorno della sezione; se quest'ultimo è convesso, coincide con l'involuppo suddetto. Il contrario avviene per  $\xi = -1$ . Operando come nel paragrafo precedente si osserva che  $g_t$  e  $g_c$  sono delle curve convesse; inoltre l'asse neutro  $n$  corrispondente ad un asse di sollecitazione  $s$  (fig. 5-8) è parallelo alle tangenti alle due curve  $g_t$  e  $g_c$  nei punti  $G_t$  e  $G_c$  dove esse sono intersecate da  $s$ . Con ragionamento analogo a quello già fatto nel paragrafo precedente, la rotazione  $d\alpha$  dell'asse neutro

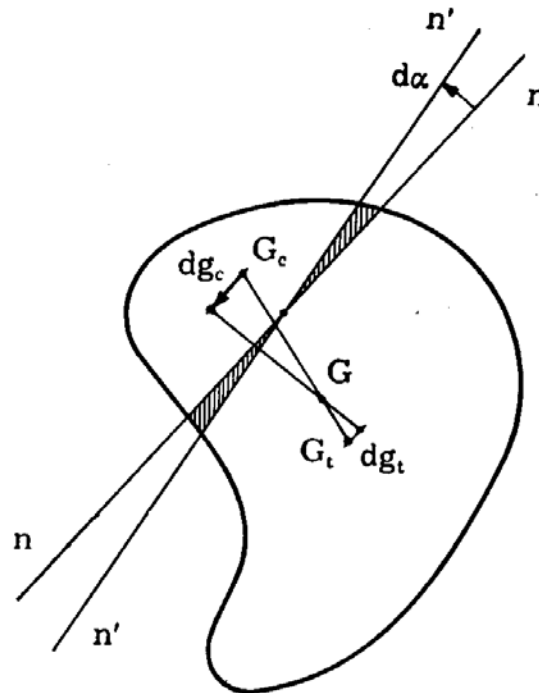


FIG. 5-9

(che anche qui deve avvenire intorno al punto medio della corda baricentrica  $c$  perchè  $N$  è costante) porta ad uno spostamento (fig. 5-9)  $dg_t$  di  $G_t$  e  $dg_c$  di  $G_c$ , forniti da

$$A_t dg_t = \frac{c^2}{8} d\alpha \frac{2}{3} c$$

$$A_c dg_c = \frac{c^2}{8} d\alpha \frac{2}{3} c,$$

da cui

$$dg_t = \frac{c^3}{12 A_t} d\alpha = \frac{c^3}{6 A (1 + \xi)} d\alpha$$



$$dg_c = \frac{c^3}{12 A_c} d\alpha = \frac{c^3}{6 A (1 - \xi)} d\alpha . \quad (g)$$

Le curvature di  $g_t$  e  $g_c$  sono pertanto

$$\frac{1}{r_t} = \frac{6 A (1 + \xi)}{c^3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{6 A (1 - \xi)}{c^3}$$

Anche nel caso in esame  $dg_t$  e  $dg_c$  sono parallele ad  $n$ , onde la già citata proprietà dell'asse neutro.

Si osservi che per  $\xi \rightarrow 1$ ,  $g_t$  tende al baricentro, ove  $1/r_t = \infty$ , e  $g_c$  al contorno, ove  $1/r_c$  è finito. Le (5-3) danno conferma di ciò; infatti per  $\xi \rightarrow 1$ ,  $c \rightarrow 0$ , e quindi il primo rapporto (5-3) tende  $\infty$ , e il secondo all'espressione indeterminata  $0/0$ . Se per una determinata direzione dell'asse neutro si ha al limite per  $\xi = 1$  sul contorno un segmento di retta, ivi risulta  $c \neq 0$ , e, per  $\xi = 1$ ,  $1/r_c = 0$ , come deve essere.

Ad ogni valore di  $N$  corrispondono due curve  $g_t$  e  $g_c$  che si chiamano isocentriche coniugate. Date due isocentriche coniugate, una retta  $s$  qualunque passante per  $G$  (baricentro di tutta la sezione) taglia la curva  $g_t$  in due punti  $S'_t S''_t$ , e la curva  $g_c$  in due punti  $S'_c S''_c$  (fig. 5-10);  $S'_t$  ed  $S'_c$  sono i baricentri  $G_t$  e  $G_c$  per un asse neutro  $n'$ ,  $S''_t$  ed  $S''_c$  i baricentri  $G_t$  e  $G_c$  per un altro asse neutro  $n''$ , ambedue corrispondenti allo stesso asse di sollecitazione  $s$  ed allo stesso sforzo normale  $N$ , ma con centri di sollecitazione  $C'$  e  $C''$  diversi. Il centro di gravità  $G$  divide i segmenti  $S'_t S'_c$  ed  $S''_t S''_c$  nel rapporto

$$\frac{G S'_t}{G S'_c} = \frac{1 - \xi}{1 + \xi} = \frac{G S''_t}{G S''_c}$$

Perciò, indicando con  $d'$  la distanza tra  $S'_t$  ed  $S'_c$ ,

$$d' = S'_t S'_c$$

risulta

$$G S'_t = \frac{1 - \xi}{2} d'$$

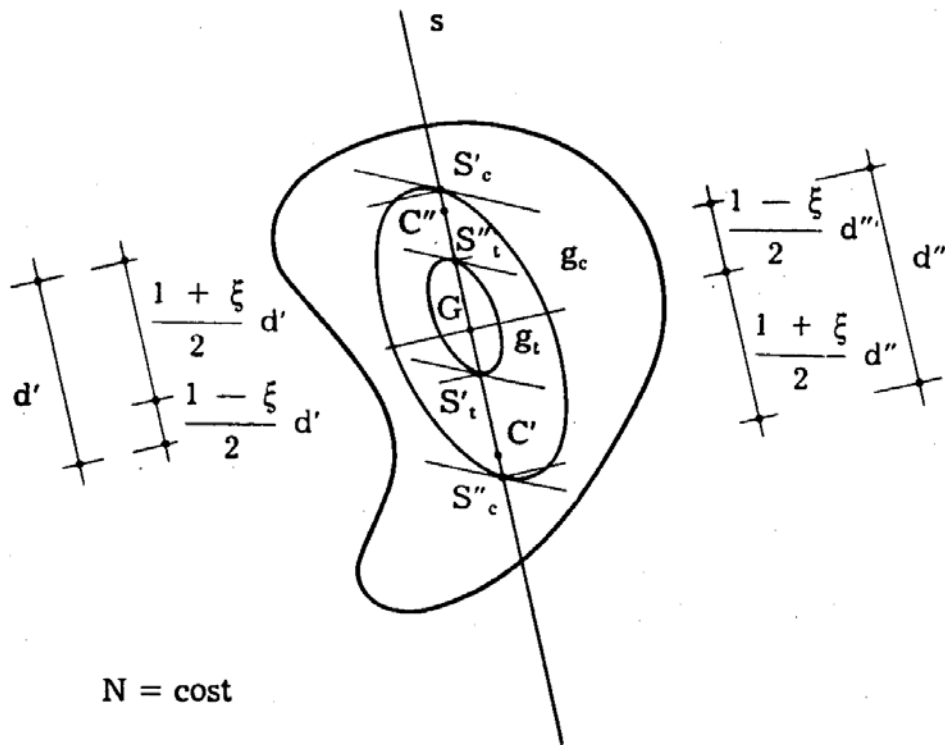
$$G S'_c = \frac{1 + \xi}{2} d'$$

da cui

$$M'_{ON} = \frac{1 + \xi}{2} N_0 \frac{1 - \xi}{2} d' + \frac{1 - \xi}{2} N_0 \frac{1 + \xi}{2} d'$$

e cioè ancora

$$M'_{ON} = \frac{1 - \xi^2}{2} N_0 d' . \quad (4)$$



$$N = \text{cost}$$

$$\xi > 0$$

$$M'_{ON} = \frac{1 - \xi^2}{2} N_0 d'$$

$$M''_{ON} = \frac{1 - \xi^2}{2} N_0 d''$$

FIG. 5-10

Il punto  $C'$  di applicazione della forza  $N = \xi N_0$  si trova sulla retta  $S'_t S'_c$ , a distanza

$$e' = \frac{1 - \xi^2}{2\xi} d' \quad (5)$$

dal centro di gravità, e dalla parte di  $S'_t$  se  $\xi$  è positivo.

Considerando il segmento  $S''_t S''_c$ , si ottengono in maniera analoga l'altro momento  $M''_{ON}$  e l'altro centro  $C''$ . Se  $\xi$  cambia segno,  $g_t$  e  $g_c$  si invertono.