

CAPITOLO I

INTRODUZIONE AL CALCOLO A ROTTURA

1. Teorie dei corpi elasto-plastici e rigido-plastici.

La Scienza delle Costruzioni classica — quella, per intendersi, che si insegna attualmente nelle Università, che è a base dei vigenti regolamenti di progettazione, e che comunque formerà sempre il solido punto di partenza e la sicura pietra di paragone di ogni futura diramazione — poggia sulle due ipotesi di comportamento elastico del materiale e di piccolezza degli spostamenti nel senso noto. La rimozione di tali ipotesi, considerata fino a pochi anni fa un lusso di speculatori, diviene però sempre più necessaria in dipendenza dell'affermarsi delle strutture sottili nel superamento di luci via via più grandi (ponti, coperture, dighe etc.), cui si associa da una parte il problema di ridurre al minimo il peso proprio sfruttando tutti i margini che il materiale e la struttura possono offrire, anche e soprattutto al di là dei limiti elastici, e d'altra parte, per effetto della riduzione delle sezioni, il sorgere di spostamenti non più trascurabili in rapporto alla dimensione media della struttura; di più, lo stesso concetto di dimensione media cade in difetto, perchè si ha il netto prevalere di alcune dimensioni su altre.

In genere le due ipotesi non possono che rimuoversi una alla volta, e già così le difficoltà che vengono fuori sono spesso insormontabili. Operando in tal modo si è però spesso alquanto distanti dalla verità; basta osservare che mentre nell'ipotesi di piccoli spostamenti la considerazione delle deformazioni plastiche porta in genere a sdrammatizzare il quadro delle tensioni, nell'ipotesi di spostamenti non piccoli, in particolare nella determinazione dei carichi critici, il tener conto delle deformazioni plastiche abbassa i valori dei moltiplicatori critici.

Di vero progresso potrà pertanto parlarsi solo il giorno in cui si sarà in grado di studiare gli equilibri elasto-plastici in regime di grandi spostamenti; questo giorno però è ancora lontano, e occorre quindi contentarsi di studiare il fenomeno plastico nell'ipotesi che gli spostamenti non alterino la reciproca posizione delle forze e dei punti del corpo.

Lo studio degli equilibri elasto-plastici si sviluppa attualmente secondo

due vie in sostanza distinte. La prima (teoria dei corpi elasto-plastici) considera dei valori dei carichi applicati di poco superiori a quelli per cui si attingono nei primi elementi le soglie della plasticità, e quindi si preoccupa dello studio della struttura al sorgere delle prime deformazioni permanenti. Queste teorie, in genere molto complesse, in numero notevole e non sempre in accordo tra loro, interessano molto l'ingegnere meccanico, soprattutto per i notevoli casi di concentrazione di tensioni che questi si trova ad affrontare, e che in pratica pongono qualsiasi costruzione di macchina in fase elasto-plastica fin dalle situazioni di esercizio, ma molto meno l'ingegnere civile, cui piuttosto preme conoscere il grado di sicurezza delle strutture nei riguardi della crisi. E' questo il secondo indirizzo di studi, che considera la struttura nella fase del crollo, ed al quale si riferisce il presente volume.

Si è già precisato (S. d. C. cap. VIII, § 1) che la crisi intesa come perdita della funzionalità può precedere di molto la rottura; ciò avviene molto spesso per superamento di certi limiti da parte degli spostamenti, come è pressochè di regola negli organi di macchine, e può accadere in fase elastica o al massimo agli inizi della fase elasto-plastica. Nelle strutture in conglomerato armato può darsi poi che determinati carichi pur lontani dai valori di rottura inducano lesioni cui si associano, per particolari condizioni ambientali, pericoli di corrosione; tali carichi, definiti dal *coefficiente di sicurezza alla fessurazione*, sono in definitiva pur essi carichi di crisi, anche se per essi la crisi è lontana, e non è difficile comunque il correre ai ripari. Anche il fenomeno della fessurazione avviene in campo elastico, attesa la fragilità del conglomerato, e il suo studio può essere quindi ancora condotto secondo i canoni della teoria classica. In qualsiasi caso però ha interesse — maggiore o minore — precisare la sicurezza nei riguardi del crollo, e ciò non può ottenersi che abbandonando la teoria dell'elasticità per la cosiddetta *teoria dei corpi rigido-plastici*. Questo nome, dovuto alla Scuola americana, tien conto del fatto che in prossimità del crollo gli spostamenti da deformazioni elastiche sono trascurabili rispetto a quelli dovuti alle deformazioni plastiche, e gli spostamenti di crollo incipiente sono quelli di un meccanismo ad un grado di libertà.

2. Il diagramma tensioni-deformazioni in regime monoassiale.

La teoria dei corpi rigido-plastici per le strutture inflesse e pressoinflesse poggia su una schematizzazione del diagramma tensioni deformazioni ottenibile da comuni prove di laboratorio a trazione ed a compressione; la possibilità di ipotizzare la presenza di una sola σ semplifica molto la trattazione nei confronti di quei casi in cui la contemporanea presenza di più tensioni impone la scelta di un legame tra queste ultime in con-

dizioni di plasticizzazione. Nelle travi reali non può negarsi la presenza delle τ da taglio, ma si mostrerà come, entro ampi limiti, essa giochi un ruolo non rilevante.

Si è già mostrato (S. d. C. cap. VIII) l'aspetto del diagramma sperimentale $\sigma \epsilon$ dei materiali duttili; si riporta nella fig. 1-1 un esempio di diagramma reale per un acciaio dolce ordinario. L'allungamento ϵ_r a rottura è del 22 %, l'allungamento ϵ_s al limite σ_e di elasticità (che coincide praticamente con il limite di proporzionalità σ_p e con quello di snerva-

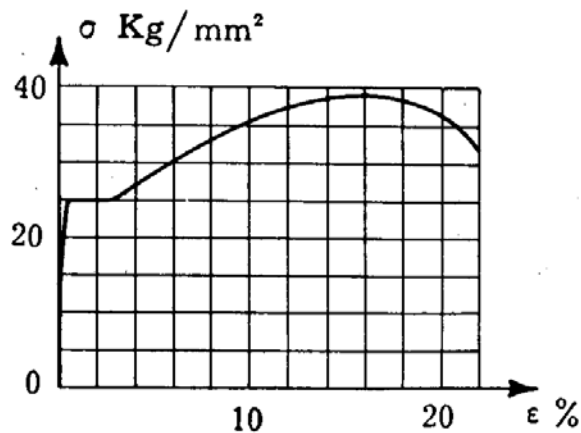


FIG. 1-1

mento σ_s) è dello 0,1 %, la tensione di snervamento di 25 Kg/mm², quella di rottura di 39 Kg/mm². L'allungamento del 22 % è ottenuto effettuando il rapporto $\Delta l/l$ a rottura con riferimento ad una provetta di dimensioni regolamentari; in realtà la maggior parte dell'allungamento a rottura ha luogo per una lunghezza molto più piccola della complessiva (*zona di stri-*

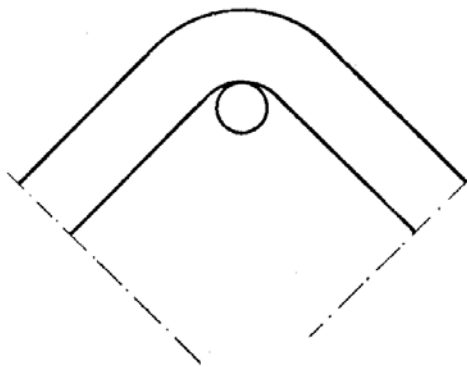


FIG. 1-2

zione), e perciò l'allungamento plastico è in realtà molto più elevato di ϵ_r .

Quanto qui detto è confermato dalla prova di piegamento (fig. 1-2), dove si attingono sul bordo teso deformazioni plastiche molto maggiori di ϵ_r ;

secondo *Rjanitsyn* l'allungamento plastico degli acciai dolci precedente la rottura può assumersi in tal caso dell'ordine del $50 \div 100 \%$. Il diagramma $\sigma \epsilon$ che si pone a base della teoria dei corpi rigido-plastici è derivato da quello della fig. 1 sostituendo il tratto relativo alle deformazioni

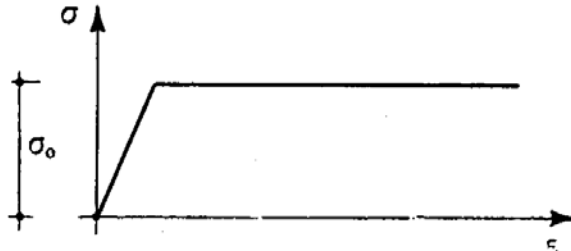


FIG. 1-3

plastiche con un tratto di retta parallelo all'asse delle ϵ , a quota σ_0 (tensione limite) pari alla tensione di snervamento σ_s ; il diagramma si considera in genere indefinito (fig. 1-3), e solo in alcuni casi, ove si teme la rottura localizzata prima della crisi complessiva, il diagramma si considera li-

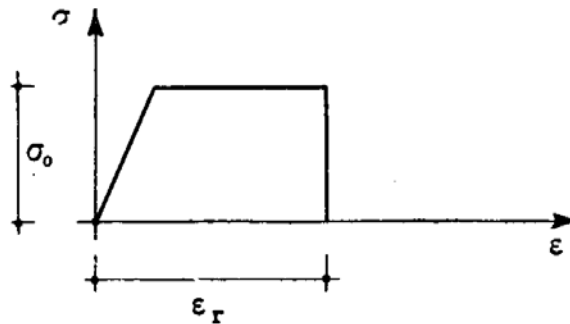


FIG. 1-4

mitato alla ascissa ϵ_r (fig. 1-4). Per tale si può assumere il valore ottenuto dalla prova regolamentare; ciò fa operare in condizioni di maggior si-

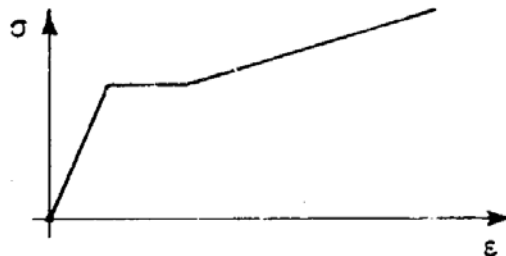


FIG. 1-5

curezza nel caso della flessione, mentre può risultare lontano dal vero in eccesso nel caso di lunghi elementi tesi.

Alcuni autori cercano di avvicinarsi di più all'effettivo diagramma $\sigma \epsilon$

adottando nel periodo plastico, un tratto di retta ancora inclinato sull'asse delle ϵ , anche se di un angolo inferiore a quello che caratterizza il periodo elastico (*diagramma con incrudimento*); alcuni interpongono tra il periodo elastico e quello dell'incrudimento un tratto orizzontale corrispondente allo snervamento (fig. 1-5), altri invece adottano la bilatera (fig. 1-6).

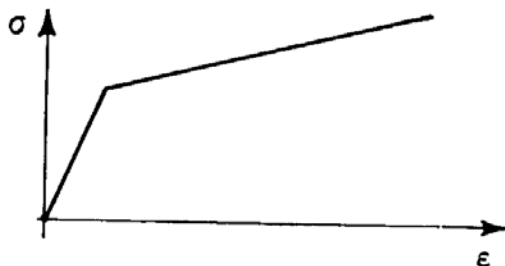


FIG. 1-6

Altri autori ancora considerano il tratto dell'incrudimento rappresentato da una curva analiticamente definita, per esempio una parabola (fig. 1-7);

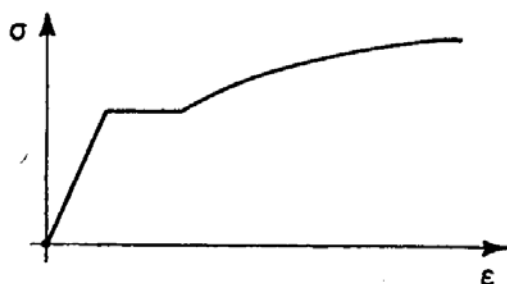


FIG. 1-7

in genere però è da osservare che la chiamata in causa dell'incrudimento complica notevolmente il calcolo portato fino alla rottura, mentre trascurando tale fenomeno (figg. 1-3 e 1-4) si opera in condizioni di maggior sicurezza, compensando così altri fattori che invece, come si mostrerà subito appresso, tendono a far diminuire il coefficiente di sicurezza, così come calcolato con la teoria dei corpi rigido-plastici, rispetto a quello effettivo.

Il comportamento dell'acciaio duro e dell'acciaio armonico può essere anch'esso schematizzato da un diagramma del tipo della fig. 1-3; per esso però e più frequentemente sentita l'opportunità di considerare un diagramma limitato del tipo della fig. 1-4, e in tal caso il valore di ϵ_r è quello relativo al tipo di acciaio considerato, e quindi molto minore di quello prima citato.

I materiali il cui diagramma $\sigma \epsilon$ presenta un notevole tratto di deformazione plastica sono detti *duttili*, e quanto maggiore è la duttilità tanto meglio ad essi si applicano le teorie relative ai corpi rigido-plastici; in

essi rientrano ottimamente gli acciai dolci e in genere gli acciai di qualità, e molte leghe leggere di alluminio, meno bene gli acciai duri.

Ai materiali duttili si oppongono i materiali cosiddetti *fragili*, il cui diagramma $\sigma \epsilon$ è caratterizzato dall'assenza pressochè completa dell'allungamento plastico; essi comprendono il vetro, le pietre, il conglomerato

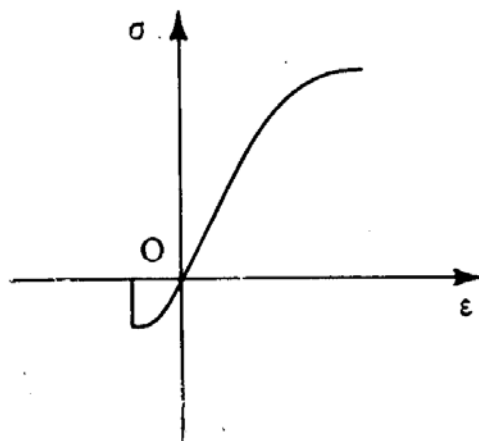


FIG. 1-8

cementizio. Nella fig. 1-8 è riportato il diagramma $\sigma \epsilon$ per un conglomerato, e nella fig. 1-9 la sua schematizzazione; in esso il tratto plastico risulta molto ridotto e non è ben definito il valore della tensione limite, poichè manca

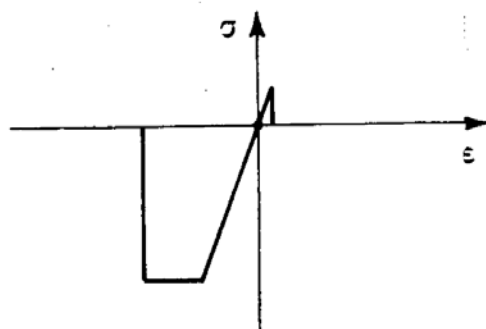


FIG. 1-9

nel diagramma reale un tratto parallelo all'asse delle ϵ . Ai materiali fragili non sono quindi applicabili le teorie dei corpi rigido-plastici. E' da osservare fin d'ora però che le strutture in conglomerato armato sono assimilabili, agli effetti della validità dei calcoli a rottura, alle strutture metalliche, poichè in esse gli allungamenti a rottura dell'acciaio sono notevolmente più elevati degli accorciamenti del conglomerato nella stessa sezione, e il valore della tensione limite del conglomerato non gioca un ruolo notevole nelle espressioni delle caratteristiche limiti; anzi i risultati non variano sensibilmente anche se si ammette che nelle condizioni di rottura il solo acciaio sia plasticizzato, ed il diagramma delle compressioni

del conglomerato sia compreso tutto nella fase elastica, e caratterizzato da una qualsiasi legge di variazione.

E' sperimentalmente confermato che se si scarica un provino già entrato in zona plastica, il corrispondente diagramma $\sigma \epsilon$ risulta un segmento di retta parallelo a quello che rappresenta il tratto elastico iniziale; e

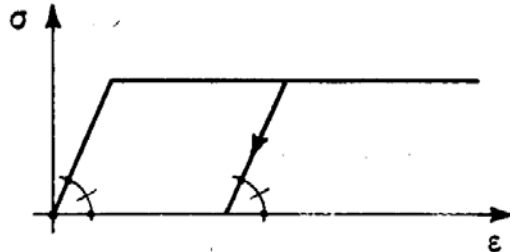


FIG. 1-10

cioè, come già osservato nel cap. VIII, § 2 e nel cap. XXI, § 2 della S. d. C., lo scarico del provino avviene in fase elastica (fig. 1-10). Questa circostanza è molto importante per conoscere, seguendo passo passo il successivo formarsi degli elementi plasticizzati, quali di questi ritornano in fase elastica.

3. La redistribuzione degli sforzi interni in fase elasto-plastica.

Si sono già esposti nel cap. VIII, § 2 e nel cap. XXI, § 2 della S. d. C. due esempi estremamente semplici atti a fornire una idea, sia pure molto sommaria, della redistribuzione degli sforzi interni al di là del limite elastico. Si studia qui, ai soli fini dell'omogeneità espositiva, una struttura analoga a quelle prese in esame nei due esempi suddetti, costituita da tre aste parallele, della stessa sezione A e dello stesso modulo elastico E , due lunghe l ed una $l/2$, collegate ad un estremo ad una piastra rigida cui è applicata una forza F (fig. 1-11 a). L'espressione dello spostamento v della piastra in fase elastica si ottiene considerando che le dilatazioni ϵ , e quindi le tensioni σ e gli sforzi totali σA delle due aste lunghe l sono metà di quelli dell'asta lunga $l/2$; perciò un'asta lunga l assume lo sforzo $F/4$, e si allunga di

$$v = \epsilon l = \frac{F l}{4 A E} \quad (a)$$

Il diagramma $v F$ in fase elastica è perciò una retta inclinata di

$$\text{arctg} \frac{4 A E}{l} \quad (b)$$

sull'asse delle v (fig. 1-11 b).

La fase elastica ha fine per quel valore F' di F per cui si attinge nell'asta più sollecitata, e cioè nella più corta, il valore della tensione li-

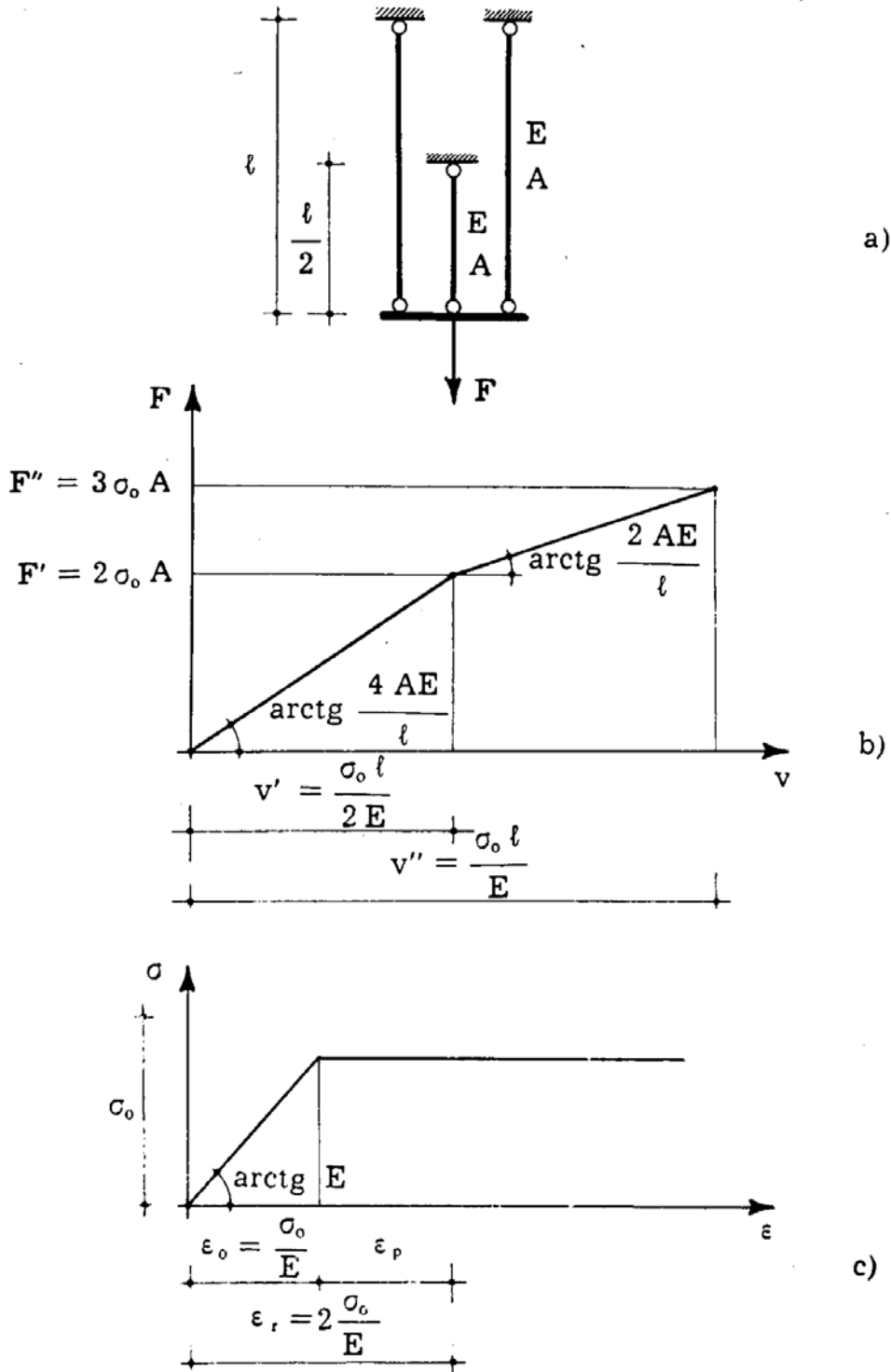


FIG. 1-11

mite σ_0 ; poichè della forza F l'asta centrale assorbe in fase elastica la parte $F/2$, F' è fornito dalla relazione

$$\frac{F'}{2} = \sigma_0 A ,$$

da cui

$$F' = 2 \sigma_0 A, \quad (c)$$

cui corrisponde uno spostamento

$$v' = \frac{\sigma_0 l}{2 E}. \quad (d)$$

Se la forza F aumenta oltre il valore F' , l'asta più corta non assorbe più nulla della differenza $F - F'$, che si equidistribuisce quindi sulle altre due aste. Si ha perciò

$$v - v' = \frac{(F - F') l}{2 A E}$$

e il diagramma $v F$ è costituito, per $F > F'$, da una retta inclinata di

$$\text{arctg} \frac{2 A E}{l} \quad (e)$$

sull'asse delle v . Il valore massimo F'' che la forza F può attingere è quello per cui anche nelle due aste più lunghe si raggiunge la tensione limite; esso è fornito perciò dalla relazione

$$\frac{F'' - F'}{2 A} = \frac{\sigma_0}{2}$$

poichè per $F = F'$ nelle due aste è presente la tensione $\sigma_0/2$. Si ha perciò

$$F'' = 3 \sigma_0 A \quad (f)$$

mentre v'' è fornito da

$$v'' - v' = \frac{F'' - F'}{2 A E} l = \frac{\sigma_0 l}{2 E}. \quad (g)$$

La deformazione plastica ε_p nell'asta più corta è pari al doppio della deformazione elastica delle aste più lunghe sotto la forza $F'' - F'$; è cioè (fig. 1-11 c)

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma_0}{E} = \varepsilon_0 \quad (h)$$

dove ε_0 è l'allungamento elastico corrispondente alla tensione limite. Se il materiale può sopportare una deformazione ε_r superiore a $2 \varepsilon_0$, la F'' può in realtà essere raggiunta; in caso contrario si può attingere una forza, compresa tra F' ed F'' , corrispondente al valore di ε_r . Si osserva che imponendo un coefficiente di sicurezza pari a 2 nei riguardi dell'insorgenza dei primi fenomeni plastici, il coefficiente di sicurezza a rottura risulta, per $\varepsilon_r \geq 2 \varepsilon_0$, pari a 3; appare evidente da ciò l'economia che si può conseguire adottando il calcolo a rottura in luogo del calcolo elastico usuale, e l'importanza dei margini che una struttura può possedere nei riguardi della crisi, e che è comunque utile conoscere.

4. Limitazioni della teoria dei corpi rigido-plastici.

E' innanzitutto da osservare che non sempre il calcolo a rottura porta a coefficienti di sicurezza più elevati di quelli ricavabili dall'usuale calcolo in fase elastica; se una struttura soggetta ad un certo insieme di carichi è calcolata nell'ambito elastico in modo che le tensioni siano ovunque in un rapporto fisso $1/k$ con le tensioni limiti, il coefficiente k è anche il coefficiente di sicurezza a rottura; se una struttura inflessa o pressoinflessa è calcolata nell'ambito elastico in modo che i momenti flettenti siano ovunque nel rapporto $1/k$ con i momenti limiti, k è anche il coefficiente di sicurezza a rottura; lo stesso accade se una struttura inflessa o pressoinflessa soggetta a carichi variabili è progettata in modo che i momenti flettenti massimi e minimi siano ovunque nel rapporto $1/k$ con i momenti limiti. In questo senso può dirsi che i maggiori vantaggi del calcolo a rottura sono da attendersi per le costruzioni in cui le suddette condizioni non sono verificate o per insufficienza di calcolo elastico o per necessità strutturali; è da attendersi perciò minore beneficio da questo tipo di calcolo per le strutture più nobili, come per esempio da ponte.

Altra osservazione preliminare di notevole peso è quella relativa alla maggiore o minore attendibilità dei risultati delle teorie dei corpi rigido-plastici. Innanzitutto tali risultati sono condizionati dalla possibilità delle deformazioni plastiche necessarie alla redistribuzione delle tensioni corrispondenti alla rottura, e risultano quindi tanto più attendibili quanto più duttile è il materiale.

Si tenga poi presente che, per effetto di tensioni ripetute, sia le deformazioni che le tensioni limiti possono diminuire in valore assoluto. Inoltre, negli elementi compressi, l'instabilità dell'equilibrio precede sempre la completa plasticizzazione, e tanto maggiormente quanto più sottile è la sezione; questo fenomeno fa diminuire i valori delle caratteristiche limiti, rispetto a quelli calcolabili con le usuali teorie dei corpi rigido-plastici, ed è di una certa importanza nelle travature reticolari e nelle travature

metalliche inflesse, caratterizzate in genere da sezioni rette sottili. I suddetti fenomeni tendono tutti a ridurre il coefficiente di sicurezza ricavabile con il calcolo a rottura usuale rispetto a quello effettivo; ne esiste però un altro, anch'esso di notevole entità, che agisce in senso contrario, l'incrudimento del materiale; trascurando questo fenomeno, si compensa in parte l'effetto dei precedenti, come già fatto notare nel § 2.