

CAPITOLO VII

I SISTEMI BIDIMENSIONALI IN COORDINATE POLARI

1. Generalità.

In molti problemi piani è opportuno ricorrere alle coordinate polari; la posizione di un punto P nel piano è definita in tal caso dalla distanza r (*raggio*) di P da un polo O , e dall'angolo α (*anomalia*) che la retta OP forma con una retta fissa Ox del piano (fig. 7-1). Occorre perciò fissare un verso positivo per l'angolo α , per esempio quello antiorario.

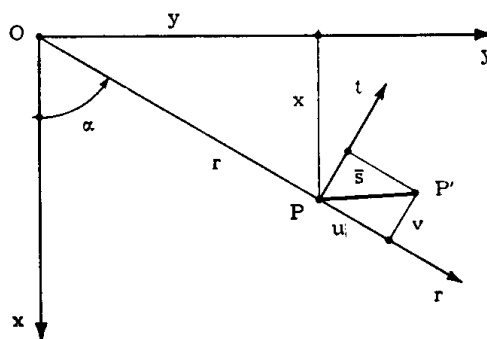


FIG. 7-1

Le relazioni che legano le coordinate cartesiane ortogonali a quelle polari sono (orientando l'asse Oy in modo che il verso $x \rightarrow y$ coincida con quello assunto positivo per le anomalie)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

e le inverse

$$x = r \cos \alpha \tag{2}$$

$$y = r \operatorname{sen} \alpha .$$

Dalle (7-1) si ha

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \alpha$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \alpha}{r}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \alpha}{r}$$

Si ha perciò, se f è una generica funzione di r ed α ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\partial f}{\partial r} \cos \alpha - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\sin \alpha}{r} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r} \frac{dr}{dy} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dy} = \frac{\partial f}{\partial r} \sin \alpha + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\cos \alpha}{r} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \cos \alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\sin \alpha}{r} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \cos \alpha - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\sin \alpha}{r} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \cos^2 \alpha - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial r} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\sin^2 \alpha}{r} + \\ &\quad + 2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \frac{\sin^2 \alpha}{r^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial r} \sin \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\cos \alpha}{r} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial r} \sin \alpha + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\cos \alpha}{r} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \sin^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial r} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\cos^2 \alpha}{r} + \\ &\quad - 2 \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} \end{aligned}$$

2. Componenti della deformazione in coordinate polari.

Dello spostamento $\bar{s} = \overline{PP'}$ del punto P conviene considerare le componenti u e v secondo la congiungente OP (*componente radiale*) e secondo la normale t in P alla OP (*componente tangenziale*); la u è positiva se

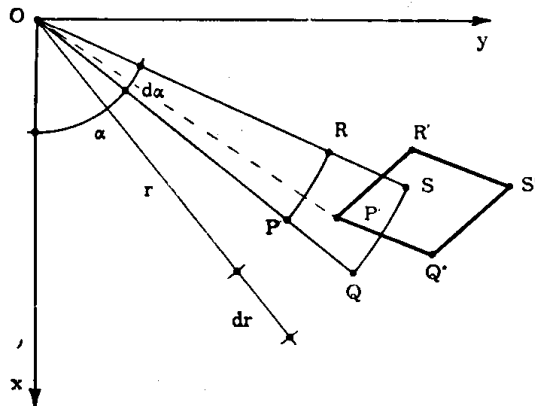


FIG. 7-2

corrisponde ad un allontanamento dal polo, la v se è orientata nel verso delle α crescenti. Come componente della deformazione pura conviene scegliere le dilatazioni ϵ_r ed ϵ_t secondo OP e t , e lo scorrimento γ_{rt} relativo

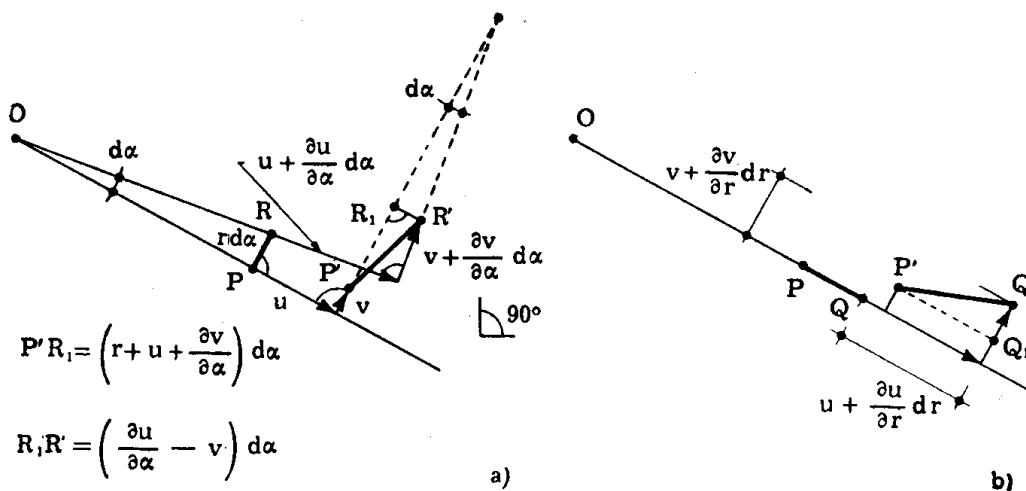


FIG. 7-3

a queste stesse direzioni. Si consideri perciò (fig. 7-2) l'elemento PQRS definito dalle coordinate $r, r + dr, \alpha, \alpha + d\alpha$, e il suo deformato $P'Q'R'S'$; si ha

$$\epsilon_r = \frac{\overline{P'Q'} - \overline{PQ}}{\overline{PQ}}$$

Con procedimento analogo a quello seguito al cap. I, si ottiene (*) (fig. 7-3)

$$\overline{P' Q'}^2 = \overline{P' Q_1}^2 + \overline{Q_1 Q'}^2 ;$$

$$dr^2 (1 + \varepsilon_r)^2 = dr^2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + dr^2 \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 ;$$

$$1 + \varepsilon_r^{(1)2} + 2 \varepsilon_r^{(1)} + 2 \varepsilon_r^{(2)} = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2$$

da cui

$$\varepsilon_r^{(1)} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 .$$

Con riferimento ad ε_t si ha

$$\overline{P' R'}^2 = \overline{P' R_1}^2 + \overline{R_1 R'}^2 ;$$

$$r^2 d\alpha^2 (1 + \varepsilon_t)^2 = \left(r + u + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 d\alpha^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - v\right)^2 d\alpha^2 ;$$

$$1 + \varepsilon_t^{(1)2} + 2 \varepsilon_t^{(1)} + 2 \varepsilon_t^{(2)} = 1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u^2}{r^2} +$$

$$+ 2 \frac{u}{r} + 2 \frac{u}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{v^2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} v$$

da cui

$$\varepsilon_t^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r}$$

$$\varepsilon_t^{(2)} = \frac{1}{2 r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{v^2}{2 r^2} - \frac{v}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} .$$

(*) Si tenga presente che spostamenti u e v costanti deformano l'elemento PQRS, perchè u è diretto secondo il raggio e v secondo la circonferenza.

Con riferimento a γ_{rt} si ottiene (si omettono per semplicità gli indici r e t)

$$\overline{P'Q'} \times \overline{P'R'} = r \, d\alpha \, dr (1 + \varepsilon_r) (1 + \varepsilon_t) \cos (90^\circ - \gamma) ;$$

$$\overline{P'Q'} \times \overline{P'R'} = d\alpha \, dr \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - v\right) + \left(r + u + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial v}{\partial r} \right] ;$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{r} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} - v\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(r + u + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) \frac{\partial v}{\partial r} \right] \left(1 - \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{r}\right) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \\ &\quad - \frac{u}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{uv}{r^2} \end{aligned}$$

da cui

$$\gamma^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} ;$$

$$\gamma^{(2)} = - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{uv}{r^2} .$$

Riassumendo, le componenti del primo ordine sono

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{u}{r} \\ \gamma &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \end{aligned} \tag{4}$$

e quelle del secondo

$$\begin{aligned} \varepsilon_r^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2 \\ \varepsilon_t^{(2)} &= \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{v^2}{2r^2} - \frac{v}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \\ \gamma^{(2)} &= - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{u}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{uv}{r^2} . \end{aligned} \tag{5}$$

3. Equazione di congruenza.

Dalle (7-4) si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \varepsilon_r \\ \frac{\partial u}{\partial \alpha} &= r \left(\gamma - \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = \frac{r}{2} \left(\gamma + \frac{v}{r} + p \right) \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \gamma - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{r} = \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{v}{r} - p \right) \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= r \left(\varepsilon_t - \frac{u}{r} \right)\end{aligned}\tag{a}$$

avendo posto

$$p = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{\partial v}{\partial r}.$$

Derivando la prima delle (a) rispetto ad α e la seconda rispetto ad r si ha

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \alpha} = \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{v}{r} + p \right) + \frac{r}{2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial p}{\partial r} \right); \tag{b}$$

derivando la terza delle (a) rispetto ad α e la seconda rispetto ad r si ha ancora

$$\varepsilon_t + r \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial r} - \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right). \tag{c}$$

Derivando la (b) rispetto ad α e la (c) rispetto ad r si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \alpha^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) + \\ &+ \frac{r}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \alpha} \right) \\ \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varepsilon_t}{\partial r^2} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \alpha} \right)\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial \alpha} = \\ = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_t}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{1}{2r} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial \alpha} = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{\partial^2 p}{\partial r \partial \alpha} \right)$$

e sommando membro a membro

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_t}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \alpha^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{2r^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = \\ = \frac{1}{2r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{\partial p}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) = \\ = \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} \right) = \\ = \frac{1}{2r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \alpha} \right) = \\ = \frac{1}{2r^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \end{aligned}$$

da cui si trae l'equazione di congruenza

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_t}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial r \partial \alpha} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}. \quad (6)$$

4. Equazioni di equilibrio e relazioni di Navier.

Si consideri l'elemento di lastra definito dalle coordinate r , $r + dr$, α , $\alpha + d\alpha$ (fig. 7-4); lo spessore della lastra sia b . Il verso positivo delle tensioni $\sigma_r \sigma_t \tau$ (la τ per semplicità si indica senza il doppio indice rt) è quello che appare in figura, e corrisponde alla convenzione già fatta al cap. II, una volta orientati r e t rispettivamente secondo le r e le α crescenti. Sulla faccia PR agisce la forza $-\sigma_r b r d\alpha$ secondo r , e la forza $-\tau b r d\alpha$ secondo t ; sulla faccia opposta QS agiscono invece le forze

$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr\right) b (r + dr) d\alpha$ e $\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr\right) b (r + dr) d\alpha$. Sulla faccia PQ agisce la forza $-\sigma_t b dr$ secondo t , e la forza $-\tau b dr$ secondo r ;

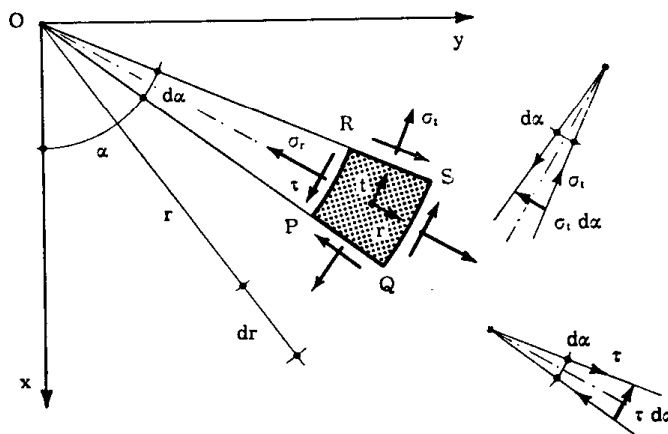


FIG. 7-4

sulla faccia opposta RS agiscono invece le forze $\left(\sigma_t + \frac{\partial \sigma_t}{\partial \alpha} d\alpha\right) b dr$ e $\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} d\alpha\right) b dr$.

Si supponga che la forza di massa sia diretta secondo il raggio, e pari ad R ; risulta, per l'equilibrio alla traslazione secondo r ,

$$\left(\sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr\right) b (r + dr) d\alpha - \sigma_r b r d\alpha + \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} d\alpha b dr + \\ - \sigma_t b dr d\alpha + R b r d\alpha dr = 0 ;$$

da cui

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + R = 0 .$$

Analogamente si trae la seconda equazione di equilibrio, con riferimento alla traslazione secondo t ,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + 2 \frac{\tau}{r} = 0 .$$

Possono perciò scriversi le due equazioni indefinite dell'equilibrio, valide per forze di massa esclusivamente radiali,

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + R = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \alpha} + \frac{\partial \tau}{\partial r} + 2 \frac{\tau}{r} = 0 .$$
(7)

Si osserva che, ponendo $dr = dx$, $r d\alpha = dy$, $1/r = 0$, le formule (7-4) (7-5) (7-6) (7-7) si semplificano nelle corrispondenti, già note, valide in coordinate cartesiane ortogonali.

Le relazioni tra le componenti di deformazione e di tensione sono le stesse del cap. IV

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left(\sigma_r - \frac{\sigma_t}{m} \right)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E} \left(\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} \right)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} .$$
(8)

5. La funzione di Airy in coordinate polari.

Nell'ipotesi di forze di massa nulle, si può porre

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}$$

$$\sigma_t = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

$$\tau = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \alpha} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) .$$
(9)

Le (7-9) soddisfano le equazioni indefinite dell'equilibrio (7-7); perchè sia soddisfatta anche l'equazione di congruenza (7-6) deve essere

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi^2}{\partial \alpha^2} \right) = 0 .$$
(10)

Alla (7-10) si perviene pure direttamente sommando le due ultime relazioni (7-3)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}; \quad (11)$$

poichè può porsi

$$\Delta_4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)$$

l'equazione di Laplace

$$\Delta_4 \Phi = 0$$

porge, in coordinate polari, la (7-10).

6. Stati tensionali indipendenti dall'anomalia.

Se lo stato tensionale è indipendente dall'anomalia α , la τ è nulla, e le due equazioni (7-7) si riducono alla prima

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} + R = 0. \quad (12)$$

L'equazione di congruenza (7-10) si semplifica nell'altra

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) = 0$$

e cioè

$$\frac{d^4 \Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = 0. \quad (13)$$

La (7-13) è un'equazione differenziale ordinaria, che può essere ridotta ad un'equazione lineare del quarto ordine a coefficienti costanti con la sostituzione

$$r = e^t$$

$$t = \ln r$$

attraverso cui la (7-13) diviene (*)

$$\frac{d^4\Phi}{dt^4} - 4 \frac{d^3\Phi}{dt^3} + 4 \frac{d^2\Phi}{dt^2} = 0. \quad (d)$$

L'equazione caratteristica della (d) è

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 4\lambda^2 = 0$$

che ammette le radici doppie 0 e 2. L'integrale generale della (d) è perciò

$$\Phi = D + A t + C e^{2t} + B t e^{2t}$$

(*) Per le note regole di derivazione si ha

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{dr} \\ \frac{d^2\Phi}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{d\Phi}{dt} \frac{dt}{dr} \right) = \frac{d^2\Phi}{dt^2} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 + \frac{d\Phi}{dt} \frac{d^2t}{dr^2}; \\ \frac{d^3\Phi}{dr^3} &= \frac{d}{dr} \left[\frac{d^2\Phi}{dt^2} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 + \frac{d\Phi}{dt} \frac{d^2t}{dr^2} \right] = \frac{d^3\Phi}{dt^3} \left(\frac{dt}{dr} \right)^3 + 2 \frac{d^2\Phi}{dt^2} \frac{dt}{dr} \frac{d^2t}{dr^2} + \\ &+ \frac{d^2\Phi}{dt^2} \frac{d^2t}{dr^2} \frac{dt}{dr} + \frac{d\Phi}{dt} \frac{d^3t}{dr^3} = \frac{d^3\Phi}{dt^3} \left(\frac{dt}{dr} \right)^3 + 3 \frac{d^2\Phi}{dt^2} \frac{d^2t}{dr^2} \frac{dt}{dr} + \frac{d\Phi}{dt} \frac{d^3t}{dr^3}; \\ \frac{d^4\Phi}{dr^4} &= \frac{d^4\Phi}{dt^4} \left(\frac{dt}{dr} \right)^4 + 6 \frac{d^3\Phi}{dt^3} \left(\frac{dt}{dr} \right)^2 \frac{d^2t}{dr^2} + \frac{d^2\Phi}{dt^2} \left[4 \frac{d^3t}{dr^3} \frac{dt}{dr} + 3 \left(\frac{d^2t}{dr^2} \right)^2 \right] + \frac{d\Phi}{dt} \frac{d^4t}{dr^4}. \end{aligned}$$

Si trae perciò, per il caso in esame,

$$\begin{aligned} \frac{d^4\Phi}{dr^4} &= \frac{d^4\Phi}{dt^4} \frac{1}{r^4} - \frac{d^3\Phi}{dt^3} \frac{6}{r^4} + \frac{d^2\Phi}{dt^2} \frac{11}{r^4} - \frac{d\Phi}{dt} \frac{6}{r^4} \\ \frac{2}{r} \frac{d^3\Phi}{dr^3} &= \frac{d^3\Phi}{dt^3} \frac{2}{r^4} - \frac{d^2\Phi}{dt^2} \frac{6}{r^4} + \frac{d\Phi}{dt} \frac{4}{r^4} \\ - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} &= - \frac{d^2\Phi}{dt^2} \frac{1}{r^4} + \frac{d\Phi}{dt} \frac{1}{r^4} \\ \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{d\Phi}{dt} \frac{1}{r^4} \end{aligned}$$

da cui, sommando,

$$\frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{1}{r^4} \left(\frac{d^4\Phi}{dt^4} - 4 \frac{d^3\Phi}{dt^3} + 4 \frac{d^2\Phi}{dt^2} \right) = 0.$$

e per la sostituzione già fatta

$$\Phi = D + A \ln r + C r^2 + B r^2 \ln r . \quad (14)$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_t &= \frac{d^2\Phi}{dr^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C \\ \tau &= 0 . \end{aligned} \quad (15)$$

Dalle (7-15) e dalla prima delle (7-8) si ha

$$E \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1 + \frac{1}{m}}{r^2} A + 2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) B \ln r + \left(1 - \frac{3}{m}\right) B + 2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) C$$

da cui

$$u = \frac{1}{E} \left[-\frac{1 + \frac{1}{m}}{r} A + 2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) B r \ln r - \left(1 + \frac{1}{m}\right) B r + \right. \\ \left. + 2 \left(1 - \frac{1}{m}\right) C r \right] + f(\alpha) .$$

La seconda delle (7-8) e la seconda delle (7-4) forniscono

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = r \varepsilon_t - u = \frac{r}{E} \left(\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} \right) - u$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \alpha} &= \frac{4 B r}{E} - f(\alpha) \\ v &= \frac{4 B r}{E} \alpha - \int f(\alpha) d\alpha + g(r) . \end{aligned}$$

Dalla

$$\gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

si ricava

$$\frac{1}{r} \frac{df}{d\alpha} + \frac{dg}{dr} + \frac{1}{r} \int f(\alpha) d\alpha - \frac{1}{r} g = 0$$

da cui si trae

$$g(r) = C_r r$$

$$f(\alpha) = C_{1\alpha} \sin \alpha + C_{2\alpha} \cos \alpha .$$

E' perciò

$$u = \frac{1}{E} \left(-\frac{m+1}{mr} A + 2 \frac{m-1}{m} Br \ln r - \frac{m+1}{m} Br + 2 \frac{m-1}{m} Cr \right) + C_{1\alpha} \sin \alpha + C_{2\alpha} \cos \alpha \quad (16)$$

$$v = \frac{4Br}{E} \alpha + C_r r + C_{1\alpha} \cos \alpha - C_{2\alpha} \sin \alpha .$$

7. La lastra circolare soggetta a pressione uniforme.

Si studia la lastra circolare di raggio r , e spessore b , soggetta a forze q radiali uniformemente distribuite lungo il contorno (fig. 7-5). In questo

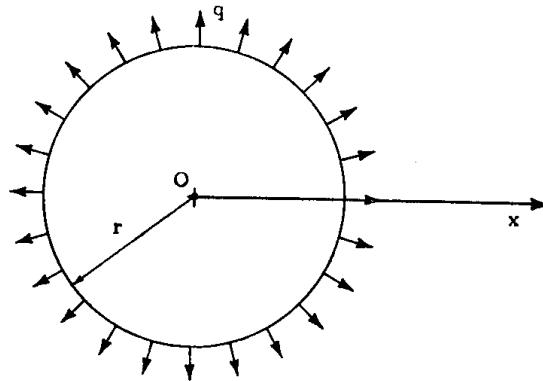


FIG. 7-5

caso le tensioni e gli spostamenti u sono indipendenti dall'anomalia e gli spostamenti v sono nulli; dalla (7-16) risulta perciò

$$C_{1\alpha} = C_{2\alpha} = B = C_r = 0 .$$

Poichè per $r=0$ deve essere $u=0$, dalla prima delle (7-16) risulta anche $A=0$. E' diversa da zero la sola C , e le (7-15) porgono

$$\sigma_r = 2C = \frac{q}{b}$$

$$\sigma_t = 2C = \frac{q}{b} ;$$

la lastra è perciò sollecitata a trazione (o compressione) uniforme in ogni direzione.

Si consideri adesso la lastra a corona circolare di raggi r_e e r_i , sollecitata dalle forze radiali uniformemente distribuite q_e e q_i (fig. 7-6). Anche

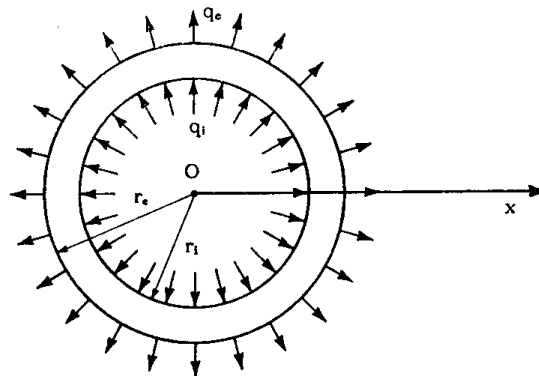


FIG. 7-6

in questo caso tensioni e spostamenti sono indipendenti da α , e $v=0$; perciò

$$C_{1\alpha} = C_{2\alpha} = C_r = B = 0 .$$

Si ha dalle (7-15)

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C$$

$$\sigma_t = -\frac{A}{r^2} + 2C .$$

Le condizioni ai limiti forniscono

$$\frac{A}{r_e^2} + 2C = \frac{q_e}{b}$$

$$\frac{A}{r_i^2} + 2C = -\frac{q_i}{b}$$

da cui

$$A = - \frac{r_e^2 r_i^2 (q_e + q_i)}{b (r_e^2 - r_i^2)}$$

$$2C = \frac{q_e r_e^2 + q_i r_i^2}{b (r_e^2 - r_i^2)} .$$

Si ha perciò

$$\sigma_r = - \frac{r_e^2 r_i^2 (q_e + q_i)}{b (r_e^2 - r_i^2)} \frac{1}{r^2} + \frac{q_e r_e^2 + q_i r_i^2}{b (r_e^2 - r_i^2)} \quad (17)$$

$$\sigma_t = \frac{r_e^2 r_i^2 (q_e + q_i)}{b (r_e^2 - r_i^2)} \frac{1}{r^2} + \frac{q_e r_e^2 + q_i r_i^2}{b (r_e^2 - r_i^2)} .$$

Si osservi che

$$\sigma_r + \sigma_t = \text{cost} ;$$

perciò le (h) ed (i) del cap. VI sono rispettate, e la soluzione (7-17) non è limitata dall'ipotesi di piccolo spessore. I risultati acquisiti in questo paragrafo valgono perciò anche per i tubi. Per $q_e = 0$ le (7-17) porgono (tubo soggetto a pressione uniforme nell'interno)

$$\sigma_r = \frac{q}{b} \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 - \frac{r_e^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{q}{b} \frac{r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} \left(1 + \frac{r_e^2}{r^2} \right) . \quad (18)$$

Dalle (7-18) si osserva che, per $q > 0$, è sempre σ_r di compressione e σ_t di trazione.

Il massimo valore di σ_t si ha sul bordo interno, ed è pari a

$$\sigma_{t \max} = \frac{q}{b} \frac{r_e^2 + r_i^2}{r_e^2 - r_i^2} ; \quad (19)$$

la $\sigma_{t \max}$ diminuisce all'aumentare di r_e , e tende al valore $\frac{q}{b}$ per $\frac{r_e}{r_i} \rightarrow \infty$, conservandosi sempre ad esso superiore.

8. Flessione pura in travi di sezione rettangolare a forte curvatura.

Si consideri una lastra la cui sezione con il piano medio sia un settore di corona circolare (fig. 7-7); siano sollecitati soltanto i due bordi rettilinei, da forze aventi per risultante due coppie M uguali e contrarie, per esempio positiva a sinistra e negativa a destra.

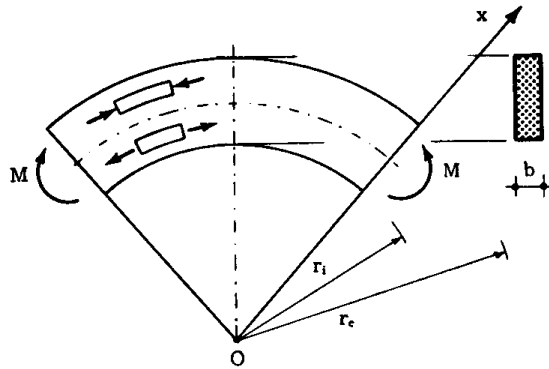


FIG. 7-7

Le condizioni ai limiti sui bordi curvilinei forniscono, attraverso la prima delle (7-15),

$$\frac{A}{r_e^2} + B(1 + 2 \ln r_e) + 2C = 0 \quad (e)$$

$$\frac{A}{r_i^2} + B(1 + 2 \ln r_i) + 2C = 0 .$$

La prima delle condizioni ai limiti sui bordi rettilinei fornisce, attraverso la seconda delle (7-15),

$$\int_{r_i}^{r_e} \sigma_t dr = \int_{r_i}^{r_e} \frac{d^2\Phi}{dr^2} dr = \left(\frac{d\Phi}{dr} \right)_{r_i}^{r_e} = 0$$

$$\left[\frac{A}{r_e} + B(r_e + 2r_e \ln r_e) + 2C r_e \right] - \left[\frac{A}{r_i} + B(r_i + 2r_i \ln r_i) + 2C r_i \right] = 0 . \quad (f)$$

La (f) è combinazione delle (e), e perciò è soddisfatta se lo sono le (e). Dalla seconda delle condizioni ai limiti sui bordi rettilinei si trae, per la seconda delle (7-15),

$$b \int_{r_i}^{r_e} p_t r dr = b \int_{r_i}^{r_e} \sigma_t r dr = b \int_{r_i}^{r_e} \frac{d^2\Phi}{dr^2} r dr = -M .$$

Integrando per parti si ha

$$\int_{r_i}^{r_e} \frac{d^2\Phi}{dr^2} r dr = \left(\frac{d\Phi}{dr} r \right)_{r_i}^{r_e} - \int_{r_i}^{r_e} \frac{d\Phi}{dr} dr = \left(\frac{d\Phi}{dr} r \right)_{r_i}^{r_e} - \Phi \Big|_{r_i}^{r_e}.$$

Dalle (7-14) e dalle (e) risulta

$$\left(\frac{d\Phi}{dr} r \right)_{r_i}^{r_e} = 0$$

da cui si trae

$$\Phi \Big|_{r_i}^{r_e} = \frac{M}{b}$$

e ancora, per la (7-14),

$$A \ln \frac{r_e}{r_i} + B (r_e^2 \ln r_e - r_i^2 \ln r_i) + C (r_e^2 - r_i^2) = \frac{M}{b}. \quad (g)$$

Il sistema (e) (g) fornisce

$$A = - \frac{4M}{kb} r_e^2 r_i^2 \ln \frac{r_e}{r_i}$$

$$B = - \frac{2M}{kb} (r_e^2 - r_i^2)$$

$$C = \frac{M}{kb} [r_e^2 - r_i^2 + 2 (r_e^2 \ln r_e - r_i^2 \ln r_i)]$$

avendo posto

$$k = (r_e^2 - r_i^2)^2 - 4 r_e^2 r_i^2 \left(\ln \frac{r_e}{r_i} \right)^2.$$

Dalle (7-15) si ha perciò

$$\begin{aligned} \sigma_r &= - \frac{4M}{kb} \left(\frac{r_e^2 r_i^2}{r^2} \ln \frac{r_e}{r_i} + r_e^2 \ln \frac{r}{r_e} + r_i^2 \ln \frac{r_i}{r} \right) \\ \sigma_t &= - \frac{4M}{kb} \left(- \frac{r_e^2 r_i^2}{r^2} \ln \frac{r_e}{r_i} + r_e^2 \ln \frac{r}{r_e} + r_i^2 \ln \frac{r_i}{r} + r_e^2 - r_i^2 \right). \end{aligned} \quad (20)$$

La soluzione è valida se le coppie M sono applicate attraverso una distribuzione di forze p_t identica a quella delle tensioni σ_t ; anche qui però il principio di De Saint-Venant assicura che la soluzione è valida per qualsiasi legge di distribuzione delle p_t , purchè ci si trovi ad una distanza dai bordi rettilinei almeno uguale a quella di estinzione.

Una soluzione grossolana del problema si ha adottando la formula di Navier (distribuzione lineare delle tensioni σ_t lungo l'altezza)

$$\sigma_t = - \frac{12 M}{b (r_e - r_i)^3} \left(r - \frac{r_e + r_i}{2} \right). \quad (h)$$

Una soluzione più approssimata della (h) si ottiene facendo invece l'ipotesi che le sezioni radiali della lastra si conservino piane durante la flessione, e trascurando le tensioni σ_r ; questa trattazione sarà eseguita nel capitolo delle travi ad asse curvilineo, e conduce ad una variazione iperbolica delle tensioni σ_t lungo l'altezza. Ponendo, in ogni caso, i valori di σ_t ai due estremi sotto la forma

$$\sigma_t = m \frac{M}{b r_i^2}$$

i valori di m nei tre casi sono forniti dalla tabella (7-1).

TABELLA I

| $\frac{r_e}{r_i}$ | Distribuzione delle tensioni secondo una legge lineare | Distribuzione delle tensioni secondo una legge iperbolica | Soluzione esatta |
|-------------------|--|---|--------------------|
| 1,3 | $\pm 66,67$ | + 72,98 - 61,27 | + 73,05 - 61,35 |
| 2 | $\pm 6,00$ | + 7,725 - 4,863 | + 7,755 - 4,917 |
| 3 | $\pm 1,50$ | + 2,285 - 1,095 | + 2,292 - 1,130 |

(da Timoshenko)

Si osserva che la differenza tra i valori forniti dalla teoria esatta e quelli tratti nell'ipotesi di variazione lineare delle tensioni aumenta con il rapporto r_e/r_i ; viceversa, i valori tratti nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane sono molto aderenti al vero.

Dalla prima delle (7-20) si può osservare che, per il verso delle coppie della fig. 7-7, la σ_r è sempre di trazione; ciò si spiega fisicamente perchè, supposta la lastra tagliata da superfici circolari cilindriche con asse normale al suo piano in O , le fibre circolari che così si ottengono tendono, per effetto delle σ_t , ad allontanarsi tra loro. Le σ_r si annullano ai due

bordi $r = r_e$ ed $r = r_i$, e raggiungono il massimo in corrispondenza di una fibra prossima a quella neutra, e spostata rispetto a questa verso il polo O; $\sigma_{r \max}$ è sempre molto più piccola di $\sigma_{t \max}$, e il loro rapporto è fornito dalla tabella (7-2).

TABELLA II

| $\frac{r_e}{r_i}$ | 1,3 | 2 | 3 |
|---|-------|-------|-------|
| $\frac{\sigma_{r \max}}{\sigma_{t \max}}$ | 0,060 | 0,138 | 0,193 |

Nella fig. 7-8 sono riportati i diagrammi di σ_r e σ_t per $r_e/r_i = 2$, in due scale diverse, e con riferimento ad uno spessore unitario.

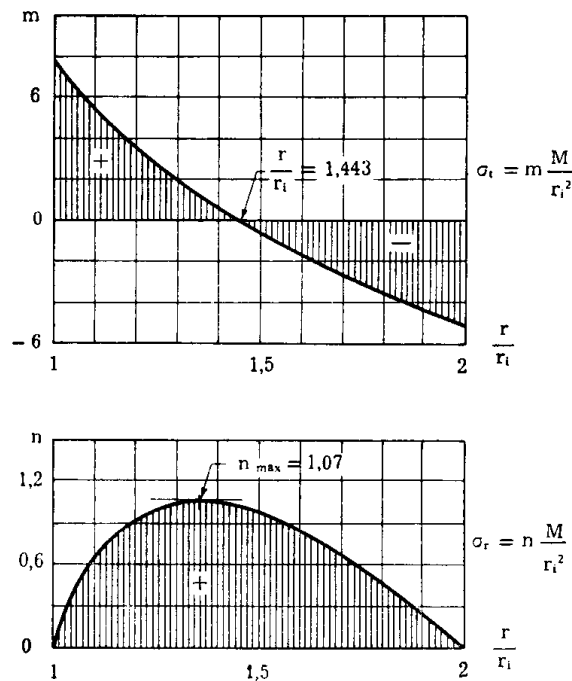


FIG. 7-8

Per studiare gli spostamenti si supponga fisso il baricentro della sezione retta corrispondente all'anomalia zero, e l'elemento di raggio del suo

intorno; si ha perciò, per $r = r_0 = \frac{r_e + r_i}{2}$ ed $\alpha = 0$,

$$u = v = \frac{\partial v}{\partial r} = 0 .$$

Dalle (6-16) si ha perciò

$$\frac{1}{E} \left(-\frac{m+1}{mr_0} A + 2 \frac{m-1}{m} B r_0 \ln r_0 - \frac{m+1}{m} B r_0 + 2 \frac{m-1}{m} C r_0 \right) + C_{2\alpha} = 0$$

$$C_r r_0 + C_{1\alpha} = 0$$

$$C_r = 0$$

da cui si deduce

$$C_r = C_{1\alpha} = 0 \quad (21)$$

$$v = \frac{4Br}{E} \alpha - C_{2\alpha} \sin \alpha$$

Dalle (7-21) si trae che, con riferimento alla generica sezione retta, gli spostamenti normali al suo piano consistono in una traslazione $-C_{2\alpha} \sin \alpha$, e in una rotazione di ampiezza $\frac{4B\alpha}{E}$ intorno al polo O; le sezioni rette perciò si mantengono piane in rigore. Gli scarti tra i risultati esatti, e quelli ottenuti nella teoria delle travi attraverso l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, non dipendono perciò dall'essere inesatta questa ipotesi, ma dal trascurare le tensioni radiali.

9. Lastra con foro circolare.

Il problema della concentrazione delle tensioni in prossimità dei fori, strettamente connesso con quello delle chiodature, è di alto interesse in molte applicazioni tecniche, in particolare nel campo delle costruzioni na-

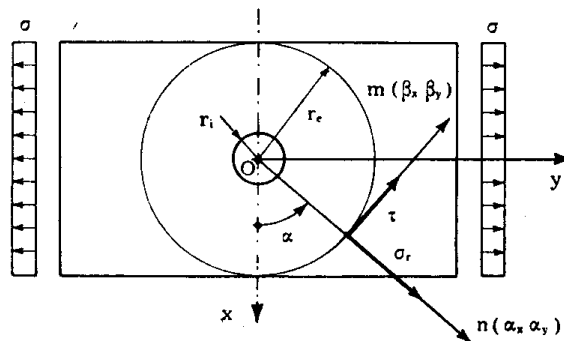


FIG. 7-9

vali. Si consideri una lastra soggetta a trazione σ uniforme (fig. 7-9); in essa sia presente un foro circolare di raggio r_i . Si effettui una sezione con

una superficie cilindrica il cui raggio r_e sia abbastanza maggiore di r_1 . Per il principio di De Saint-Venant le sollecitazioni sugli elementi piani di tale sezione possono confondersi con quelle che si avrebbero in assenza del foro; dalle (2-12) e (2-13) si ottiene in tale ipotesi

$$\begin{aligned}\alpha_x &= \cos \alpha \\ \beta_x &= \cos (90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha \\ \sigma_r &= \sigma \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \sigma (1 + \cos 2\alpha) \\ \tau &= -\sigma \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha.\end{aligned}\tag{i}$$

Si può isolare la parte di lastra compresa nel cilindro di raggio r_e , facendo agire sul bordo forze distribuite $q_r = b\sigma_r$ e $q_t = b\tau$ fornite dalle (i). Tale sollecitazione si può scindere in una forza radiale uniforme

$$q_r = \frac{b}{2} \sigma$$

i cui effetti sono forniti dalle (7-17), e nelle forze residue

$$\begin{aligned}q_r &= \frac{b}{2} \sigma \cos 2\alpha \\ q_t &= -\frac{b}{2} \sigma \sin 2\alpha.\end{aligned}\tag{l}$$

Le σ_r e τ derivanti dalle (l) devono, per $r = r_e$, assumere le espressioni $\frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha$ e $-\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha$; ciò si verifica se si opera su una funzione Φ del tipo

$$\Phi = f(r) \cos 2\alpha$$

come si trae immediatamente dalle (7-9).

Perchè la Φ rispetti la condizione di Laplace (6-10), deve essere

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - 4 \frac{f}{r^2} \right) = 0$$

il cui integrale generale è

$$f = Ar^2 + Br^4 + C \frac{1}{r^2} + D.$$

Si ha perciò

$$\begin{aligned}\sigma_r &= - \left(2A + 6 \frac{C}{r^4} + 4 \frac{D}{r^2} \right) \cos 2\alpha \\ \sigma_t &= \left(2A + 12Br^2 + 6 \frac{C}{r^4} \right) \cos 2\alpha \\ \tau &= \left(2A + 6Br^2 - 6 \frac{C}{r^4} - 2 \frac{D}{r^2} \right) \sin 2\alpha .\end{aligned}\tag{m}$$

Per $r=r_e$, le σ_r e τ sono fornite dalle (l); per $r=r_i$ sono nulle. Si ha perciò

$$\begin{aligned}2A &+ 6 \frac{C}{r_e^4} + 4 \frac{D}{r_e^2} = - \frac{b}{2} \sigma \\ 2A &+ 6 \frac{C}{r_i^4} + 4 \frac{D}{r_i^2} = 0 \\ 2A + 6Br_e^2 - 6 \frac{C}{r_e^4} - 2 \frac{D}{r_e^2} &= - \frac{b}{2} \sigma \\ 2A + 6Br_i^2 - 6 \frac{C}{r_i^4} - 2 \frac{D}{r_i^2} &= 0\end{aligned}\tag{n}$$

Nel caso di lastra indefinita ($r_e = \infty$) si ha dalla prima delle (n)

$$A = - \frac{b\sigma}{4} ,$$

dalla terza

$$B = 0 ,$$

e dalle seconda e quarta

$$C = - \frac{b}{4} \sigma r_i^4$$

$$D = \frac{b}{2} \sigma r_i^2 .$$

In definitiva, sostituendo questi valori nelle (m), e aggiungendo i termini (7-17) calcolati per $q_e = \frac{b}{2} \sigma$ e $q_i = 0$, si ha

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma}{2} \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) + \frac{\sigma}{2} \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{r^4} - 4 \frac{r_1^2}{r^2}\right) \cos 2\alpha \\ \sigma_t &= \frac{\sigma}{2} \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) - \frac{\sigma}{2} \left(1 + 3 \frac{r_1^4}{r^4}\right) \cos 2\alpha \\ \tau &= -\frac{\sigma}{2} \left(1 - 3 \frac{r_1^4}{r^4} + 2 \frac{r_1^2}{r^2}\right) \sin 2\alpha.\end{aligned}\quad (22)$$

La soluzione (7-22) è dovuta a G. Kirsch (1898). Si osserva che per $r \rightarrow \infty$ i valori (7-22) tendono a quelli forniti dalla (i), validi in rigore in assenza del foro. Per $r = r_1$ invece si ottiene

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \tau = 0 \\ \sigma_t &= \sigma (1 - 2 \cos 2\alpha); \end{aligned}$$

nei due estremi m ed n (fig. 7-10) del diametro del foro perpendicolare alla direzione della tensione σ è $2\alpha = \pi$, e $2\alpha = 3\pi$, e quindi $\sigma_t = 3\sigma$;

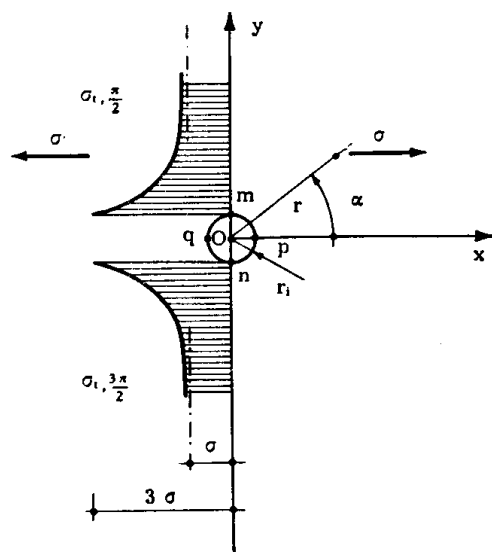


FIG. 7-10

nei due estremi p e q del diametro parallelo alla direzione di σ è $2\alpha = 0$, e $2\alpha = 2\pi$, e quindi $\sigma_t = -\sigma$. Lungo la sezione passante per il centro del foro e perpendicolare a σ è

$$\begin{aligned}\sigma_x = \sigma_t &= \frac{\sigma}{2} \left(2 + \frac{r_1^2}{r^2} + 3 \frac{r_1^4}{r^4}\right) \\ \tau_{xy} &= \tau = 0;\end{aligned}$$

l'andamento della σ_x di cui sopra è riprodotto nella fig. 7-10, e da esso si nota l'effetto di *concentrazione di tensione* provocato dal foro.

Il caso del foro a sezione ellittica è stato trattato dal *Kolosoff* (1910), dall'*Inglis* (1913), dal *Pöschl* (1921); se i diametri principali dell'ellisse sono

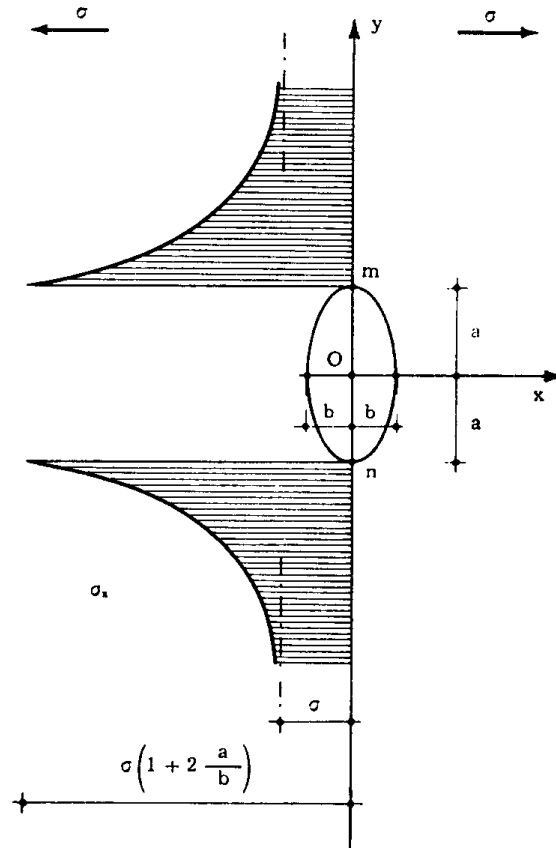


FIG. 7-11

disposti parallelamente ed ortogonalmente alla direzione di σ (fig. 7-11), i valori delle tensioni alle estremità m ed n del diametro $2a$ ortogonale a σ sono forniti da

$$\sigma_{x \max} = \sigma \left(1 + 2 \frac{a}{b}\right).$$

Per $a = b$ si riottiene il valore $\sigma_{x \max} = 3\sigma$ valido per foro circolare; per $a > b$ il rapporto $\frac{\sigma_{x \max}}{\sigma}$ è maggiore di 3, e cresce con il rapporto $\frac{a}{b}$.

Una fenditura in senso ortogonale a σ può assimilarsi ad un foro ellittico molto schiacciato, e si spiega così come alle sue estremità sorgano tensioni elevatissime; nei materiali duttili intervengono fenomeni di au-

toadattamento plastico a ridistribuire le tensioni, nei materiali fragili invece le fenditure ortogonali alla direzione dello sforzo tendono ad allargarsi, e si può tentare di fermarle praticando nella lastra dei fori circolari alle loro estremità.

La presenza di inevitabili piccole fenditure nei materiali spiega la differenza di comportamento a trazione e a compressione nei riguardi della rottura, e precisamente il grande divario esistente nei materiali fragili tra la sollecitazione intrinseca (valore della trazione cui si associa una energia di deformazione che tradotta in calore porta a quel grado di temperatura in corrispondenza del quale la rottura si ha senza tensioni) e la trazione di crisi. *A. A. Griffith*, operando sperimentalmente (1924) su fili trafilati di vetro precedentemente portato a temperatura prossima

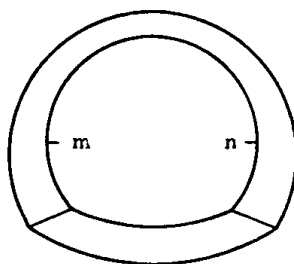


FIG. 7-12

a quella di ebollizione, e quindi quasi immuni da fenditure, ha ottenuto trazioni di rottura pari a 630 kg/mm², dello stesso ordine di grandezza della pressione intrinseca, pari a 1300 kg/mm², mentre su campioni ordinari la trazione di rottura era appena di 18 kg/mm². Quanto detto circa la concentrazione delle tensioni in corrispondenza dei fori spiega pure il cosiddetto *colpo di montagna*, per cui nelle gallerie profonde si staccano, in corrispondenza degli estremi del diametro orizzontale, ove si verificano le massime compressioni, degli scheggioni di roccia, con secco caratteristico rumore (fig. 7-12).

10. Il problema di Boussinesq nel piano.

Si consideri una lastra la cui sezione media sia un semipiano (lastra semiindefinita a bordo rettilineo) caricata in corrispondenza di un punto *O* del contorno *AB* da una forza *q* distribuita uniformemente lungo

lo spessore, e normale al contorno stesso (fig. 7-13); la forza q è relativa ad uno spessore b unitario.

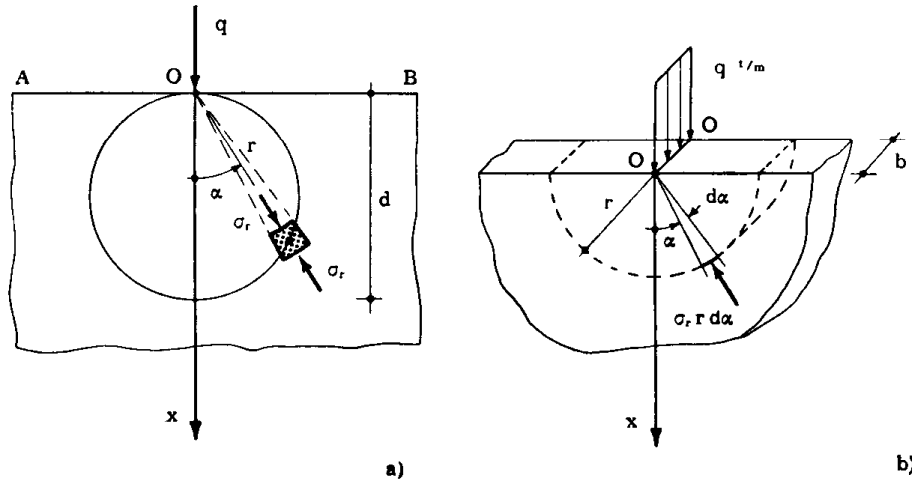


FIG. 7-13

Con il riferimento della fig. 7-13 a, la soluzione del problema è fornita da

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -2 \frac{q}{\pi} \frac{\cos \alpha}{r} \\ \sigma_t &= 0 \\ \tau &= 0.\end{aligned}\tag{23}$$

Infatti le (7-23) rispettano le equazioni indefinite di equilibrio (7-7); così pure sono rispettate le condizioni ai limiti, poichè sul contorno AB è $\sigma_t = \tau = 0$. In corrispondenza del punto di applicazione delle forze q risulta $r = 0$, e $\sigma_r = \infty$; la condizione ai limiti relativa a q si traduce perciò nel dover essere uguale e contraria a $q \cdot b$ la risultante delle forze agenti su una qualsiasi sezione cilindrica di asse OO e raggio r (fig. 7-13 b). Tale condizione è pur essa soddisfatta:

$$2b \int_0^{\pi/2} \sigma_r r \cos \alpha d\alpha = -\frac{4}{\pi} q b \int_0^{\pi/2} \cos^2 \alpha d\alpha = -q b.$$

Occorre infine verificare che le (7-23) rispettano le condizioni di congruenza; ed infatti la funzione

$$\Phi = -\frac{q}{\pi} r \alpha \sin \alpha,$$

dalla quale attraverso le (7-9) si possono ottenere le (7-23), soddisfa la equazione di Laplace (7-10). La soluzione (7-23) è perciò l'unica possibile soluzione del problema, e corrisponde alla cosiddetta *distribuzione radiale semplice*.

Per tutti i punti del cerchio generico di diametro d e tangente in O al contorno AB (fig. 7-13 a), si ha

$$d \cos \alpha = r$$

e perciò, per la prima delle (7-23),

$$\sigma_r = - \frac{2q}{\pi d} . \quad (24)$$

Su tutti i punti del generico cerchio tangente in O al contorno la σ_r è quindi costante (ad eccezione di O , ove è infinitamente grande) e sui vari cerchi varia proporzionalmente all'inverso del diametro.

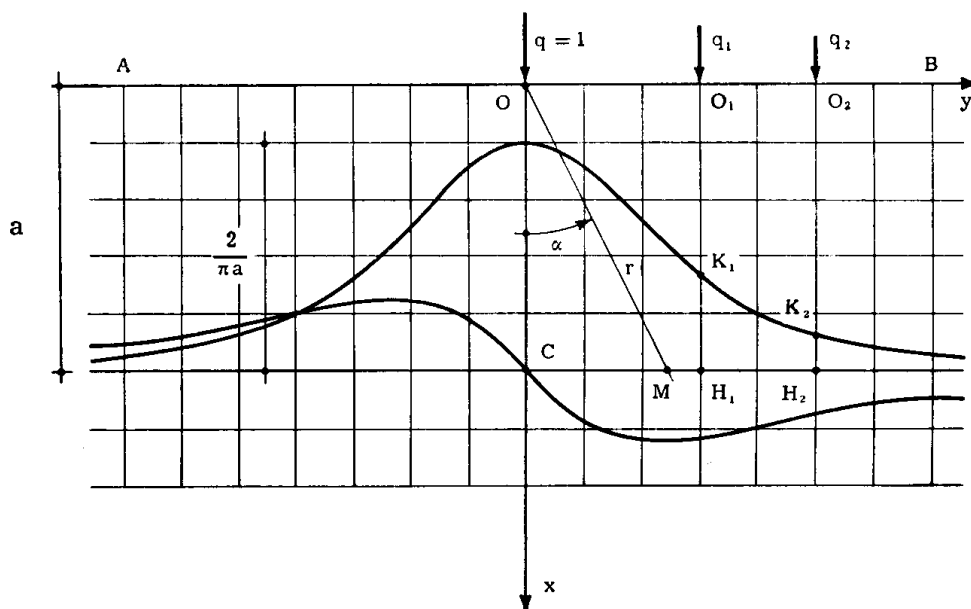


FIG. 7-14

Lungo una retta parallela al bordo AB (fig. 7-14), e a distanza a da quest'ultimo, risulta (*)

(*) Rispetto alla coppia di assi r e t , i coseni direttori di x e y sono (fig. 7-15)

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \cos \alpha \\ \alpha_t &= \cos (\alpha + 90^\circ) = - \operatorname{sen} \alpha \\ \beta_r &= \cos (\alpha - 90^\circ) = \operatorname{sen} \alpha \\ \beta_t &= \cos \alpha . \end{aligned}$$

Dalle (2-12) e (2-13) discendono perciò le (7-25).

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \alpha &= -\frac{2q}{\pi a} \cos^4 \alpha \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \alpha &= -\frac{2q}{\pi a} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \\ \tau_{xy} &= \sigma_r \sin \alpha \cos \alpha &= -\frac{2q}{\pi a} \sin \alpha \cos^3 \alpha.\end{aligned}\quad (25)$$

Nella fig. 7-14 sono rappresentati i diagrammi di σ_x e τ_{xy} lungo la retta generica parallela al contorno.

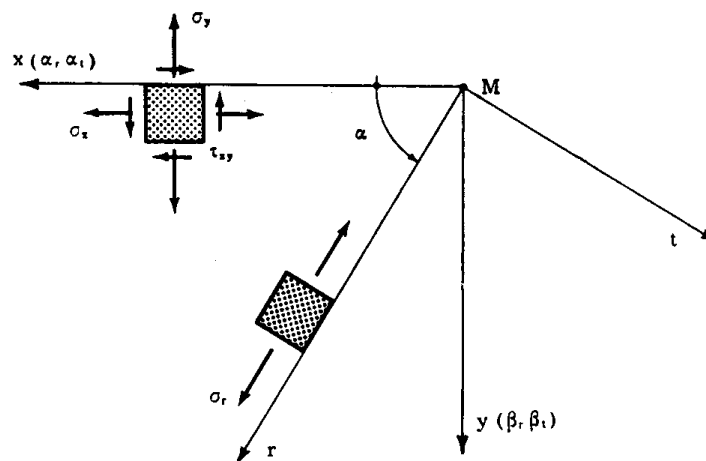


FIG. 7-15

Se le forze q agiscono parallelamente al contorno (fig. 7-16) la soluzione è sempre fornita dalla (7-23), purchè l'angolo α si valuti a partire dalla retta d'azione di q .

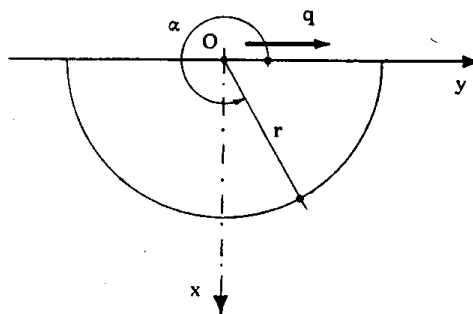


FIG. 7-16

In tal caso infatti le condizioni di equilibrio e di congruenza, e quelle ai limiti sul contorno AB ad esclusione del punto O , sono soddisfatte. La condizione ai limiti relativa ad una sezione cilindrica di raggio r

$$b \int_0^\pi \sigma_r r \cos \alpha \, d\alpha = -q b$$

è pur essa soddisfatta, poichè risulta

$$-2 \frac{q}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \alpha \, d\alpha = -q .$$

Dalle tensioni si può passare agli spostamenti, per integrazione: ci si limita al caso della forza q ortogonale al contorno. Si ha (7-4 e 7-8)

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\sigma_r}{E} = -\frac{2q}{\pi E} \frac{\cos \alpha}{r} \\ \varepsilon_t &= \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \alpha} = -\frac{\sigma_r}{Em} = \frac{2q}{\pi Em} \frac{\cos \alpha}{r} \\ \gamma &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = \frac{\tau}{G} = 0 . \end{aligned} \quad (o)$$

Dalla prima delle (o), integrando, si ottiene

$$u = -\frac{2q}{\pi E} \cos \alpha \ln r + f(\alpha)$$

Sostituendo nella seconda delle (o), e integrando, si trova

$$v = \frac{2q}{\pi Em} \sin \alpha + \frac{2q}{\pi E} \sin \alpha \ln r - \int f(\alpha) \, d\alpha + g(r) .$$

Sostituendo nella terza delle (o), si ha

$$f(\alpha) = -\frac{m-1}{\pi Em} q \alpha \sin \alpha + A \sin \alpha + B \cos \alpha$$

$$g(r) = C r$$

essendo $A B C$ costanti di integrazione. Si ha perciò, in definitiva,

$$\begin{aligned} u &= -\frac{2q}{\pi E} \cos \alpha \ln r - \frac{m-1}{\pi Em} q \alpha \sin \alpha + A \sin \alpha + B \cos \alpha \\ v &= \frac{2q}{\pi Em} \sin \alpha + \frac{2q}{\pi E} \sin \alpha \ln r - \frac{m-1}{\pi Em} q \alpha \cos \alpha + \\ &\quad + \frac{m-1}{\pi Em} q \sin \alpha + A \cos \alpha - B \sin \alpha + C r \end{aligned} \quad (p)$$

Imponendo che l'asse x sia fisso (fig. 7-13) si ha $v=0$ per $\alpha=0$; dalla seconda delle (p) si trae $A=C=0$. Gli spostamenti verticali dei punti dell'asse x sono forniti da

$$(u)_{\alpha=0} = - \frac{2q}{\pi E} \ln r + B ;$$

imponendo che sia fisso il punto dell'asse x di ascissa generica $x=d$, si ottiene il valore di B

$$B = \frac{2q}{\pi E} \ln d .$$

Ponendo, nella prima delle (p), $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$, si hanno gli spostamenti orizzontali dei punti del contorno:

$$(u)_{\alpha = \frac{\pi}{2}} = - \frac{m-1}{2Em} q$$

$$(u)_{\alpha = -\frac{\pi}{2}} = - \frac{m-1}{2Em} q .$$
(26)

Tutti i punti del contorno hanno perciò lo stesso spostamento orizzontale, diretto verso l'origine O ; ciò è possibile, perchè si è già visto che nel punto O di applicazione delle forze è $\sigma = \infty$, e perciò avviene una plasticizzazione, il che equivale a dire che agli effetti degli spostamenti una parte della lastra intorno ad O risulta asportata.

Gli spostamenti verticali dei punti del contorno sono forniti (gli abbassamenti risultano negativi a sinistra di O , positivi a destra) dalle espressioni

$$(v)_{\alpha = -\frac{\pi}{2}} = - (v)_{\alpha = \frac{\pi}{2}} = \frac{2q}{\pi E} \ln \frac{d}{r} - \frac{m+1}{\pi E m} q .$$
(27)

Per $r=0$ è $v=\infty$, e ciò è in accordo con l'ipotesi di plasticizzazione. E' importante osservare che i diagrammi di σ_x e τ_{xy} riportati nella fig. 7-14 e disegnati per $q=1$ possono interpretarsi come linee d'influenza della σ_x e τ_{xy} in C per effetto di una forza $q=1$ viaggiante sul bordo della lastra. Infatti una forza $q_1=1$ agente in O_1 provoca in C una σ_x che coincide con quella che la forza $q=1$ provoca nel punto simmetrico di H_1 rispetto ad x , e cioè è fornita proprio dall'ordinata $H_1 K_1$ del diagram-

ma σ_x che si legge sotto O_1 . In presenza di più forze q_i si può scrivere perciò

$$\sigma_{xO} = \sum_i q_i \overline{H_i K_i} .$$

Lo stesso vale per la τ_{xy} in C , cambiando però il segno del diagramma.

11. Il problema del cono.

Si prenda in esame una lastra indefinita a forma di cono di apertura 2ϑ (fig. 7-17), soggetta lungo lo spigolo ad una forza uniformemente

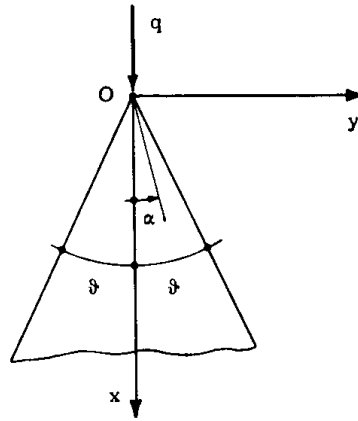


FIG. 7-17

distribuita q (riferita allo spessore b unitario) e diretta secondo la bisettrice del cono stesso. Anche in questo caso, come al n. 10, una distribuzione radiale semplice di tensioni risolve il problema

$$\sigma_r = - \frac{kq}{r} \cos \alpha$$

$$\sigma_t = 0 \quad (q)$$

$$\tau = 0 .$$

La costante k deve essere scelta in modo da soddisfare la condizione di equilibrio relativa alla sezione cilindrica generica di asse O e raggio r :

$$- 2 \int_0^{\vartheta} \frac{k q \cos^2 \alpha}{r} r d\alpha = - q$$

da cui

$$k = \frac{1}{\vartheta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\vartheta}$$

e quindi

$$\sigma_r = - \frac{q \cos \alpha}{r \left(\vartheta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\vartheta \right)} \quad (28)$$

Ponendo $2\vartheta = \pi$ si ricade nella soluzione (7-23) della lastra semi-infinita.

Se la forza q è diretta normalmente alla bisettrice del cuneo (fig. 7-18) si ha sempre per soluzione la terna (q); la condizione di equilibrio relativa

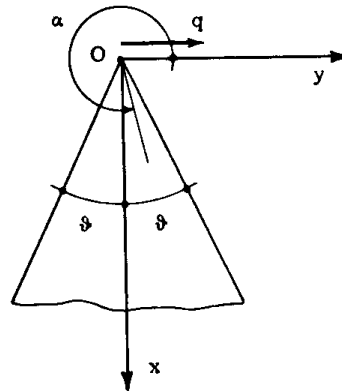


FIG. 7-18

alla sezione cilindrica già detta si scrive, valutando gli angoli α dalla retta di azione della forza q ,

$$\int_{\frac{3\pi}{2} - \vartheta}^{\frac{3\pi}{2} + \vartheta} \sigma_r r \cos \alpha d\alpha = - q$$

da cui

$$k = \frac{1}{\vartheta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\vartheta}$$

e quindi

$$\sigma_r = - \frac{q \cos \alpha}{r \left(\vartheta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\vartheta \right)} \quad (29)$$

Le soluzioni (7-28) e (7-29) sono dovute ad *J. H. Michell* (1902); esse sono valide, nel caso di una lastra a cuneo di dimensioni finite, se la distribuzione delle forze sul bordo opposto al vertice è fornita da una legge analoga alla (7-28) o (7-29); in caso contrario le espressioni di σ_r sono valide solo ad una certa distanza da questo bordo.