

CAPITOLO VI  
STATI PIANI DI TENSIONE E DI DEFORMAZIONE

**1. Stati piani di tensione.**

Si consideri uno stato tensionale piano definito in un punto da

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 ;$$

le relazioni di Navier (4-4) e (4-6) si specializzano in

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right) & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right) & \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} = 0 \\ \varepsilon_z &= -\frac{1}{mE} (\sigma_x + \sigma_y) & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Dalle (6-1) si trae pure  $\varepsilon_x + \varepsilon_y = -(m-1) \varepsilon_z$ , da cui

$$\varepsilon_z = -\frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{m-1} = \varepsilon_z \quad (2)$$

Dalle (6-1) si osserva che ad uno stato piano di tensione non si accompagna in genere uno stato piano di deformazione; ciò accade, invece, per materiali privi di deformabilità trasversale ( $1/m=0$ ), perchè in tal caso  $\varepsilon_z=0$ .

Delle tre direzioni principali due,  $\xi$  ed  $\eta$ , sono contenute nel piano  $xy$ , e la terza,  $\zeta$ , è ad esso ortogonale.

Le quadriche di tensione sono cilindri quadrici con generatrici ortogonali al piano  $xy$ ; per i materiali adoperati nella pratica  $\left(0 < \frac{1}{m} < \frac{1}{2}\right)$  le quadriche di deformazione sono un iperboloide ad una falda ed uno

a due falde, poichè le tre  $\varepsilon$  principali non possono in tal caso essere dello stesso segno. In genere l'esistenza di uno stato tensionale piano nell'intorno di un punto si riconosce a posteriori, dopo aver risolto il problema dell'equilibrio elastico nell'ipotesi più generale di stato di sollecitazione tridimensionale; ciò accade, per esempio, nella trattazione del problema della trave (*problema di De Saint-Venant*).

Nelle lastre invece è possibile prevedere a priori, sia pure tollerando un certo errore, uno stato di tensione ovunque piano, il che semplifica le equazioni dell'equilibrio elastico, riducendo il problema alla ricerca di una sola funzione, detta *funzione delle tensioni* o *funzione di Airy*. Le lastre (§ 2-7, fig. 6-1) sono corpi di materiale omogeneo a forma di cilindro

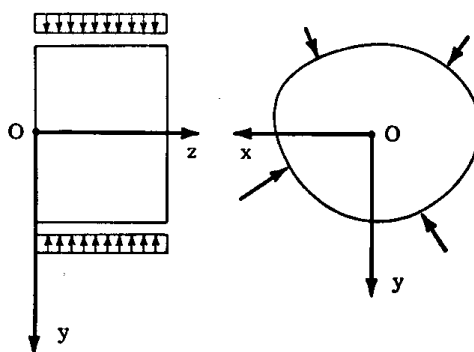


FIG. 6-1

retto, privi di vincoli, soggetti a forze superficiali solo sulla superficie laterale. L'altezza del cilindro (spessore della lastra) può essere qualunque; si farà vedere che per le lastre sottili l'errore che si commette considerando a priori lo stato tensionale come piano è minore.

Nelle lastre sono possibili, dal punto di vista dell'equilibrio con le forze esterne, particolari stati tensionali, piani in ogni punto, con piano delle tensioni ovunque parallelo ai piani delle due basi. Si assuma infatti un riferimento  $x y z$  con il piano  $xy$  contenuto nel piano di una base (fig. 6-1). Un qualsiasi insieme di  $\sigma_i \tau_{jk}$  indipendente da  $z$ , e ovunque rispettante le relazioni

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad (3)$$

soddisfa le suddette proprietà. Inoltre le (2-6) sono identicamente soddisfatte sulle basi, e sulla superficie laterale si riducono alle due

$$\begin{aligned} \sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y &= p_x \\ \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y &= p_y \end{aligned} \quad (4)$$

La terza delle (2-6) è identicamente soddisfatta se  $p_z = 0$ , se cioè le forze applicate sono parallele al piano  $xy$ .

Le (2-8) si riducono in ogni punto alle due

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 ; \end{aligned} \quad (5)$$

la terza delle (2-8) è identicamente soddisfatta se  $Z = 0$ , se cioè anche le forze di massa sono parallele al piano  $xy$ .

Le (6-4) e (6-5) con le  $p_z = 0$  e  $Z = 0$  (e se le  $\sigma_i \tau_{jk}$  sono uniformi e continue con le loro derivate prime) sono le condizioni necessarie e sufficienti perchè lo stato tensionale suddetto sia in equilibrio con le forze esterne.

Delle infinite soluzioni delle (6-4) e (6-5) sono soluzioni del problema quelle e solo quelle che rispettano le condizioni di congruenza (1-33) (sempre che tali soluzioni siano pure derivabili due volte, e con derivate seconde continue). Se è  $1/m = 0$ , risulta ovunque  $\varepsilon_z = 0$ ; se le  $\sigma_i \tau_{jk}$  sono pure indipendenti da  $z$  (e la stessa condizione deve valere di conseguenza per le forze di massa e di superficie) le (1-33) sono, poichè la lastra è omogenea, tutte identicamente soddisfatte, salvo la prima

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} . \quad (6)$$

Se invece, sempre nell'ipotesi di invarianza,  $1/m \neq 0$ , la seconda e terza delle (1-33) non sono più identicamente soddisfatte, ma si riducono semplicemente alle

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} &= 0 ; \end{aligned} \quad (7)$$

così pure la sesta delle (1-33) si riduce alla

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 . \quad (8)$$

Le (6-7) e (6-8) per la (6-2), possono anche scriversi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 (\sigma_x + \sigma_y)}{\partial x \partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (9)$$

La (6-6) attraverso le (6-1) si scrive

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} \right) = 2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (a)$$

Dalle (6-5), derivando la prima rispetto ad  $x$ , la seconda rispetto ad  $y$ , e sommando membro a membro, si ottiene

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y}. \quad (b)$$

Dalle (a) e (b) si trae

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{1}{m} \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) &= \\ &= - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

da cui ancora

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right)$$

che si scrive pure

$$\Delta_2 (\sigma_x + \sigma_y) = - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right). \quad (10)$$

L'equazione (6-6) impegna quindi le sole  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ .

Se le forze di massa sono costanti, la (6-6) si scrive

$$\Delta_2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0 : \quad (11)$$

la (6-11) è la particolarizzazione della  $\Delta_2 T = 0$ , già ottenuta, per forze di massa costanti, al § 5-2.

Se  $1/m = 0$ , e lo stato tensionale è invariante rispetto a  $z$ , la soluzione piana è possibile, perchè le due condizioni di equilibrio (6-5) e la condizione di congruenza (6-10) sono in numero pari a quello delle incognite. Se invece è  $1/m \neq 0$ , le equazioni da soddisfare sono sei, di cui inoltre le prime due delle (6-9) incompatibili con la (6-10); per forze di massa costanti si riducono a cinque, compatibili, poichè la (6-11) equivale alle prime due delle (6-9), ma sempre in numero superiore a quello delle incognite. Ciò significa che il problema non ha soluzione, e cioè non può esistere uno stato tensionale piano.

Se la lastra è sottile, però, si può anche per  $1/m \neq 0$  operare sulle sole (6-5) e (6-10), ottenendo una soluzione che non rispetta in rigore la congruenza, ma è prossima a quella effettiva, poichè si può in tal caso con ragionevolezza supporre che le  $\sigma_z \tau_{zx} \tau_{zy}$ , nulle sulle due basi, siano molto piccole in tutto lo spessore, e che le  $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$  varino di poco lungo lo spessore stesso.

Le (6-5) e (6-10), o le (6-5) e (6-11), sono le tre equazioni in  $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$  che, con le condizioni al contorno (6-4), risolvono il problema. Si osservi che, per forze di massa costanti, le (6-11) non contengono i parametri elastici; quindi la distribuzione delle  $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$  è la stessa per tutti i materiali isotropi. L'osservazione è fondamentale, perchè consente di studiare gli stati tensionali piani utilizzando modelli di materiale trasparente e sfruttando le proprietà della luce polarizzata (*fotoelasticità*).

## 2. Stati piani di deformazione.

Si consideri uno stato di deformazione definito da

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0 ;$$

le relazioni di Navier (4-9) e (4-10) si specializzano in

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2 G \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2 G \varepsilon_y + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \tau_{xz} &= 0 \\ \sigma_z &= \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y) & \tau_{yz} &= 0 . \end{aligned} \quad (12)$$

Dalle (6-12) si trae che in genere ad uno stato piano di deformazione non si associa uno stato piano di tensione; ciò accade sempre, invece, se  $1/m = 0$ , perchè in tal caso è  $\lambda = 0$ , e quindi  $\sigma_z = 0$ .

Dalle (4-4) si trae anche, per  $\varepsilon_z = 0$ ,

$$\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} = \sigma'_z .$$

Delle tre direzioni principali due,  $\xi$  ed  $\eta$ , sono contenute nel piano  $xy$ , e la terza,  $\zeta$ , è a questo ortogonale.

Le quadriche di deformazione sono cilindri quadrici con generatrici ortogonali al piano  $xy$ ; nei materiali ordinari le quadriche di tensione, contrariamente a quanto accade negli stati tensionali piani per le quadriche di deformazione, possono essere un iperboloide ad una falda ed uno a due falde, o un ellissoide reale ed uno immaginario, perchè le tre  $\sigma$  principali possono essere anche dello stesso segno.

Si prenda in esame una lastra di altezza  $l$  qualunque, soddisfacente alle condizioni del § 6-1, ma vincolata sulle due basi in modo che i punti di queste possano spostarsi solo nel piano della base stessa (fig. 6-2 a).

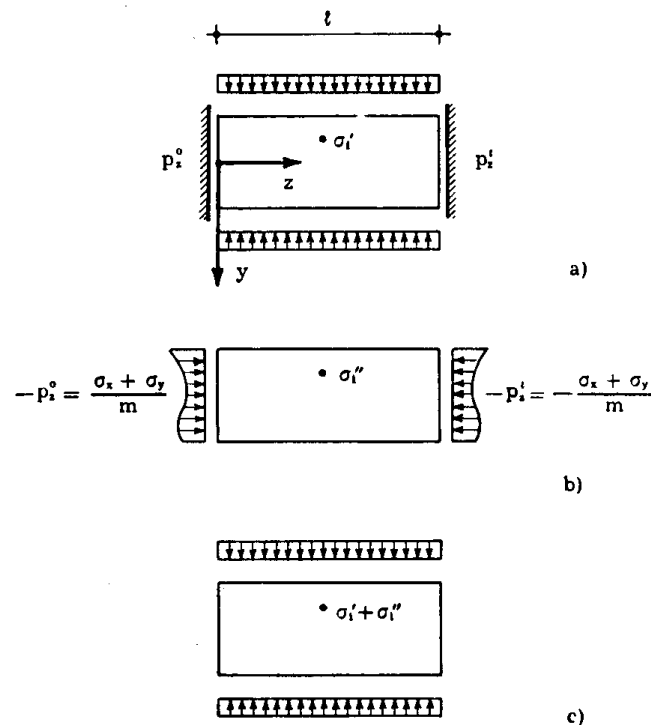


FIG. 6-2

Assunto un riferimento  $xyz$  con piano  $xy$  coincidente con il piano di una delle basi, uno stato di deformazione congruente e in ogni punto piano, con piano delle deformazioni parallelo alle basi, è quello definito

da sei  $\varepsilon_i \gamma_{jk}$  uniformi, derivabili due volte e con derivate seconde continue, invarianti con  $z$ , e rispettanti in ogni punto la condizione

$$\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0 \quad (13)$$

e la relazione di congruenza

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} ; \quad (14)$$

infatti le altre cinque relazioni (1-33) sono identicamente soddisfatte.

Poichè il corpo è omogeneo, le  $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$  fornite dalle (6-12) sono indipendenti da  $z$ , e così pure la  $\sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}$ ; le (2-8) si riducono alle due

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

ed alla

$$Z = 0 ;$$

le (2-6) si riducono alle due (valide sulla superficie laterale)

$$\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y = p_x \quad (16)$$

$$\tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = p_y$$

ed alla

$$0 = p_z .$$

Poichè le (6-14) e (6-15) sono tre, la ricerca delle tre  $\varepsilon_x \varepsilon_y \gamma_{xy}$  (o delle tre  $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$ ) è possibile; e cioè uno stato di deformazione piano come quello descritto, a differenza dello stato tensionale piano nelle lastre, è rigorosamente equilibrato e congruente.

La (6-14) si scrive

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sigma_y - \frac{\sigma_x}{m} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m^2} \right) = \\ = 2 \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} ; \end{aligned} \quad (c)$$

dalla (c) e dalla (b) si trae

$$\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) \Delta_2 (\sigma_x + \sigma_y) = - \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right)$$

e ancora

$$\Delta_2 (\sigma_x + \sigma_y) = - \frac{m}{m-1} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \quad (17)$$

Le (6-15) e (6-17), con le (6-16), risolvono il problema.

Per forze di massa costanti la (6-17) diviene

$$\Delta_2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (18)$$

Attese le condizioni di vincolo, le (2-6), scritte sulle due basi, forniscono sulla base  $z=0$ , se  $z$  è orientato verso l'interno del solido

$$\begin{aligned} p_x &= 0 \\ p_y &= 0 \\ p_z &= -\sigma_z = -\frac{\sigma_x + \sigma_y}{m} \end{aligned}$$

e sulla base  $z=l$

$$\begin{aligned} p_x &= 0 \\ p_y &= 0 \\ p_z &= \sigma_z = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}. \end{aligned}$$

Se il cilindro è privo di vincoli sulle due basi, se cioè la lastra è quella considerata al § 6-1, la soluzione è in rigore somma di quella che si trae dalle (6-15), (6-17) e (6-16), e di quella dovuta alle  $-p_z$  agenti sulle due basi (fig. 6-2). In tal caso, se il cilindro è molto corto, le  $-p_z$  agenti sulle due basi danno in ogni punto una  $\sigma_z$  poco diversa da  $-\frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}$  (e quindi la  $\sigma_z$  in totale risulta poco diversa da zero),

mentre le altre componenti di tensione sono molto piccole; lo stato tensionale è cioè considerabile, come piano, con le  $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$  fornita dalle (6-15), (6-17) e (6-16). L'errore che così si commette è dello stesso ordine di grandezza di quello che si ha calcolando le  $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$  con la (6-10) invece che con la (6-17), e diminuisce al diminuire dello spessore (\*); la differenza tra i due errori scompare in presenza

---

(\*) Non si può effettuare il passaggio al limite per spessore nullo, perchè in tal caso non valgono nè la (6-10) nè la (6-17), ricavate ambedue per spessore qualsiasi di lastra, purchè finito.



di forze di massa costanti (o per  $\frac{1}{m} = 0$ ), perchè in tal caso le (6-11) e (6-18) (o le 6-10 e 6-17) coincidono. Si ha conferma così di quanto già detto alla fine del § 6-1 in tema di lastre sottili.

Se il cilindro è lungo (fig. 6-3) il *principio di De Saint-Venant*, del quale sarà detto in dettaglio trattando delle travi, permette di sostituire sulle due basi alle  $-p_z dA$  le loro risultanti, che si riducono ad una forza  $F$  diretta secondo  $z$  e ad

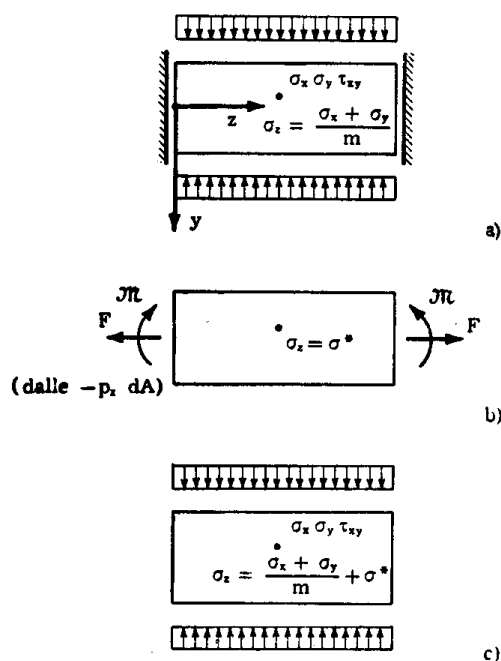


FIG. 6-3

un momento  $M$  il cui vettore è ortogonale a  $z$ ; tale sostituzione non provoca, ad eccezione delle zone più vicine alle basi, variazioni dello stato tensionale dovuto alle  $-p_z dA$ .

Fatta eccezione quindi per le zone più vicine alle basi, si calcolano alla De Saint-Venant, e cioè considerando il cilindro come trave, le tensioni dovute ad  $F$  ed  $M$ , che si riducono alla sola  $\sigma_z$ , funzione a sua volta solo di  $x$  ed  $y$ ; se  $\sigma^*$  è il valore di tale  $\sigma_z$ , nel cilindro lungo privo di vincoli alle basi (fig. 6-3 c) le  $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$  sono quelle fornite dalle (6-15), (6-17) e (6-16), mentre le  $\sigma_z$  sono di somma di  $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}$  e di  $\sigma^*$ .

Si osservi che il termine correttivo  $\sigma^*$  è indipendente dalla lunghezza  $l$  del cilindro.

Poichè per forze di massa costanti la (6-18) coincide con la (6-11), si trae che, in tale ipotesi, in un cilindro a basi vincolate ed in una lastra sottile, con la stessa sezione retta e con le stesse forze superficiali e di massa, le  $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$  sono le stesse. La coincidenza non sussiste per le componenti di deformazione, perchè sulla lastra è

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y}{m} \right)$$

e nel cilindro

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m} \right).$$

### 3. La funzione di Airy.

Nell'ipotesi di forze di massa costanti, le tensioni di uno stato piano di tensioni o di deformazioni possono farsi derivare da un'unica funzione delle coordinate  $xy$ . Posto infatti

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx \end{aligned} \quad (19)$$

le equazioni indefinite di equilibrio (6-5) sono identicamente soddisfatte, e l'equazione di congruenza (6-11) impone che sia

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0. \quad (20)$$

Il problema è quindi ricondotto alla determinazione di una funzione  $\Phi(xy)$ , definita nel dominio del piano  $xy$  occupato dal corpo, che soddisfi in ogni punto di tale dominio alla (6-20), e che attraverso le (6-4) rispetti le condizioni ai limiti. La funzione  $\Phi$  che rispetta la (6-20) si dice biarmonica, e simbolicamente la (6-20) si scrive, utilizzando l'operatore di Laplace,

$$\Delta_4 \Phi = 0; \quad (21)$$

l'introduzione della *funzione delle tensioni*  $\Phi$  è dovuta a *G. B. Airy* (1862), al cui nome spesso si associa.

Le condizioni ai limiti si riducono alle (6-4)

$$\sigma_x \alpha_x + \tau_{yx} \alpha_y = p_x$$

$$\tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y = p_y$$

dove  $\alpha_x$  ed  $\alpha_y$  (fig. 6-4) sono i coseni direttori della normale  $n$  al contorno.

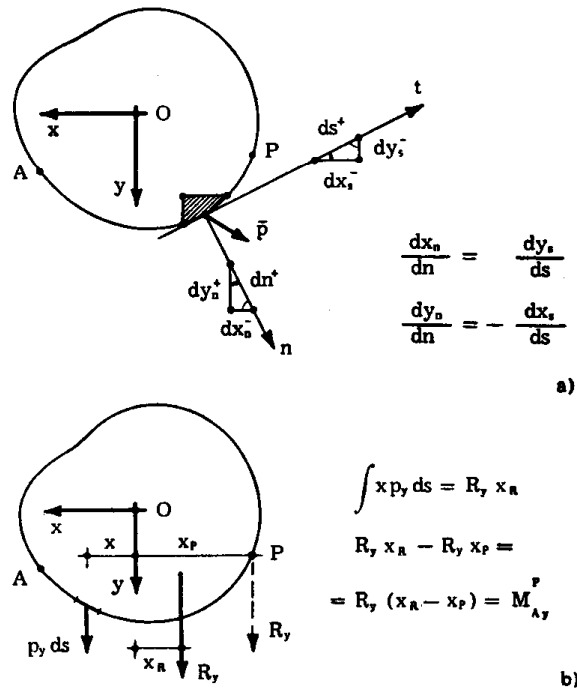


FIG. 6-4

Le (6-4) possono anche scriversi

$$\sigma_x \frac{dx}{dn} + \tau_{yx} \frac{dy}{dn} = p_x \quad (d)$$

$$\tau_{xy} \frac{dx}{dn} + \sigma_y \frac{dy}{dn} = p_y$$

essendo  $dx$  e  $dy$  le proiezioni  $dx_n$  e  $dy_n$  di  $dn$  su  $x$  ed  $y$ .

Poichè (fig. 6-4) risulta, orientando  $n$  e  $t$  in modo da poterli sovrapporre per rotazione rigida rispettivamente ad  $x$  ed  $y$ ,

$$\frac{dx_n}{dn} = + \frac{dy_s}{ds}$$

$$\frac{dy_n}{dn} = - \frac{dx_s}{ds}$$

la (d) può scriversi anche

$$\sigma_x \frac{dy}{ds} - \tau_{yx} \frac{dx}{ds} = p_x$$

$$\tau_{xy} \frac{dy}{ds} - \sigma_y \frac{dx}{ds} = p_y$$

dove  $dx$  e  $dy$  sono le proiezioni  $dx_s$  e  $dy_s$  di  $ds$  su  $x$  ed  $y$ .

Dalla precedente, e dalle (6-19), si ottiene (per semplicità si tratta il caso di forze di massa nulle e di domini monoconnessi)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} = p_x \quad (e)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{dx}{ds} = -p_y$$

ed ancora

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = p_x$$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -p_y$$

Presi due punti  $A$  e  $P$  del contorno (fig. 6-4 a) si ha

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_P - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_A = \int_A^P p_x ds = R_x$$

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_P - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_A = - \int_A^P p_y ds = -R_y$$

avendo indicato con  $R_x$  ed  $R_y$  le componenti secondo  $x$  ed  $y$  della risultante di tutte le forze  $\bar{p} ds$  applicate fra  $A$  e  $P$ . E' quindi, considerando  $A$  fisso,

$$\Phi_P = \Phi_A + \int_A^P \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = \Phi_A + \int_A^P \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \right) =$$

$$= \Phi_A - \int_A^P R'_y dx + \int_A^P R'_x dy + C_x (x_P - x_A) + C_y (y_P - y_A) \quad (f)$$

dove  $R'_x$  ed  $R'_y$  sono le componenti secondo  $x$  ed  $y$  della risultante di

tutte le forze  $\bar{p} ds$  applicate tra A ed un punto generico, e  $C_x$  e  $C_y$  i valori (costanti) delle due derivate  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_A$  e  $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_A$ .

Si può scrivere

$$-\int_A^P R'_y dx = - (R'_y x)_A^P + \int_A^P x dR'_y = - R_y x_P + \int_A^P x p_y ds ;$$

e cioè  $-\int_A^P R'_y dx$  è la differenza fra il momento rispetto all'origine O delle forze  $p_y ds$  applicate fra A e B, ed il momento rispetto allo stesso punto O della  $R_y$  applicata in P. Questa differenza è il momento  $M_{Ay}$  rispetto al punto P delle forze  $p_y ds$  applicate tra A e P (fig. 6-4 b); il verso positivo del momento è quello  $xy$ .

Analogamente si può dire che

$$\int_A^P R'_x dy$$

è il momento rispetto al punto P delle forze  $p_x ds$  applicate tra A e P. Quindi la (f) si scrive

$$\Phi_P = M_A^P + \Phi_A + C_x (x_P - x_A) + C_y (y_P - y_A) , \quad (g)$$

avendo indicato con  $M_A^P$  il momento rispetto a P delle forze  $\bar{p} ds$  applicate tra A e P, preso positivo se nel verso  $xy$ ; l'arco AP deve essere percorso nel verso positivo di  $t$ .

Così pure

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)_P &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_P \left(\frac{dx}{dn}\right)_P + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_P \left(\frac{dy}{dn}\right)_P = \\ &= - (R_y - C_x) \left(\frac{dy}{ds}\right)_P - (R_x + C_y) \left(\frac{dx}{ds}\right)_P = \quad (h) \\ &= - R_y \left(\frac{dy}{ds}\right)_P - R_x \left(\frac{dx}{ds}\right)_P + C_x \left(\frac{dy}{ds}\right)_P - C_y \left(\frac{dx}{ds}\right)_P = \\ &= - S_A^P + C_x \left(\frac{dy}{ds}\right)_P - C_y \left(\frac{dx}{ds}\right)_P , \end{aligned}$$

dove  $S_A^P$  è la proiezione secondo la tangente al contorno in P (orientata

come nella fig. 6-4) della risultante delle forze  $\bar{p} ds$  applicate tra A e P.  
La  $\Phi'$  biarmonica soddisfacente alle condizioni al contorno

$$\left(\frac{\partial \Phi'}{\partial n}\right)_P = C_x \left(\frac{dy}{ds}\right)_P - C_y \left(\frac{dx}{ds}\right)_P \quad (i)$$

$$\Phi'_P = \Phi_A + C_x (x_P - x_A) + C_y (y_P - y_A)$$

è la funzione lineare

$$\Phi' (xy) = C_x x + C_y y + \Phi_A - C_x x_A - C_y y_A \quad (l)$$

e solamente essa; infatti i valori della (l) e della sua derivata normale sul contorno  $\left(\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dy}{ds} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dx}{ds}\right)$  sono proprio dati dalle (i), e la soluzione è unica.

Se la funzione biarmonica che soddisfa le condizioni al contorno

$$\Phi' = a' \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial n} = b'$$

è la  $\Phi'$ , e la funzione biarmonica che soddisfa le condizioni al contorno

$$\Phi'' = a'' \quad \frac{\partial \Phi''}{\partial n} = b''$$

è la  $\Phi''$ , la funzione biarmonica  $\Phi$  che soddisfa le condizioni

$$\Phi = a' + a'' \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = b' + b''$$

è data dalla somma  $\Phi' + \Phi''$ .

Quindi scegliendo come condizioni al contorno, invece delle (g) ed (h), le

$$\Phi_P = M_A \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}\right)_P = -S_A^P$$

si determina la  $\Phi$  a meno di una funzione del tipo (l), il che non varia i valori delle  $\sigma_x \sigma_y \tau_{xy}$ .

Una funzione che soddisfa la (6-21), che ha ovunque derivate conti-

nue fino al quarto ordine, e le cui derivate a partire dal secondo ordine sono ovunque uniformi, è in domini monoconnessi uniforme.

Se la funzione biarmonica  $\Phi$  soddisfacente le condizioni al contorno (6-22) ha derivate seconde (e cioè tensioni) uniformi e due volte derivabili, e derivate quarte continue, il rispetto stesso della  $\Delta_4 \Phi = 0$ , che è equazione di congruenza, basta a garantire della congruenza essendo il dominio monoconnesso. L'equilibrio è assicurato anch'esso, per il rispetto delle (6-5) e delle condizioni ai limiti (6-22); quindi la soluzione è una possibile soluzione del problema. La soluzione è unica; il principio di Kirchhoff nel caso in esame è di dimostrazione immediata, perchè ammessa l'esistenza di due soluzioni  $\Phi'$  e  $\Phi''$  della  $\Delta_4 \Phi = 0$  con le stesse condizioni al contorno, la differenza  $\Phi' - \Phi''$ , soluzione della  $\Delta_4 \Phi = 0$  con condizioni al contorno omogenee, è pari a zero, e quindi  $\Phi' = \Phi''$ .

#### 4. La lastra trave.

Si prenda in esame una lastra rettangolare, di dimensioni  $l \times h$ , e spessore  $b$ , libera da vincoli, in cui siano trascurabili le forze di massa. Il riferimento  $xyz$  è assunto tale che il piano delle tensioni risulti parallelo ovunque al piano  $yz$ ; e perciò  $\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0$ , e sono diverse da zero, in genere,  $\sigma_z$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{zy}$ .

Si vogliono studiare dei tipi di sollecitazione che impegnino solamente i due bordi  $z=0$  e  $z=l$ . Un primo esempio di questa sollecitazione

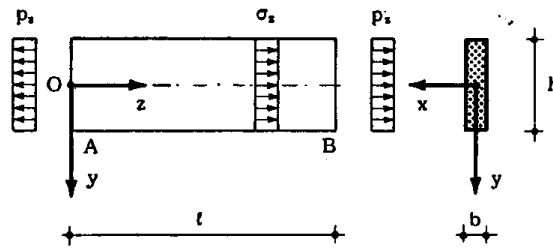


FIG. 6-5

(fig. 6-5) è quello per cui risulti  $\sigma_z$  costante,  $\sigma_y$  e  $\tau_{zy}$  nulle:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= k \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{zy} &= 0 ;\end{aligned}$$

essa è possibile, perchè posto

$$\Phi = c y^2,$$

dove  $c$  è una costante, si ottiene

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2c$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\tau_{zy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = 0,$$

ed inoltre è rispettata la condizione  $\Delta_4 \Phi = 0$ .

Per lastra rettangolare e con il riferimento della figura (6-5), le condizioni al contorno (6-4) si semplificano in

lato	$\alpha_z$	$\alpha_y$	condizioni al contorno
$z = 0$	-1	0	$p_z = -\sigma_z$ $p_y = -\tau_{zy}$
$z = l$	1	0	$p_z = \sigma_z$ $p_y = \tau_{zy}$
$y = +h/2$	0	1	$p_z = \tau_{zy}$ $p_y = \sigma_y$
$y = -h/2$	0	-1	$p_z = -\tau_{zy}$ $p_y = -\sigma_y$

(m)

Si verifica perciò che i due bordi  $y = \pm \frac{h}{2}$  non sono sollecitati. Sul bordo  $z = l$  esistono delle forze  $p_z = \sigma_z = 2c$ , la cui risultante è applicata nel baricentro e diretta secondo l'asse  $z$ :

$$N_B = b \int_{-h/2}^{h/2} p_z dy = p_z bh = 2cA$$

essendo  $A$  l'area della sezione  $b \times h$  (*sezione retta*).

Sul bordo  $z = 0$  esistono delle forze  $p_z = -\sigma_z = -2c$ , la cui risultante è applicata nel baricentro, e diretta nel verso opposto dell'asse  $z$ :



$$N_A = -2cA.$$

E' perciò

$$\sigma_z = 2c = \frac{N_B}{A} = -\frac{N_A}{A}.$$

In analogia a quanto si è fatto per le tensioni, si conviene di caratterizzare  $N_A$  ed  $N_B$ , uguali ed opposte, con un solo segno; in particolare,  $N_A$  ed  $N_B$  si assumono positive se corrispondono ad una trazione:

$$-N_A = N_B = N.$$

Si ha così

$$\sigma_z = \frac{N}{A}. \quad (23)$$

La (6-23) è valida se sono rispettate le (m), e perciò solo se le due forze  $N_A$  ed  $N_B$  sono applicate attraverso una distribuzione uniforme di forze elementari  $p_z$ ; per il principio di unicità o di Kirchhoff, la (6-23) è il solo possibile stato tensionale associato a tale sollecitazione. Il principio di De Saint-Venant assicura però che se  $l$  è abbastanza più elevato di  $h$  (lastra-trave) la (6-23) è valida anche se le due forze  $N_A$  ed  $N_B$  sono

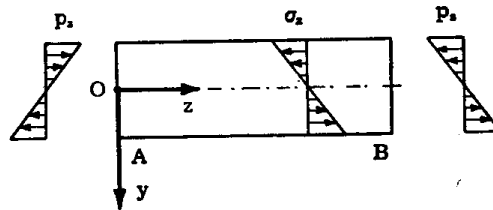


FIG. 6-6

applicate attraverso una distribuzione di sforzi elementari diversa da quella uniforme. Infatti, per il suddetto principio, un qualsiasi sistema di forze in equilibrio applicate sull'estremo  $z=0$  (oppure su quello  $z=l$ ) fa risentire i suoi effetti solo fino ad una certa distanza dai bordi stessi (*lunghezza di estinzione*), praticamente pari alla metà della maggiore dimensione della sezione retta, al di là della quale le tensioni si smorzano in modo tale da potersi considerare nulle; escluse perciò le due zone della lastra prossima agli estremi A e B e lunghe  $h/2$  lo stato tensionale dipende solo dalla risultante delle forze elementari applicate sui due estremi, e non dalla legge secondo cui le forze stesse sono distribuite.

Un secondo esempio (fig. 6-6) è quello per cui la  $\sigma_z$  sia indipendente

dall'ascissa  $z$ , e variabile secondo l'ascissa  $y$ , annullandosi in corrispondenza dell'asse  $z$ , e le  $\sigma_y$  e  $\tau_{zy}$  siano ancora nulle:

$$\sigma_z = k y$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{zy} = 0 ;$$

anche questa terna è possibile, perchè posto

$$\Phi = c y^3 \quad (n)$$

si ha

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 6 c y$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\tau_{zy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = 0 ,$$

ed inoltre è rispettata la condizione  $\Delta_4 \Phi = 0$ . Dalla (m) risulta che i due bordi  $y = \pm \frac{h}{2}$  non sono sollecitati. Sul bordo  $z = l$  agiscono le forze  $p_z = 6 c y$ , di risultante nulla; esse costituiscono una coppia (positiva se antioraria) (\*) fornita da

$$M_B = b \int_{-h/2}^{h/2} p_z y dy = 6 c b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{c b h^3}{2} = 6 c I$$

dove  $I = \frac{bh^3}{12}$  è il momento d'inerzia della sezione retta rispetto all'asse  $z$ . Sul bordo  $z = 0$  agiscono le  $p_z = -6 c y$ , che costituiscono una coppia

$$M_A = - M_B = - 6 c I .$$

---

(\*) Si conviene che il vettore rappresentativo di una coppia sia diretto ortogonalmente al piano in cui detta coppia agisce; il suo verso coincide con quello di avanzamento di un cavaturaccioli il cui manico ruoti nel verso della coppia.

Fissata una terna destrorsa  $Oxyz$ , le coppie  $M_x, M_y, M_z$  positive hanno rispettivamente i versi  $yz, zx, xy$ ; infatti si conviene che la coppia  $M_i$  sia positiva se il suo vettore rappresentativo ha lo stesso verso dell'asse  $i$ .

Si conviene di assegnare alle due coppie  $M_A$  e  $M_B = -M_A$  un unico segno, e di considerarle positive se  $M_A$  è oraria ed  $M_B$  antioraria; risulta così

$$M_B = -M_A = M$$

$$c = \frac{M}{6I}$$

$$\sigma_z = \frac{My}{I} \quad (24)$$

La (6-24) è la formula di *Navier*, che si incontrerà di nuovo nella trattazione generale della trave. Il principio di De Saint-Venant consente di esprimere la  $\sigma_z$  attraverso la (6-24) anche se le due coppie  $M$  applicate ai due estremi derivano da una distribuzione di  $p_z$  diversa da quella lineare, purchè ci si trovi ad una distanza dai bordi superiore a quella di estinzione.

Un terzo esempio si ha (fig. 6-7) per  $\sigma_z$  variabile linearmente lungo

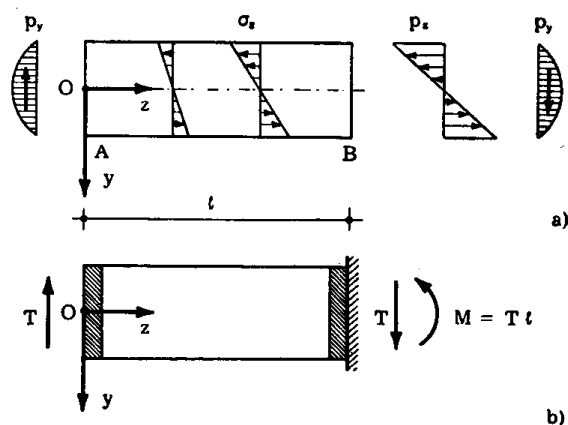


FIG. 6-7

$z$  e lungo  $y$ , e  $\sigma_y$  nulla:

$$\sigma_z = k z y$$

$$\sigma_y = 0 .$$

Una funzione  $\Phi$  biarmonica che soddisfi a queste condizioni è la

$$\Phi = c z y^3 ; \quad (o)$$

da essa risulta infatti

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 6 c z y \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \\ \tau_{zy} &= - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = - 3 c y^2 .\end{aligned}\tag{p}$$

Dalla terza delle (p) si ha, per  $y = \pm \frac{h}{2}$

$$(\tau_{zy})_{y = \pm \frac{h}{2}} = - 3 c \frac{h^2}{4} .\tag{q}$$

Poichè si desidera che i due bordi  $y = \pm \frac{h}{2}$  non siano sollecitati, dalle (m) risulta che su detti bordi deve essere  $\tau_{zy} = 0$ ; la terza delle (p) deve perciò modificarsi nell'altra

$$\tau_{zy} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} = - 3 c y^2 + 3 c \frac{h^2}{4}\tag{r}$$

e cioè deve assumersi, in luogo della (o),

$$\Phi = c z y^3 - \frac{3}{4} c h^2 z y .\tag{s}$$

La (s) è ancora biarmonica; inoltre  $\sigma_z$  e  $\sigma_y$  sono ancora fornite dalle prime due delle (p). Si ha così in definitiva

$$\begin{aligned}\sigma_z &= 6 c z y \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{zy} &= 3 c \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) .\end{aligned}\tag{t}$$

Sui bordi  $y = \pm \frac{h}{2}$  non si ha, come già visto, alcuna sollecitazione.

Sul bordo  $z = 0$  è

$$\begin{aligned}p_z &= 0 \\ p_y &= - \tau_{zy} = - 3 c \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right)\end{aligned}$$

la cui risultante è una forza  $T_A$  diretta in verso contrario ad  $y$ , e pari a

$$T_A = -3cb \left( \frac{h^2}{4} \int_{-h/2}^{h/2} dy - \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \right) = -\frac{cbh^3}{2} = -6cI.$$

Sul bordo  $z = \ell$  si ha

$$\begin{aligned} p_z &= \sigma_z = 6c\ell y \\ p_y &= \tau_{zy} = 3c \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right); \end{aligned}$$

le forze elementari  $p_z dA$  e  $p_y dA$  equivalgono ad una forza  $T_B$  uguale e contraria a  $T_A$

$$T_B = 6cI$$

e ad una coppia

$$M_B = 6cbl \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = cbl \frac{h^3}{2} = 6c\ell I$$

positiva, e perciò antioraria.

Assegnando alle due forze uguali e contrarie  $T_A$  e  $T_B$  lo stesso segno, e considerandole positive se  $T_B$  è diretta secondo  $y$ , e  $T_A$  nel verso opposto:

$$-T_A = T_B = T,$$

si ha

$$c = \frac{T}{6I}$$

e quindi (t)

$$\sigma_z = \frac{Tz}{I} y$$

$$\tau_{zy} = -\frac{T}{2I} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right) = \frac{6T}{bh^3} \left( y^2 - \frac{h^2}{4} \right)$$

e ancora

$$\sigma_z = \frac{Tz}{I} y \tag{25}$$

$$\tau_{zy} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right). (*)$$

(\*) L'espressione della  $\tau_{zy}$  si ritroverà identica nella trattazione approssimata del problema del taglio per il solido di De Saint-Venant; nella trattazione esatta

La  $\sigma_z$  è fornita da una formula identica a quella di Navier (6-24) purchè si ponga  $Tz = M$ , momento della forza  $T$  a sinistra della sezione generica rispetto al baricentro della sezione stessa; la  $\tau_{zy}$  si riproduce identicamente in tutte le sezioni, varia parabolicamente lungo l'altezza, si annulla alle due estremità, e raggiunge i  $3/2$  del valore medio  $T/A$  sull'asse  $z$ .

Accettando il già citato principio di De Saint-Venant, si può dire che, escluse le zone prossime alle estremità, le (6-25) sono valide anche se nelle sezioni  $z=0$  e  $z=l$  le forze  $T$  e la coppia  $M$  agiscono attraverso una distribuzione di forze elementari diversa da quelle parabolica e lineare. Analogamente, considerando la lastra incastrata in  $z=l$  e caricata da una forza  $T_A$  in  $z=0$  (fig. 6-7 b), si può dire che l'incastro sviluppa delle reazioni il cui andamento è incognito a priori, ma le cui risultanti non possono essere, per ragioni di equilibrio, che la  $M$  e la  $T$ ; anche in questo caso quindi, escluse piccole zone in prossimità della sezione vincolata, valgono le (5-25). Se, più in generale, la lastra incastrata in  $B$  è caricata in  $A$  da forze aventi per risultante una coppia  $-M_A$  oraria, una forza  $-N_A$  agente secondo  $z$ , e una forza  $-T_A$  agente secondo  $y$ , le  $\sigma_z$  e  $\tau_{zy}$ , con le stesse limitazioni di cui sopra, sono fornite dalle (6-23), (6-24) e (6-25), in virtù del principio di sovrapposizione. Si possono quindi estendere i risultati acquisiti ad una lastra rettangolare comunque caricata e vincolata. Si prenda in esame per esempio la lastra della fig. 6-8, appoggiata ai due estremi, e caricata sul bordo superiore da forze concentrate; si consideri in essa una generica sezione  $S$ , abbastanza distante dai punti di applicazione delle forze e dagli appoggi. Un tratto di lastra compreso tra le sezioni rette corrispondenti a due forze esterne consecutive, per es. il tratto 1-2, può essere considerato libero, purchè sulle facce 1 e 2 siano applicate forze distribuite uguali alle forze interne che le parti A-1 e 2-B trasmettono alla 1-2. Le forze interne agenti sulla sezione 1 non sono note, ma equivalgono ad una coppia  $M_1$  oraria e ad una forza verticale  $T$  diretta verso l'alto; le forze interne agenti sulla sezione 2 equivalgono ad una coppia  $M_2 = M_1 + T \Delta z$  antioraria, e ad una forza verticale  $T$  diretta verso il basso. In virtù del principio di sovrapposizione, si può scindere questa sollecitazione in quelle già studiate nei due casi precedenti. In  $S$  si verifica perciò

---

invece compaiono, per la sezione rettangolare, delle  $\tau_{zy}$  diverse dalla (6-25), e delle  $\tau_{zx}$  diverse da zero. Per  $1/m = 0$ , però, si verifica che le  $\tau_{zy}$  esatte si riducono alle (6-25), e le  $\tau_{zx}$  si annullano. Ciò conferma quanto detto al § 3 circa il numero di equazioni e di funzioni incognite; infatti nel caso in esame la (s) non soddisfa la terna delle (6-9), perciò la soluzione è approssimata. Essa diviene esatta per  $1/m = 0$ , nel qual caso la terna delle (6-9) è identicamente soddisfatta; contrariamente, la soluzione è accettabile solo per piccoli spessori.

$$\sigma_z = \frac{M_1}{I} y + \frac{Tz'}{I} y = \frac{M}{I} y \tag{u}$$

$$\tau_{zy} = \frac{3}{2} \frac{T}{A} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right).$$

Tale risultato è valido però solo per sezioni che distino da 1 e 2 di

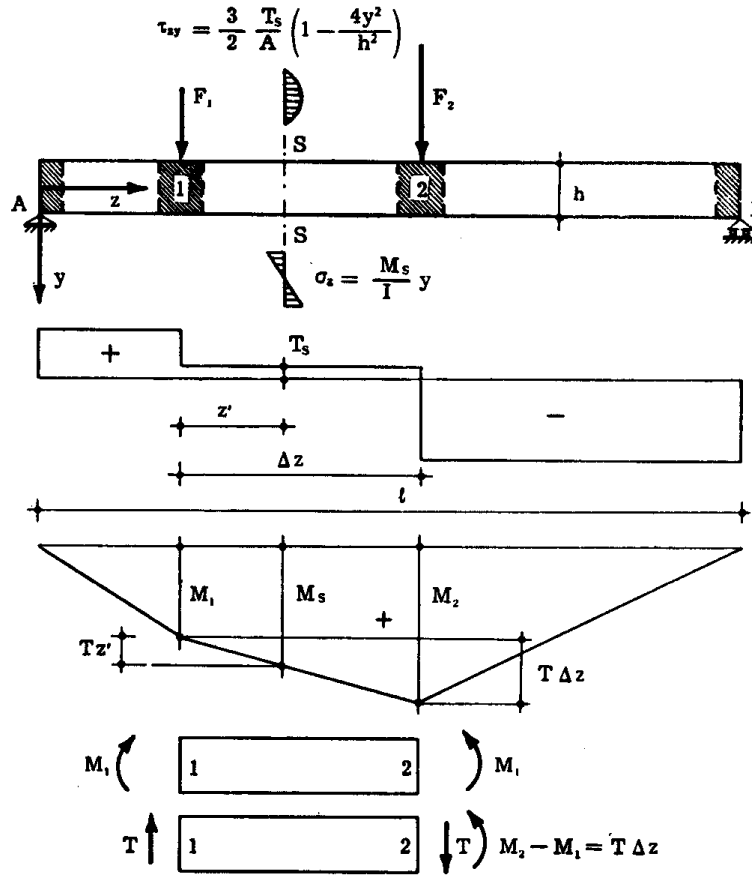


FIG. 6-8

una lunghezza almeno pari a quella di estinzione; l'effettiva distribuzione delle tensioni nelle sezioni ubicate nei pressi dei punti di applicazione delle forze esterne è invece ben lontana dalle (u). Queste perciò sono valide per lastre in cui il rapporto  $h/l$  sia abbastanza ridotto.

Si consideri infine una lastra di forma qualsiasi, in cui però una delle dimensioni nel piano  $yz$  sia, come nel caso già trattato, preponderante rispetto all'altra; in essa la sezione con il piano  $yz$  (fig. 6-9) è tale che la normale ad uno dei bordi risulta con buona approssimazione normale anche all'altro. Il luogo dei punti medi dei segmenti compresi tra i due

bordi e normali ad essi si definisce *asse* della trave, e la sezione con un piano normale all'asse si chiama *sezione retta*. La normale  $n$  alla sezione

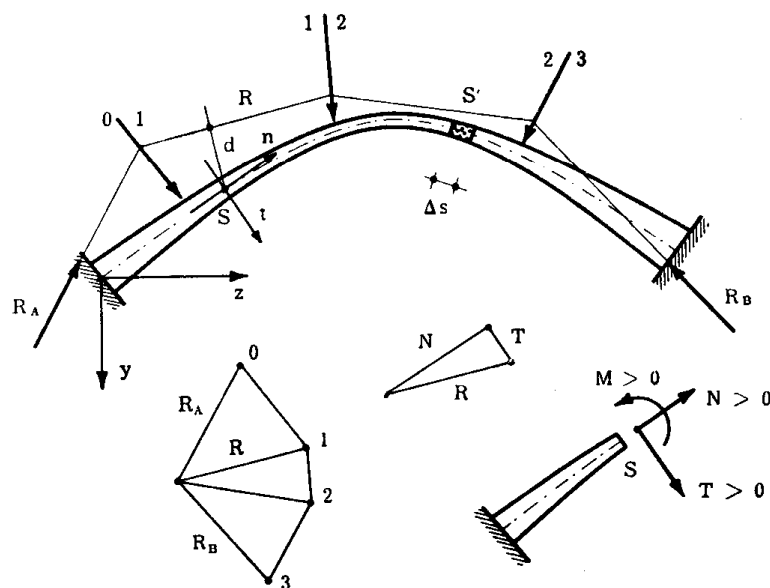


FIG. 6-9

retta generica  $S$  è tangente all'asse, la traccia  $t$  della sezione retta è normale all'asse. Le rette  $t$  ed  $n$  si orientano in modo che il minore dei due angoli  $\hat{tn}$  sia antiorario. Lo spessore può essere variabile, purchè la struttura conservi la simmetria rispetto al piano  $yz$ ; le forze applicate sono uniformemente distribuite lungo lo spessore, e parallele al piano  $yz$ , così da potersi ridurre a forze agenti in questo piano. Sia  $R$  la risultante delle forze agenti a sinistra di una generica sezione retta  $S$ , ivi comprese le reazioni di vincolo; essa è uguale e contraria alla risultante delle forze agenti a destra. La proiezione  $N$  di  $R$  sulla tangente  $n$  all'asse in  $S$  si chiama *sforzo normale* in  $S$ , la proiezione  $T$  sulla normale  $t$  all'asse si chiama *sforzo di taglio*, il momento  $M = Rd$  della  $R$  rispetto al baricentro di  $S$  si chiama *momento flettente*.

Perchè  $N$ ,  $T$ ,  $M$  abbiano lo stesso segno, che si consideri  $R$  come risultante delle forze di sinistra o di destra, si conviene di definire  $N$ ,  $T$ ,  $M$  positivi se, agenti sulla faccia la cui normale positiva ha lo stesso verso di  $n$ , corrispondono ai versi positivi degli assi  $t$  ed  $n$  (fig. 6-9). Ciò premesso, si riconosce che le quantità  $N$ ,  $T$ ,  $M$  delle (6-23), (6-24) e (6-25) corrispondono alle definizioni di sforzo normale, sforzo di taglio e momento flettente. In corrispondenza della generica sezione  $S'$  si consideri il tronco lungo  $\Delta s$ , ottenuto tagliando la lastra secondo sezioni normali distanti da  $S'$  della lunghezza di estinzione; se il tronco non è soggetto a forze esterne concentrate, e se la curvatura dell'asse è così dolce da autorizzare l'assi-



milazione del tronco ad una lastra rettangolare, si ricade nello stesso caso della fig. 6-8, e perciò sono ancora utilizzabili le (6-23), (6-24) e (6-25). Se sul tronco agiscono delle forze distribuite  $p$ , si reputa lecito trascurare  $p \Delta s$  in confronto ai valori di  $M, N, T$  e perciò ancora si fa ricorso alle predette formule, sia pure con meno buona approssimazione.

### 5. La risoluzione del problema della lastra rettangolare attraverso espressioni polinomiali.

Gli esempi esposti al numero precedente si inquadrano nel cosiddetto procedimento inverso di risoluzione del problema dell'equilibrio elastico, adottato in svariati casi pratici. Questo procedimento consiste nel fissare un insieme di funzioni che soddisfano le equazioni indefinite (5-1), o (2-8) e (5-8) (le tre componenti dello spostamento nel primo caso, le sei componenti di tensione nel secondo), risalendo poi attraverso le condizioni al contorno (2-6) alle forze applicate; queste forze, per il principio di unicità, non possono dar luogo che alle componenti dello spostamento o di tensione da cui si è partiti. Negli stati piani di tensione o di

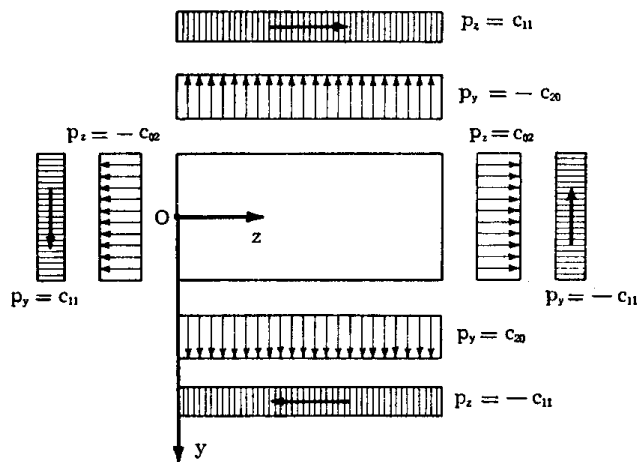


FIG. 6-10

deformazione si può fissare una qualsiasi funzione  $\Phi$  biarmonica, risalendo da essa alle tensioni (6-19), e quindi alle forze applicate attraverso le (6-4); dalla combinazione dei diversi tipi di sollecitazione così ottenuti si può, attraverso il principio di sovrapposizione, pervenire ad altri tipi più complessi o più interessanti.

Si prende in esame la lastra rettangolare  $l \times h$ , con il riferimento cartesiano della fig. 6-10. Un primo esempio di funzione è un polinomio di secondo grado

$$\Phi_2 = \frac{c_{20}}{2} z^2 + c_{11} z y + \frac{c_{02}}{2} y^2 . \quad (v)$$

Dalle (6-19) si trae

$$\sigma_z = c_{02}$$

$$\sigma_y = c_{20}$$

$$\tau_{zy} = -c_{11} ;$$

le tre componenti di tensione sono perciò costanti. Le condizioni al contorno con il riferimento assunto sono le già citate (m). Lo stato tensionale (v) corrisponde così a forze normali e tangenziali distribuite uniformemente sui quattro lati (fig. 6-10).

Un secondo esempio di funzione biarmonica è un polinomio di terzo grado

$$\Phi_3 = \frac{c_{30}}{3 \cdot 2} z^3 + \frac{c_{21}}{2} z^2 y + \frac{c_{12}}{2} z y^2 + \frac{c_{03}}{3 \cdot 2} y^3 \quad (z)$$

che porge

$$\sigma_z = c_{12} z + c_{03} y$$

$$\sigma_y = c_{30} z + c_{21} y$$

$$\tau_{zy} = -c_{21} z - c_{12} y .$$

Se dei coefficienti della (z) è diverso da zero solo  $c_{03}$ , le (m) mostrano che la lastra è sollecitata sulle due facce  $z=0$  e  $z=l$  da forze normali equivalenti a due coppie uguali ed opposte (fig. 6-11). Se è di-

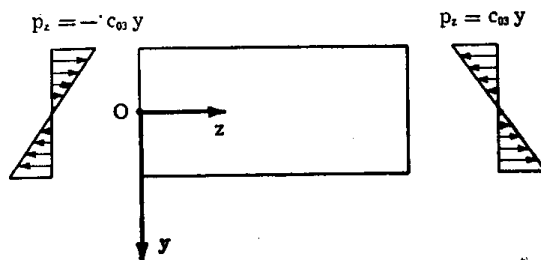


FIG. 6-11

verso da zero solo il coefficiente  $c_{30}$ , la lastra è sollecitata sulle due facce  $y = \pm h/2$  da forze normali aventi una risultante applicata ad

$l/3$  dal lato  $z=l$  (fig. 6-12). Se è diverso da zero il solo coefficiente  $c_{21}$ ,

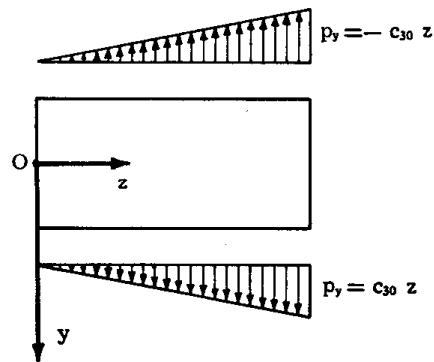


FIG. 6-12

o quello  $c_{12}$ , le distribuzioni di forze applicate sono quelle delle figg. 6-13 o 6-14.

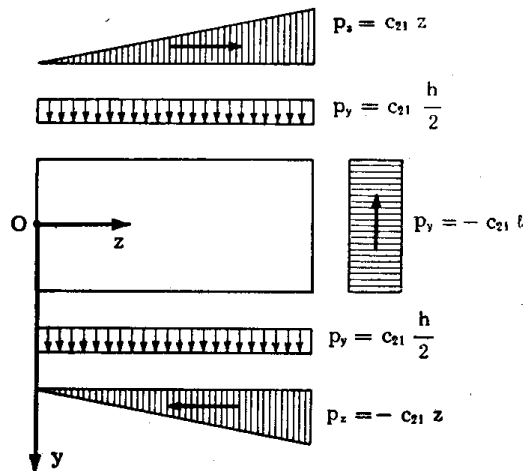


FIG. 6-13

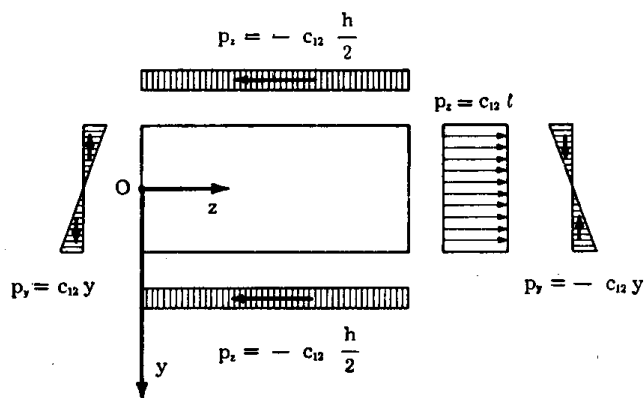


FIG. 6-14

Un terzo esempio di funzione biarmonica è un polinomio di quarto grado

$$\Phi_4 = \frac{c_{40}}{4 \cdot 3} z^4 + \frac{c_{31}}{3 \cdot 2} z^3 y + \frac{c_{22}}{2} z^2 y^2 + \frac{c_{13}}{3 \cdot 2} z y^3 + \frac{c_{04}}{4 \cdot 3} y^4 ; \quad (a')$$

perchè la  $\Phi_4$  sia biarmonica, è necessario in questo caso che sia rispettata la seguente relazione tra i coefficienti:

$$c_{04} = - (2 c_{22} + c_{40}) .$$

Le tensioni sono fornite da

$$\begin{aligned} \sigma_z &= c_{22} z^2 + c_{13} z y - (2 c_{22} + c_{40}) y^2 \\ \sigma_y &= c_{40} z^2 + c_{31} z y + c_{22} y^2 \\ \tau_{zy} &= - \frac{c_{31}}{2} z^2 - 2 c_{22} z y - \frac{c_{13}}{2} y^2 . \end{aligned} \quad (b')$$

Le (b') corrispondono a quattro diversi tipi di sollecitazione esterna, in rapporto ai valori arbitrari che possono assegnarsi alle quattro costanti indipendenti della (a'). Se, per esempio, il solo coefficiente  $c_{13}$  è diverso da zero, si ha la sollecitazione riportata nella fig. 6-15.

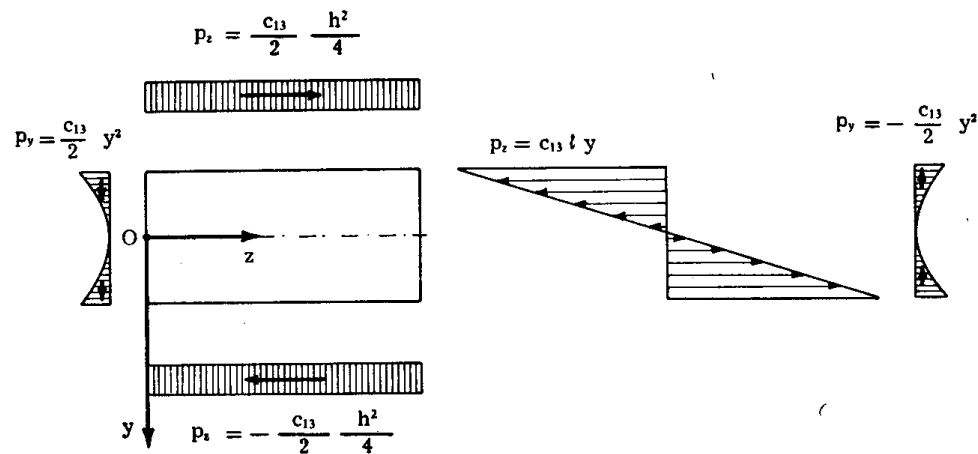


FIG. 6-15

Un quarto esempio di funzione biarmonica è un polinomio di quinto grado

$$\Phi_5 = \frac{c_{50}}{5 \cdot 4} z^5 + \frac{c_{41}}{4 \cdot 3} z^4 y + \frac{c_{32}}{3 \cdot 2} z^3 y^2 + \frac{c_{23}}{3 \cdot 2} z^2 y^3 + \frac{c_{14}}{4 \cdot 3} z y^4 + \frac{c_{05}}{5 \cdot 4} y^5 , \quad (c')$$

purchè tra i coefficienti siano rispettate le condizioni

$$c_{14} = - (2 c_{32} + 3 c_{50})$$

$$c_{05} = - \frac{1}{3} (c_{41} + 2 c_{23}) ;$$

anche in questo caso i coefficienti indipendenti della (c') sono quattro.  
Le tensioni sono

$$\sigma_z = \frac{c_{32}}{3} z^3 + c_{23} z^2 y - (2 c_{32} + 3 c_{50}) z y^2 - \frac{1}{3} (c_{41} + 2 c_{23}) y^3$$

$$\sigma_y = c_{50} z^3 + c_{41} z^2 y + c_{32} z y^2 + \frac{c_{23}}{3} y^3 \quad (d')$$

$$\tau_{zy} = - \frac{c_{41}}{3} z^3 - c_{32} z^2 y - c_{23} z y^2 + \frac{1}{3} (2 c_{32} + 3 c_{50}) y^3 .$$

Anche le (d') corrispondono a quattro diversi tipi di sollecitazione; ponendo per esempio il solo coefficiente  $c_{23}$  diverso da zero, si ha la sollecitazione riportata nella figura 6-16.

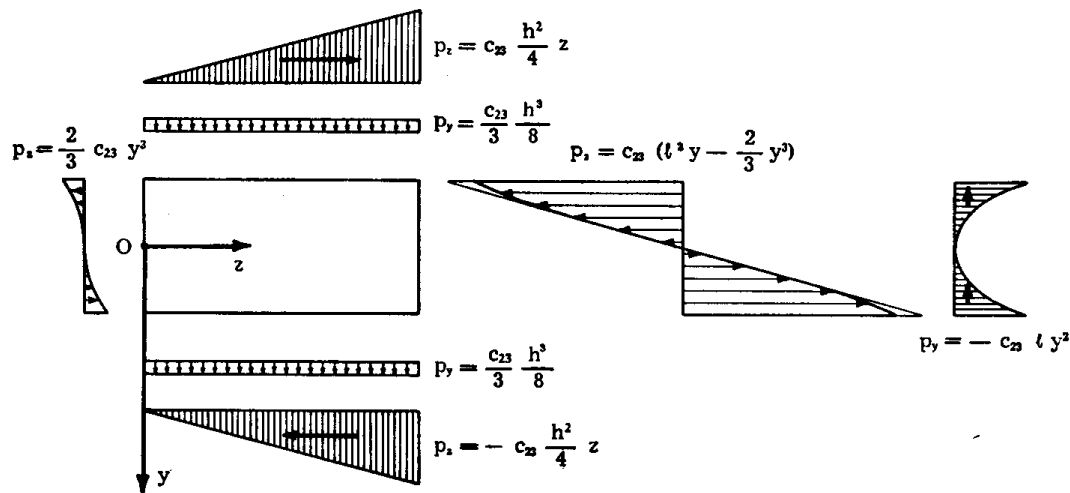


FIG. 6-16

Molti casi pratici possono ricondursi, attraverso il principio di sovrapposizione, ai precedenti. Si consideri per esempio una lastra incastrata in  $z = l$ , e caricata all'estremità  $z = 0$  da una forza  $T$  diretta secondo  $y$ ; i bordi orizzontali siano scarichi (fig. 6-17). L'incastro reagisce con forze  $p_z$  e  $p_y$  distribuite in modo qualsiasi, ma equivalenti, per ragioni di

equilibrio, ad una forza  $-T$  e ad una coppia oraria  $-M = -Tl$ ; per il principio di De Saint-Venant, ad una certa distanza dai due bordi verticali

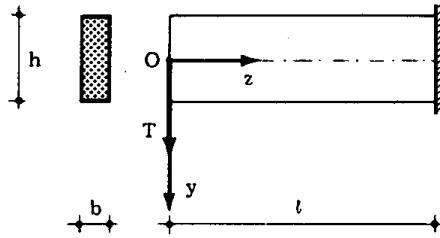


FIG. 6-17

le tensioni dipendono solo dalla risultante delle forze applicate sui due bordi, e non dalla loro effettiva distribuzione. Ciò premesso, si osserva che la combinazione delle sollecitazioni riportate nelle figg. 6-10 e 6-15 soddisfa il problema; infatti ponendo

$$c_{11} = -\frac{c_{13}}{2} \frac{h^2}{4} \quad (e')$$

si annullano le sollecitazioni lungo i due bordi orizzontali, e le sollecitazioni lungo i due bordi verticali equivalgono ad una forza  $T$  diretta secondo  $y$  in  $z=0$ , e ad una forza  $-T$  ed un momento  $-M$  per  $z=l$  (\*).

Dalla (e') risulta

$$\Phi = c_{11} \left( zy - \frac{4}{3} \frac{zy^3}{h^2} \right) \quad (f')$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -\frac{8c_{11}}{h^2} zy \\ \sigma_y &= 0 \end{aligned} \quad (g')$$

$$\tau_{zy} = -c_{11} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right).$$

La risultante delle  $p_y dA$  in  $z=0$  deve essere pari a  $T$ ; perciò si ha

$$T = c_{11} \int_{-h/2}^{h/2} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right) b dy = \frac{2}{3} c_{11} b h$$

(\*) La forza  $-T$  ed il momento  $-M$  in  $z=l$  sono in equilibrio con la forza  $T$  in  $z=0$ , perchè ciascuna delle sollecitazioni elementari prima riportate è di per sè in equilibrio.

da cui

$$c_{11} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}$$

Le (g') si scrivono perciò

$$\begin{aligned} \sigma_z &= -12 \frac{Tz}{bh^3} y \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{zy} &= -\frac{3}{2} \frac{T}{bh} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2}\right). \end{aligned} \quad (h')$$

Le (h') coincidono (a meno del segno, atteso il diverso segno di T) con le (6-25).

Si consideri adesso una lastra appoggiata in  $z=0$  e  $z=l$ , e soggetta ad un carico uniformemente distribuito  $a$  sul bordo superiore (fig. 6-

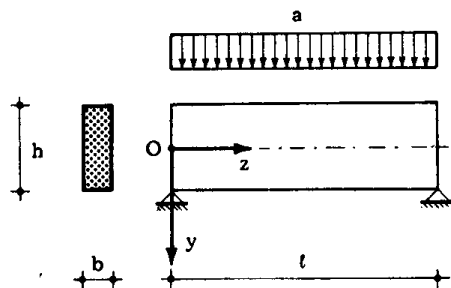


FIG. 6-18

18). Combinando le sollecitazioni  $c_{20}$  (fig. 6-10),  $c_{21}$  (fig. 6-13) e  $c_{23}$  (fig. 6-16), è possibile ricondursi al caso in esame. Si ha così

$$\begin{aligned} \sigma_z &= c_{23} \left( z^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) \\ \sigma_y &= c_{20} + c_{21} y + \frac{c_{23}}{3} y^3 \\ \tau_{zy} &= -c_{21} z - c_{23} zy^2. \end{aligned} \quad (i')$$

Per  $y = -h/2$ , deve essere  $\sigma_y = -a/b$ , e  $\tau_{zy} = 0$ :

$$\begin{aligned}
 c_{20} - c_{21} \frac{h}{2} - \frac{c_{23}}{24} h^3 &= -\frac{a}{b} \\
 - c_{21} - c_{23} \frac{h^2}{4} &= 0 .
 \end{aligned}
 \tag{l'}$$

Per  $y = h/2$ , deve essere  $\sigma_y = 0$ ,  $\tau_{zy} = 0$ :

$$c_{20} + c_{21} \frac{h}{2} + \frac{c_{23}}{24} h^3 = 0 .
 \tag{m'}$$

Dalle (l') ed (m') risulta

$$\begin{aligned}
 c_{20} &= -\frac{a}{2b} \\
 c_{21} &= \frac{3}{2} \frac{a}{bh} \\
 c_{23} &= -6 \frac{a}{bh^3} .
 \end{aligned}
 \tag{n'}$$

Per  $z = \ell$  risulta

$$R_z = 0$$

$$R_y = \int_{-h/2}^{h/2} p_y b dy = \int_{-h/2}^{h/2} \left( -\frac{3}{2} \frac{a \ell}{bh} + 6 \frac{a \ell}{bh^3} y^2 \right) b dy = -a \ell
 \tag{o'}$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} p_z y b dy = -6 \frac{a}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} \left( \ell^2 y^2 - \frac{2}{3} y^4 \right) dy = -a \left( \frac{\ell^2}{2} - \frac{h^2}{20} \right) .$$

Per  $z = 0$  si ha

$$R_z = 0$$

$$R_y = 0$$

$$M_x = 6 \frac{a}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{2}{3} y^4 dy = -\frac{a h^2}{20} .
 \tag{q'}$$

Le risultanti delle sollecitazioni da cui derivano le tensioni (i') sono riportate nella fig. 6-19 a; sovrapponendo alle sollecitazioni suddette una sollecitazione elementare  $c_{03}$  (fig. 6-11) ed una  $c_{11}$   $c_{13}$  (fig. 6-17), è pos-



sibile ottenere come somma la sollecitazione della fig. 6-19 d, corrispondente al caso in esame. La sollecitazione  $c_{03}$  deve essere tale da offrire

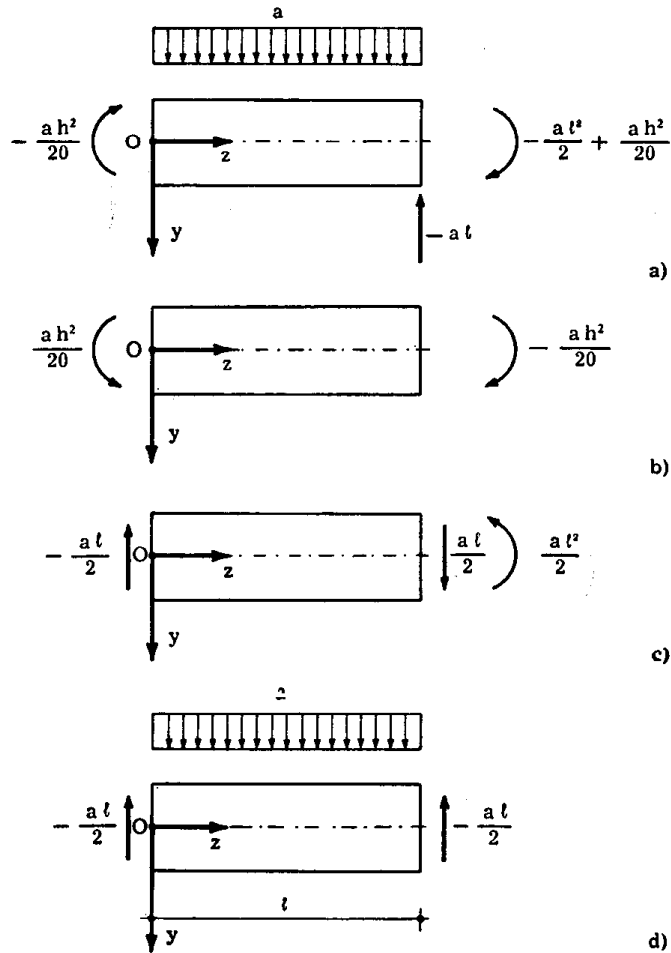


FIG. 6-19

(fig. 6-19 b) in  $z = l$

$$\int_{-h/2}^{h/2} p_z y b dy = - \frac{a h^2}{20}$$

da cui

$$c_{03} b \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = - \frac{a h^2}{20}$$

$$c_{03} = - \frac{3}{5} \frac{a}{b h} \quad (r')$$

La sollecitazione  $c_{11} c_{13}$  deve corrispondere (h') a  $T = - a l/2$ .

In definitiva si ha quindi

$$\begin{aligned}\sigma_z &= -6 \frac{a}{b h^3} \left( z^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) - \frac{3}{5} \frac{a}{b h} y + 6 \frac{a \ell}{b h^3} z y \\ \sigma_y &= -\frac{a}{2 b} + \frac{2}{3} \frac{a}{b h} y - 2 \frac{a}{b h^3} y^3 \\ \tau_{zy} &= -\frac{3}{2} \frac{a}{b h} z + 6 \frac{a}{b h^3} z y^2 + \frac{3}{4} \frac{a \ell}{b h} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right).\end{aligned}\quad (26)$$

Se si calcolano le sollecitazioni attraverso le (u), come in genere si opera nella pratica, si ottiene

$$\begin{aligned}M &= \frac{a \ell}{2} z (\ell - z) \\ T &= a \left( \frac{\ell}{2} - z \right) \\ \sigma_z &= 6 \frac{a \ell}{b h^3} z y - 6 \frac{a}{b h^3} z^2 y \\ \tau_{zy} &= -\frac{3}{2} \frac{a}{b h} z + 6 \frac{a}{b h^3} z y^2 + \frac{3}{4} \frac{a \ell}{b h} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right).\end{aligned}\quad (s')$$

I termini correttivi delle (s') sono

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{a}{b h^3} \left( 4 y^3 - \frac{3}{5} h^2 y \right) \\ \sigma_y &= \frac{a}{b h^3} \left( -2 y^3 + \frac{3}{2} h^2 y - \frac{1}{2} h^3 \right) \\ \tau_{zy} &= 0.\end{aligned}\quad (t')$$

Si osserva che i termini (t') sono indipendenti dalla luce  $\ell$ , e quindi sono tanto più piccoli rispetto agli (s') quanto maggiore è il rapporto  $\ell/h$ . I termini (t') inoltre sono indipendenti da  $z$ , e si limitano alla  $\sigma_z$  ed alla  $\sigma_y$ . La  $\sigma_y$  aggiuntiva ha andamento di parabola cubica (fig. 6-20), assume il valore  $-a/b$  sul bordo superiore, conformemente alle condizioni al contorno, il valore  $-a/2b$  sull'asse, il valore zero sul bordo inferiore. La soluzione (6-26) è esatta (sempre nei limiti entro cui sono ac-

cettabili le ipotesi di planeità dello stato tensionale e di invarianza di quest'ultimo rispetto a  $z$ ) se sui lati  $z=0$  e  $z=l$  le forze  $a \cdot l/2$  risul-

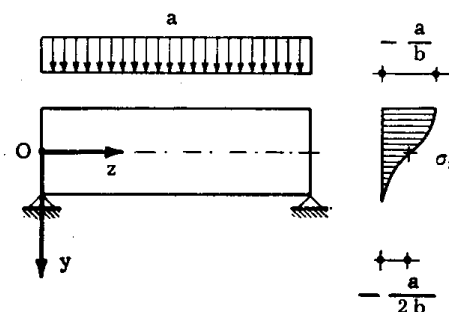


FIG. 6-20

tano da una distribuzione di  $p_y$  coincidente con quella delle  $\tau_{zy}$  (6-25), e se inoltre sugli stessi lati esistono delle  $p_z$  date dalla prima delle (t')

$$p_z = \pm \frac{a}{b h^3} \left( 4 y^3 - \frac{3}{5} h^2 y \right);$$

per il principio di De Saint-Venant, la soluzione (6-26) può essere però accettata, a partire da una certa distanza dai due bordi verticali, anche se le  $p_z$  non esistono affatto (esse infatti ammettono forza e coppia risultante nulle), e se le  $p_y$  sono distribuite con legge qualsiasi, purchè ammettano la risultante  $a \cdot l/2$ .

Si osservi che i termini (t') sono gli errori che si commettono calcolando le tensioni attraverso le formule (6-26), ottenute appoggiandosi al principio del De Saint-Venant, e assimilando un tronco di lastra ad una lastra sollecitata come nella fig. 6-7. Nel caso in esame questa assimilazione può a prima vista sembrare fatta in uno spirito di minore approssimazione che non quella del § 4 (fig. 6-8), poichè il tronco isolato dalla lastra reale risulta caricato anche sul bordo superiore. In realtà, il tronco che occorre considerare deve avere una luce minima  $\Delta z$  pari al doppio della distanza oltre la quale non ha più peso sensibile sullo stato tensionale la legge di distribuzione della forza applicata sui bordi verticali, e la forza  $a \cdot \Delta z$ , risultante delle forze agenti sul bordo superiore, è molto piccola rispetto alla risultante delle forze agenti sui due bordi verticali, e tanto più piccola quanto maggiore è la luce della trave reale. L'errore che si commette considerando  $a \cdot \Delta z$  trascurabile è fornito proprio dalle (t'), che a parità di  $\Delta z$  (e cioè di altezza  $h$ ) sono tanto minori rispetto alle (s') quanto più forte è la luce.

Se la lastra appoggiata alle estremità è soggetta sul bordo superiore ad un carico distribuito qualsiasi  $a(z)$  (fig. 6-21), le tensioni sono fornite

con buona approssimazione, superata la distanza di estinzione dai due

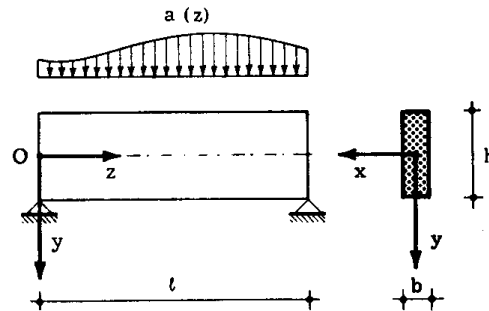


FIG. 6-21

bordi verticali, dalle formule (*Seewald*)

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{M y}{I} + \frac{a}{b} \left( 4 \frac{y^3}{h^3} - \frac{3 y}{h} \right) \\ \sigma_y &= -\frac{a}{2b} + \frac{a}{b} \left( \frac{3 y}{h} - 2 \frac{y^3}{h^3} \right) \\ \tau_{zy} &= \frac{3 T}{2 A} \left( 1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right)\end{aligned}\quad (27)$$

dove  $a$ ,  $M$  e  $T$  sono il carico distribuito, il momento flettente ed il taglio in corrispondenza della ascissa  $z$  cui le tensioni si riferiscono,  $I$  il momento d'inerzia  $\frac{b h^3}{12}$  della sezione retta rispetto all'asse  $z$ ,  $A$  l'area della stessa sezione. Se le forze  $a(z)$  sono applicate sul bordo inferiore, le espressioni (6-27) restano invariate, solo nel primo termine della espressione di  $\sigma_y$  cambia il segno:

$$\sigma_y = \frac{a}{2b} + \frac{a}{b} \left( \frac{3 y}{h} - 2 \frac{y^3}{h^3} \right).$$

## 6. La risoluzione del problema della lastra rettangolare attraverso sviluppi in serie trigonometriche.

Una funzione

$$\Phi = f(y) \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} = f(y) \operatorname{sen} \alpha z \quad (28)$$

è biarmonica se è soddisfatta la relazione

$$\alpha^4 f - 2\alpha^2 \frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^4 f}{dy^4} = 0, \quad (u')$$

il cui integrale generale è (\*)

$$f = C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y. \quad (v')$$

Dalla  $\Phi$  così determinata derivano le seguenti componenti di tensione:

$$\begin{aligned} \sigma_z = & \quad \text{sen } \alpha z [C_1 \alpha^2 \cosh \alpha y + C_2 \alpha^2 \sinh \alpha y + \\ & \quad + C_3 \alpha (2 \sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y) + \\ & \quad + C_4 \alpha (2 \cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = & -\alpha^2 \text{sen } \alpha z [C_1 \cosh \alpha y + C_2 \sinh \alpha y + \\ & \quad + C_3 y \cosh \alpha y + C_4 y \sinh \alpha y] \end{aligned} \quad (z')$$

$$\begin{aligned} \tau_{zy} = & -\alpha \cos \alpha z [C_1 \alpha \sinh \alpha y + C_2 \alpha \cosh \alpha y + \\ & \quad + C_3 (\cosh \alpha y + \alpha y \sinh \alpha y) + \\ & \quad + C_4 (\sinh \alpha y + \alpha y \cosh \alpha y)] \end{aligned}$$

Sui bordi  $y = -\frac{h}{2}$  ed  $y = +\frac{h}{2}$  agiscono rispettivamente le forze (fig. 6-22):

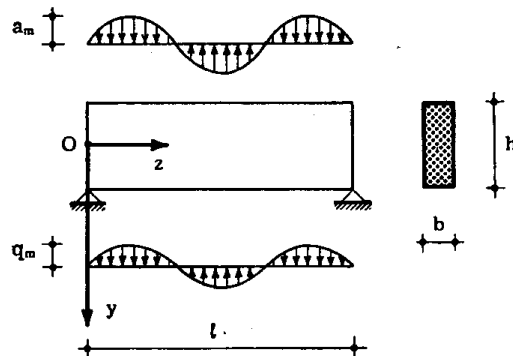


FIG. 6-22

(\*) Si osservi che  $\Phi$  ed  $f$  hanno le dimensioni di una forza,  $\alpha$  di  $l^{-1}$ ,  $C_1$  e  $C_2$  di una forza,  $C_3$  e  $C_4$  di  $Fl^{-1}$ .

$$a = a_m \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} = a_m \operatorname{sen} \alpha z \quad (\text{a''})$$

$$q = q_m \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} = q_m \operatorname{sen} \alpha z .$$

Le condizioni (m) forniscono

$$\text{per } y = -\frac{h}{2} \quad \tau_{zy} = 0 \quad \sigma_y = -\frac{a_m}{b} \operatorname{sen} \alpha z \quad (\text{b''})$$

$$\text{per } y = \frac{h}{2} \quad \tau_{zy} = 0 \quad \sigma_y = \frac{q_m}{b} \operatorname{sen} \alpha z .$$

Sostituendo questi valori nella terza delle (z') si ha

$$C_3 = -C_2 \frac{\alpha \cosh \alpha \frac{h}{2}}{\cosh \alpha \frac{h}{2} + \alpha \frac{h}{2} \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2}} \quad (\text{c''})$$

$$C_4 = -C_1 \frac{\alpha \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} + \alpha \frac{h}{2} \cosh \alpha \frac{h}{2}} .$$

Sostituendo invece i valori (b'') nella seconda delle (z') si ha

$$C_1 \cosh \alpha \frac{h}{2} - C_2 \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} - C_3 \frac{h}{2} \cosh \alpha \frac{h}{2} + C_4 \frac{h}{2} \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} = \frac{a_m}{b \alpha^2} \quad (\text{d''})$$

$$C_1 \cosh \alpha \frac{h}{2} + C_2 \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} + C_3 \frac{h}{2} \cosh \alpha \frac{h}{2} + C_4 \frac{h}{2} \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} = -\frac{q_m}{b \alpha^2} .$$

Addizionando e sottraendo membro a membro le (d''), e utilizzando le (c''), si ha

$$C_1 = \frac{a_m - q_m}{b \alpha^2} \frac{\operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} + \alpha \frac{h}{2} \cosh \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha h + \alpha h}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{a_m + q_m}{b \alpha^2} \frac{\cosh \alpha \frac{h}{2} + \alpha \frac{h}{2} \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha h - \alpha h} \\
 C_3 &= - \frac{a_m + q_m}{b \alpha^2} \frac{\alpha \cosh \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha h - \alpha h} \\
 C_4 &= - \frac{a_m - q_m}{b \alpha^2} \frac{\alpha \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha h + \alpha h}
 \end{aligned} \tag{e''}$$

Le (z') si scrivono perciò

$$\begin{aligned}
 \sigma_z &= \frac{a_m - q_m}{b} \frac{\left( \alpha \frac{h}{2} \cosh \alpha \frac{h}{2} - \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} \right) \cosh \alpha y - \alpha y \operatorname{senh} \alpha y \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha h + \alpha h} \operatorname{sen} \alpha z + \\
 &+ \frac{a_m + q_m}{b} \frac{\left( \alpha \frac{h}{2} \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} - \cosh \alpha \frac{h}{2} \right) \operatorname{senh} \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \cosh \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha h - \alpha h} \operatorname{sen} \alpha z ; \\
 \sigma_y &= - \frac{a_m - q_m}{b} \frac{\left( \alpha \frac{h}{2} \cosh \alpha \frac{h}{2} + \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} \right) \cosh \alpha y - \alpha y \operatorname{senh} \alpha y \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha h + \alpha h} \operatorname{sen} \alpha z - \\
 & - \frac{a_m + q_m}{b} \frac{\left( \alpha \frac{h}{2} \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} + \cosh \alpha \frac{h}{2} \right) \operatorname{senh} \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \cosh \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha h - \alpha h} \operatorname{sen} \alpha z ; \\
 \tau_{zy} &= - \frac{a_m - q_m}{b} \frac{\alpha \frac{h}{2} \cosh \alpha \frac{h}{2} \operatorname{senh} \alpha y - \alpha y \cosh \alpha y \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha h + \alpha h} \cos \alpha z - \\
 & - \frac{a_m + q_m}{b} \frac{\alpha \frac{h}{2} \operatorname{senh} \alpha \frac{h}{2} \cosh \alpha y - \alpha y \operatorname{senh} \alpha y \cosh \alpha \frac{h}{2}}{\operatorname{senh} \alpha h - \alpha h} \cos \alpha z .
 \end{aligned} \tag{f''}$$

Le condizioni (m) sui due lati  $z=0$  e  $z=l$  forniscono  $p_z=0$ , e  $p_y = \pm \tau_{zy}$ . Dalla terza delle (f'') risulta che  $p_y$  è composta di due termini. Il primo, proporzionale ad  $(a_m - q_m)$ , è emisimmetrico rispetto al-

l'asse  $z$ , e quindi a risultante nulla. Il secondo, proporzionale ad  $(a_m + q_m)$ , è simmetrico rispetto all'asse  $z$ , e le relative risultanti sulle due facce  $z=0$  e  $z=l$  equilibrano le forze applicate  $a$  e  $q$ ; queste due risultanti sono uguali in valore assoluto, ed uguali o contrarie nel segno, secondo che  $m$  è dispari o pari.

Se forze comunque distribuite agiscono sui due bordi  $y = \pm h/2$ , può porsi in generale

$$a = \sum_1^{\infty} a_m \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} \quad (29)$$

$$q = \sum_1^{\infty} q_m \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l}$$

dove è

$$a_m = \frac{2}{l} \int_0^l a \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} dz \quad (30)$$

$$q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} dz .$$

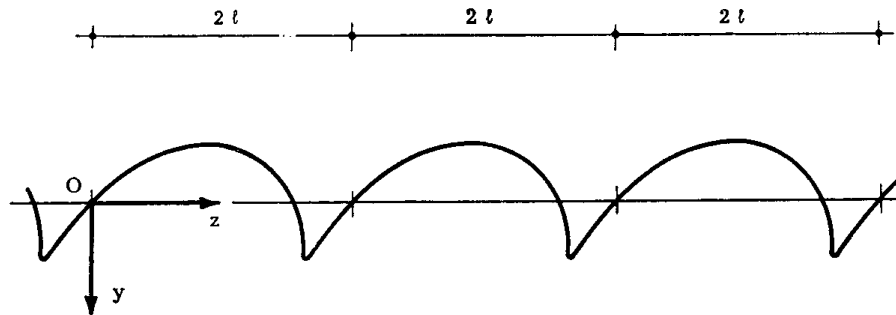


FIG. 6-23

Una funzione  $f(z)$  sia *periodica* di periodo  $2l$  (fig. 6-23):

$$f(z + 2l) = f(z) .$$

Esempi di funzione periodica di periodo  $2l$  sono

$$\operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l}$$

$$\operatorname{cos} \frac{m \pi z}{l} ;$$



il periodo fondamentale di  $\text{sen} \frac{m \pi z}{l}$  e  $\text{cos} \frac{m \pi z}{l}$  è  $\frac{2l}{m}$ ,  $2l$  è un suo multiplo.

Può porsi perciò

$$f(z) = A_0 + \sum_{1^m}^{\infty} A_m \cos \frac{m \pi z}{l} + \sum_{1^m}^{\infty} A'_m \text{sen} \frac{m \pi z}{l}; \quad (31)$$

dalla (6-31), ricordando che

$$\int_0^{2l} \cos \frac{n \pi z}{l} \cos \frac{m \pi z}{l} dz = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ l & (m = n) \end{cases}$$

$$\int_0^{2l} \text{sen} \frac{n \pi z}{l} \text{sen} \frac{m \pi z}{l} dz = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ l & (m = n) \end{cases}$$

$$\int_0^{2l} \text{sen} \frac{n \pi z}{l} \cos \frac{m \pi z}{l} dz = 0,$$

risulta

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2l} \int_0^{2l} f dz \\ A_m &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f \cos \frac{m \pi z}{l} dz \\ A'_m &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f \text{sen} \frac{m \pi z}{l} dz. \end{aligned} \quad (32)$$

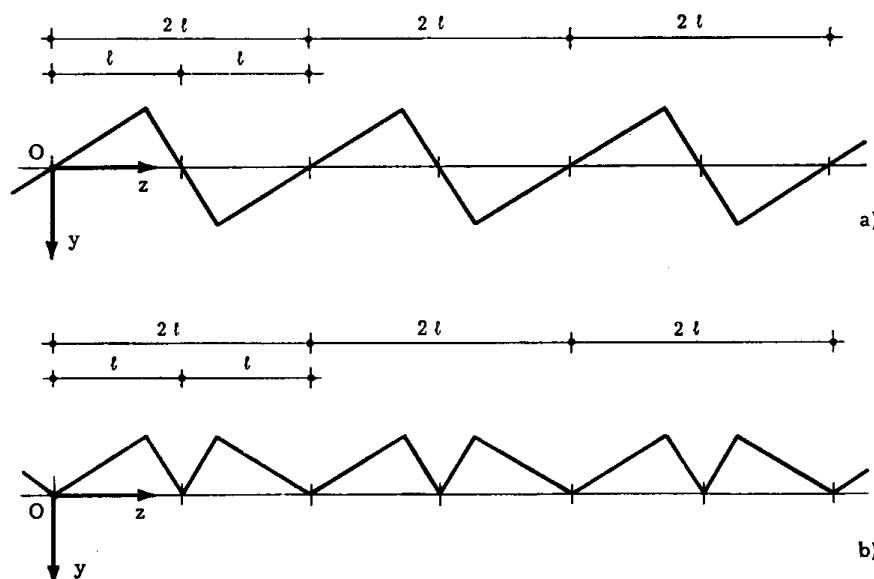


FIG. 6-24

Se la funzione  $f$  è emisimmetrica rispetto alla mezziera del campo  $2l$  (fig. 6-24 a), risulta

$$A_0 = 0$$

$$A_m = 0$$

e perciò

$$f = \sum_{1}^{\infty} A'_m \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} \quad (33)$$

dove

$$A'_m = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} dz = \frac{2}{l} \int_0^l f \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} dz . \quad (34)$$

Se la funzione  $f$  è simmetrica rispetto alla mezziera del campo  $2l$  (fig. 6-24 b), risulta

$$A'_m = 0$$

e quindi

$$f = A_0 + \sum_{1}^{\infty} A_m \cos \frac{m \pi z}{l} \quad (35)$$

dove

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f dz$$

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l f \cos \frac{m \pi z}{l} dz . \quad (36)$$

Si osservi che una stessa funzione  $f$ , definita nell'intervallo  $l$  (fig. 6-24 a, b), può avere indifferentemente lo sviluppo (6-33) o (6-35); al di fuori di  $l$ , il (6-33) rappresenta una funzione emisimmetrica, il (6-35) una funzione simmetrica. Per

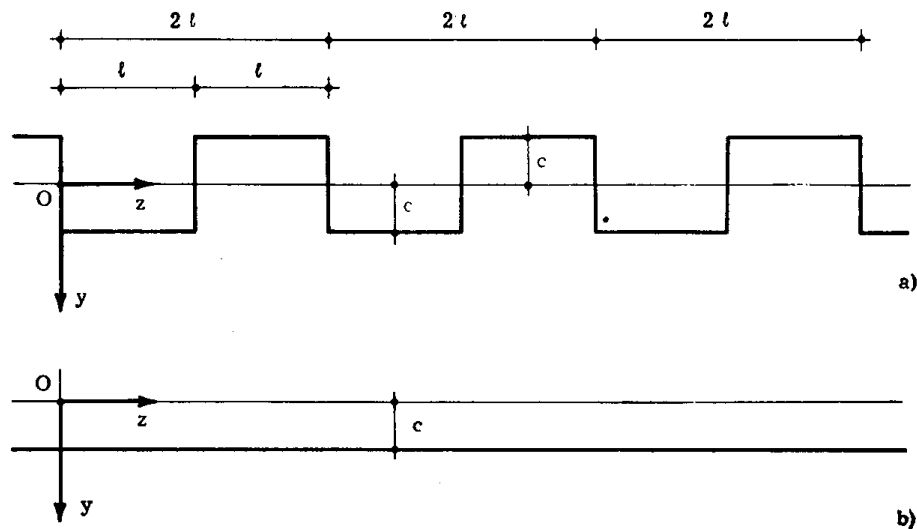


FIG. 6-25

esempio, una funzione che assuma alternativamente i valori  $\pm c$  nei successivi campi  $l$  (fig. 6-25 a) può per la (6-33) esprimersi con lo sviluppo

$$c = \sum_1^{\infty} A'_m \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l}$$

dove

$$A'_m = \frac{2c}{l} \int_0^l \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} dz = \frac{2c}{m\pi} \left( 1 - \cos \frac{m \pi z}{l} \right)_0^l$$

e cioè

$$A'_m = \frac{4c}{m\pi} \quad (m \text{ dispari}) . \quad (37)$$

Se invece  $f = c$  per qualsiasi valore di  $z$  (fig. 6-25 b) lo sviluppo (6-35) porge

$$c = A_0 . \quad (g'')$$

La funzione  $f = c$  nell'intervallo  $0-l$  può essere indifferentemente espressa dalla (6-37) o dalla ( $g''$ ); se però interessa anche ciò che avviene al di fuori dell'intervallo  $0-l$ , è necessario tener presente che la (6-37) definisce una funzione emisimmetrica rispetto ai successivi campi  $l$ , la ( $g''$ ) una funzione simmetrica.

La funzione  $f$  sia nulla in tutto l'intervallo  $l$ , fatta eccezione per un tratto  $dz$  all'ascissa  $z_1$ , in cui assume un valore  $q$  tale che  $q dz = F$  (fig. 6-26 a).

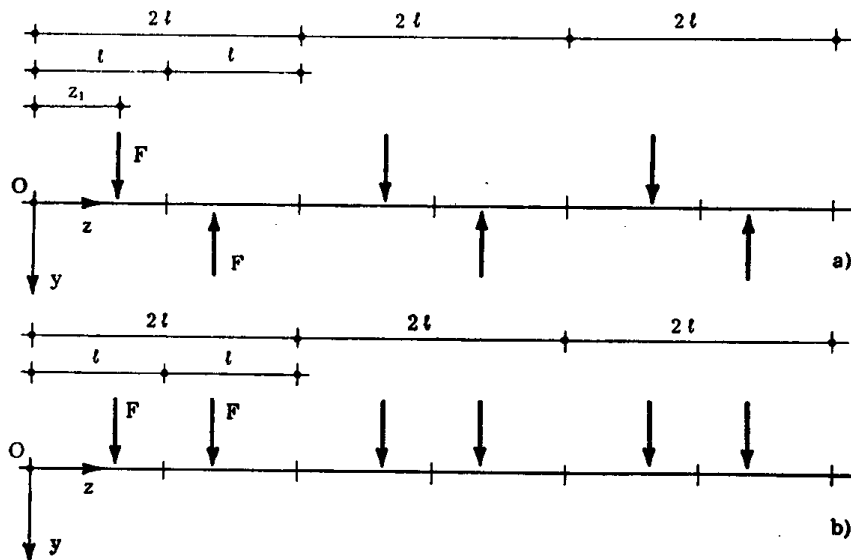


FIG. 6-26

La (6-34) fornisce

$$A'_m = \frac{2q}{l} \int_{z_1}^{z_1+dz} \operatorname{sen} \frac{m \pi z}{l} dz = \frac{2q dz}{l} \operatorname{sen} \frac{m \pi z_1}{l} = \frac{2F}{l} \operatorname{sen} \frac{m \pi z_1}{l} ; \quad (38)$$

per la (6-36) invece si ha

$$A_o = \frac{q}{l} \int_{z_1}^{z_1 + dz} dz = \frac{F}{l}$$

$$A_m = \frac{2q}{l} \int_{z_1}^{z_1 + dz} \cos \frac{m \pi z}{l} dz = \frac{2F}{l} \cos \frac{m \pi z_1}{l} \quad (39)$$

Lo sviluppo (6-38) corrisponde alla fig. 6-26 a, lo sviluppo (6-39) alla fig. 6-26 b; per quanto attiene al campo  $l$  (fig. 6-27) essi coincidono. Analogamente, per

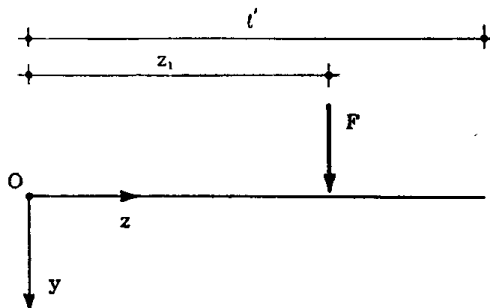


FIG. 6-27

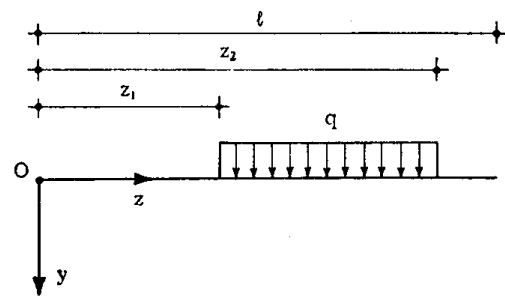


FIG. 6-28

la funzione della fig. 6-28 la (6-34) fornisce

$$A'_m = \frac{2q}{m\pi} \left( \cos \frac{m\pi z_1}{l} - \cos \frac{m\pi z_2}{l} \right) \quad (40)$$

e le (6-36)

$$A_o = \frac{q(z_2 - z_1)}{l} \quad (41)$$

$$A_m = \frac{2q}{m\pi} \left( \sin \frac{m\pi z_2}{l} - \sin \frac{m\pi z_1}{l} \right)$$

Il generico termine m-esimo dello sviluppo (6-29) genera componenti di tensione fornite dalle ( $f''$ ); alle serie (6-29) esprimenti il carico agente corrispondono perciò tre serie esprimenti  $\sigma_z \sigma_y \tau_{zy}$ . In genere la convergenza è soddisfacente.

Si avverte che se lo sviluppo delle forze  $a$  e  $q$  è in coseni, i corrispondenti termini  $\sigma_z \sigma_y \tau_{zy}$  si ottengono ancora dalle ( $f''$ ), cambiando  $\sin \alpha z$  in  $\cos \alpha z$ ,  $\cos \alpha z$  in  $\sin \alpha z$ , e cambiando il segno di  $\tau_{zy}$ .

E' interessante il caso in cui i due carichi della fig. 6-22 sono uguali e contrari:  $a_m = -q_m$ . Nelle espressioni ( $f''$ ) scompaiono i termini in  $a_m + q_m$ ; dalla seconda delle ( $f''$ ) risulta in particolare, in corrispondenza dell'asse ( $y = 0$ )

$$\sigma_y = -2 \frac{a_m}{b} \frac{\alpha \frac{h}{2} \cosh \alpha \frac{h}{2} + \sinh \alpha \frac{h}{2}}{\sinh \alpha h + \alpha h} \operatorname{sen} \alpha z . \quad (h'')$$

Dalla (h''), per i noti sviluppi

$$\sinh \alpha \frac{h}{2} = \alpha \frac{h}{2} + \frac{\left(\alpha \frac{h}{2}\right)^3}{6} + \frac{\left(\alpha \frac{h}{2}\right)^5}{120} + \dots$$

$$\cosh \alpha \frac{h}{2} = 1 + \frac{\left(\alpha \frac{h}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\alpha \frac{h}{2}\right)^4}{24} + \dots$$

si trae, trascurando le potenze di  $\alpha \frac{h}{2}$  superiori alla quarta,

$$\sigma_y = -\frac{a_m}{b} \operatorname{sen} \alpha z \left( 1 - \frac{\left(\alpha \frac{h}{2}\right)^4}{24} \right) .$$

Se  $\alpha h$  è abbastanza piccola (luce  $l$  notevole rispetto all'altezza  $h$ , e numero d'ordine  $m$  dell'onda non troppo elevato) si può scrivere

$$\sigma_y = -\frac{a_m}{b} \operatorname{sen} \alpha z$$

e cioè in lastre con elevato rapporto  $l/h$  una distribuzione sui due bordi  $y = \pm h/2$  di carichi  $a_m = -q_m$  che non presenti variazioni molto rapide

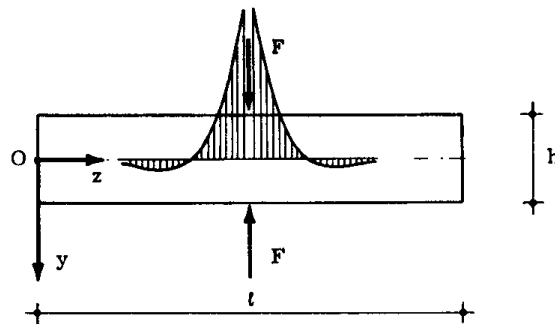


FIG. 6-29

con l'ascissa  $z$  si trasmette praticamente identica a se stessa lungo l'altezza. Ciò non accade se le variazioni del carico sono molto rapide, in particolare per un carico concentrato  $F$ .

Nella fig. 6-29 è riportato per tale caso, il diagramma della  $\sigma_y$  per

$y = 0$ . Essa si smorza rapidamente con la distanza da F; per  $l = \infty$  (Filon), è  $\sigma_y = 0$  ad una distanza da F pari a  $1,35 h/2$ , per distanze maggiori la  $\sigma_y$  è di trazione, e praticamente trascurabile.

### 7. Il problema della lastra-parete (silos).

Si presenta nel calcolo delle pareti dei silos il problema della lastra continua su infiniti appoggi equidistanti (fig. 6-30). Conviene scomporre i carichi agenti in condizioni simmetriche ed emisimmetriche rispetto all'asse orizzontale  $z$ ; per esempio, il carico della fig. 6-30 si scompone

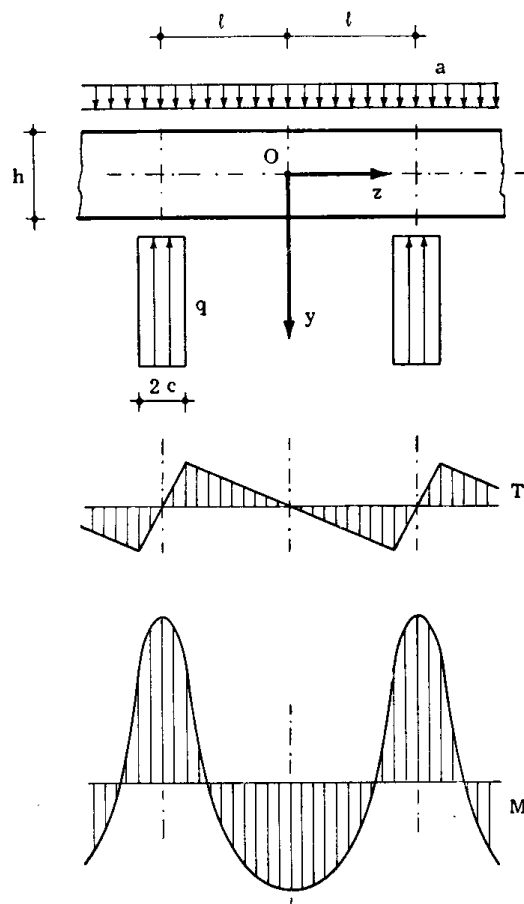
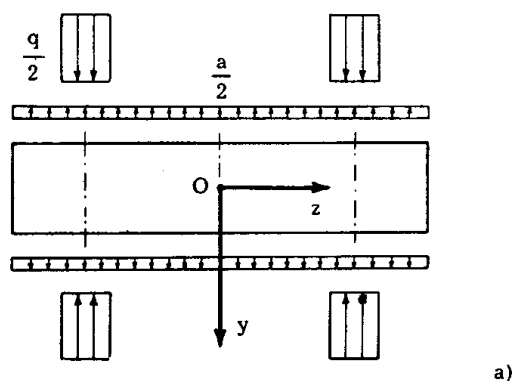


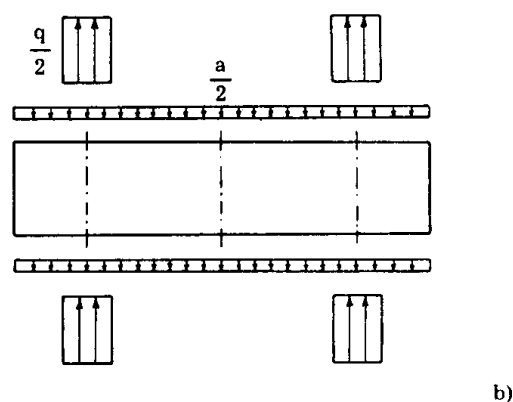
FIG. 6-30

nei tre della fig. 6-31 a, b, c, di cui il primo e il terzo simmetrici, il secondo emisimmetrico. Per tutte e tre queste condizioni di carico, poichè nei successivi campi  $l$  il carico si riproduce simmetricamente, è necessario adottare lo sviluppo in coseni (6-36). La soluzione è perciò fornita dalla  $(z')$ , in cui, come già fatto osservare,  $\sin \alpha z$  diviene  $\cos \alpha z$ , e  $\cos \alpha z$  diviene

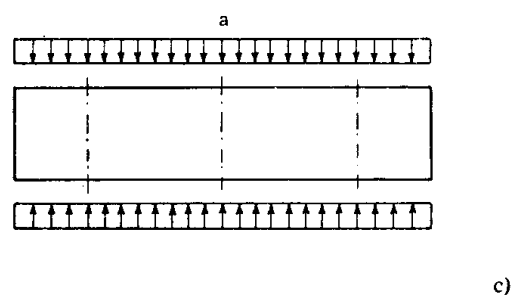
— sen  $\alpha z$ ; inoltre, la ( $z'$ ) deve essere, come i carichi agenti, simmetrica o emisimmetrica rispetto all'asse  $z$ . Si ha perciò, per carichi simmetrici a<sub>s</sub>



a)



b)



c)

FIG. 6-31

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \sum_1^{\infty} \cos \alpha_m z [C_{m1} \alpha_m^2 \cosh \alpha_m y + \\ &\quad + C_{m4} \alpha_m (2 \cosh \alpha_m y + \alpha_m y \sinh \alpha_m y)] \\ \sigma_y &= - \sum_1^{\infty} \alpha_m^2 \cos \alpha_m z [C_{m1} \cosh \alpha_m y + C_{m4} y \sinh \alpha_m y] \quad (i'') \\ \tau_{zy} &= \sum_1^{\infty} \alpha_m \sin \alpha_m z [C_{m1} \alpha_m \sinh \alpha_m y + \\ &\quad + C_{m4} (\sinh \alpha_m y + \alpha_m y \cosh \alpha_m y)] . \end{aligned}$$

Dalle (e'') si trae, ponendo  $a_m = -a_{ms}$  e  $q_m = a_{ms}$  (\*), e chiamando  $\lambda_m$  la quantità  $\alpha_m h/2$ ,

$$C_{m1} = - \frac{a_{ms}}{b \alpha_m^2} \frac{2 (\sinh \lambda_m + \lambda_m \cosh \lambda_m)}{2 \lambda_m + \sinh 2 \lambda_m} \quad (l'')$$

$$C_{m4} = \frac{a_{ms}}{b \alpha_m} \frac{2 \sinh \lambda_m}{2 \lambda_m + \sinh 2 \lambda_m} .$$

Per carichi emisimmetrici  $a_e$  la (z') fornisce

$$\sigma_z = \sum_1^{\infty} \cos \alpha_m z [C_{m2} \alpha_m^2 \sinh \alpha_m y +$$

$$+ C_{m3} \alpha_m (2 \sinh \alpha_m y + C_{m3} y \cosh \alpha_m y)]$$

$$\sigma_y = - \sum_1^{\infty} \alpha_m^2 \cos \alpha_m z [C_{m2} \sinh \alpha_m y + C_{m3} y \cosh \alpha_m y] \quad (m'')$$

$$\tau_{zy} = \sum_1^{\infty} \alpha_m \sin \alpha_m z [C_{m2} \alpha_m \sinh \alpha_m y +$$

$$+ C_{m3} (\cosh \alpha_m y + \alpha_m y \sinh \alpha_m y)] .$$

Dalle (e'') si trae, ponendo  $a_m = a_{me}$ ,  $q_m = a_{me}$ ,

$$C_{m2} = - \frac{a_{me}}{b \alpha_m^2} \frac{2 (\cosh \lambda_m + \lambda_m \sinh \lambda_m)}{2 \lambda_m - \sinh 2 \lambda_m} \quad (n'')$$

$$C_{m3} = \frac{a_{me}}{b \alpha_m} \frac{2 \cosh \lambda_m}{2 \lambda_m - \sinh 2 \lambda_m} .$$

Per la condizione di carico della fig. 6-31 a risulta, per le (6-41)

$$a_{os} = 0$$

$$a_{ms} = - \frac{q}{m \pi} \operatorname{sen} m \pi \frac{\ell - c}{\ell} ;$$

poichè per ragioni di equilibrio è

$$q = \frac{\ell}{c} a$$

si può scrivere

$$a_{ms} = - \frac{\ell a}{m \pi c} \operatorname{sen} m \pi \frac{\ell - c}{\ell} . \quad (o'')$$

(\*) Un carico simmetrico  $a_s$  si considera positivo se agisce secondo l'asse  $y$  per  $y = +h/2$ , contro l'asse  $y$  per  $y = -h/2$ ; un carico emisimmetrico  $a_e$  si considera positivo se agisce secondo l'asse  $y$ .





crescendo il rapporto  $h/2\ell$  l'andamento delle  $\sigma_z$  si allontana sempre più da quello lineare, specialmente in prossimità dell'appoggio; solo in corrispondenza della mezzeria, e per  $h/2\ell = 1/2$ , il diagramma delle  $\sigma_z$  è prossimo a quello di Navier. Si osserva anche che, per i valori  $h/2\ell > 1$ , il diagramma delle  $\sigma_z$  è pressochè indipendente dal rapporto  $h/2\ell$ ; ciò significa che se l'altezza  $h$  della lastra supera la luce  $2\ell$  del campo, solo

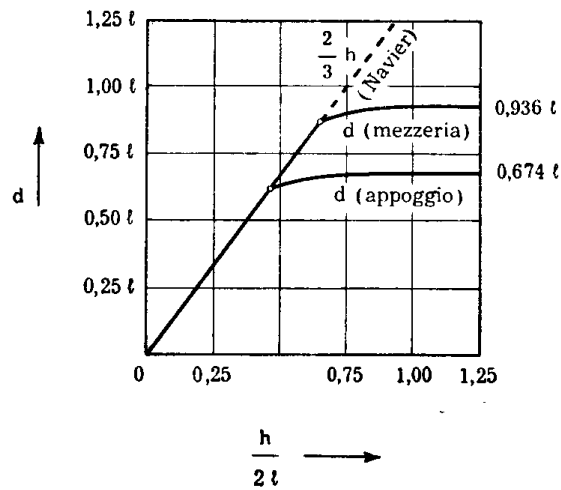


FIG. 6-33

una altezza pari a  $2\ell$  contribuisce alla resistenza, il resto serve solo a trasmettere il carico. Rispetto all'andamento lineare, le  $\sigma_z$  del bordo superiore diminuiscono, quelle del bordo inferiore aumentano, e questo fenomeno è tanto più sensibile quanto più forte è il rapporto  $h/2\ell$ . Il braccio  $d$  della coppia formata dalle risultanti  $R$  e  $-R$  delle  $\sigma_z$  d A positive e delle  $\sigma_z$  d A negative (*braccio della coppia interna*) che secondo Na-

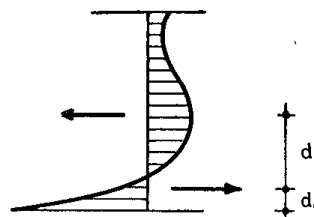


FIG. 6-34

vier sarebbe pari a  $2/3 h$ , e quindi proporzionale all'altezza della trave, tende invece, a parità di  $\ell$ , a stabilizzarsi all'aumentare di  $h$ ; per  $h/2\ell > 0,45$  sull'appoggio, e per  $h/2\ell > 0,65$  in mezzeria, può supporre  $d$  costante all'aumentare di  $h$ . Nella figura 6-33 sono riportati i valori di  $d$  in mezzeria e sull'appoggio in funzione del rapporto  $h/2\ell$ . Nella tabella (6-1) si consegnano i valori di  $d$  e  $d_0$  (fig. 6-34) in funzione del rapporto  $h/2\ell$  e del

TABELLA I

	$h = l$				$h = \frac{4}{3} l$				$2l \leq h < \infty$				
$c/l =$	1/2	1/5	1/10	1/20	1/2	1/5	1/10	1/20	1/2	1/5	1/10	1/20	
(1) $d =$	0.67	0.68	0.69	0.69	0.83	0.88	0.89	0.89	0.87	0.92	0.93	0.93	$\cdot l$
$d_o =$	0.11	0.13	0.13	0.13	0.11	0.12	0.12	0.13	0.11	0.12	0.12	0.12	$\cdot l$
(2) $d =$	0.67	0.64	0.62	0.60	0.83	0.69	0.66	0.62	0.87	0.74	0.68	0.61	$\cdot l$
$d_o =$	0.11	0.06	0.04	0.02	0.11	0.06	0.04	0.02	0.11	0.06	0.04	0.02	$\cdot l$

(1) in mezzeria della campata  
 (2) in asse all'appoggio

(da Schleicher)

rapporto  $c/l$ ; nella tabella (6-2) i valori di R nella mezzeria e sull'appoggio, in funzione del rapporto  $c/l$ , e per  $h/2l$  da 1 a  $\infty$ . Se il carico  $a$

TABELLA II

$c/l =$	1/2	1/5	1/10	1/20	1/ $\infty$	
in mezzeria della campata $R =$	0.144	0.171	0.176	0.177	0.178	$\cdot a l$
in asse all'appoggio $R =$	0.144	0.322	0.422	0.495	0.546	$\cdot a l$

(da Galli)

della fig. 6-30 agisce sul bordo inferiore (fig. 6-35), invece che su quello

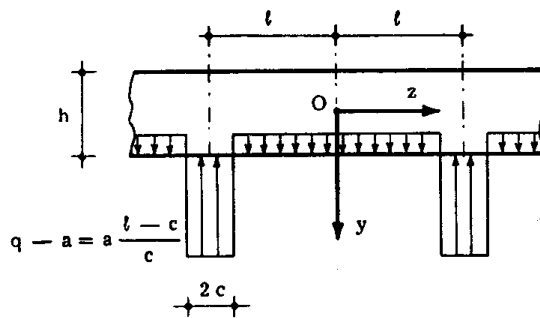


FIG. 6-35

superiore, basta sovrapporre alle forze già considerate un carico  $a_s = a/b$ ;

le  $\sigma_z$  e le  $\tau_{zy}$  prima determinate restano perciò invariate, mentre alle  $\sigma_y$  si sovrappone la trazione uniforme  $\sigma_y = a/b$ .

Ponendo  $c = l/2$ , la condizione di carico della fig. 6-35 si presenta come nella fig. 6-36; le altezze  $d$  e  $d_0$  della tabella (6-1) (per  $c/l = 1/2$ )

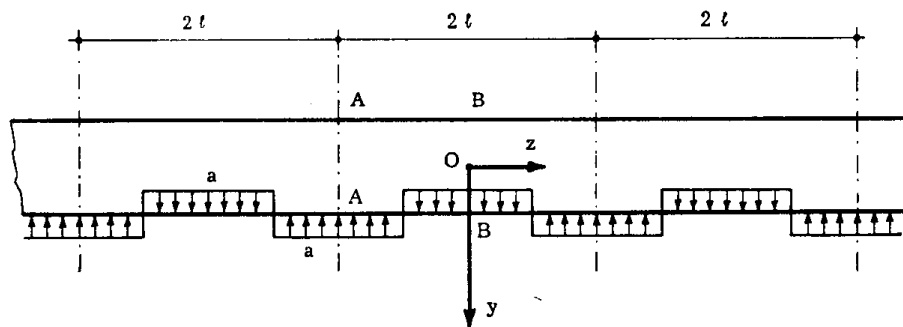


FIG. 6-36

sono le stesse per le sezioni come AA e BB. Se il carico della fig. 6-36 è realizzato con un carico uniforme  $a$  sul bordo superiore, ed un carico  $-2a$  in campi alterni di lunghezza  $l$  sul bordo inferiore, le  $d$  e  $d_0$  sono ancora quelle della tabella (6-1), e vanno valutate dal bordo inferiore; se invece il carico  $\pm a$  nei campi alterni di lunghezza  $l$  agisce sul bordo superiore, le  $d$  e  $d_0$  sono ancora quelle della tabella (6-1), ma vanno valutate dal bordo superiore. La già esaminata lastra su infiniti appoggi equidistanti, soggetta alternativamente al carico  $\pm a$  su ogni campata (fig. 6-37), si

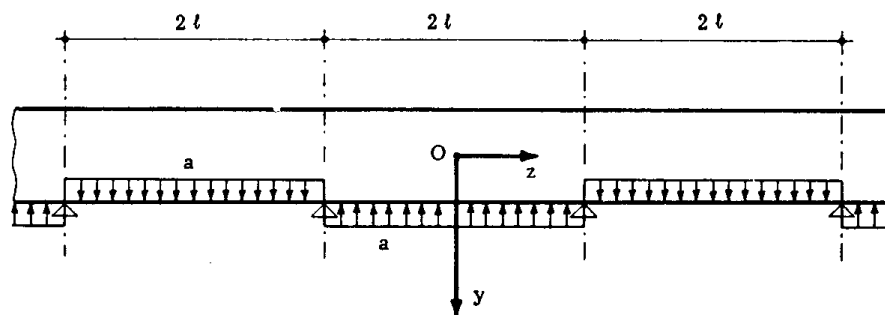


FIG. 6-37

riconduce alla fig. 6-36, ponendo  $2l$  al posto di  $l$ . Le distanze  $d$  e  $d_0$  della tabella (6-1) e la forza  $R$  della tabella (6-2) (sempre per  $c/l = 1/2$ ) sono in tal caso relativi alle mezzerie delle singole campate, e si ottengono moltiplicando i coefficienti forniti dalla tabella per  $2l$  invece che per  $l$ ; le tre colonne della tabella (6-1) corrispondono ai valori  $1/2$ ,  $2/3$ ,  $1$  di  $h/4l$ .

Per la condizione di carico della fig. 6-38, corrispondente grosso modo al caso del carico concentrato  $F = 2 c q$  in mezziera di ogni campata, dalla

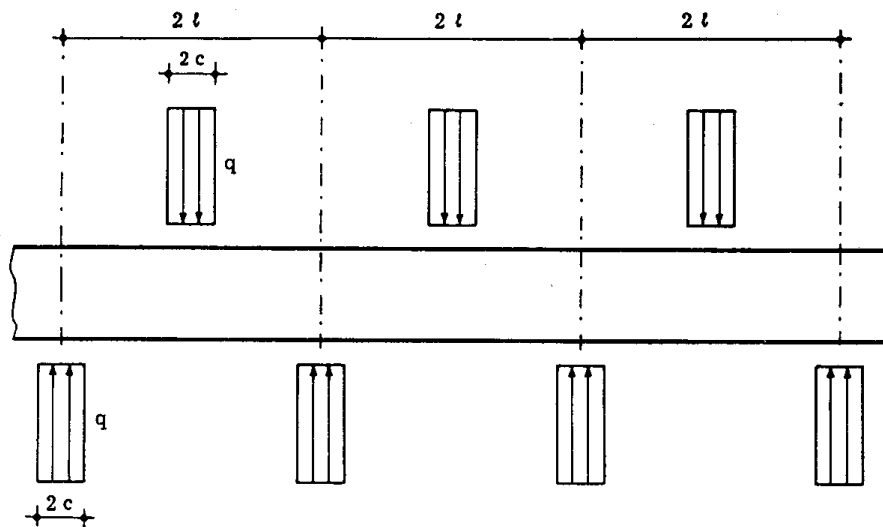


FIG. 6-38

tabella (6-3) si traggono i valori di  $d$  e  $d_o$ , uguali sull'appoggio e in mezziera.

TABELLA III

	$h = l$				$h = \frac{4}{3} l$				$2l \leq h < \infty$				
$c/l =$	1/2	1/5	1/10	1/20	1/2	1/5	1/10	1/20	1/2	1/5	1/10	1/20	
(1) $d =$	0.67	0.69	0.70	0.72	0.83	0.82	0.81	0.79	0.87	0.84	0.82	0.80	$\cdot l$
$d_o =$	0.11	0.08	0.05	0.03	0.11	0.07	0.04	0.03	0.11	0.07	0.04	0.03	$\cdot l$

(1) in mezziera della campata e in asse all'appoggio

(da Schleicher)

I risultati ottenuti per la lastra continua indefinita possono essere

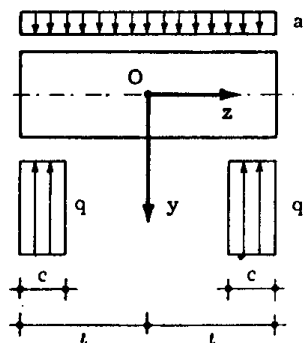


FIG. 6-39

sfruttati per la lastra di luce  $2l$  appoggiata alle estremità (fig. 6-39), il

cui stato tensionale differisce di poco da quello di una lastra continua indefinita soggetta nei successivi campi  $2\ell$  a condizioni di carico uguali a quella della fig. 6-39, moltiplicate per  $\pm 1$  (fig. 6-40). Infatti in tal caso

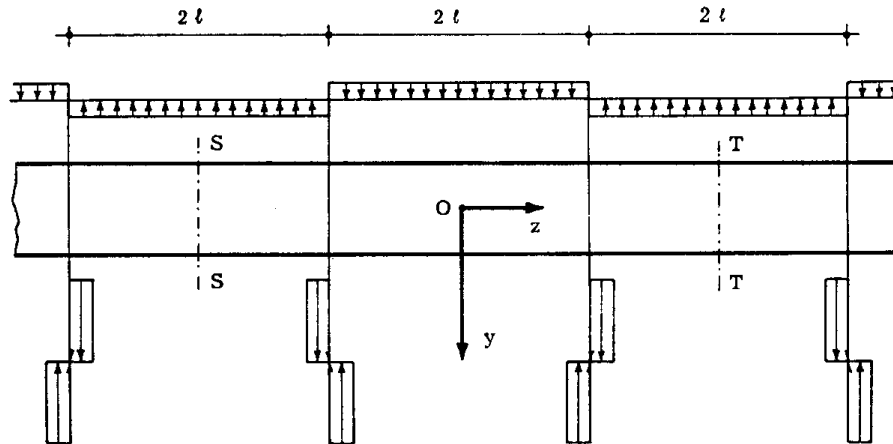


FIG. 6-40

sulle facce  $z = \pm \ell$  risulta, per ragioni di simmetria di struttura ed emi-simmetria di carico,  $\sigma_z = 0$ , e, per ragioni di equilibrio del tronco  $2\ell$ ,

$$b \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy} dy = 0 ;$$

per il principio di De Saint-Venant, il complesso delle  $\tau_{zy} dA$  sulla faccia  $z = \ell$  (come pure quello sulla faccia  $z = -\ell$ ) essendo in equilibrio non fa risentire i suoi effetti che a breve distanza dagli appoggi. Per  $c$  abbastanza piccolo, la situazione di carico della fig. 6-40 non differisce molto da quella riportata nella fig. 6-37; per  $c = 0$  addirittura coincidono. E' lecito perciò (*Dischinger*) ricavare  $d$  e  $d_0$  in mezzeria della trave appoggiata dalla tab. (6-1), tenendo conto, come già osservato per la fig. 6-37, che è necessario porre  $2\ell$  al posto di  $\ell$ .

### 8. La determinazione della funzione $\Phi$ attraverso il procedimento delle differenze finite.

La funzione di Airy può essere determinata con approssimazione attraverso un procedimento di carattere generale detto *delle differenze finite*. Si distenda sul piano  $yz$  una rete di rette parallele rispettivamente agli assi  $y$  e  $z$ , equidistanti di  $\Delta z$  secondo  $z$  e di  $\Delta y$  secondo  $y$ ; quasi sempre si assume  $\Delta z = \Delta y$ . Si consideri di questa maglia il generico nodo  $k$

(fig. 6-41) e quelli adiacenti di ordine 1 ( $i, \ell, k-1, k+1$ ), di ordine 2

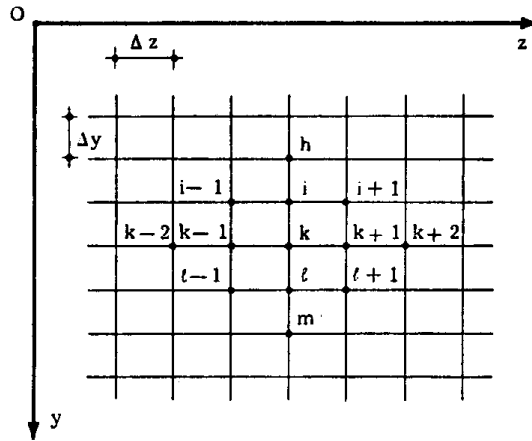


FIG. 6-41

( $h, m, k-2, k+2$ ), di ordine 1·2 ( $i-1, i+1, \ell-1, \ell+1$ ). Confrontando la derivata con il rapporto incrementale, si ha

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_k = \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_{k-1}}{2 \Delta z} \quad (p'')$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_k = \frac{\Phi_\ell - \Phi_i}{2 \Delta y} .$$

Ciò corrisponde (fig. 6-42) ad assimilare la  $\Phi(z)$  nel tratto  $k-1, k+1$  (e così la  $\Phi(y)$  nel tratto  $i, \ell$ ) ad una parabola quadratica; in tal

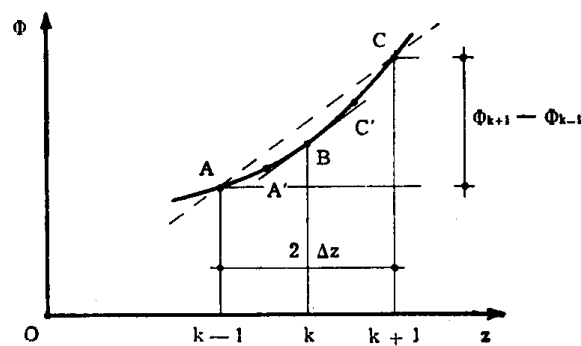


FIG. 6-42

caso infatti la tangente in B ( $z=k$ ) è parallela alla corda AC, e la prima delle (p'') è rispettata in rigore.

La derivata seconda  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$  in  $k$  è la derivata prima  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  della funzione inclinazione  $\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ . In corrispondenza del punto medio del segmento  $k-1, k$ , e cioè in  $A'$ , la  $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$  è fornita, nello stesso spirito dell'approssimazione fatta prima (\*), da  $\frac{\Phi_k - \Phi_{k-1}}{\Delta z}$ ; nel punto medio del segmento  $k, k+1$  e cioè in  $C'$  la  $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$  è invece data da  $\frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{\Delta z}$ ; se si assimila anche la  $\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$  nel tratto  $A'C'$  ad una parabola quadratica, può porsi

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_k = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_k = \frac{\varphi_{C'} - \varphi_{A'}}{\Delta z}$$

e perciò

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_k = \frac{\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}}{\Delta z^2}$$

con l'analogia

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_k = \frac{\Phi_t - 2\Phi_k + \Phi_i}{\Delta y^2}$$

La derivata seconda mista è fornita da

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}\right)_k = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_t - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_i}{2 \Delta y} = \frac{(\Phi_{t+1} - \Phi_{t-1}) - (\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1})}{4 \Delta z \Delta y}$$

e quindi

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}\right)_k = \frac{\Phi_{t+1} - \Phi_{t-1} - \Phi_{i+1} + \Phi_{i-1}}{4 \Delta z \Delta y}$$

---

(\*) Convienne calcolare la derivata prima in  $A'$  sulla distanza  $\Delta z$  invece che  $2 \Delta z$ , per conseguire una migliore approssimazione; ciò non era possibile nel calcolo della derivata prima in  $B$ , perchè i valori di  $\Phi$  in  $A'$  e  $C'$  non entrano in gioco.



Così pure si ha, per le derivate terze,

$$\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}\right)_k = \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_{k+1} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_{k-1}}{2 \Delta z} = \frac{(\Phi_{k+2} - 2\Phi_{k+1} + \Phi_k) - (\Phi_k - 2\Phi_{k-1} + \Phi_{k-2})}{2 \Delta z^3}$$

e quindi

$$\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}\right)_k = \frac{\Phi_{k+2} - 2\Phi_{k+1} + 2\Phi_{k-1} - \Phi_{k-2}}{2 \Delta z^3}$$

e analoga

$$\left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3}\right)_k = \frac{\Phi_m - 2\Phi_t + 2\Phi_i - \Phi_h}{2 \Delta y^3}$$

Per le derivate quarte si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4}\right)_k &= \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_{k+1} - 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_{k-1}}{\Delta z^2} = \\ &= \frac{(\Phi_{k+2} - 2\Phi_{k+1} + \Phi_k) - 2(\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}) + (\Phi_k - 2\Phi_{k-1} + \Phi_{k-2})}{\Delta z^4} \end{aligned}$$

da cui

$$\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4}\right)_k = \frac{\Phi_{k+2} - 4\Phi_{k+1} + 6\Phi_k - 4\Phi_{k-1} + \Phi_{k-2}}{\Delta z^4}$$

e analogamente

$$\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}\right)_k = \frac{\Phi_m - 4\Phi_t + 6\Phi_k - 4\Phi_i + \Phi_h}{\Delta y^4};$$

così pure si ha

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^2 \partial y^2}\right)_k &= \frac{\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_t - 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_k + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_i}{\Delta y^2} = \\ &= \frac{(\Phi_{t+1} - 2\Phi_t + \Phi_{t-1}) - 2(\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}) + (\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1})}{\Delta z^2 \Delta y^2} \end{aligned}$$

da cui

$$\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^2 \partial y^2}\right)_k = \frac{4\Phi_k - 2(\Phi_{k+1} + \Phi_{k-1} + \Phi_t + \Phi_i) + (\Phi_{i-1} + \Phi_{i+1} + \Phi_{t+1} + \Phi_{t-1})}{\Delta z^2 \Delta y^2}$$

Riassumendo, si ha

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_k = \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_{k-1}}{2 \Delta z}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_k = \frac{\Phi_t - \Phi_i}{2 \Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)_k = \frac{\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}}{\Delta z^2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)_k = \frac{\Phi_t - 2\Phi_k + \Phi_i}{\Delta y^2}$$

(42)

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y}\right)_k = \frac{\Phi_{t+1} - \Phi_{t-1} - \Phi_{i+1} + \Phi_{i-1}}{4 \Delta z \Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4}\right)_k = \frac{\Phi_{k+2} - 4\Phi_{k+1} + 6\Phi_k - 4\Phi_{k-1} + \Phi_{k-2}}{\Delta z^4}$$

$$\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4}\right)_k = \frac{\Phi_m - 4\Phi_t + 6\Phi_k - 4\Phi_i + \Phi_h}{\Delta y^4}$$

$$\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^2 \partial y^2}\right)_k = \frac{4\Phi_k - 2(\Phi_{k+1} + \Phi_{k-1} + \Phi_t + \Phi_i) + (\Phi_{i-1} + \Phi_{i+1} + \Phi_{t+1} + \Phi_{t-1})}{\Delta z^2 \Delta y^2}$$

La relazione di Laplace

$$\Delta_4 \Phi = 0$$

nel punto k generico si scrive, attraverso le (6-42), e ponendo  $\Delta z = \Delta y$ ,

$$20\Phi_k - 8(\Phi_{k-1} + \Phi_t + \Phi_{k+1} + \Phi_i) + 2(\Phi_{i-1} + \Phi_{t-1} + \Phi_{t+1} + \Phi_{i+1}) + \Phi_{k-2} + \Phi_m + \Phi_{k+2} + \Phi_h = 0 \quad (43)$$

Le condizioni ai limiti (e) si scrivono, per lastra rettangolare (\*)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= p_y & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} &= -p_z & \text{per } y &= \frac{h}{2} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= -p_y & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} &= p_z & \text{per } y &= -\frac{h}{2} \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= p_z & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} &= -p_y & \text{per } z &= l \\
 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= -p_z & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} &= p_y & \text{per } z &= -l .
 \end{aligned} \tag{44}$$

Più spesso, le condizioni ai limiti si utilizzano nella forma delle (6-22). Con riferimento alle lastre rettangolari, se le linee orizzontali sono  $n$ ,

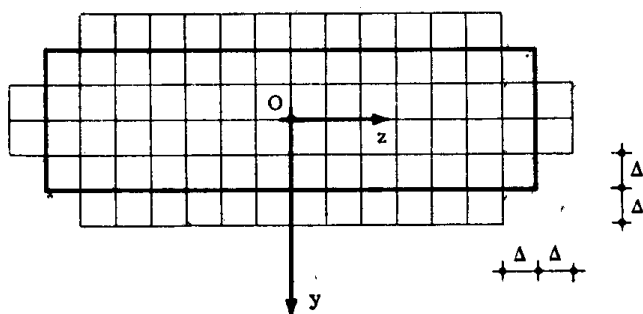


FIG. 6-44

e quelle verticali  $m$ , occorre considerare, oltre agli  $n \cdot m$  nodi interni alla lastra (fig. 6-44), quelli  $2n + 2m + 4$  del contorno, e quelli  $2n + 2m + 8$

(\*) Attesi i versi di  $n$  e  $t$  sui quattro bordi, si ha (fig. 6-43)

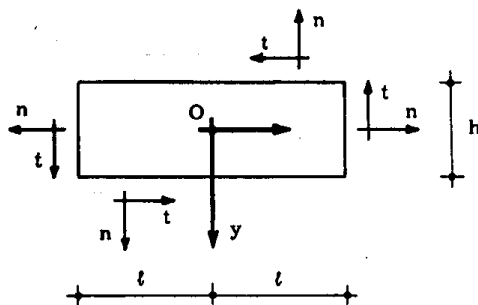


FIG. 6-43

	$y = h/2$	$y = -h/2$	$z = l$	$z = -l$
$\frac{dy}{ds}$	0	0	-1	1
$\frac{dz}{ds}$	1	-1	0	0

appartenenti alle linee esterne alla lastra, parallele ai contorni, e distanti da questi dello stesso passo  $\Delta$  della maglia. Le incognite sono i valori di  $\Phi$  in corrispondenza di questi nodi; le equazioni che si possono scrivere sono le  $m \cdot n$  (6-43) e le  $2(2n + 2m) + 12$  del tipo (6-22) o (6-44); si perviene così ad un sistema di  $m n + 4(m + n) + 12$  equazioni algebriche lineari non tutte omogenee, che fornisce i valori di  $\Phi$  nei nodi della maglia. Da questi, attraverso le 3<sup>a</sup>, 4<sup>a</sup> e 5<sup>a</sup> delle (6-42) si risale alle tensioni  $\sigma_z$   $\sigma_y$   $\tau_{zy}$ .

Se si rinuncia a calcolare il valore di  $\tau_{zy}$  nei due punti interni più vicini ai vertici, il numero di equazioni si riduce di 12, perchè non occorre più considerare i vertici della lastra ed i due punti ad essi vicini sulle linee esterne.

*Esempio.*

Si prenda in esame la lastra rettangolare della fig. 6-45, in cui il rap-

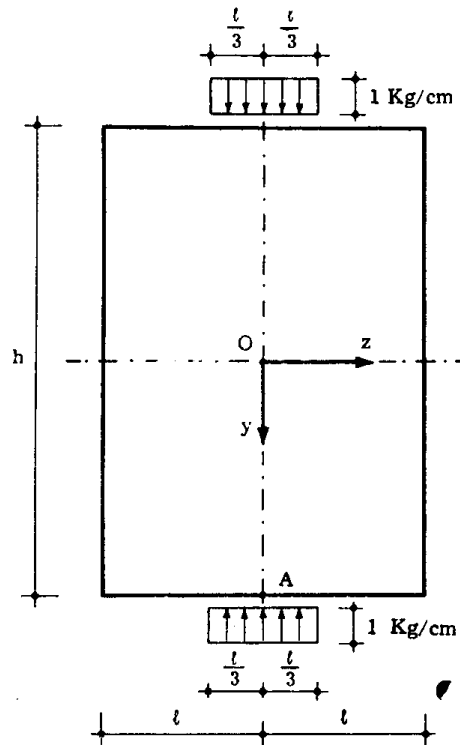


FIG. 6-45

porto dei lati  $\frac{h}{2l}$  sia pari a  $\frac{5}{3}$ , di spessore unitario (1 cm) e caricata come risulta dalla figura stessa.

Assumendo come punto A il punto comune al semiasse  $y$  positivo e al contorno, la  $\Phi$  risulta simmetrica, com'è facile intuire (e come in rigore può dimostrarsi), sia rispetto all'asse  $y$  che all'asse  $z$ ; ci si limita, quindi, a studiare un solo quarto di lastra. Scelto ad esempio quello già-

cente nel quadrante  $y \geq 0, z \leq 0$ , si traccia (fig. 6-46) su di esso un reticolo di passo  $\Delta z = \Delta y = \Delta = \frac{h}{10} = \frac{l}{3}$  e se ne numerano i nodi.

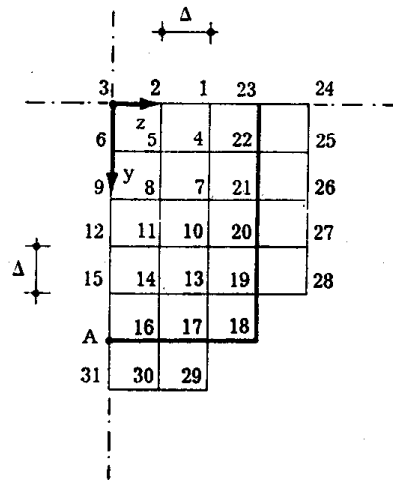


FIG. 6-46

Con riferimento alle condizioni al contorno la prima delle (6-22) fornisce, per i nodi A, 16, ....., 23:

$$\Phi_A = 0$$

$$\Phi_{16} = -1 \cdot \Delta \cdot \frac{\Delta}{2} = -0,5 \Delta^2$$

$$\Phi_{17} = -1 \cdot \Delta \cdot \frac{3}{2} \Delta = -1,5 \Delta^2$$

$$\Phi_{18} = -1 \cdot \Delta \cdot \frac{5}{2} \Delta = -2,5 \Delta^2$$

$$\Phi_{19} = \dots = \Phi_{23} = \Phi_{18} = -2,5 \Delta^2 .$$

La relazione  $\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -S_A^P$ , scritta alle differenze finite (v. le 6-42), porge, per gli stessi nodi:

$$\Phi_{31} = \Phi_{15}$$

$$\Phi_{30} = \Phi_{14}$$

$$\Phi_{29} = \Phi_{13}$$

$$\Phi_{28} = \Phi_{13} - 2 \Delta^2$$

$$\Phi_{27} = \Phi_{10} - 2 \Delta^2$$

$$\Phi_{26} = \Phi_7 - 2 \Delta^2$$

$$\Phi_{25} = \Phi_4 - 2 \Delta^2$$

$$\Phi_{24} = \Phi_1 - 2 \Delta^2 .$$

TABELLA IV

COEFFICIENTI

	$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$a_{i4}$	$a_{i5}$	$a_{i6}$	$a_{i7}$	$a_{i8}$	$a_{i9}$	$a_{i10}$	$a_{i11}$	$a_{i12}$	$a_{i13}$	$a_{i14}$	$a_{i15}$	$b_i$
1	21	— 8	1	— 16	4		2									— 8
2	— 8	21	— 8	4	— 16	4		2								2,5
3	2	— 16	20		8	— 16			2							
4	— 8	2		22	— 8	1	— 8	2		1						— 8
5	2	— 8	2	— 8	22	— 8	2	— 8	2		1					2,5
6		4	— 8	2	— 16	21		4	— 8			1				
7	1			— 8	2		21	— 8	1	— 8	2		1			— 8
8		1		2	— 8	2	— 8	21	— 8	2	— 8	2		1		2,5
9			1		4	— 8	2	— 16	20		4	— 8			1	
10				1			— 8	2		21	— 8	1	— 8	2		— 6,5
11					1		2	— 8	2	— 8	21	— 8	2	— 8	2	3
12						1		4	— 8	2	— 16	20		4	— 8	
13							1			— 8	2		22	— 8	1	— 19
14								1		2	— 8	2	— 8	22	— 8	1,5
15									1		4	— 8	2	— 16	21	2

INOINVADE

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \Phi_j = b_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n)$$

Tenendo conto delle precedenti condizioni, i rimanenti valori incogniti di  $\Phi$  sono, come mostra la fig. 6-47, quelli nei quindici nodi interni del

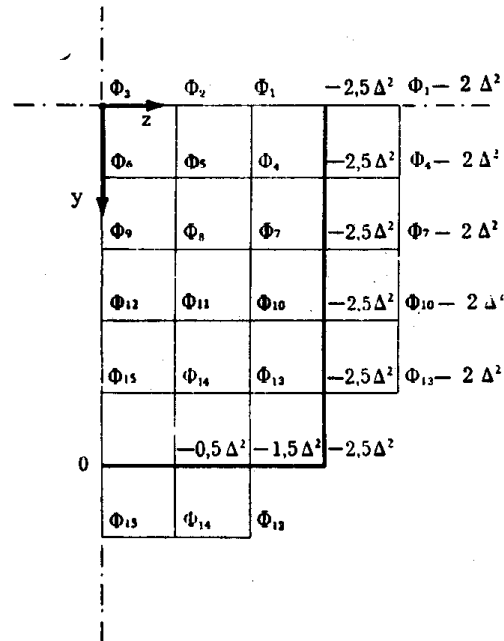


FIG. 6-47

reticolo. Le equazioni risolventi sono del tipo (6-43), scritte in corrispondenza degli stessi nodi.

Il sistema risultante, se

$$\sum_1^n a_{ij} \Phi_j = b_i$$

è la generica equazione, ha la matrice riportata in tabella (6-4), e le sue radici sono quelle della tabella (6-5) (si osservi che tanto i termini noti

TABELLA V

k	1	2	3	4	5
$\Phi_k$	-1,6388132	-1,0838930	-0,88996635	-1,6283693	-1,0567114
k	6	7	8	9	10
$\Phi_k$	-0,85465019	-1,5965820	-0,97189406	-0,74302305	-1,5465033
k	11	12	13	14	15
$\Phi_k$	-0,82603276	-0,54375644	-1,4985874	-0,63856672	-0,26299000

del sistema quanto le sue radici sono a meno di  $\Delta^2$ ). La fig. 6-48 effica-

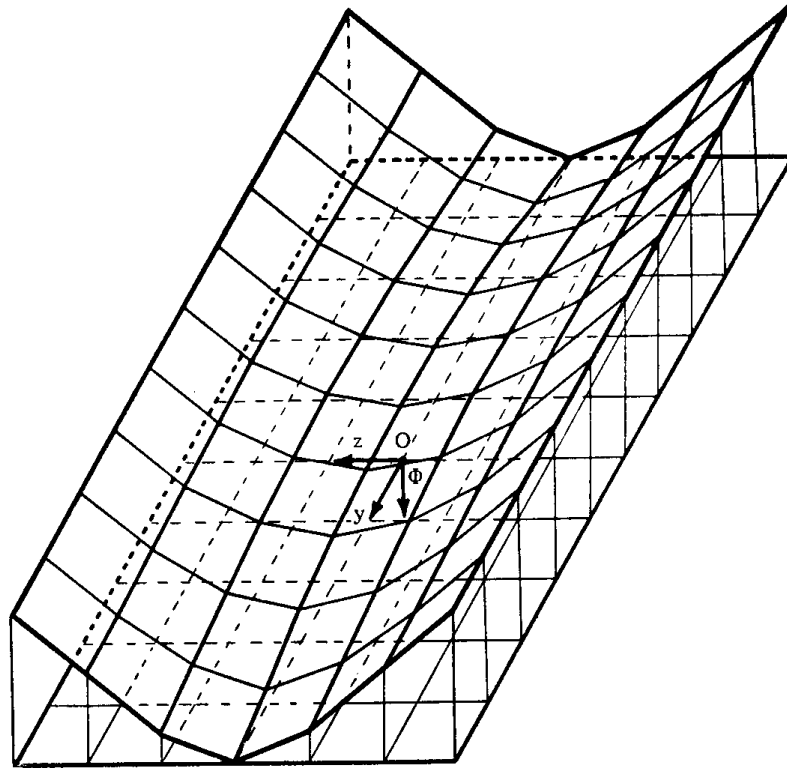


FIG. 6-48

cemente rappresenta la superficie  $\Phi(y, z)$  nel dominio rettangolare in esame.

Le componenti di tensione, fornite dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_k &= \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)_k = \frac{\Phi_i - 2\Phi_k + \Phi_1}{\Delta^2} \\
 (\sigma_y)_k &= \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_k = \frac{\Phi_{k+1} - 2\Phi_k + \Phi_{k-1}}{\Delta^2} \\
 (\tau_{zy})_k &= - \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial y} \right)_k = - \frac{(\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}) - (\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1})}{4\Delta^2},
 \end{aligned}$$

sono state calcolate con i dati di tab. (6-5), avuto riguardo della fig. 6-47. I valori ottenuti in kg/cm sono quelli della tabella (6-6); da essa si traggono poi i diagrammi di fig. 6-49 a, b, c, relativi alle  $\sigma_z$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{zy}$  rispettivamente.

E' utile osservare che, qualora siano  $a$  (kg/cm) l'intensità del carico agente sulla lastra e  $b$  (cm) lo spessore, i valori di  $\Phi$  e quelli delle  $\sigma$  innanzi calcolati vanno moltiplicati per  $a/b$ .



TABELLA VI

<b>k</b>	<b>A</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
$(\sigma_z)_k$	-0,5260	0,0208	0,0544	0,0706	0,0214	0,0576
$(\sigma_y)_k$	-1,0000	-0,3063	-0,3613	-0,3878	-0,2999	-0,3697
$(\tau_{zy})_k$	0	0	0	0	0,0280	0,0262
<b>k</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
$(\sigma_z)_k$	0,0764	0,0183	0,0611	0,0875	-0,0022	0,0415
$(\sigma_y)_k$	-0,4040	-0,2783	-0,3962	-0,4574	-0,2330	-0,4383
$(\tau_{zy})_k$	0	0,0577	0,0573	0	0,0833	0,0955
<b>k</b>	<b>12</b>	<b>13</b>	<b>14</b>	<b>15</b>	<b>16</b>	<b>17</b>
$(\sigma_z)_k$	0,0816	-0,0493	-0,0488	-0,0178	-0,2772	0,0028
$(\sigma_y)_k$	-0,5644	-0,1414	-0,4844	-0,7512	-0,5000	0
$(\tau_{zy})_k$	0	0,0815	0,1243	0	0	0
<b>k</b>	<b>18</b>	<b>19</b>	<b>20</b>	<b>21</b>	<b>22</b>	<b>23</b>
$(\sigma_z)_k$	0	0	0	0	0	0
$(\sigma_y)_k$	0	0,0028	-0,0930	-0,1932	-0,2568	-0,2776
$(\tau_{zy})_k$	0	0	0	0	0	0

Allo scopo di valutare i risultati ottenuti, si procede ora alla verifica dell'equilibrio puntuale.

Le equazioni indefinite che, per forze di massa trascurabili, si scrivono:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 ,$$

assumono, alle differenze finite, la forma:

$$(\sigma_z)_{k+1} - (\sigma_z)_{k-1} + (\tau_{zy})_t - (\tau_{zy})_i = 0$$

$$(\tau_{zy})_{k+1} - (\tau_{zy})_{k-1} + (\sigma_y)_t - (\sigma_y)_i = 0 .$$

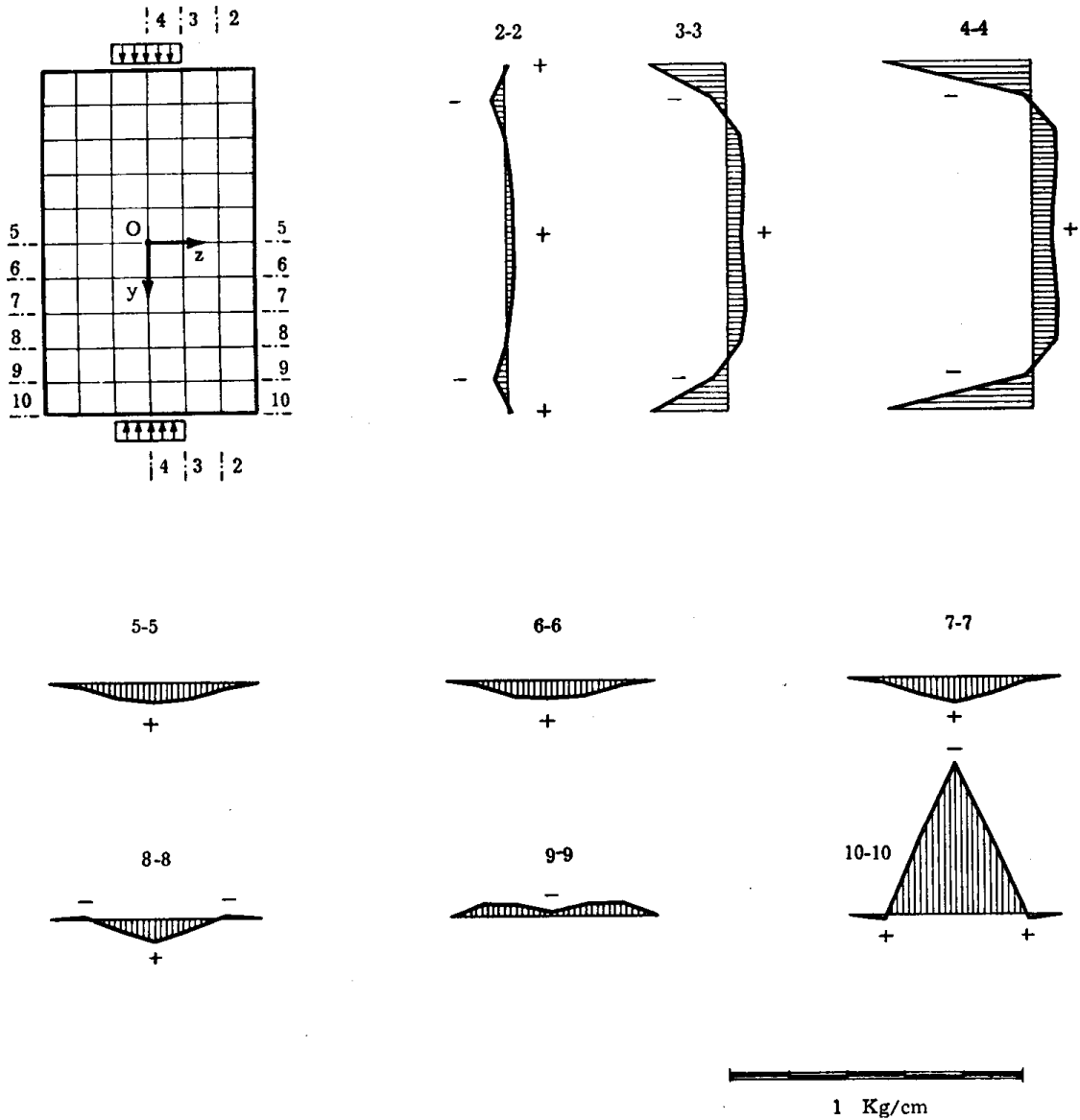


FIG. 6-49 a

Scelti tre nodi, diversamente ubicati nel reticolo, si ha:

Nodo 4

$$(\sigma_z)_{22} - (\sigma_z)_5 + (\tau_{zy})_7 - (\tau_{zy})_1 = 0$$

$$0,0577 - 0,0576 = 0,0001 \approx 0$$

$$\begin{aligned}
 (\tau_{zy})_{22} - (\tau_{zy})_5 + (\sigma_y)_7 - (\sigma_y)_1 &= 0 \\
 - 0,0262 - 0,2783 + 0,3063 &= 0,0018 \approx 0
 \end{aligned}$$

Nodo 8

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_7 - (\sigma_z)_9 + (\tau_{zy})_{11} - (\tau_{zy})_5 &= 0 \\
 0,0183 - 0,0875 + 0,0955 - 0,0262 &= 0,0001 \approx 0
 \end{aligned}$$

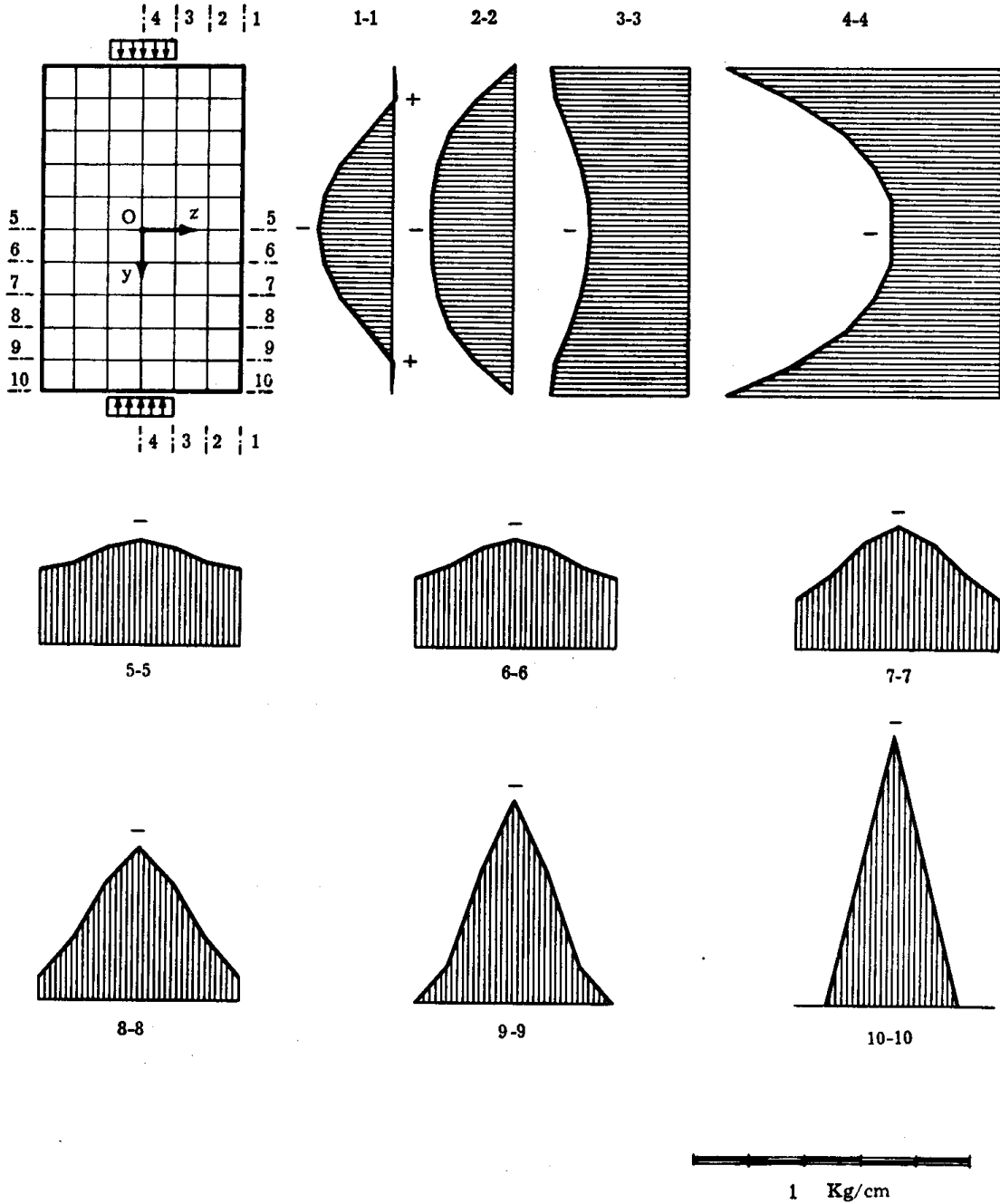


FIG. 6-49 b

$$\begin{aligned}
 (\tau_{zy})_7 - (\tau_{zy})_9 + (\sigma_y)_{11} - (\sigma_y)_5 &= 0 \\
 + 0,0577 - 0,4383 + 0,3697 &= - 0,0109 \approx 0
 \end{aligned}$$

Nodo 13

$$\begin{aligned}
 (\sigma_z)_{19} - (\sigma_z)_{14} + (\tau_{zy})_{17} - (\tau_{zy})_{10} &= 0 \\
 + 0,0488 - 0,0833 &= - 0,0345 \neq 0 \\
 (\tau_{zy})_{19} - (\tau_{zy})_{14} + (\sigma_y)_{17} - (\sigma_y)_{10} &= 0 \\
 - 0,1243 + 0,2330 &= 0,1087 \neq 0
 \end{aligned}$$

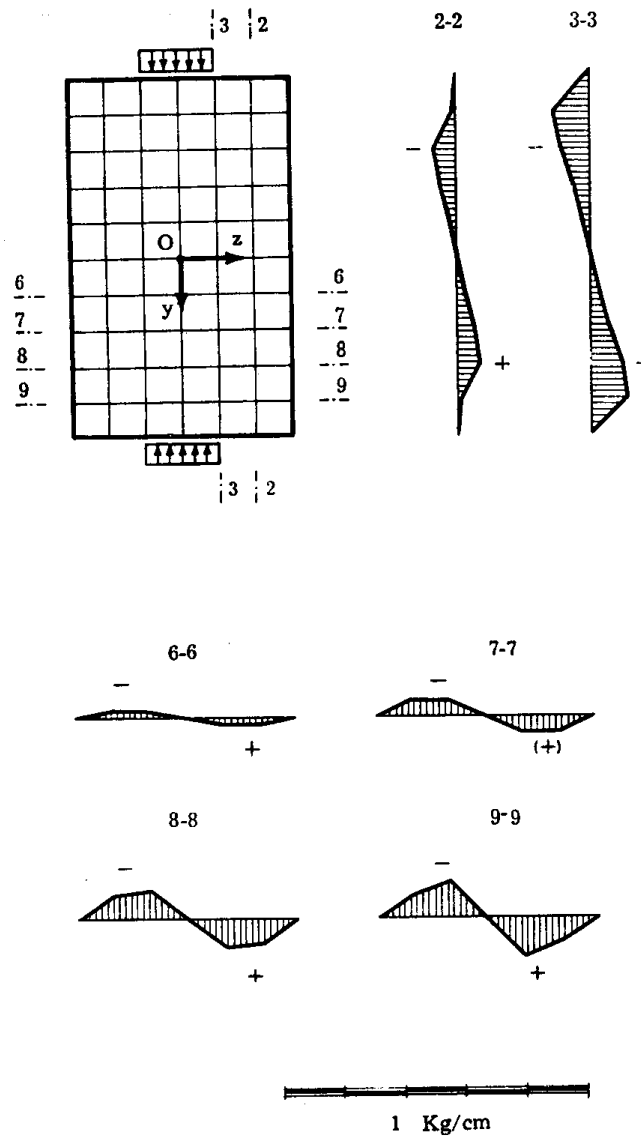


FIG. 6-49 c

Si nota che solo nel nodo 13, prossimo al bordo carico, l'equilibrio è mal verificato. Se ne può individuare la causa nel ridotto numero di

dividenti verticali cui consegue l'andamento, completamente inattendibile, di  $\sigma_y$  sul contorno inferiore (fig. 6-49 b). Infatti nel nodo 16 l'equazione ai limiti

$$(\sigma_y)_{16} = (p_y)_{16}$$

è ben lungi dall'esser soddisfatta, avendosi:

$$(\sigma_y)_{16} = -0,5 \text{ kg cm}^{-2}$$

$$(p_y)_{16} = -1 \quad \gg$$

Ai nodi immediatamente vicini, che maggiormente risentono di tale errore, ne deriva la mancanza dell'equilibrio puntuale, pur essendo ottimamente verificato, sezione per sezione, l'equilibrio globale, il che è di immediata verifica.

Per completezza, si vuole ora procedere al tracciamento delle linee isostatiche, e ciò verrà fatto utilizzando un metodo diverso da quelli a suo tempo illustrati (Cap. II).

Si introduca una coppia di assi  $y'$ ,  $z'$ , paralleli ed equiversi ad  $y$ ,  $z$ , e con l'origine nel generico punto P della lastra. Se  $\sigma_z$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{zy}$  sono le componenti speciali di tensione in P, l'equazione delle coniche di tensione va ivi scritta:

$$\sigma_z z'^2 + \sigma_y y'^2 + 2 \tau_{zy} z' y' = \pm 1 .$$

L'equazione complessiva degli assi delle coniche, cioè delle direzioni principali di tensione (tangenti alle isostatiche in P), è la seguente (\*):

$$\tau_{zy} z'^2 - (\sigma_z - \sigma_y) z' y' - \tau_{zy} y'^2 = 0 ;$$

che, messa nella forma

$$\left(\frac{z'}{y'}\right)^2 - \frac{\sigma_z - \sigma_y}{\tau_{zy}} \left(\frac{z'}{y'}\right) - 1 = 0 ,$$

(\*) Data la conica

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + a_{22} y^2 + 2 a_{13} x + 2 a_{23} y + a_{33} = 0 ,$$

l'equazione complessiva degli assi è:

$$a_{12} (x - x_c)^2 - (a_{11} - a_{22}) (x - x_c) (y - y_c) - a_{12} (y - y_c)^2 = 0$$

con  $x_c$ ,  $y_c$  coordinate del centro C della conica.

porge:

$$\left. \begin{matrix} \left(\frac{z'}{y'}\right)_1 \\ \left(\frac{z'}{y'}\right)_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2 \tau_{zy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2 \tau_{zy}}\right)^2 + 1} .$$

I due valori innanzi trovati rappresentano i coefficienti angolari delle due rette

$$z' = m_1 y'$$

$$z' = m_2 y'$$

ortogonali tra loro (direzioni principali); dovrà pertanto aversi:

$$m_1 m_2 = -1 ,$$

e cioè

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} .$$

Basta, perciò, calcolare una sola radice, preferibilmente la maggiore

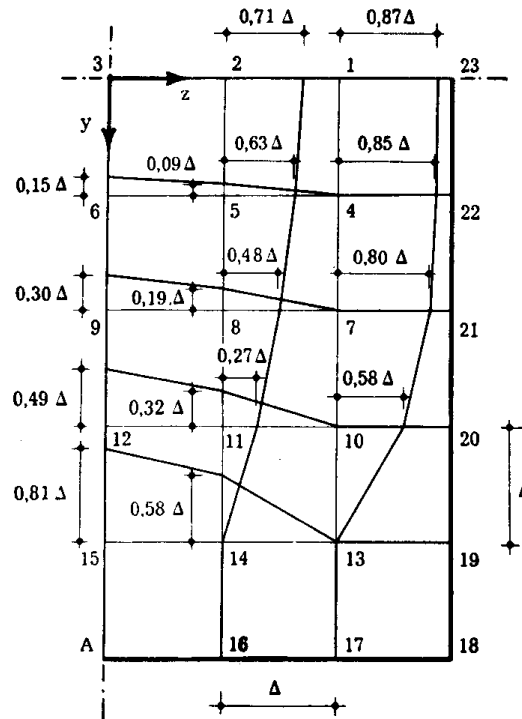


FIG. 6-50

per ridurre l'errore, e farne l'opposto dell'inverso, ottenendo così l'altra.

TABELLA VII

Punto	$\sigma_z$	$\sigma_y$	$\tau_{zy}$	$m_1$	$m_2$
23				$\infty$	0
1				$\infty$	0
2				$\infty$	0
22				$\infty$	0
4	0,0214	- 0,2999	0,0280	11,57	- 0,09
2-5	0,0573	- 0,3689	0,0238	17,96	- 0,06
21				$\infty$	0
7	0,0183	- 0,2785	0,0577	5,33	- 0,19
5-8	0,0604	- 0,3912	0,0514	8,89	- 0,11
20				$\infty$	0
10	- 0,0022	- 0,2330	0,0833	3,10	- 0,32
8-11	0,0478	- 0,4248	0,0833	5,85	- 0,17
19				$\infty$	0
13	- 0,0493	- 0,1414	0,0815	1,71	- 0,58
11-14	0,0036	- 0,4577	0,1076	4,35	- 0,23
18				$\infty$	0
17				$\infty$	0
16				$\infty$	0
10-20	0,0009	- 0,1518	0,0350	4,54	- 0,22
7-21	0,0037	- 0,2103	0,0115	18,65	- 0,05
4-22	0,0032	- 0,2092	0,0042	50,60	- 0,02
14	- 0,0488	- 0,4844	0,1243	3,77	- 0,27
10-11	0,0297	- 0,3830	0,0922	4,69	- 0,21
7-8	0,0406	- 0,3397	0,0575	6,77	- 0,15
4-5	0,0348	- 0,3257	0,0273	13,28	- 0,08
A				$\infty$	0
15				$\infty$	0
12				$\infty$	0
9				$\infty$	0
6				$\infty$	0

Il tracciamento delle isostatiche può essere eseguito a partire da un punto qualsiasi della lastra: nel caso in esame si è preferito partire dai bordi. Si avverte che, ogni qualvolta nel tracciamento di un segmento di isostatica si è giunti in un certo punto intermedio tra due nodi del reticolo, le locali componenti di tensione sono state calcolate per interpolazione lineare sui valori nei nodi adiacenti. La fig. 6-50 e la tabella (6-7) chiariscono ulteriormente il procedimento.