CAPITOLO V

EQUAZIONI DELL'EQUILIBRIO ELASTICO PER I CORPI ELASTICI ISOTROPI PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI PRINCIPIO DI KIRCHHOFF

1. Equazioni di Cauchy dell'equilibrio elastico.

Il problema principale della teoria dell'elasticità è quello di risalire alle componenti di tensione, in ciascun punto di un corpo qualsiasi, di cui siano assegnate le caratteristiche geometriche e fisiche, le sollecitazioni esterne ed i vincoli. Trattando, come si farà, dei materiali elastici nell'ambito della legge di Hooke, ed isotropi, le caratteristiche fisiche si riducono alle due costanti E ed $1/m$, variabili in genere con il punto; le equazioni cui si perverrà sono differenziali, e perciò valide nell'intorno del punto generico; in esso, per le piccole dimensioni, il materiale può considerarsi omogeneo. Le sollecitazioni esterne sono, al solito, le forze di massa di componenti XYZ riferite all'unità di volume, e le forze di superficie, da doversi sempre intendere come distribuite, e le cui componenti per unità di area si indicano con $p_x\, p_y\, p_z$.

Si possono assumere come incognite del problema le componenti dello spostamento u v w; da esse poi si risale per derivazione alle componenti della deformazione, e quindi a quelle di tensione. In questo caso le equazioni che forniscono le funzioni incognite u v w sono quelle indefinite dell'equilibrio (2-8), in cui le componenti di tensione siano espresse in funzione delle u, v, w. Dalla prima delle (4-9) si ha

$$\sigma_x = 2\,G \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Theta}{m-2}\right); \qquad \text{(a)}$$

la (a) può scriversi nell'ipotesi di piccolezza degli spostamenti, perchè la ε_x si è tradotta nella componente del primo ordine $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, trascurando quella del secondo. Per la stessa ipotesi σ_x, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e Θ sono calcolate per la stessa terna x y z. Dalle (4-10) si ha

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

La prima delle (2-8) si scrive perciò

$$2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{m-2}\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} + \frac{X}{G} = 0$$

e ancora

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0\,. \qquad \text{(b)}$$

Adottando il simbolo operatorio (operatore di Laplace)

$$\Delta_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$$

la (b), e le altre due analoghe, si scrivono

$$\Delta_2 u + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0$$

$$\Delta_2 v + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta_2 w + \frac{m}{m-2}\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0\,.$$

Le equazioni indefinite (5-1) sono dovute a *Cauchy* (*); esse per poter

---

(*) Derivando le (5-1) ordinatamente rispetto ad x y z, e sommando membro a membro, si ha

$$2\,\frac{m-1}{m-2}\,\Delta_2\Theta + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0\,.$$

Per forze di massa costanti al variare del punto, risulta

$$\Delta_2\Theta = 0\ ;$$

fornire la soluzione u v w nei vari casi particolari, debbono essere accoppiate alle condizioni ai limiti. In queste intervengono la configurazione della superficie del corpo, le forze applicate e i vincoli, e cioè i parametri che differenziano i vari casi particolari. Nei riguardi dei vincoli, la condizione più generale si traduce nell'obbligare un dato punto del corpo a giacere su una superficie fissa di equazione

$$f(x, y, z) = 0 \; ; \tag{c}$$

quindi le coordinate del punto prima e dopo la deformazione devono soddisfare la (c). Chiamando $u_P \, v_P \, w_P$ le componenti di spostamento del punto P in esame, deve essere

$$\begin{aligned} & f(x_P \; y_P \; z_P) = 0 \\ & f(x_P + u_P, \; y_P + v_P, \; z_P + w_P) = 0 \; . \end{aligned} \tag{d}$$

La seconda può scriversi, nell'ipotesi di piccolezza delle u, v, w,

$$f(x_P \, y_P \, z_P) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P u_P + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P v_P + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P w_P = 0 \; ;$$

da questa, e dalla prima delle (d), si ha

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P u_P + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P v_P + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P w_P = 0 \; ; \tag{2}$$

la (2) è una delle condizioni di compatibilità traducenti il rispetto dei

---

la Θ è perciò, in tal caso, armonica (si ricordi che una funzione $F(x\,y\,z)$ è armonica se soddisfa l'equazione di Laplace $\Delta_2 F = 0$).

Dalla prima delle (5-1) si ottiene, nella stessa ipotesi circa le forze di massa

$$\Delta_2 \, (\Delta_2 u) + \frac{m}{m-2} \, \Delta_2 \, \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0 \; ;$$

relazioni analoghe si ottengono dalla seconda e terza delle (5-1). Poichè è $\Delta_2 \Theta = 0$, risulta pure

$$\Delta_4 \, u = \Delta_4 \, v = \Delta_4 \, w = 0 \; ,$$

e cioè le componenti dello spostamento sono funzioni biarmoniche (si indica con $\Delta_4 F$ l'operatore $\Delta_2 (\Delta_2 F)$, e si chiama biarmonica una funzione $F(x\,y\,z)$ che soddisfa all'equazione $\Delta_4 F = 0$).

vincoli. Si verifica subito che se la superficie f è un piano, di equazione $ax + by + cz + d = 0$, la (5-2) si scrive

$$a\, u_p + b\, v_p + c\, w_p = 0 \;;$$

se il piano è proprio uno dei piani coordinati, ad esempio il piano $z = 0$, la (5-2) porge $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 1$, e quindi

$$w_p = 0 \;.$$

Si considerino tre superfici passanti per P, di equazioni

$$f(x, y, z) = 0 \;; \qquad g(x, y, z) = 0 \;; \qquad h(x, y, z) = 0 \;.$$

Se il punto P è vincolato alle tre superfici, le componenti dello spostamento in P soddisfano le tre condizioni

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x} u + \frac{\partial g}{\partial y} v + \frac{\partial g}{\partial z} w = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial x} u + \frac{\partial h}{\partial y} v + \frac{\partial h}{\partial z} w = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

ove sia le derivate che le u, v, w, sono da intendersi calcolate in P (per semplicità l'indice P si è omesso). Se il determinante delle (5-3) è diverso da zero, le u, v, w non possono che essere zero, e il punto P è fisso:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4}$$

Se il determinante (5-4) è nullo, vuol dire che è possibile una soluzione u, v, w, diversa da zero. Geometricamente la condizione $\Delta = 0$ significa che i piani tangenti alle tre superfici in P hanno una retta in comune, e la soluzione u, v, w deve soddisfare l'equazione di questa retta; il punto P è vincolato perciò a muoversi lungo questa retta, ed ha un grado di libertà, corrispondentemente al fatto che la soluzione u, v, w è definita a meno di una costante di proporzionalità.

Il determinante Δ può inoltre presentare caratteristica uno, cioè possono essere nulli tutti i suoi minori di ordine due; geometricamente ciò vuol dire che i tre piani tangenti in P coincidono e il punto P, vincolato a muoversi su questo piano, ha due gradi di libertà.

Se sono addirittura nulli tutti i termini di Δ, le equazioni di compatibilità sono soddisfatte per qualsiasi valore di u, v, w, e il punto P è libero (tre gradi di libertà).

Se i vincoli sono anelasticamente cedevoli, il punto P nel corpo deformato non giace sulla $f(x\,y\,z) = 0$, ma sulla $f(x\,y\,z) = k$.

La (2) si scrive quindi

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_P u_P + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_P v_P + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_P w_P = k \; . \tag{5}$$

La (1-2) non basta a definire il vincolo; infatti occorre precisare se lo stesso è privo o meno di attrito. Si faccia per ora l'ipotesi di vincoli lisci. Si sa dalla Meccanica Razionale che il vincolo liscio esplica una reazione concentrata diretta secondo la normale alla superficie di vincolo; la Meccanica però studia corpi indeformabili. Nel caso dei corpi (e delle superfici di appoggio) deformabili il problema si complica notevolmente poichè per la deformazione nell'intorno di P il contatto da puntuale diventa superficiale. Se perciò è ancora possibile accettare le condizioni di vincolo in un sol punto, non è certo lecito in rigore supporre la reazione in tale punto concentrata. Sono i cosiddetti *problemi di contatto*, nei quali si affrontano in rigore il fenomeno reale del contatto tra un corpo e la superficie di un altro corpo, la formazione della zona comune di contatto, e la distribuzione delle tensioni in tale superficie. Un procedimento approssimato può essere il seguente. Si suppone che la reazione di vincolo sia distribuita, con intensità r, su una zona ΔS piccola ma finita della superficie del corpo attorno al punto P, vincolato, definita per esempio da un quadrato o da un rettangolo di lati noti; la r si suppone che sia in ogni punto diretta, nel caso di vincoli lisci, secondo la normale alla superficie di vincolo in P, e che le sue componenti $r_x\, r_y\, r_z$ variino sulla ΔS secondo tre funzioni $\rho_x(x\,y\,z)$, $\rho_y(x\,y\,z)$, $\rho_z(x\,y\,z)$ tre volte derivabili; questo perchè a tali requisiti devono rispondere le $\varepsilon_i\, \gamma_{jk}$, e quindi le $\sigma_i\, \tau_{jk}$.

In ΔS quindi si ha, se c è una costante,

$$\begin{aligned}
\sigma_x\, \alpha_x + \tau_{yx}\, \alpha_y + \tau_{zx}\, \alpha_z &= c\, \rho_x \\
\tau_{xy}\, \alpha_x + \sigma_y\, \alpha_y + \tau_{zy}\, \alpha_z &= c\, \rho_y \\
\tau_{xz}\, \alpha_x + \tau_{yz}\, \alpha_y + \sigma_z\, \alpha_z &= c\, \rho_z
\end{aligned} \tag{6}$$

dove $\rho_x\, \rho_y\, \rho_z$ sono proporzionali alle derivate $\dfrac{\partial f}{\partial x}\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\ \dfrac{\partial f}{\partial z}$ in P. Le forze esterne e le reazioni di vincolo devono essere in equilibrio; sia s il numero di vincoli semplici, ciascuno espresso da una relazione del tipo (5-2), e t il numero delle parti del corpo unite, da tali vincoli, tra loro o con il suolo. Se è $6\, t = s$, le costanti c sono ottenibili con le sole $6\, t$ relazioni della statica; se $s > 6\, t$, le s costanti c sono legate dalle $6\, t$ relazioni, e di esse solo $s - 6\, t = i$ sono da determinarsi. Si possono assegnare ad arbitrio le i costanti *iperstatiche* c_i, risolvere il problema, ottenere le u v w in funzione delle c_i, e determinare queste ultime attraverso le i equazioni (5-2) scritte in corrispondenza dei vincoli iperstatici.

Nei riguardi delle forze applicate, le condizioni ai limiti sono le (2-6), in cui le componenti di tensione devono essere espresse in funzione delle componenti dello spostamento.

Anche le (5-6), per poter essere accoppiate alle (5-1), devono essere espresse in funzione delle u v w.

Nello scrivere le (5-1) si è fatta implicitamente l'ipotesi che le u v w siano due volte derivabili.

Le u v w che si traggono dalle (5-1), (5-2), (5-6) e (2-6) siano ad un sol valore; poichè sono anche continue, data la derivabilità, esse rispettano la congruenza interna, e verificando le (5-2) rispettano la congruenza esterna; esse cioè sono una terna *congruente*.

Le $\sigma_i\, \tau_{jk}$ che si traggono dalle u v w attraverso la (4-9) e (4-10) sono ad un sol valore, e le derivate prime delle $\sigma_i\, \tau_{jk}$ che compaiono nelle (2-8) esistono; se tali derivate sono anche continue, il rispetto delle (2-8), equivalenti alle (5-1), e delle (2-6), garantisce che le $\sigma_i\, \tau_{jk}$ sono in equilibrio con le forze esterne; in tal caso la terna u v w si dice *equilibrata*. Quindi se le u v w che si traggono dalle (5-1), (5-2), (5-6) e (2-6) sono ad un sol valore, e le derivate seconde che compaiono nella (5-1) sono continue, la terna u v w è *equilibrata e congruente*, e come tale è una possibile soluzione del problema.

L'uniformità delle u v w si può riconoscere direttamente, o anche attraverso l'uniformità delle sue derivate prime; se infatti queste (e cioè le $\sigma_i\, \tau_{jk}$) sono uniformi, e se le derivate seconde miste sono continue, questo basta per asserire che le u v w sono ad un sol valore, se il dominio è monoconnesso.

In domini pluriconnessi invece le u v w sono uniformi se, oltre alle suddette condizioni, si verificano le (1-a″); se cioè per ogni curva chiusa non riducibile —

basta considerare quelle tra loro non sovrapponibili per deformazione continua — si verifica

$$\oint \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) = 0 \tag{7}$$

e altre due analoghe in v e w.

Beninteso le u v w così ottenute sono vicine a quelle reali, ma non coincidono con esse, sia pure nell'ipotesi di un materiale che rispetti in rigore le (4-9) e (4-10); ciò per tutte le ipotesi fatte circa le u v w nel trarre le (5-1). Non è da meravigliarsi perciò se le (5-1), (5-2) e (2-6) non forniscono soluzione; sarebbe errato infatti dedurre, dall'esistenza ovvia delle u v w reali, quella delle soluzioni delle suddette equazioni.

Il problema esistenziale connesso con le (5-1) è estremamente arduo, e non è questa la sede per affrontarlo; si mostrerà però che, se soluzione esiste, essa è unica.

2. Equazioni di Beltrami dell'equilibrio elastico.

Si possono assumere come incognite del problema dell'equilibrio elastico le sei componenti speciali di tensione; queste devono soddisfare le equazioni indefinite dell'equilibrio (2-8), che però non sono sufficienti, essendo in numero minore delle funzioni che si ricercano. Le altre equazioni sono quelle di congruenza (1-33). Di esse non si è sentito il bisogno quando si sono scelte come incognite le u, v, w; nel caso in esame invece è necessario invocarle, poichè le componenti di tensione, e quindi quelle di deformazione, non possono definire una deformazione rispettante la congruenza interna se non sono verificate le (1-33). Nell'ipotesi di forze di massa costanti al variare del punto, derivando la prima delle equazioni indefinite (2-8) rispetto ad x, la seconda rispetto ad y, la terza rispetto a z, e sommando le prime due alla terza cambiata di segno, si ottiene

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \, \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} .$$

La prima delle (1-33) fornisce

$$2 \left(1 + \frac{1}{m}\right) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right) \sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right) \sigma_y - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \right] .$$

Dalle due relazioni ora scritte si trae

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{m}\left(-\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right).$$

Si può scrivere perciò

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\left[\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(\sigma_x+\sigma_y)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}\right]=\frac{1}{m}\,\Delta_2 T-\frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

da cui

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}\right]=\frac{1}{m}\,\Delta_2 T-\frac{1}{m}\,\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

da cui ancora

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\sigma_z=\left(1+\frac{1}{m}\right)\left(\Delta_2 T-\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{m}\left(\Delta_2 T-\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)=$$

$$=\Delta_2 T-\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\,. \tag{e}$$

Si ha così

$$\Delta_2 T-\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\,\sigma_z$$

$$\Delta_2 T-\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\,\sigma_y$$

$$\Delta_2 T-\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\,\sigma_x$$

da cui sommando,

$$3\,\Delta_2 T-\Delta_2 T=\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2 T$$

che importa

$$\Delta_2 T = 0 \ . \ (*)$$

La (e) si scrive perciò

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\,\sigma_z+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0 \ .$$

Dalle altre cinque equazioni di congruenza si ottengono le altre cinque equazioni di Beltrami; in complesso si ha

$$\begin{aligned}
&\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\,\sigma_x+\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=0\\
&\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\,\sigma_y+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0\\
&\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\,\sigma_z+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0\\
&\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\,\tau_{xy}+\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}=0\\
&\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\,\tau_{yz}+\frac{\partial^2 T}{\partial y\,\partial z}=0\\
&\left(1+\frac{1}{m}\right)\Delta_2\,\tau_{zx}+\frac{\partial^2 T}{\partial z\,\partial x}=0 \ . \ (**)
\end{aligned} \tag{8}$$

(*) Questo risultato può conseguirsi anche ricordando (vedi nota al n. 1 di questo capitolo) che per forze di massa costanti è $\Delta_2\Theta = 0$, e per la (4-7) è perciò anche $\Delta_2 T = 0$.

(**) La seconda e terza delle (5-8) si ottengono dalla prima permutando circolarmente gli indici. La quarta si trae dalla terza delle (1-33), che attraverso le (4-4) e (4-6) si scrive

$$2\frac{G}{E}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{m}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}\right]=\frac{\partial^2\tau_{zx}}{\partial z\,\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{zy}}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x\,\partial y}-\frac{1}{1+m}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2\tau_{zx}}{\partial z\,\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{zy}}{\partial z\,\partial x}-\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial z^2}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{m}}\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x\,\partial y}=-\Delta_2\tau_{yx}+\frac{\partial^2\tau_{yx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{yx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tau_{zx}}{\partial z\,\partial y}+\frac{\partial^2\tau_{zy}}{\partial z\,\partial x} \ .$$

Le sei equazioni (5-8) e le tre (2-8) sono le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico nelle componenti di tensione; poichè delle sei equazioni di congruenza solo tre sono indipendenti, anche delle nove equazioni (5-8) e (2-8) solo sei sono indipendenti; quindi in complesso si hanno sei equazioni indipendenti in sei funzioni incognite.

Alle (2-8) e (5-8) vanno accoppiate, per la risoluzione dei vari casi particolari, le condizioni ai limiti (2-6) e quelle di vincolo (5-2) e (5-6); le (5-2) devono essere modificate, introducendo le espressioni (1-r') delle u v w in funzione delle $\varepsilon_i \, \gamma_{jk}$ e quindi delle $\sigma_i \, \tau_{jk}$.

Le $\sigma_i \, \tau_{jk}$ che si ottengono dalle (2-8), (5-8), (2-6), (5-2) e (5-6) sono due volte derivabili; in tale ipotesi infatti si sono ricavate le (5-8). Se esse sono anche uniformi, il rispetto delle (2-6), (2-8) e (5-6) basta a garantire che le $\sigma_i \, \tau_{jk}$ sono in equilibrio con le forze esterne (§ 2-3). Le $\varepsilon_i \, \gamma_{jk}$ che si ricavano delle $\sigma_i \, \tau_{jk}$ sono due volte derivabili, e le derivate sono uniformi, poichè lo sono le funzioni di partenza; se le derivate secondo delle $\varepsilon_i \, \gamma_{jk}$, e cioè delle $\sigma_i \, \tau_{jk}$, sono derivabili, il rispetto delle (5-8), e cioè delle (1-33), basta a garantire la congruenza interna in domini monoconnessi, ed accoppiato alle (5-7) in domini pluriconnessi.

La congruenza esterna è rispettata perchè sono soddisfatte le (5-2). Può dirsi perciò che se le $\sigma_i \, \tau_{jk}$ che si ottengono dalle (2-8), (5-8), (2-6), (5-2) e (5-6) sono ad un sol valore, e se le loro derivate secondo sono derivabili, tale soluzione è *equilibrata e congruente* in domini monoconnessi, e quindi è una possibile soluzione del problema. Se il dominio è pluriconnesso, la $\sigma_i \, \tau_{jk}$ è soluzione congruente se, oltre alle suddette condizioni, sono verificate le (5-7).

In merito all'esistenza delle soluzioni delle (5-8), valgono le stesse considerazioni fatte per le (5-1).

Derivando la prima delle (2-8) rispetto ad y e la seconda rispetto ad x si ha (le forze di massa sono costanti)

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z \, \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \, \partial x} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial z \, \partial x} = 0 \, .$$

Si trae perciò

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right) \Delta_2 \, \tau_{xy} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \, \partial y} = 0$$

da cui, permutando circolarmente gli indici, si ottengono le ultime due delle (5-8).

3. Principio di sovrapposizione degli effetti.

Si consideri una struttura mono o pluriconnessa, costituita da materiale ad elasticità lineare, che segua cioè le (4-1); si faccia inoltre l'ipotesi che i vincoli siano privi di attrito, e che gli spostamenti siano comunque contenuti nel campo di validità dell'ipotesi di piccoli spostamenti. Le forze di massa siano nulle. Un insieme di forze superficiali p_2 (fig. 5-1)

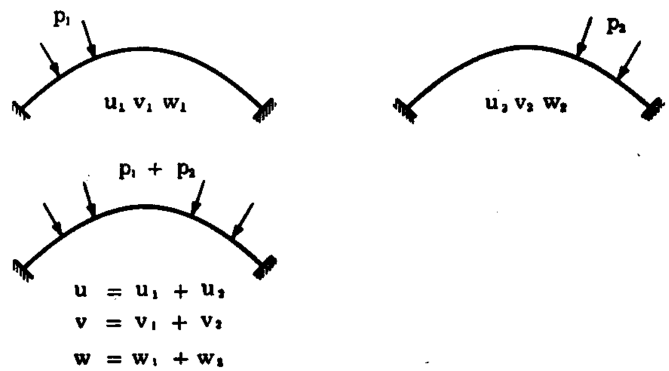


FIG. 5-1

provochi gli spostamenti $u_2\, v_2\, w_2$; non è ancora detto, si avverte, che tale soluzione sia unica.

Se precedentemente all'azione delle p_2, sulla struttura agivano altre forze p_1, gli spostamenti provocati dalle p_2 sono ancora $u_2\, v_2\, w_2$; infatti le costanti elastiche c_{ijhk} non sono influenzate dalle tensioni $\sigma_{1i}\, \tau_{1jk}$ connesse con le p_1, la configurazione della struttura non è variata dalle $u_1\, v_1\, w_1$ connesse con le p_1, ed i vincoli sono gli stessi che si avrebbero in assenza delle p_1. Si trae che gli effetti (spostamenti, e quindi tensioni) dovuti ad un insieme di forze superficiali sono indipendenti dalle forze superficiali eventualmente già agenti; gli effetti di più sistemi di forze superficiali sono somma di effetti che ciascun sistema provocherebbe da solo sulla struttura.

In relazione ai vincoli, si ricorda che se un punto P è vincolato ad una superficie $f(x\,y\,z) = 0$ senza attrito, basta una forza piccolissima, agente secondo il piano tangente alla superficie in P, ed applicata in P, a provocare lo spostamento di quest'ultimo; se c'è attrito, invece, il valore della forza tangente deve essere almeno uguale ad una certa percentuale della forza normale, e cioè la forza totale agente su P deve essere tangente od esterna al cono d'attrito per provocare spostamenti del punto P (fig. 5-2). Ciò significa che se la reazione agente su P — con le limitazioni già precisate al § 5-1 — è interna al cono d'attrito, il punto P è fisso (cerniera), se è tangente o esterna è mobile (appoggio). Sul piano pratico, occorre risolvere il sistema nell'ipotesi che P sia fisso, e calcolare la reazione in P; se essa è contenuta nel cono, tutto bene, in caso contrario occorre ripetere il calcolo nell'ipotesi di appoggio; la reazione corrispondente dovrà risultare contenuta sulla superficie del cono.

Se un vincolo è con attrito, può darsi che l'ipotesi di cerniera vada bene sia per il sistema p_1 che per quello $p_1 + p_2$, ma non per il solo sistema p_2; in tal caso il principio di sovrapposizione cadrebbe in difetto.

Per poter accettare tale principio in ogni caso, è necessario quindi che i vincoli siano lisci.

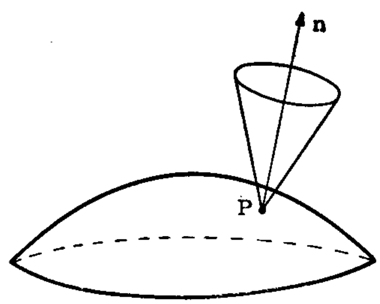


FIG. 5-2

Quanto sopra si evince anche dalle (5-1), (5-2), (5-6) e (2-6); essendo queste lineari, la $u_1 + u_2$, $v_1 + v_2$, $w_1 + w_2$ deve essere soluzione per $p_1 + p_2$; se i vincoli hanno attrito, ciò cade in difetto, perchè l'attrito porta ad una possibile variazione del tipo di vincolo, e quindi delle (5-2).

Per gli stessi motivi già esposti in questo paragrafo, la soluzione u v w connessa con le forze di massa in assenza di forze superficiali è sovrapponibile con le soluzioni connesse con le forze superficiali.

Tutto quanto sopra va sotto il nome di *principio di sovrapposizione degli effetti,* intendendo come tali gli spostamenti, e quindi le tensioni e le deformazioni.

4. Principio di Kirchhoff.

Si consideri un corpo mono o pluriconnesso, soggetto alle forze di massa X Y Z ed alle forze di superficie $p_x\, p_y\, p_z$ (ivi comprese le reazioni *r*). Sia u v w una terna di funzioni uniformi, continue con le loro derivate seconde, quindi internamente congruente, ma non necessariamente equilibrata; sia poi $\sigma_i\, \tau_{jk}$ una sestupla di funzioni uniformi e continue con le loro derivate prime, in equilibrio con le forze esterne, ma non necessariamente congruente.

Si consideri l'integrale

$$J = \int (p_x u + p_y v + p_z w) \, dS \; . \tag{f}$$

Per le (2-7) si può scrivere

$$J = \int_S (P \alpha_x + Q \alpha_y + R \alpha_z) \, dS$$

ove è

$$P = \sigma_x \, u + \tau_{yx} \, v + \tau_{zx} \, w$$

$$Q = \tau_{xy} \, u + \sigma_y \, v + \tau_{zy} \, w$$

$$R = \tau_{xz} \, u + \tau_{yz} \, v + \sigma_z \, w \; .$$

Per la formula di Gauss generalizzata si può scrivere

$$J = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \; ; \tag{g}$$

ciò perchè P Q R sono uniformi, e continue con le derivate che compaiono nella (g), come dalle ipotesi già fatte all'inizio del paragrafo.

Si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = {} & u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) + \\ & + v \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) + \\ & + \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_{yz} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ & + \tau_{zx} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

e cioè ancora, per le (2-8), e nell'ipotesi di piccoli spostamenti,

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = - (Xu + Yv + Zw) + 2\varphi$$

ove si è posto

$$2\varphi = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{xy} \gamma_{xy} \ . \tag{9}$$

Si trae quindi dalle (f) e (g), nell'ipotesi di piccoli spostamenti,

$$\int_S (p_x u + p_y v + p_z w)\, dS + \int_V (Xu + Yv + Zw)\, dV = 2 \int_V \varphi\, dV \ . \tag{10}$$

La (5-10) è la formulazione del cosiddetto principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, che si incontrerà più appresso. Se la terna $u\,v\,w$ e la sestupla $\sigma_i\,\tau_{jk}$ sono collegate dalle relazioni tra le $\varepsilon_i\,\gamma_{jk}$ e le $\sigma_i\,\tau_{jk}$, se cioè derivano ambedue dalla stessa soluzione di un problema dell'equilibrio elastico, e se il materiale è ad elasticità lineare, la φ, della quale si parlerà in seguito, si chiama *potenziale elastico*; essa è una forma quadratica nelle $\sigma_i\,\tau_{jk}$, o nelle $\varepsilon_i\,\gamma_{jk}$, sempre positiva, come si avrà agio di dimostrare.

Ciò premesso, sotto le stesse forze di massa $X\,Y\,Z$ e di superficie $p_x\,p_y\,p_z$, e sotto gli stessi cedimenti vincolari, siano possibili due soluzioni equilibrate e congruenti (e quindi uniformi) $u'\,v'\,w'$, $u''\,v''\,w''$, delle (5-1), (5-2), (5-6) e (2-6). Le differenze

$$\begin{aligned} u &= u' - u'' \\ v &= v' - v'' \\ w &= w' - w'' \\ \sigma_i &= \sigma'_i - \sigma''_i \\ \tau_{jk} &= \tau'_{jk} - \tau''_{jk} \end{aligned} \tag{h}$$

soddisfano le equazioni (5-1), e cioè (2-8), per $X = Y = Z = 0$.

La (2-10) si scrive allora

$$\int_S (p_x u + p_y v + p_z w)\, dS = 2 \int_V \varphi\, dV \ . \tag{i}$$

Le (h) soddisfano pure le (2-6) per $p_x = p_y = p_z = 0$; in corrispondenza del generico punto vincolato le (h), siano o meno presenti cedimenti anelastici, soddisfano la (5-2), o la (5-5) per $k = 0$, e cioè gli spostamenti $u_P\,v_P\,w_P$ sono diretti secondo il piano tangente in P alla superficie, e quindi la reazione vincolare in P, che per vincoli lisci è normale alla superficie, non compie per essi lavoro. Il primo integrale della (i) è quindi nullo, e risulta

$$\int_V \varphi\, dV = 0 \ . \tag{ℓ}$$

Essendo $\varphi \geqslant 0$, la (ℓ) comporta $\varphi = 0$ in ogni punto, e cioè $\varepsilon_i = \gamma_{jk} = 0$. Se ne trae

$$\begin{aligned} \varepsilon'_i &= \varepsilon''_i \\ \gamma'_{jk} &= \gamma''_{jk} \end{aligned} \tag{11}$$

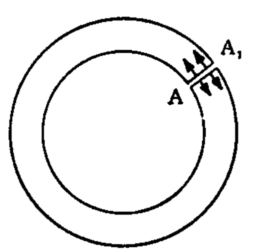
e quindi le due soluzioni u′ v′ w′ ed u″ v″ w″ differiscono di un moto rigido, per altro impedito dai vincoli.

Scende come corollario dal suddetto principio che se le forze di massa sono nulle, e così pure le forze di superficie ed i cedimenti di vincolo sono nulli, si ha ovunque

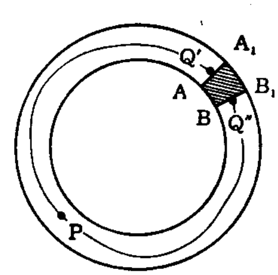
$$\varepsilon_i = \gamma_{jk} = 0 \tag{12}$$

per soluzioni uniformi; infatti la (5-12), che è una soluzione, è anche l'unica.

Il suddetto principio è noto sotto il nome di *principio di unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico* o di *Kirchhoff* (1858); la dimostrazione riportata è di quest'ultimo. Esso è valido nell'ipotesi di materiale ad elasticità lineare e di piccoli spostamenti; inoltre è limitato alle soluzioni uniformi, ed all'assenza di attrito nei vincoli. Esso si enuncia: se esiste una soluzione uniforme delle (5-1) accoppiata alle (5-2) (5-6) e (2-6), essa è l'unica soluzione uniforme del sistema.



a)



b)

FIG. 5-3

Il principio permette la soluzione indiretta delle (5-1), (5-2) (5-6) e (2-6); e cioè, se si riesce ad assegnare delle u v w che soddisfano tali relazioni, esse possono essere scelte come la soluzione del problema. Si seguirà questa via nella trattazione del problema della trave.

Si osservi che, essendo il principio limitato alle soluzioni uniformi, può darsi che le (5-12) non siano verificate, per soluzioni però a più valori.

Ciò appare chiaro in domini pluriconnessi.

Si consideri per esempio un anello privo di peso (fig. 5-3); lo si tagli lungo una superficie in modo da renderlo monoconnesso, e si applichino sulle due facce risultanti dal taglio delle forze superficiali punto per punto uguali e contrarie. Si riempino poi i vuoti in modo da ricostituire la duplice connessione, e si sopprimano le forze. Nella struttura si hanno tensioni e deformazioni, in assenza di forze di massa e di forze superficiali; gli spostamenti u v w connessi con tali deformazioni, ottenibili attraverso i soliti integrali curvilinei, risultano a due valori, poichè sulle facce del taglio essi differiscono degli spostamenti relativi impressi dalle forze poi soppresse.

A volte si dimostra il principio di Kirchhoff nel modo seguente: se sotto le stesse forze di massa e superficiali esistessero due soluzioni diverse $u' v' w'$ ed $u'' v'' w''$, per il principio di sovrapposizione esisterebbe la soluzione non nulla $u'-u''$, $v'-v''$, $w'-w''$ sotto forze nulle. Ciò si considera assurdo. Il punto debole della dimostrazione è proprio questo, perchè occorre dimostrare che, sia pure limitatamente alle soluzioni uniformi, non possa esistere una soluzione non nulla sotto forze esterne e cedimenti vincolari nulli.

Si osservi che lo stesso ragionamento fatto per le (5-1) vale per le (5-8) con annesse (2-6), (5-2) e (5-6).

5. Le equazioni di Cauchy e di Beltrami in presenza di distorsioni.

Finora come cause provocanti spostamenti e tensioni si sono considerate sole le forze, di massa e superficiali, ed i cedimenti vincolari. Come già detto nel capitolo primo, esistono però altre cause che hanno gli stessi effetti, le cosiddette *distorsioni*. A prescindere dalla loro origine (termica, da ritiro, da plasticizzazioni, od altra) esse sono definite nel caso più generale da una sestupla di funzioni $\varepsilon_i^* \, \gamma_{jk}^*$ che in ogni punto del solido siano uniformi e tre volte derivabili, e peraltro non soddisfano di necessità le equazioni di congruenza (1-33) e (5-7), o, soddisfacendo a queste, non verificano di necessità le equazioni di vincolo (5-2).

E' chiaro che se le (1-33) (5-7) e (5-2) sono verificate, le $\varepsilon_i^* \, \gamma_{jk}^*$ provocano spostamenti u v w uniformi senza indurre tensioni. In caso contrario, sorgono delle $\bar{\varepsilon}_i \, \bar{\gamma}_{jk}$ di carattere elastico, che assieme alle $\varepsilon_i^* \, \gamma_{jk}^*$ soddisfano sia le (1-33) e (5-7) che le (5-2). Alle $\bar{\varepsilon}_i \, \bar{\gamma}_{jk}$ si accoppiano le tensioni $\bar{\sigma}_i \, \bar{\tau}_{jk}$ ad esse legate dalle relazioni (4-1) e, nel caso di isotropia, dalle (4-4) e (4-6).

Alle $\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i + \varepsilon_i^*$ e $\gamma_{jk} = \bar{\gamma}_{jk} + \gamma_{jk}^*$ si associano, attraverso il procedimento del § 1-15, le u v w. Si ha così

$$\bar{\sigma}_x = 2\,G\,\bar{\varepsilon}_x + \lambda\bar{\Theta} = 2\,G\,(\varepsilon_x - \varepsilon^*) + \lambda\,(\Theta - \Theta^*) =$$

$$= 2\,G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Theta}{m-2}\right) - 2\,G\left(\varepsilon_x{}^* + \frac{\Theta^*}{m-2}\right)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = G\,\bar{\gamma}_{xy} = G\,(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}{}^*) = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - G\,\gamma_{xy}{}^*\,,$$

e le (2-8) si scrivono

$$\Delta_2 u + \frac{m}{m-2}\,\frac{\partial \Theta}{\partial x} + \frac{X}{G} - 2\left(\frac{\partial \varepsilon_x{}^*}{\partial x} + \frac{1}{m-2}\,\frac{\partial \Theta^*}{\partial x}\right) - \frac{\partial \gamma_{xy}{}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xz}{}^*}{\partial z} = 0$$

$$\Delta_2 v + \frac{m}{m-2}\,\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{Y}{G} - 2\left(\frac{\partial \varepsilon_y{}^*}{\partial y} + \frac{1}{m-2}\,\frac{\partial \Theta^*}{\partial y}\right) - \frac{\partial \gamma_{yz}{}^*}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yx}{}^*}{\partial x} = 0 \qquad (13)$$

$$\Delta_2 w + \frac{m}{m-2}\,\frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{Z}{G} - 2\left(\frac{\partial \varepsilon_z{}^*}{\partial z} + \frac{1}{m-2}\,\frac{\partial \Theta^*}{\partial z}\right) - \frac{\partial \gamma_{zx}{}^*}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zy}{}^*}{\partial y} = 0\,.$$

In assenza di distorsioni le (5-13) si riducono alle (5-1). Alle (5-13) si accompagnano le (2-6) e le (5-2).

Analogamente alle (5-1) si modificano, in presenza di distorsioni, le (5-8).

Vale anche in presenza di distorsioni, il principio di sovrapposizione. Per quanto riguarda il principio di Kirchhoff, la (5-10) si scrive, per una terna u v w uniforme

$$\int_S (p_x u + p_y v + p_z w)\,dS + \int_V (Xu + Yv + Zw)\,dV =$$

$$= 2\int_V \varphi\,dV + 2\int_V \varphi^*\,dV \qquad (14)$$

dove è

$$2\varphi = (\sigma_{Fx} + \bar{\sigma}_x)\,(\varepsilon_{Fx} + \bar{\varepsilon}_x) + \ldots \qquad (15)$$

$$2\varphi^* = (\sigma_{Fx} + \bar{\sigma}_x)\,\varepsilon_x{}^* + \ldots\,,$$

essendo σ_{Fx} le tensioni ed ε_{Fx} le deformazioni dovute alle forze esterne.

In assenza di forze esterne, ma in presenza di distorsioni, è

$$2\varphi = \bar{\sigma}_x\,\bar{\varepsilon}_x + \ldots$$

$$2\varphi^* = \bar{\sigma}_x\,\varepsilon_x{}^* + \ldots\,,$$

e risulta

$$\int_V \varphi\, dV = -\int_V \varphi^*\, dV \; ; \tag{m}$$

quindi è possibile un sistema di deformazioni e tensioni.

Se sotto lo stesso insieme di forze esterne, cedimenti vincolari e distorsioni fossero possibili due soluzioni uniformi distinte, le differenze (h) soddisfano le (5-13) e (2-6) per $X = Y = Z = 0$, $p_x = p_y = p_z = 0$, $\varepsilon_i^* = \gamma_{jk}^* = 0$; inoltre le reazioni vincolari non compiono lavoro; per tali differenze quindi la (5-14) fornisce

$$\int_V \varphi\, dV = 0$$

che importa in ogni punto $\varepsilon_{Fi} + \bar{\varepsilon}_i = 0$, $\gamma_{Fjk} + \bar{\gamma}_{jk} = 0$ e quindi

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{Fi} + \bar{\varepsilon}'_i &= \varepsilon''_{Fi} + \bar{\varepsilon}''_i \\ \gamma'_{Fjk} + \bar{\gamma}'_{jk} &= \gamma''_{Fjk} + \bar{\gamma}''_{jk} \\ u' &= u'' \\ v' &= v'' \\ w' &= w'' \, . \end{aligned} \tag{n}$$

Il principio di Kirchhoff quindi si enuncia nella sua forma più completa come segue: «se esiste una soluzione uniforme delle (5-13) accoppiata con le (5-2), (5-6) e (2-6), essa è l'unica soluzione uniforme del sistema».

Anche gli spostamenti della fig. 5-3 possono rientrare nella definizione di distorsione data in questo paragrafo; basta far agire in corrispondenza della sezione AA_1 e su un tronco di lunghezza piccola ma finita delle $\varepsilon_i^*\, \gamma_{jk}^*$ tali da fornire tra le due facce del tronco gli spostamenti della fig. 5-3 b tra le sezioni AA_1 e BB_1, e poi far tendere la lunghezza del tronco a zero e le $\varepsilon_i^*\, \gamma_{jk}^*$ ad ∞ in modo che gli spostamenti restino gli stessi. Anche gli spostamenti del tipo della fig. 5-3 risultano così uniformi; si ha conferma in tal maniera di quanto detto nel cap. I, e cioè del fatto che qualsiasi terna u v w, per poter essere fisicamente accettabile dal punto di vista della congruenza, deve essere uniforme, in domini mono o pluriconnessi che siano.

6. I casi in cui il principio di Kirchhoff cade in difetto.

Nello scrivere le (5-1) e le (5-8) si è supposto che fosse valida l'ipotesi di piccoli spostamenti; in particolare, oltre ad utilizzare le espressioni lineari delle $\varepsilon_i\ \gamma_{jk}$ nelle derivate prime degli spostamenti, si è supposto che le $\varepsilon_i\ \gamma_{jk}$ e le $\sigma_i\ \tau_{jk}$ collegate dalle (4-4) e (4-6) fossero ambedue relative, per ogni punto P, alle coordinate x y z del punto P nel corpo indeformato. Se l'ipotesi di piccoli spostamenti cade in difetto, si può ancora, in qualche caso, esprimere le $\varepsilon_i\ \gamma_{jk}$ come funzioni lineari delle derivate prime delle u v w, ma le $\varepsilon_i\ \tau_{jk}$ sono relative alle coordinate del punto nel corpo deformato; è quanto accade nella trattazione euleriana delle travi e delle piastre caricate di punta, in cui si suppone ancora che le derivate prime delle u v w siano trascurabili nei confronti dell'unità, ma una parte del momento flettente, quello dovuto allo sforzo normale, si valuta con riferimento alla struttura deformata.

In tal caso le equazioni che vengono fuori non sono più del tipo (5-1), pur essendo ancora lineari, e non è più valido quindi il principio di Kirchhoff. Cade in difetto del resto anche il principio di sovrapposizione, perchè, in presenza di forze preesistenti, non è più lecito operare su una configurazione coincidente con quella iniziale, attesa l'ipotesi di spostamenti non trascurabili, implicitamente ammessa se si riconosce la necessità di calcolare alcune caratteristiche sulla struttura già deformata.

Esistono casi particolari di quello ora esaminato in cui il principio di Kirchhoff e quello di sovrapposizione sono ancora validi; essi si presentano quando le equazioni sono soddisfatte dalla somma di due soluzioni in presenza della somma delle corrispondenti sollecitazioni, e cioè quando i termini che contengono i prodotti degli spostamenti e delle forze risultano proporzionali agli spostamenti; ciò si verifica se le forze che entrano in tali prodotti sono costanti, se cioè esse si considerano come preesistenti, e non intervengono nelle somme delle sollecitazioni. In particolare per trave caricata di punta i due principi sono validi con riferimento alle sole forze trasversali, essendo costanti le forze assiali.

Se la soluzione u v w del problema dell'equilibrio elastico sotto determinate forze F_i è unica, la configurazione corrispondente è anche stabile, e cioè imprimendo alle u v w delle variazioni $\delta u\ \delta v\ \delta w$ piccole nel senso noto, mediante un qualunque sistema di forze applicate ΔF, e rimuovendo poi tali forze, le u v w tornano ai valori originari; ciò è ovvio, perchè u v w è l'unica soluzione sotto le forze F_i. Se le soluzioni sono però più d'una, come può succedere se si rimuove l'ipotesi di piccoli spostamenti, può darsi che una o più di queste siano instabili, nel senso che la variazione $\delta u\ \delta v\ \delta w$ fa cadere il sistema da una configurazione ad un'altra; il riconoscimento della stabilità o meno di una configurazione si esegue alla Dirichlet in relazione al segno della prima delle variazioni successive non nulla dell'energia potenziale totale, come si mostrerà in un capitolo seguente.

E' interessante il caso in cui tutte le forze variano conservando inalterati i mutui rapporti (*carico proporzionale*), e cioè secondo un unico coefficiente moltiplicatore k.

Se è valido il principio di sovrapposizione, può dirsi che se alle forze F_i corrisponde la soluzione u v w, alle forze $k F_i$ corrisponde la soluzione ku, kv, kw. Se gli spostamenti non sono piccoli, quanto sopra cade in difetto. Considerando una componente dello spostamento di un punto generico, indicata con η, il diagramma ηk è lineare nel primo caso. Nel secondo caso si hanno diagrammi come quello della fig. 5-4 o 5-5.

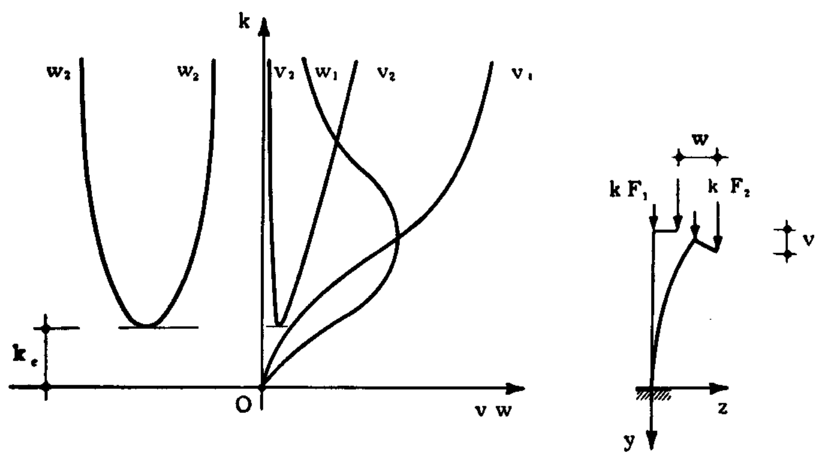


FIG. 5-4

La soluzione — o le soluzioni — conseguenti alle forze $k F_i$ variabili con carico proporzionale si chiama *principale*.

Finchè le $\varepsilon_i \gamma_{jk}$ si mantengono nei limiti dell'elasticità lineare (si ricordi che a grandi spostamenti spesso si accompagnano piccole deformazioni), la soluzione principale si costruisce in modo ovvio considerando successivi incrementi Δk di k, e calcolando nello stadio generico k_j gli spostamenti $du_j\, dv_j\, dw_j$ dovuti alle forze $\Delta k_j F_i$. La configurazione a partire dalla quale si valutano du, dv, dw, e sulla quale si opera nello stadio j, è quella già deformata per effetto delle forze $k_j F_i$; poichè in genere le tensioni sono relative alla configurazione già variata per effetto delle forze $\Delta k_j F_i$, la soluzione du dv dw non può dirsi sicuramente unica, anche se, per la piccolezza delle du dv dw, le espressioni che forniscono queste ultime sono lineari.

La soluzione principale può risultare del tipo della fig. 5-4, cioè essere unica per ogni valore di k; in tal caso essa è sicuramente stabile, come si dimostrerà nella sede adatta.

Per $k > k_c$ accanto alla soluzione principale, ancora unica, possono, sotto le forze $k F_i$, comparirne altre, ottenibili per carico diverso da quello proporzionale (fig. 5-4); nel caso della fig. 5-4, di cui si è già fatto cenno nel cap. I, se ad un certo stadio dell'incremento di carico da 0 a k agiscono anche delle forze orizzontali verso sinistra, che poi svaniscono, la trave può alla fine sotto le stesse forze $k F_i$, e per $k > k_c$, trovarsi inflessa verso sinistra; compaiono cioè, sotto le stesse forze, altre configurazioni di equilibrio dette configurazioni *affiancate.* Sul piano tecnico non è consigliabile entrare nel campo $k > k_c$, anche se la configurazione principale è stabile, perchè la presenza di più soluzioni possibili fa temere, per l'intervento di altre forze, la caduta dalla configurazione principale in un'altra anch'essa stabile.

Ma la stessa soluzione principale può risultare del tipo della fig. 5-5,

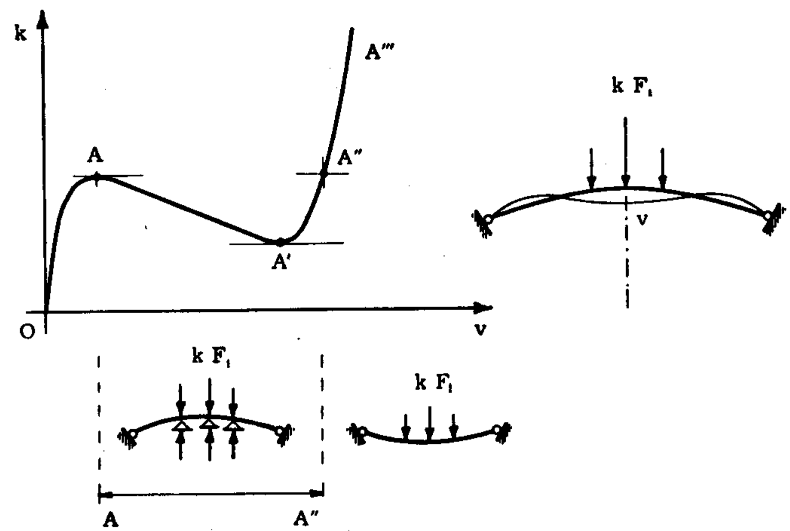


FIG. 5-5

e cioè anche per carico proporzionale la soluzione può non essere più unica per k superiore ad un certo valore. Nel caso dell'arco molto ribassato, per forze sempre crescenti, giunti in A si salta in A″ (l'arco scavalca la corda), per poi riprendere lungo A″ A‴; il tratto AA′ si può ottenere sperimentalmente solo se la struttura si blocca con un vincolo spostabile corrispondente alla forza applicata. Si farà vedere a suo tempo che un ramo come OA o A′ A‴ è sempre stabile se è privo di diramazioni, mentre un ramo come AA′ è sempre instabile.

In qualche raro caso (per es. trave caricata esclusivamente di punta) possono aversi comportamenti come quello della fig. 5-6; punti come B, dove la soluzione si dirama, si chiamano *punti di diramazione*; in corrispondenza di essi le equazioni dell'equilibrio elastico in $\delta u \, \delta v \, \delta w$, pur potendo essere scritte nell'ipotesi di piccoli spostamenti, hanno più soluzioni, per i motivi già esposti precedentemente. In tali casi il valore di k corrispondente a B può calcolarsi in via relativamente semplice, come si mostrerà nei capitoli relativi alla stabilità dell'equilibrio elastico, sfruttando la condizione che in essi la variazione seconda dell'energia potenziale totale, calcolata con riferimento alle differenze tra le soluzioni possibili, è nulla e stazionaria.

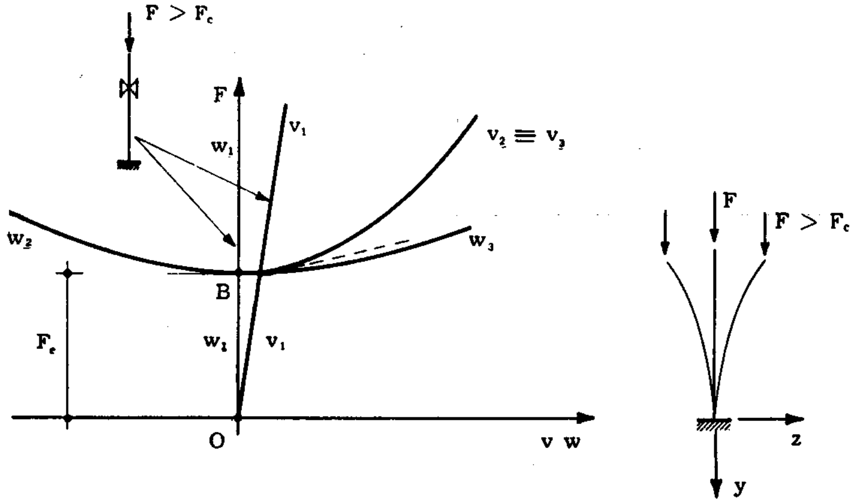


FIG. 5-6

Per ottenere nella realtà un ramo instabile come quello della fig. 5-6 è necessario prevedere un vincolo supplementare, che non assorbe reazioni, ma serve solo ad impedire la caduta in uno dei rami stabili; per esempio, nel caso della fig. 5-6, occorre, in uno qualsiasi dei punti della trave,

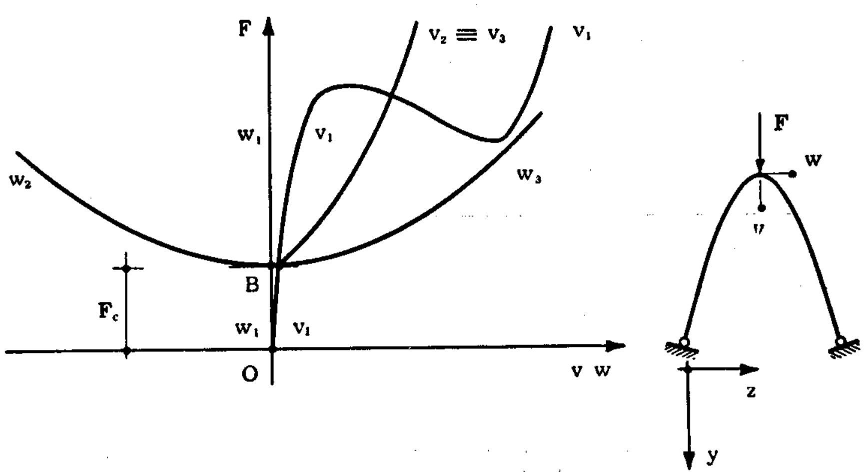


FIG. 5-7

un appoggio bilaterale con piano di scorrimento parallelo all'asse della trave. La presenza di vincoli come quelli introdotti nei casi della fig. 5-5 e della fig. 5-6 garantisce dalle cadute brusche da una configurazione ad un'altra, con relativi fenomeni oscillatori; è a tale tipo di applicazione dei

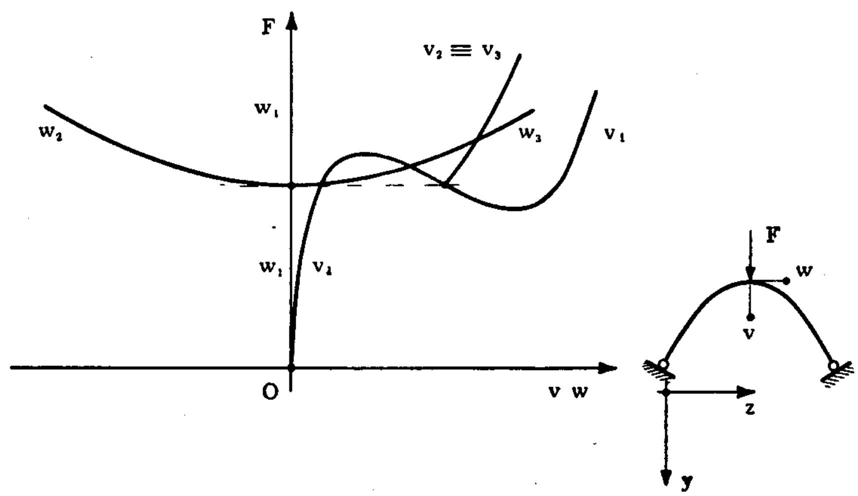


FIG. 5-8

carichi (*deformazione guidata*) che si farà esplicitamente riferimento in tema di energia di deformazione (cap. VIII).

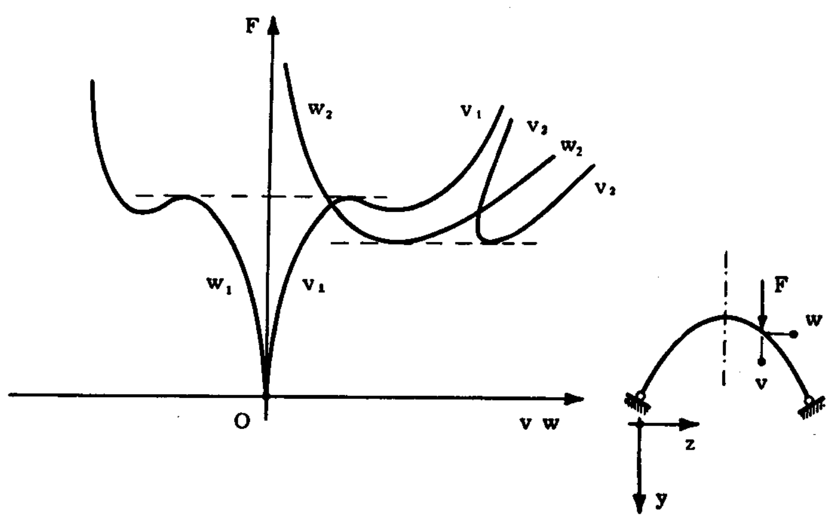


FIG. 5-9

Si possono dare casi in cui si verificano assieme i comportamenti dei casi semplici precedenti; per esempio nell'arco sottile non molto ribassato (figg. 5-7, 5-8 e 5-9).