CAPITOLO III

OMOGRAFIE VETTORIALI E TENSORI

I risultati cui si è pervenuti nei due capitoli precedenti possono conseguirsi ed esprimersi sinteticamente utilizzando il concetto di tensore; ad esso si giunge attraverso la definizione di omografia vettoriale.

Con riferimento ad una terna cartesiana triortogonale $O\,x\,y\,z$ siano $u_x\,u_y\,u_z$ e $v_x\,v_y\,v_z$ le componenti di due vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ uscenti dallo stesso punto P. Se le $v_x\,v_y\,v_z$ sono funzioni lineari ed omogenee delle $u_x\,u_y\,u_z$

$$\begin{aligned} v_x &= p_{11}\,u_x + p_{12}\,u_y + p_{13}\,u_z \\ v_y &= p_{21}\,u_x + p_{22}\,u_y + p_{23}\,u_z \\ v_z &= p_{31}\,u_x + p_{32}\,u_y + p_{33}\,u_z \end{aligned} \tag{1}$$

la relazione tra i due vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ si definisce *omografia vettoriale*. Le (3-1) si esprimono sinteticamente

$$v_i = \Sigma_k\ p_{ik}\ u_k \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3)\ . \tag{2}$$

Si passi ad un nuovo riferimento cartesiano ortogonale $O'\,x'\,y'\,z'$ mediante la trasformazione

$$\begin{aligned} x &= a_{10} + a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13}\,z' \\ y &= a_{20} + a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23}\,z' \\ z &= a_{30} + a_{31}\,x' + a_{32}\,y' + a_{33}\,z'\ .\ (*) \end{aligned} \tag{3}$$

(*) Si ricordi che $a_{10}\,a_{20}\,a_{30}$ sono le coordinate di O' rispetto alla terna $O\,x\,y\,z$, ed a_{ij} i coseni direttori degli assi $x'\,y'\,z'$ rispetto alla stessa terna, forniti dal seguente specchietto

	x'	y'	z'
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33} .

Le componenti $u'_x\, u'_y\, u'_z$ di $\bar{u}$ nel nuovo riferimento sono legate alle $u_x\, u_y\, u_z$ dalle relazioni (3-5)

$$u_k = \Sigma_l \; a_{kl} \; u'_l \tag{6}$$

così pure si ha

$$v'_j = \Sigma_i \; a_{ij} \; v_i \; . \tag{7}$$

Per le (3-2) (3-6) e (3-7) si ha

$$v'_j = \Sigma_{i,\,k,\,l} \; p_{lk} \; a_{ij} \; a_{kl} \; u'_l$$

che può scriversi

$$v'_j = \Sigma_l \; p'_{jl} \; u'_l \tag{8}$$

dove è

$$p'_{jl} = \Sigma_{i,\,k} \; a_{ij} \; a_{kl} \; p_{ik} \; . \tag{9}$$

La (3-8) garantisce che la linearità delle relazioni tra le componenti dei due vettori $\bar{u}$ e $\bar{v}$ si conserva cambiando il riferimento, essa è perciò una proprietà intrinseca dell'omografia vettoriale .

Per ogni riferimento cartesiano, l'omografia è definita dalle nove quantità

$$\begin{matrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{matrix} \tag{10}$$

Si ricordi pure che

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij}^2 = 1 \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{ji}\; a_{ki} = 0 \qquad (j,k = 1,2,3\;;\;\; j \neq k)$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ji}^2 = 1 \qquad \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\; a_{ik} = 0 \; . \tag{4}$$

Se le terne di assi sono *destrorse* (se cioè si possono disporre il pollice, l'indice e il medio della mano destra secondo i versi degli assi x y z) il determinante delle a_{ij} ha valore unitario, ed in esso il complemento algebrico di a_{ji} è pari ad a_{ij}.

Le relazioni che legano le componenti $u_x\, u_y\, u_z$ ed $u'_x\, u'_y\, u'_z$ di un vettore $\bar{u}$ nei due sistemi sono

$$\begin{aligned} u_x &= a_{11}\, u'_x + a_{12}\, u'_y + a_{13}\, u'_z & \qquad u'_x &= a_{11}\, u_x + a_{21}\, u_y + a_{31}\, u_z \\ u_y &= a_{21}\, u'_x + a_{22}\, u'_y + a_{23}\, u'_z & \qquad u'_y &= a_{12}\, u_x + a_{22}\, u_y + a_{32}\, u_z \\ u_z &= a_{31}\, u'_x + a_{32}\, u'_y + a_{33}\, u'_z & \qquad u'_z &= a_{13}\, u_x + a_{23}\, u_y + a_{33}\, u_z \; . \end{aligned} \tag{5}$$

componenti di un *tensore*; cambiando il riferimento attraverso le relazioni (3-3), le componenti del tensore si trasformano secondo le (3-9).

Ogni omografia vettoriale è definita da un tensore, e viceversa. In generale, le componenti (3-10) sono funzioni del punto.

Lo scalare

$$p = p_{11} + p_{22} + p_{33} = \Sigma_j \; p_{jj}$$

è invariante rispetto agli assi; infatti

$$\Sigma_j \; p'_{jj} = \Sigma_{i,\,k,\,j} \; a_{ij} \; a_{kj} \; p_{ik} = \Sigma_{i,\,k} \; p_{ik} \; \Sigma_j \; a_{ij} \; a_{kj}$$

e per le (3-4)

$$\Sigma_j \; p'_{jj} = \Sigma_i \; p_{ii} \; .$$

Oltre all'*invariante lineare p*, si può dimostrare l'esistenza dell'*invariante quadratico*

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_{33} & p_{31} \\ p_{13} & p_{11} \end{vmatrix}$$

e dell'*invariante cubico*

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} .$$

La proprietà

$$p_{23} = p_{32} \quad ; \quad p_{31} = p_{13} \quad ; \quad p_{12} = p_{21} \tag{11}$$

è anche essa invariante rispetto alla terna di riferimento; il tensore che soddisfa alle (3-11) si dice simmetrico. Infatti mutando l'indice j in ℓ, e l'indice i in k, e viceversa, la (3-9) si scrive

$$p'_{\ell j} = \Sigma_{i,\,k} \; a_{k\ell} \; a_{ij} \; p_{ki}$$

e poichè $p_{ki} = p_{ik}$, da quest'ultima e dalla (3-9) si trae

$$p'_{\ell j} = p'_{j\ell} \; .$$

Le nove componenti (3-10) del tensore si riducono, per i tensori simmetrici, a sei.

Si consideri il prodotto scalare

$$\bar{u} \times \bar{v} = \Sigma_i \; u_i \; v_i = \Sigma_{i,\,k} \; p_{ik} \; u_i \; u_k$$

che, come noto dal calcolo vettoriale, è invariante rispetto alla terna di

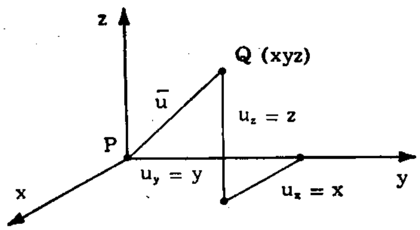

FIG. 3-1

riferimento. Sia Q (xyz) un punto generico (fig. 3-1), P l'origine, e si assuma $\bar{u} = \overline{PQ}$; è $u_x = x$, $u_y = y$, $u_z = z$, e quindi il prodotto

$$\bar{u} \times \bar{v} = p_{11} \, x^2 + p_{22} \, y^2 + p_{33} \, z^2 + 2p_{12} \, xy + 2p_{13} \, xz + 2p_{23} \, yz$$

può considerarsi come una funzione scalare del punto Q (xyz).

Il luogo dei punti Q ove $\bar{u} \times \bar{v} = 1$, ha l'equazione

$$p_{11} \, x^2 + p_{22} \, y^2 + p_{33} \, z^2 + 2p_{12} \, xy + 2p_{13} \, xz + 2p_{23} \, yz = 1 \tag{12}$$

ed è perciò una quadrica di centro P (*quadrica caratteristica* del tensore simmetrico). Cambiando riferimento, i nuovi coefficienti della quadrica rappresentano le nuove componenti del tensore. Assumendo come assi del riferimento gli assi della quadrica, la (3-12) diviene

$$p_\xi \, \xi^2 + p_\eta \, \eta^2 + p_\zeta \, \zeta^2 = 1 \; . \tag{13}$$

Esiste quindi un particolare riferimento $\xi \, \eta \, \zeta$ per cui le componenti con indice diverso del tensore si annullano; $\xi \, \eta \, \zeta$ sono gli *assi principali* del tensore, e $p_\xi \, p_\eta \, p_\zeta$ *le componenti principali* p_i^* del tensore. Assegnate $p_\xi \, p_\eta \, p_\zeta$ il tensore è definito; infatti le sue componenti con riferimento ad una qualsiasi altra terna P x y z sono fornite da (3-9)

$$p'_{j\ell} = \Sigma_i \; a_{ij} \; a_{i\ell} \; p_i^* \tag{14}$$

dove i coseni direttori sono dati dallo specchietto

	x	y	z
ξ	a_{11}	a_{12}	a_{13}
η	a_{21}	a_{22}	a_{23}
ζ	a_{31}	a_{32}	a_{33} .

Se il tensore è funzione del punto P, ad ogni punto corrisponde una diversa quadrica principale. La quadrica (3-12) permette di rappresentare il vettore $\overline{v}$ corrispondente ad $\overline{u}$. Infatti, sia A il punto dove il vettore $\overline{u}$

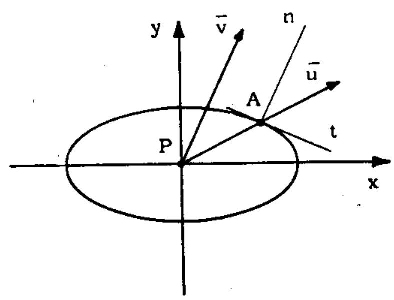

FIG. 3-2

taglia la quadrica (fig. 3-2); le coordinate di A ($x_A\, y_A\, z_A$) sono proporzionali alle componenti di $\overline{u}$

$$x_A = k\, u_x \qquad y_A = k\, u_y \qquad z_A = k\, u_z\ .$$

I coseni direttori della normale n alla quadrica in A sono proporzionali alle derivate parziali della (3-12) in A, e cioè a

$$2\,(p_{11}\, x + p_{12}\, y + p_{13}\, z)$$
$$2\,(p_{21}\, x + p_{22}\, y + p_{23}\, z)$$
$$2\,(p_{31}\, x + p_{32}\, y + p_{33}\, z)$$

e ancora a

$$2\,k\,(p_{11}\, u_x + p_{12}\, u_y + p_{13}\, u_z)$$
$$2\,k\,(p_{21}\, u_x + p_{22}\, u_y + p_{23}\, u_z)$$
$$2\,k\,(p_{31}\, u_x + p_{32}\, u_y + p_{33}\, u_z)$$

e infine, per le (3-2), a

$$2\,k\,v_x$$

$$2\,k\,v_y$$

$$2\,k\,v_z\ .$$

Quindi la normale n alla quadrica in A (fig. 3-2) ha la stessa direzione di $\overline{v}$.

Dalle (1-12) si trae che il vettore $\overline{P_0 P}$ avente origine in P_0 e termine nel generico punto P dell'intorno di P_0, di componenti $x\,y\,z$, ed il vettore s''', caratterizzante lo spostamento di P nella deformazione pura, di componenti $u'''\ v'''\ w'''$, si corrispondono nella omografia vettoriale definita dal *tensore della deformazione pura* t_d, di componenti

$$\begin{matrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z\ , \end{matrix} \tag{15}$$

simmetrico. Le (1-6) e (1-7) si traggono immediatamente dalle (3-9); così pure la quadrica caratteristica del tensore (3-15), la cui equazione è fornita dalla (3-12), coincide con la quadrica $2\,F = +1$ di equazione (1-15).

Gli invarianti lineare, quadratico e cubico della deformazione non sono che gli invarianti del tensore (3-15).

Analogamente, dalle (2-9) si osserva che il tensore (*tensore delle tensioni* t_s) simmetrico, di componenti

$$\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{matrix} \tag{16}$$

definisce l'omografia vettoriale tra il versore di componenti $\alpha_x\,\alpha_y\,\alpha_z$ (normale ad un generico elemento piano passante per P) ed il vettore $\overline{t_n}$ di componenti $t_{nx}\,t_{ny}\,t_{nz}$, tensione esercitantesi sul suddetto elemento piano. Le (2-12) e (2-13) si traggono dalle (3-9), la quadrica (2-14) coincide con la (3-12), gli invarianti (2-17) con quelli del tensore (3-16).

Partendo dalle (3-9), o dalle (3-14), si dimostra la possibilità di rappresentare le componenti p'_{jl} di un tensore, al variare della terna di riferimento e in funzione delle componenti p_{ik} rispetto ad una terna fissa, attraverso dei cerchi; i cerchi di Mohr studiati al cap. II non sono che la particolarizzazione di questi per il tensore (3-16). Si estende il significato di tensore definendo *tensore di ordine n* un insieme di 3^n parametri; in tal senso il tensore prima definito è di ordine 2, un vettore è un tensore di ordine 1, e uno scalare un tensore di ordine 0. Se le componenti di un tensore t′ di ordine 2 sono funzioni lineari omogenee delle componenti di un altro tensore t″ pur esso di ordine 2, la relazione tra t′ e t″ impegna in generale $3^4 = 81$ parametri, e costituisce un tensore del 4° ordine. Si vedrà che la legge di Hooke postula appunto una dipendenza di tal genere tra le componenti di deformazione e di tensione; sorge così il cosiddetto *tensore elastico* t_e del 4° ordine.