

## 6. L'analisi modale statica

### 6.1. Introduzione

Negli archi il cui asse è funicolare del peso proprio si affaccia la questione della stabilità della configurazione  $C_g$  di equilibrio sotto tale peso. Questa configurazione è in rigore connessa con sole deformazioni di tipo assiale se e solo se in qualche modo si annulla la caduta di spinta dovuta a tali deformazioni. In caso contrario nella  $C_g$  sono presenti le deformazioni di tipo flessionale dovute alla suddetta caduta. Comunque la  $C_g$  è definita, e rispetta l'ipotesi di piccoli spostamenti, nel senso che essa può reputarsi coincidente con la configurazione naturale  $C_0$  agli effetti del calcolo delle caratteristiche.

Se  $\lambda$  è il moltiplicatore del peso proprio, al crescere di  $\lambda$  si perviene ad un suo valore  $\lambda_1$  al disopra del quale la configurazione non è più unica; alla configurazione *principale*  $C_g$  — che è l'unica possibile per  $\lambda \leq \lambda_1$  — si affiancano due configurazioni *secondarie*. E' ben noto che per  $\lambda > \lambda_1$  la configurazione principale è instabile, le secondarie invece sono stabili; il valore  $\lambda_1$  è il *moltiplicatore critico* del peso proprio.

In tale visione del problema può sfuggire l'autentico significato del pericolo connesso con l'approssimarsi del  $\lambda$  al valore critico  $\lambda_1$ . Non si tratta infatti di crisi per sopravvenuta instabilità della configurazione, come accadrebbe in un quadro strettamente euleriano del fenomeno, ma di crisi per eccesso di spostamenti, come in realtà accade per l'insopprimibile presenza delle imperfezioni. Sotto tale aspetto è di grande interesse non tanto la conoscenza del moltiplicatore critico, quanto quella degli spostamenti sotto i carichi accidentali, calcolati in teoria del secondo ordine.

Tutto quanto sopra va sotto il nome di *analisi modale statica*.

Si seguirà il procedimento della *discretizzazione per celle*. Limitandosi alle deformate secondarie inestensionali, il procedimento consiste nel suddividere l'arco in tronchi di lunghezza  $\Delta s$ , concentrando la deformabilità flessionale del tronco:

$$\frac{\Delta s}{EI(s)} \tag{6.1}$$

nei due estremi del tronco stesso. La cella sulla dividente  $i$  (Figura 6.1) è caratterizzata quindi dalla *cedibilità*:

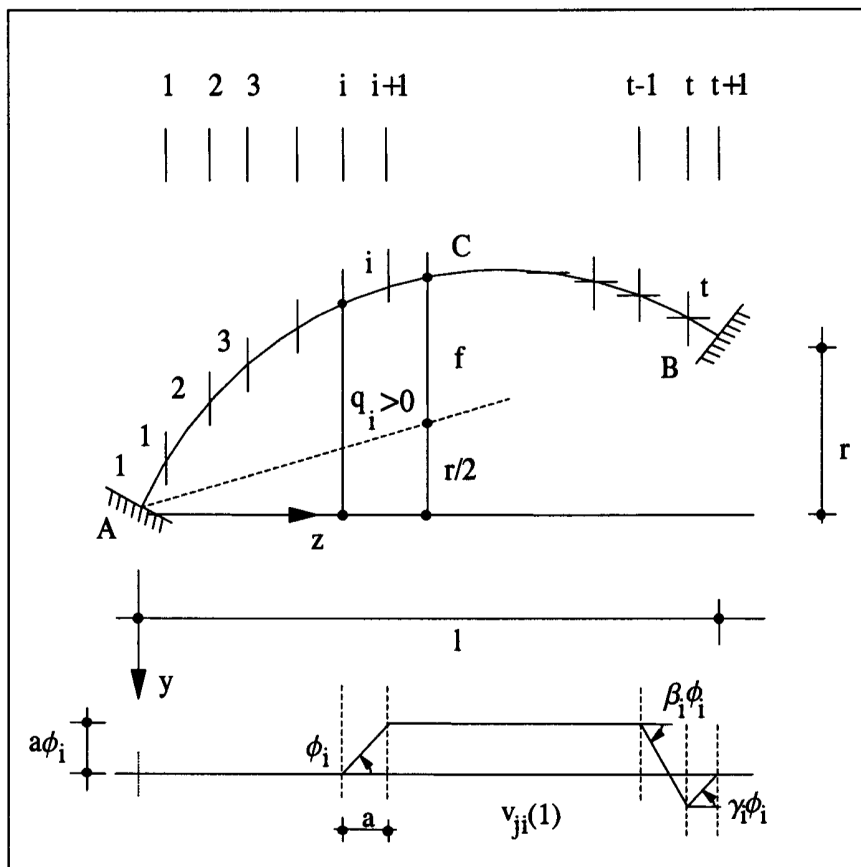


Figura 6.1- La discretizzazione in celle elastiche

$$c_i = \frac{\Delta s_{i-1}}{2EI_{i-1}} + \frac{\Delta s_i}{2EI_i} \quad (6.2)$$

Nei calcoli sarà introdotta per ogni cella la *rigidità di cella*:

$$k_i = \frac{1}{c_i} \quad (6.3)$$

Ai due estremi  $A$  e  $B$  sono in genere presenti le due cedibilità angolari elastiche  $c_A$  e  $c_B$ , tali che:

$$\begin{aligned}\phi_A &= -c_A \mathcal{M}_A \\ \phi_B &= -c_B \mathcal{M}_B\end{aligned}\quad (6.4)$$

$\mathcal{M}_A$  ed  $\mathcal{M}_B$  sono le coppie reattive agenti dal terreno sull'arco. Ai due estremi quindi dovranno considerarsi due celle di cedibilità:

$$\begin{aligned}c_1 &= c_A + \frac{1}{2} \frac{\Delta s_1}{EI_1} \\ c_{n+3} &= c_B + \frac{1}{2} \frac{\Delta s_{n+2}}{EI_{n+2}}\end{aligned}\quad (6.5)$$

Di eventuali cerniere si tiene conto ponendo, in corrispondenza della dividente  $t$  della cerniera,  $k_t = 0$ .

Il sistema rigido elastico che così si ottiene è un sistema olonomo ad  $n$  gradi di libertà, se  $n + 2$  è il numero di tronchi in cui l'arco è suddiviso. Come coordinate lagrangiane si assumono le rotazioni  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  dei primi  $n$  tronchi; esse si ordinano nel vettore colonna  $\mathbf{c}$ .

## 6.2. La matrice lagrangiana delle rigidità

La rotazione  $\phi_i$  del solo tronco  $i$  si accompagna alle rotazioni  $\beta$  e  $\gamma$  dei tronchi  $n + 1$  ed  $n + 2$ . Nella Figura 6.1 è rappresentato il diagramma delle  $v_{ji}^{(1)}$ , componenti verticali degli spostamenti indotti da  $\phi_i$  e calcolati limitandosi al termine del primo ordine in  $\phi_i$ .

Le espressioni di  $\beta$  e  $\gamma$  si ottengono dalle due condizioni di congruenza:

$$\begin{aligned}v_B &= 0 \\ w_B &= 0\end{aligned}\quad (6.6)$$

Ponendo:

$$a = \frac{l}{n+2}\quad (6.7)$$

e chiamando  $q_i$  le quote dell'arco sulla orizzontale  $z$ , le (6.6) si scrivono come segue:

$$\begin{aligned}-a\phi_i - a\beta - a\gamma &= 0 \\ -(q_{i+1} - q_i)\phi_i - (q_{n+2} - q_{n+1})\beta - (q_{n+3} - q_{n+2})\gamma &= 0\end{aligned}\quad (6.8)$$

da cui:

$$\begin{aligned}\beta &= \phi_i \frac{q_{n+3} - q_{n+2} + q_i - q_{i+1}}{2q_{n+2} - q_{n+1} - q_{n+3}} = \beta_i \phi_i \\ \gamma &= \phi_i \frac{q_{n+1} - q_{n+2} - q_i + q_{i+1}}{2q_{n+2} - q_{n+1} - q_{n+3}} = \gamma_i \phi_i\end{aligned}\quad (6.9)$$

Si può quindi porre, in generale:

$$\begin{aligned}\beta &= \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i \\ \gamma &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i\end{aligned}\quad (6.10)$$

L'energia di deformazione è domiciliata nelle celle, ed è fornita da:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+3} k_i \Delta \phi_i^2 \quad (6.11)$$

e cioè da:

$$L = \frac{1}{2} \left[ k_1 \phi_1^2 + \sum_{i=2}^n k_i (\phi_i - \phi_{i-1})^2 + k_{n+1} (\beta - \phi_n)^2 + k_{n+2} (\gamma - \beta)^2 + k_{n+3} \gamma^2 \right] \quad (6.12)$$

Le espressioni (6.10) — esprimenti la sovrapposibilità degli spostamenti dovuti alle  $\phi_i$  — permettono di asserire che l'energia di deformazione è una forma quadratica delle  $\phi_i$ :

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{K} \mathbf{c} \quad (6.13)$$

La matrice  $\mathbf{K}$ , quadrata di dimensioni  $n \times n$ , è la *matrice lagrangiana delle rigidità*. Essa è simmetrica per il modo stesso in cui è introdotta, e definita positiva per il significato di  $L$ .

Poichè dalle (6.13) si trae:

$$L = \frac{1}{2} (k_{11} \phi_1^2 + \dots + 2k_{12} \phi_1 \phi_2 + \dots) \quad (6.14)$$

può porsi:

$$\begin{aligned}K_{ii} &= 2L_i \\ K_{ij} &= L_{ij}\end{aligned}\quad (6.15)$$



ove  $L_i$  è l'energia di deformazione connessa con la configurazione ove solo  $\phi_i$  è diversa da zero e pari all'unità, ed  $L_{ij}$  è l'energia mutua connessa con la configurazione ove solo  $\phi_i$  e  $\phi_j$  sono non nulle, e pari all'unità.

Si hanno così le espressioni seguenti:

$$K_{ii} = k_i + k_{i+1} + k_{n+1}\beta_i^2 + k_{n+2}(\gamma_i - \beta_i)^2 + k_{n+3}\gamma_i^2 - 2\delta_{i,n}k_{n+1}\beta_n \quad (6.16)$$

e, per  $j > i$ :

$$K_{ij} = k_{n+1}\beta_i\beta_j + k_{n+2}(\gamma_i - \beta_i)(\gamma_j - \beta_j) + k_{n+3}\gamma_i\gamma_j - \delta_{j,i+1}k_j - \delta_{j,n}k_{n+1}\beta_i \quad (6.17)$$

ove  $\delta_{i,j}$  è il ben noto *delta di Kroneker*.

### 6.3. La matrice dell'energia potenziale

Le relazioni di congruenza (6.6) sono state scritte chiamando in causa i soli termini del primo ordine nelle  $\phi_i$ ; nè poteva farsi altrimenti, se si voleva giungere ad una espressione di  $L$  che fosse quadratica nelle  $\phi_i$ .

Così operando però restano scoperte le parti del secondo ordine  $v_B^{(2)}$  e  $w_B^{(2)}$ . Di ciò si tiene conto nel calcolo dell'energia potenziale  $P$ . La parte  $P^{(1)}$  del primo ordine di  $P$  è nulla; infatti le forze da peso proprio,  $F_1, F_2, \dots, F_{n+2}$ , e le due reazioni sull'arco:

$$\begin{aligned} F_{n+3} + R_{By} &= -H \frac{q_{n+2} - q_{n+3}}{a} \\ R_{Bz} &= -H \end{aligned} \quad (6.18)$$

sono in equilibrio sulla mensola  $AB$ , incastrata in  $A$  e nella configurazione principale, e quindi il lavoro del primo ordine  $L^{(1)}$  da esse compiuto per qualsiasi variazione di tale configurazione è nullo.

Gli spostamenti del secondo ordine connessi con la generica  $\phi_i$  sono quelli della Figura 6.2; il lavoro  $L_a^{(2)}$  compiuto dalle forze agenti sulla mensola per effetto di tali spostamenti, invertito di segno, fornisce il contributo della  $\phi_i$  all'energia potenziale  $P^{(2)}$ .

Il quadro seguente fornisce le forze che sono chiamate in causa dalla rotazione del tronco generico:

$$\begin{aligned} \phi_i &\rightarrow F_{i+1}, F_{i+2}, \dots, F_{n+2}, F_{n+3} + R_{By}, R_{Bz} \\ \beta &\rightarrow F_{n+2}, F_{n+3} + R_{By}, R_{Bz} \\ \gamma &\rightarrow F_{n+3} + R_{By}, R_{Bz} \end{aligned} \quad (6.19)$$

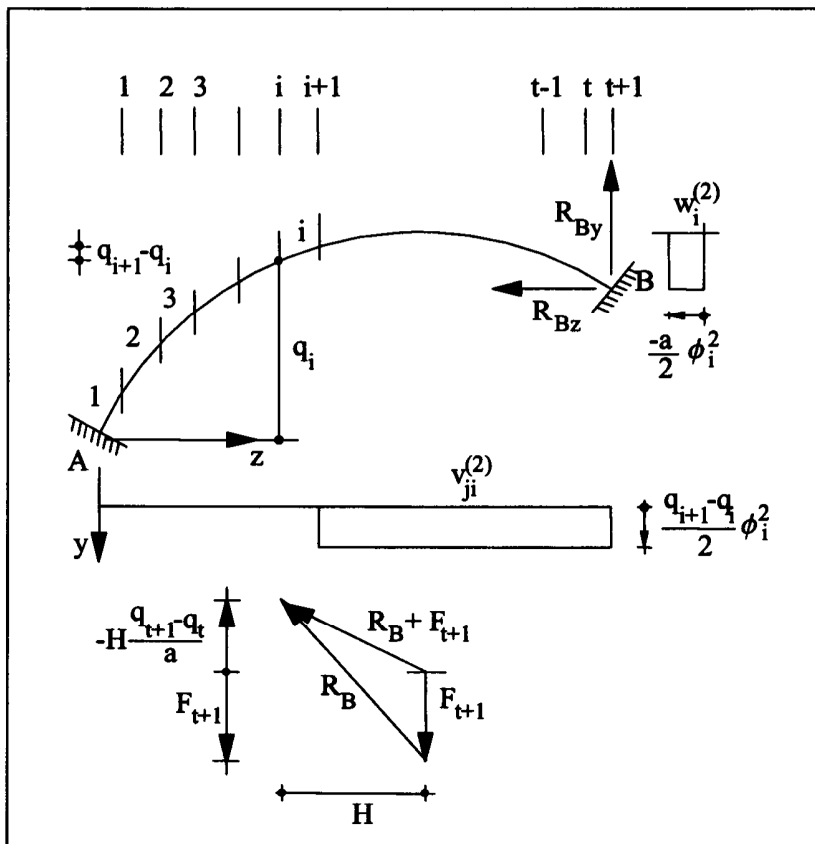


Figura 6.2- Spostamenti del secondo ordine dovuti ad una coordinata lagrangiana diversa da zero

Si può scrivere:

$$L_a^{(2)} = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B} \mathbf{c} \quad (6.20)$$

ove, come per la (6.13),

$$\begin{aligned} B_{ii} &= 2L_{ai}^{(2)} \\ B_{ij} &= L_{aij}^{(2)} \end{aligned} \quad (6.21)$$

Ponendo:

$$s = \frac{q_{n+2} + q_{n+3}}{a} \quad (6.22)$$

si ha:

$$B_{ii} = (q_{i+1} - q_i) \left( \sum_{k=i+1}^{n+2} F_k - sH \right) + aH - \quad (6.23)$$

$$(q_{n+1} - q_{n+2})\beta_i^2(F_{n+2} - sH) + a\beta_i^2H + (q_{n+2} - q_{n+3})\gamma_i^2sH + a\gamma_i^2H$$

$$B_{ij} = -(q_{n+1} - q_{n+2})\beta_i\beta_j(F_{n+2} - sH) + a\beta_i\beta_jH + (q_{n+2} - q_{n+3})\gamma_i\gamma_jsH + a\gamma_i\gamma_jH \quad (6.24)$$

L'energia potenziale è quindi data da:

$$P^{(2)} = -\frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{B}\mathbf{c}, \quad (6.25)$$

ove la matrice  $\mathbf{B}$ , definita dalle (6.23–6.24), è simmetrica. Essa è pure definita positiva, poichè il lavoro  $L_2$  è positivo, attesa la preponderanza del termine in  $R_{Bz}$ .

#### 6.4. La ricerca del moltiplicatore critico

Sotto il valore critico  $\lambda_1$  del moltiplicatore del peso proprio, alla configurazione di equilibrio  $C_0$  se ne affiancano altre,  $C_0 + \delta C$ , pur esse di equilibrio.

Si chiami:

$$E_t = L + P \quad (6.26)$$

l'energia potenziale totale. Si può scrivere, per la (6.13) e (6.20),

$$E_t = \frac{1}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{K}\mathbf{c} - \frac{\lambda}{2}\mathbf{c}^T\mathbf{B}\mathbf{c}. \quad (6.27)$$

Gli  $n$  valori  $\phi_i$  del vettore  $\mathbf{c}$  definiscono la variazione  $\delta C$ ; essi si ottengono dalla condizione di stazionarietà della  $E_t$ :

$$\frac{\partial E_t}{\partial \phi_i} = 0, \quad i=1,2,\dots,n \quad (6.28)$$

Le  $n$  condizioni (6.28) portano al sistema:

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{c} = 0, \quad (6.29)$$

algebrico lineare omogeneo nelle  $\phi_i$ .

La condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (6.29) ammetta soluzione non banale è la singolarità della matrice dei coefficienti:

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{B}) = 0, \quad (6.30)$$

Si è in presenza di un classico problema di autovalori; poichè  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{B}$  sono simmetriche, e  $\mathbf{K}$  è definita positiva, le  $n$  radici  $\lambda_i$  della (6.30) sono reali. Poichè poi anche  $\mathbf{B}$  è definita positiva, le  $\lambda_i$  sono tutte positive.

Al generico autovalore  $\lambda_i$  corrisponde la soluzione  $\mathbf{e}_i$  (autovettore di ordine  $i$ ), definito a meno di costante.

Il più basso dei  $\lambda_i$  è il moltiplicatore critico  $\lambda_c$ . Il suo valore è tanto più vero quanto più fitta è la suddivisione in tronchi della struttura reale; il problema della convergenza non si pone, per il fatto che è lo stesso modello a tendere alla struttura reale per  $n \rightarrow \infty$ .

E' di notevole interesse che procedendo con il metodo delle celle si abbia convergenza dal basso, come è stato dimostrato. A parte infatti la circostanza che così si opera in maggior sicurezza, deve ricordarsi che qualsiasi altro metodo tra quelli comunemente usati (elementi finiti, teoria differenziale, metodo di Bryan-Timoshenko etc.) è caratterizzato da convergenza dall'alto.

## 6.5. Gli spostamenti in teoria del secondo ordine

Siano presenti i carichi accidentali verticali ed orizzontali  $P_i$  e  $Q_i$  concentrati in corrispondenza delle  $n + 3$  dividenti, e ordinati nei due vettori colonna  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , di dimensione  $n + 3$ . A questi carichi corrisponde una energia potenziale  $P^{(1)} + P^{(2)}$ . Si trascuri  $P^{(2)}$ , poichè  $P^{(1)} \neq 0$ .

Per il calcolo di  $P^{(1)}$  occorre esplicitare le espressioni degli spostamenti  $v_i$  e  $w_i$  in funzione delle  $\phi_i$ , e limitate alla parte del primo ordine.

Si ha (Figura 6.1):

$$\begin{aligned} v_1 &= 0 \\ v_t &= -a \sum_{i=1}^{t-1} \phi_i, \quad t = 2, 3, \dots, n+1 \\ v_{n+2} &= v_{n+1} - \alpha\beta = -a \sum_{i=1}^n (1 + \beta_i) \phi_i \\ v_{n+3} &= v_{n+2} - a\gamma = -a \sum_{i=1}^n (1 + \beta_i + \gamma_i) \phi_i \end{aligned} \quad (6.31)$$

Deve verificarsi, per la congruenza, che sotto le  $\phi_i$  reali si abbia:

$$v_{n+3} = 0 \quad (6.32)$$

Così pure può scriversi:

$$\begin{aligned} w_1 &= 0 \\ w_t &= - \sum_{i=1}^{t-1} (q_{i+1} - q_i) \phi_i, \quad t = 2, 3, \dots, n+1 \\ w_{n+2} &= - \sum_{i=1}^n [q_{i+1} - q_i + (q_{n+2} - q_{n+1}) \beta_i] \phi_i \\ w_{n+3} &= - \sum_{i=1}^n [q_{i+1} - q_i + (q_{n+2} - q_{n+1}) \beta_i + (q_{n+3} - q_{n+2}) \gamma_i] \phi_i \end{aligned} \quad (6.33)$$

Deve verificarsi, per la congruenza, che sotto le  $\phi_i$  reali si abbia:

$$w_{n+3} = 0 \quad (6.34)$$

Si può porre:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{Vc} \\ \mathbf{w} &= \mathbf{Wc} \end{aligned} \quad (6.35)$$

ove  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$  sono matrici di dimensioni  $(n+3) \times n$ .

Le (6.35) consentono di scrivere:

$$P = -\mathbf{c}^T \mathbf{V}^T \mathbf{p} - \mathbf{c}^T \mathbf{W}^T \mathbf{q} \quad (6.36)$$

L'espressione (6.27) della  $E_t$  si arricchisce quindi come segue:

$$E_t = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{Kc} - \frac{\lambda}{2} \mathbf{c}^T \mathbf{B}^T \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{V}^T \mathbf{p} - \mathbf{c}^T \mathbf{W}^T \mathbf{q} \quad (6.37)$$

Il sistema (6.29) diviene:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (6.38)$$

ove:

$$\mathbf{b} = \mathbf{V}^T \mathbf{p} + \mathbf{W}^T \mathbf{q} \quad (6.39)$$

Le (6.35) permettono di passare dalla soluzione  $\mathbf{c}$  del (6.38) agli spostamenti.

Nel calcolo di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  si pone  $\lambda = 1$ . La (6.38), però, consente di asserire che per  $\lambda = \lambda_i$ , ove  $\lambda_i$  è l'autovalore generico del sistema (6.29), gli spostamenti non sono più definiti.

La soluzione del (6.38) può aversi anche come combinazione lineare degli autovettori del (6.29). Poichè questi sono ortogonali, costituiscono una base, e può quindi porsi:

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad (6.40)$$

Sostituendo nel (6.38) si ha:

$$\sum_{i=1}^n x_i (\mathbf{K}\mathbf{e}_i - \lambda\mathbf{B}\mathbf{e}_i) = \mathbf{b} \quad (6.41)$$

e premoltiplicando per  $\mathbf{e}_h^T$  si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n x_i (\mathbf{e}_h^T \mathbf{K}\mathbf{e}_i - \lambda \mathbf{e}_h^T \mathbf{B}\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_h^T \mathbf{b} \quad (6.42)$$

L'ortogonalità degli autovettori  $\mathbf{e}_i$  permette di scrivere:

$$x_h (\mathbf{e}_h^T \mathbf{K}\mathbf{e}_h - \lambda \mathbf{e}_h^T \mathbf{B}\mathbf{e}_h) = \mathbf{e}_h^T \mathbf{b} \quad (6.43)$$

D'altro canto gli  $\mathbf{e}_i$  sono soluzioni del (6.29), e quindi:

$$\mathbf{e}_h^T \mathbf{K}\mathbf{e}_h = \lambda \mathbf{e}_h^T \mathbf{B}\mathbf{e}_h; \quad (6.44)$$

la (6.42) quindi si scrive:

$$x_h (\lambda_h - \lambda) \mathbf{e}_h^T \mathbf{K}\mathbf{e}_h = \mathbf{e}_h^T \mathbf{b} \quad (6.45)$$

da cui:

$$x_h = \frac{1}{\lambda_h - \lambda} \frac{1}{\mathbf{e}_h^T \mathbf{K}\mathbf{e}_h} \mathbf{e}_h^T \mathbf{b} \quad (6.46)$$

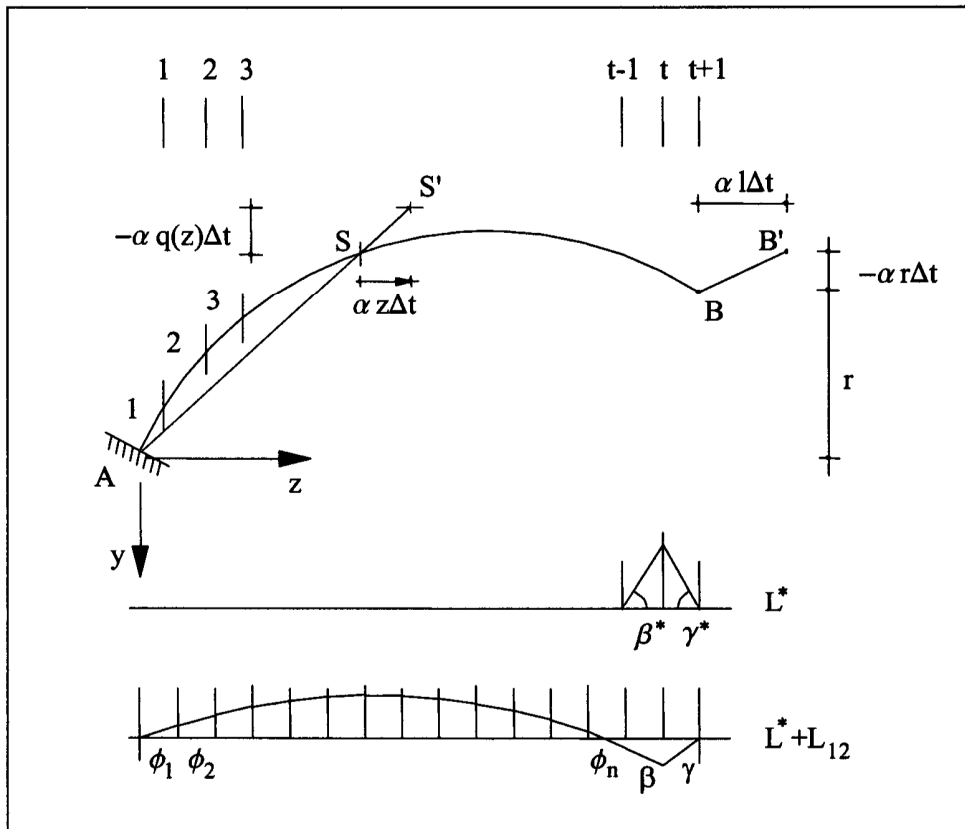


Figura 6.3- Gli effetti di una variazione termica

### 6.6. La presenza delle variazioni termiche

Se esiste anche una variazione termica  $\Delta t$ , questa introduce un termine nuovo sia nell'energia potenziale, che nell'energia elastica.

Ponendo  $c = 0$ , la  $\Delta t$  induce rotazioni  $\beta^*$  e  $\gamma^*$  nei due ultimi tronchi (Figura 6.3). Le condizioni che definiscono  $\beta^*$  e  $\gamma^*$  sono quelle di congruenza in  $B$ , analoghe a quelle espresse in precedenza:

$$\begin{aligned} -a\beta^* - a\gamma^* - \alpha r\Delta t &= 0 \\ -(q_{n+2} - q_{n+1})\beta^* - (q_{n+3} - q_{n+2})\gamma^* + \alpha l\Delta t &= 0 \end{aligned} \quad (6.47)$$

Si ha così:

$$\begin{aligned}\beta^* &= \frac{\alpha\Delta t}{a} \frac{r(q_{n+3} - q_{n+2}) + al}{2q_{n+2} - q_{n+1} - q_{n+3}} = b^* \alpha\Delta t \\ \gamma^* &= -\frac{\alpha\Delta t}{a} \frac{r(q_{n+2} - q_{n+1}) + al}{2q_{n+2} - q_{n+1} - q_{n+3}} = c^* \alpha\Delta t\end{aligned}\quad (6.48)$$

In questa fase, si genera una energia di deformazione data da:

$$L^* = \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{2} [k_{n+1} b^{*2} + k_{n+2} (c^* - b^*)^2 + k_{n+3} c^{*2}] \quad (6.49)$$

Agiscono poi le  $c$ ; ad esse si associa l'energia di deformazione  $L$  già calcolata nel secondo paragrafo, e l'energia mutua  $L_{12}$  dovuta alla presenza dei momenti  $M_{n+1}^*$ ,  $M_{n+2}^*$ ,  $M_{n+3}^*$ . L'espressione di  $L_{12}$  è la seguente:

$$L_{12} = M_{n+1}^* \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i - \phi_n \right) + M_{n+2}^* \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i - \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i \right) - M_{n+3}^* \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i \quad (6.50)$$

e cioè ancora:

$$\begin{aligned}L_{12} &= \alpha\Delta t \left[ k_{n+1} b^* \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i - \phi_n \right) + k_{n+2} (c^* - b^*) \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i - \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i \right) + \right. \\ &\quad \left. k_{n+3} c^* \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i \right]\end{aligned}\quad (6.51)$$

Si può porre:

$$L_{12} = \alpha\Delta t c^T \mathbf{d}; \quad (6.52)$$

il generico termine del vettore  $\mathbf{d}$  è dato da:

$$D_i = k_{n+1} b^* \beta_i + k_{n+2} (c^* - b^*) (\gamma_i - \beta_i) + k_{n+3} c^* \gamma_i, \quad (6.53)$$

se  $i < n$ , oppure da:

$$D_n = k_{n+1} b^* (\beta_n - 1) + k_{n+2} (c^* - b^*) (\gamma_n - \beta_n) + k_{n+3} c^* \gamma_n, \quad (6.54)$$

se  $i = n$ .

La (6.52) è il termine che si aggiunge alla energia elastica.



Se si opera in secondo ordine occorre un termine aggiuntivo anche alla  $P^{(2)}$ . Questo è dovuto al fatto che il lavoro  $L_a^{(2)}$  delle forze  $H$ ,  $sH$ ,  $F_{n+2}$  è interessato, oltre che da  $\mathbf{c}$ , da  $\beta^*$  e  $\gamma^*$ . Questa parte di lavoro si esprime come segue:

$$\begin{aligned}
 L_a^{*(2)} = & H \frac{a}{2} \left[ \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i + \beta^* \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i + \gamma^* \right)^2 \right] - \\
 & F_{n+2} \frac{q_{n+1} - q_{n+2}}{2} \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i + \beta^* \right)^2 + \\
 & sH \left[ \frac{q_{n+1} - q_{n+2}}{2} \left( \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_i + \beta^* \right)^2 + \frac{q_{n+2} - q_{n+3}}{2} \left( \sum_{i=1}^n \gamma_i \phi_i + \gamma^* \right)^2 \right]
 \end{aligned} \quad (6.55)$$

Se ne trae che alla  $P^{(2)}$  occorre aggiungere un termine costante in  $\beta^{*2}$  e  $\gamma^{*2}$ , che non interessa, ed un termine dipendente linearmente da  $\mathbf{c}$ , e dato da:

$$P^* = -\lambda \alpha \Delta t \mathbf{c}^T \mathbf{t}, \quad (6.56)$$

ove  $\lambda$  è il moltiplicatore del peso proprio.

Il generico termine del vettore  $\mathbf{t}$  è dato da:

$$\begin{aligned}
 T_i = & H a (\beta_i \beta^* + \gamma_i \gamma^*) - F_{n+2} (q_{n+1} - q_{n+2}) \beta_i \beta^* + \\
 & sH [(q_{n+1} - q_{n+2}) \beta_i \beta^* + (q_{n+2} - q_{n+3}) \gamma_i \gamma^*]
 \end{aligned} \quad (6.57)$$

A meno di costante, l'energia potenziale totale si modifica come segue:

$$E_t = \frac{1}{2} \mathbf{c}^T (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{c} - \mathbf{c}^T \mathbf{V}^T \mathbf{p} - \mathbf{c}^T \mathbf{W}^T \mathbf{q} + \alpha \Delta t \mathbf{c}^T (\mathbf{d} - \lambda \mathbf{t}) \quad (6.58)$$

ed il sistema delle equazioni di equilibrio diviene:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{c} = \mathbf{V}^T \mathbf{p} + \mathbf{W}^T \mathbf{q} - \alpha \Delta t \mathbf{c}^T (\mathbf{d} - \lambda \mathbf{t}) \quad (6.59)$$

Si ricorda che si è pervenuti al sistema (6.59) trascurando la variazione di  $H$  dovuta ai carichi accidentali ed alla variazione termica. Un calcolo esatto può essere eseguito per successive approssimazioni, come si fa nei ponti sospesi.

### 6.7. Il programma AINS dell'analisi modale statica

In Appendice 6.1 è riportato il listato del programma AINS, diretto al calcolo degli autovalori ed autovettori del sistema di equilibrio. Esso è riferito ad un arco, condizionato soltanto dalla coincidenza dell'asse con un funicolare dei carichi.

Lo schema statico di riferimento è quello di arco ad imposte elasticamente cedevoli alla rotazione, semplificato quindi rispetto al caso di blocco di fondazione generico dei capitoli precedenti. Per una analisi di stabilità di archi in presenza di blocchi di fondazione caratterizzati da matrice di cedibilità piena, si veda Auciello [1993].

Il programma consiste di una sezione principale, delle solite sei subroutine che si occupano dell'ingresso e dell'uscita dati, di nove subroutine di libreria che calcolano i primi autovalori ed autovettori di un autoproblema generalizzato del tipo:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{B}) \mathbf{c} = 0, \quad (6.60)$$

di tre subroutine che costruiscono le matrici  $\mathbf{K}$  delle rigidezze globali e  $\mathbf{B}$  delle rigidezze geometriche, e di una subroutine che dalla conoscenza degli autovettori deduce i corrispondenti spostamenti verticali ed orizzontali.

#### La fase di ingresso dati

Il file dei dati di ingresso va preparato secondo i dettami della mascherina di commento alla subroutine 'IngressoDati'. Occorre quindi definire la luce dell'arco, il numero delle coordinate lagrangiane, il modulo di Young e le due cedibilità dei vincoli. Vanno quindi indicate alcune quantità necessarie al calcolo degli autovalori.

Prima di tutto, il numero di autovalori che si vogliono estrarre, a partire dal più basso — e nella grande maggioranza dei casi si tratterà del solo primo carico critico — poi il numero di autovettori su cui condurre il calcolo iterativo. Senza entrare nei dettagli, si potrà ipotizzare un numero di autovettori doppio a quello degli autovalori che si vuole calcolare.

Il terzo parametro è il numero massimo di iterazioni che il programma potrà compiere prima di segnalare la mancata convergenza del procedimento. A sua volta, questo errore segnala una anomalia nella costruzione delle matrici (tipicamente, nessuna delle due matrici è definita positiva). Infine, il quarto parametro permette di considerare raggiunta la convergenza dopo aver attinto una prefissata precisione. Quest'ultimo parametro può essere ipotizzato molto basso — anche coincidente con lo zero macchina — attesa la elevata velocità di convergenza del metodo.

Di seguito vanno specificate quattro stringhe di caratteri, intese ad informare se l'asse dell'arco è assegnato per punti o come funzione, se esistono cerniere, e quante, se la sezione è costante o varia secondo una prefissata legge, se i carichi sono da considerarsi uniformi oppure forniti per punti.

Ricordando la restrizione in cui si opera in questo capitolo, ossia che l'arco debba essere funicolare del carico, se i carichi sono uniformi, la curva d'asse sarà parabo-

lica. All'inverso, se la curva d'asse è fornita per punti, anche i carichi dovranno di conseguenza essere definiti puntualmente.

Se l'asse dell'arco è definito dalla parabola, occorrerà anche fornire la freccia ed il rialzo dell'asse.

Si sono ipotizzati quattro diversi tipi strutturali, a seconda che l'arco sia incastato, ad una cerniera, a due cerniere oppure a tre cerniere. La locazione delle cerniere è arbitraria, e quindi per ciascuna di esse occorrerà fornire l'indice della dividente.

Infine, il momento di inerzia della sezione retta in corrispondenza delle sezioni di divisione può essere definito puntualmente, oppure può calcolarsi a partire da una funzione assegnata. Nel listato si può scegliere tra una variazione parabolica (nel qual caso occorre definire i momenti di inerzia alle imposte ed in chiave), oppure una variazione del tipo:

$$I(z) = I_0 \cos \alpha(z)^w \quad (6.61)$$

dove  $\alpha(z)$  è l'inclinazione della curva d'asse ed  $I_0$  è il momento di inerzia in chiave. Particolarmente importanti sono i casi  $w = 0$  (sezione costante),  $w = 1$ ,  $w = 3$ ,  $w = -1$  e  $w = -3$ .

#### La fase di calcolo

Esaurita la fase di ingresso dei dati, si chiama la subroutine che costruisce le rigidezze locali delle singole celle, la subroutine che assembla la matrice di rigidezza globale, e la subroutine che costruisce la matrice di rigidezza geometrica. Nel listato sono richiamate le formule del testo che vengono di volta in volta utilizzate.

Sia la matrice globale di rigidezza che la matrice di rigidezza geometrica vengono memorizzate in banda mobile in un array monodimensionale, in modo da sfruttare al meglio sia la simmetria che l'eventuale forma a banda delle matrici. Mentre per ulteriori approfondimenti si rimanda a Corr e Jennings [1976], occorre solo tener presente che la locazione  $(i, j)$  del triangolo superiore della matrice si ritrova nella locazione  $h = j(j+1)/2 + j - i$  dell'array monodimensionale.

Costruite le due matrici  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{B}$ , il controllo è trasferito alla subroutine di libreria "sivib2", trascrizione BASIC del programma FORTRAN presentato da Corr e Jennings [1975]. Questo programma a sua volta fa uso di otto subroutine che — come usuale — vengono indicate con nome in minuscolo.

Calcolati autovalori ed autovettori, la subroutine "AutoSpostamenti" esegue i prodotti matriciali (6.35), calcolando quindi gli spostamenti verticali ed orizzontali connessi all'autovettore generico.

### 6.8. Alcune verifiche

### 6.8.1. Un test di convergenza

Si è preliminarmente effettuato un test di convergenza su di un arco incastrato di 200 metri di luce e 50 metri di freccia, con modulo elastico pari a  $3 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$ , con momento di inerzia variabile con legge parabolica da  $100 \text{ m}^4$  alle imposte a  $50 \text{ m}^4$  in chiave, e soggetto ad un carico uniformemente distribuito di  $1000 \text{ tm}^{-1}$ .

In Figura 6.4 è riportata la curva di convergenza dei primi tre autovalori all'aumentare del numero di coordinate lagrangiane da 3 ad 80, mentre in Tabella 6.1 sono riportati i valori dei tre autovalori. Si possono trarre alcune conclusioni di validità generale:

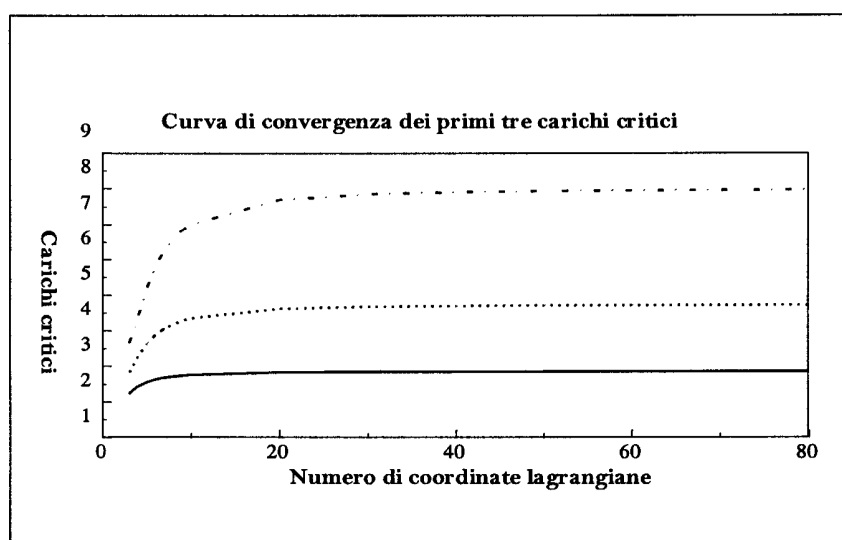


Figura 6.4- Curva di convergenza per i primi tre carichi critici all'aumentare delle coordinate lagrangiane

1. la convergenza avviene dal basso, per valori in difetto
2. la convergenza è più veloce per i primi autovalori, e man mano più lenta per gli autovalori superiori
3. una maggiore precisione si paga in termini di tempo computazionale, secondo il grafico riportato in Figura 6.5. I calcoli sono stati effettuati in doppia precisione con un calcolatore a 66Mh.

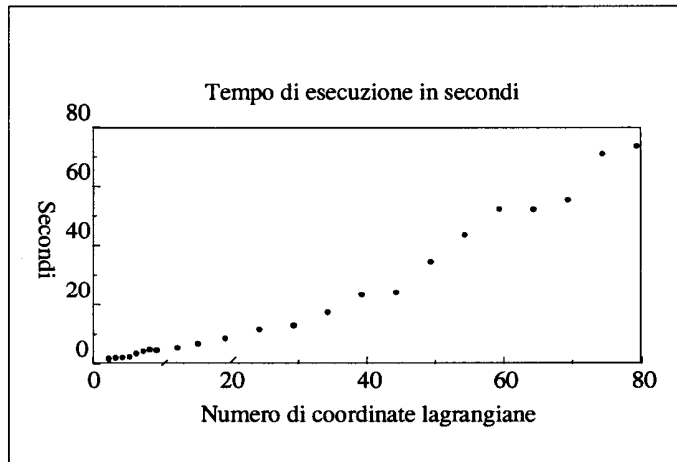


Figura 6.5- Tempo di calcolo i primi tre carichi critici all'aumentare delle coordinate lagrangiane

n	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
3	2.2281	2.7811	3.6086
4	2.4391	3.2573	4.3388
5	2.5574	3.6234	5.1577
6	2.6313	3.8773	5.8140
7	2.6809	4.0546	6.2678
8	2.7160	4.1825	6.5885
9	2.7417	4.2777	6.8259
10	2.7611	4.3503	7.0075
20	2.8318	4.6208	7.6932
30	2.8474	4.6815	7.8502
40	2.8531	4.7044	7.9096
50	2.8559	4.7153	7.9382
60	2.8574	4.7215	7.9541
70	2.8584	4.7252	7.9639
80	2.8590	4.7277	7.9704

Tabella 6.1- I primi tre carichi critici in funzione del numero di coordinate lagrangiane

**6.8.2. L'influenza delle cerniere sul moltiplicatore critico**

Si consideri ora un arco parabolico di 200 metri di luce ed 80 metri di freccia, con modulo di Young pari a  $3 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$  e sezione costante con momento di inerzia pari a  $100 \text{ m}^4$ . Se l'arco si suppone incastrato alle imposte, il file di ingresso dati si presenta come:

---

```

"ARCO DI PROVA",VIDEO,VIDEO
200,60,3e6,0,0
1,3,100,1E-6
FUNC,"INCASTRO","PARABOLA","FUNC"
80,0
100,100,100
100

```

---

La seconda riga contiene la luce, il numero di tratti di divisione, il modulo di Young e le due cedibilità alle imposte. La riga successiva è dedicata ai parametri relativi al calcolo degli autovalori: numero di autovalori da calcolare, numero di vettori da iterare, numero massimo di iterazioni, precisione di calcolo sugli autovettori (la precisione sugli autovalori è circa doppia). In terzultima riga si è posta la freccia ed il rialzo, in penultima riga i momenti di inerzia alle imposte ed in chiave, in ultima riga il valore del carico uniformemente distribuito.

Stesso calcolo si è poi eseguito ponendo una cerniera all'imposta di sinistra, una ulteriore cerniera ad un quarto della luce, ed una terza cerniera all'imposta di destra. Il moltiplicatore critico decresce secondo il seguente schema:

$$\begin{aligned}
 \text{arco incastrato} &\implies \lambda_c = 43.9698 \\
 \text{arco ad 1 cerniera} &\implies \lambda_c = 25.4093 \\
 \text{arco ad 2 cerniere} &\implies \lambda_c = 9.9996 \\
 \text{arco ad 3 cerniere} &\implies \lambda_c = 5.6520
 \end{aligned}
 \tag{6.62}$$

**6.8.3. L'arco rampante**

Si consideri un arco fortemente rampante, con luce di 20 metri uguale al rialzo, e freccia di 5 metri. L'asse sia parabolico, il modulo di Young sia pari a  $3 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$  ed il momento d'inerzia costante e pari a  $0.01 \text{ m}^4$ . I primi tre autovalori sono pari a:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 15.8386 \\
 \lambda_2 &= 27.0101 \\
 \lambda_3 &= 50.2910
 \end{aligned}
 \tag{6.63}$$

e gli spostamenti verticali ed orizzontali ad essi connessi sono riportati in Figura 6.6 e Figura 6.7. Si noti come le componenti orizzontali siano più significative di quelle verticali, e come si discostino dalla usuali forme di simmetria.

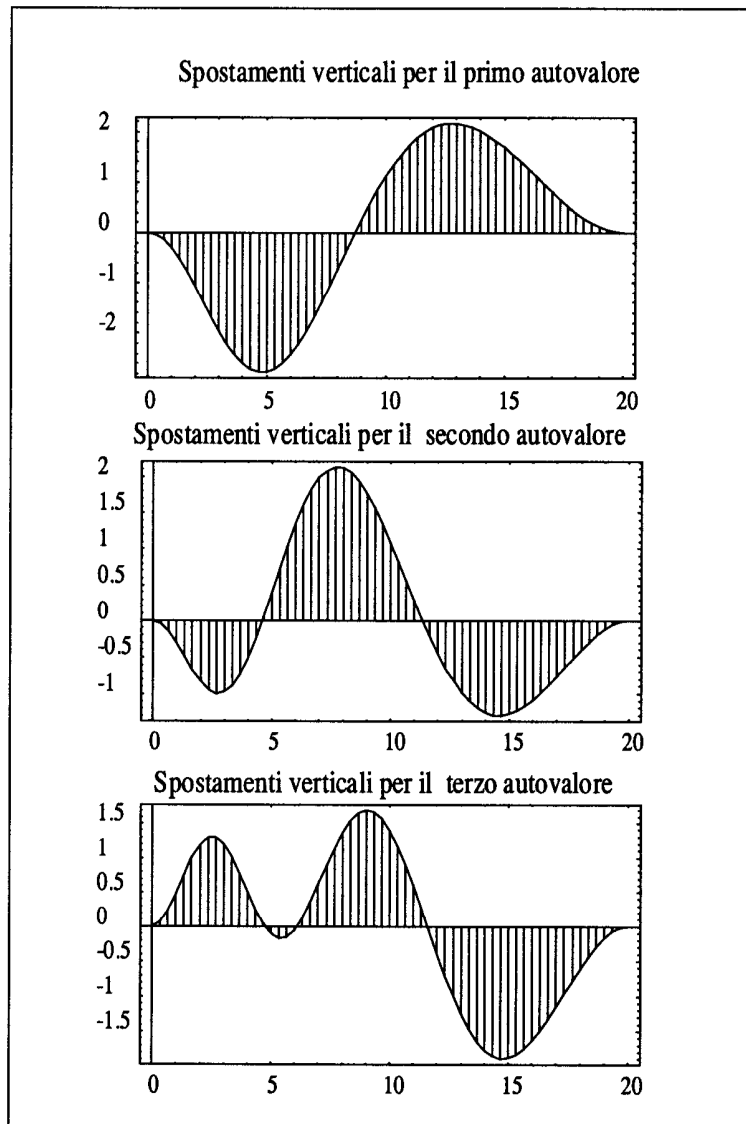


Figura 6.6- Arco rampante: spostamenti verticali dovuti ai primi tre autovalori

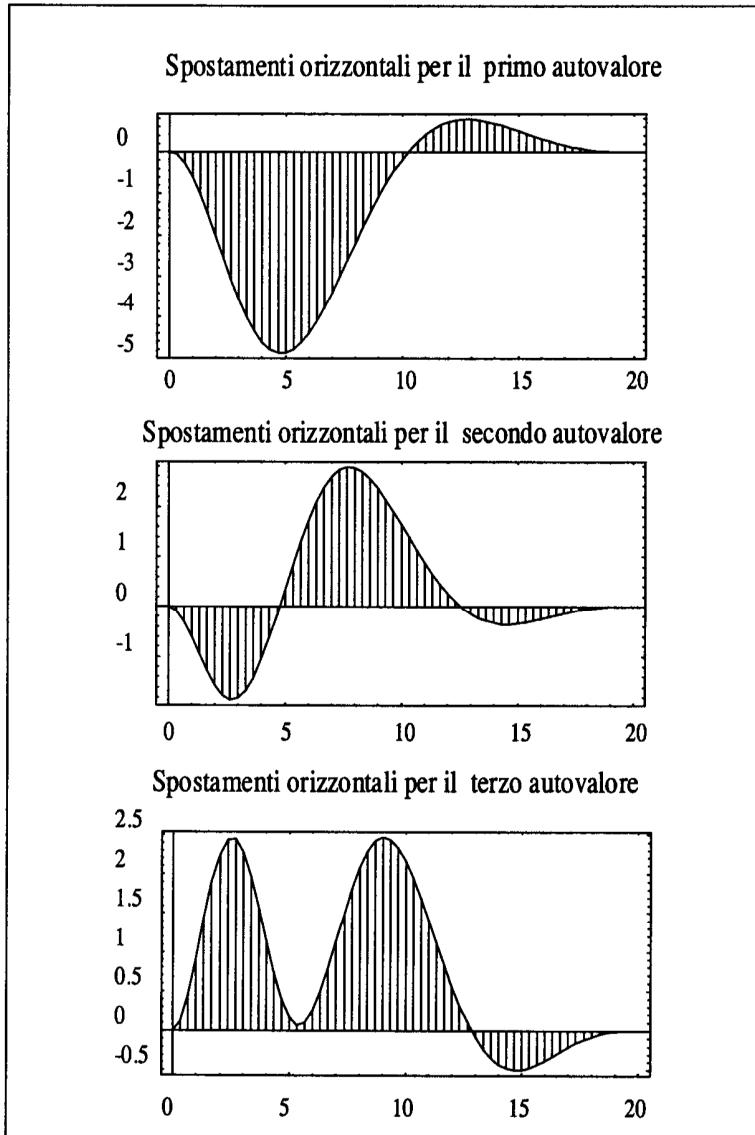


Figura 6.7- Arco rampante: spostamenti orizzontali dovuti ai primi tre autovalori



#### 6.8.4. L'arco a tre cerniere ribassato

E' questo un caso di scarso peso pratico, ma interessante perchè ad esso si associa, se il ribassamento è notevole, un autovettore del primo ordine a deformata simmetrica. In genere ciò non accade, se ci si limita a considerare configurazioni secondarie inestensionali; infatti perchè una deformata simmetrica inestensionale sia possibile occorre che essa presenti due punti di nullo, e questa corrisponde in genere al secondo autovalore.

Nel caso dell'arco a tre cerniere questo tipo di deformata può associarsi al primo autovalore, se la monta  $m = f/l$  è inferiore ad un valore  $m^*$  che per archi a sezione costante è pari all'incirca a 0.3. In questo caso, se l'arco è simmetrico, la deformata corrispondente al secondo autovalore è antisimmetrica, e coincide con la deformata corrispondente al primo autovalore, e cioè al moltiplicatore critico, dell'arco a due cerniere. Se  $m > m^*$  la deformata corrispondente al primo autovalore è antisimmetrica, e quindi il moltiplicatore critico dell'arco a tre cerniere coincide con quello dell'arco a due cerniere.

Si consideri allora un arco di 200 metri di luce e di freccia pari a 20 metri, ossia con  $m = 0.1$ , caratterizzato da un modulo di Young pari a  $3 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2}$  e momento d'inerzia costante e pari a  $100 \text{ m}^4$ . Sia infine soggetto ad un carico uniformemente distribuito di intensità pari a  $100 \text{ tm}^{-1}$ .

Ipotizzando l'esistenza di due cerniere all'imposta, e di una cerniera in chiave si hanno gli autovalori:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 8.53833 \\
 \lambda_2 &= 10.89318 \\
 \lambda_3 &= 43.60031 \\
 \lambda_4 &= 43.64078 \\
 \lambda_5 &= 97.57257 \\
 \lambda_6 &= 97.79199
 \end{aligned}
 \tag{6.64}$$

connessi agli spostamenti di Figura 6.8 e Figura 6.9. Se invece si elimina la cerniera in chiave si ha:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 10.89318 \\
 \lambda_2 &= 24.477 \\
 \lambda_3 &= 43.64078 \\
 \lambda_4 &= 68.03289 \\
 \lambda_5 &= 97.79199 \\
 \lambda_6 &= 132.7026
 \end{aligned}
 \tag{6.65}$$

e si osserva che il secondo autovalore (ed autovettore) dell'arco a tre cerniere vengono a coincidere col primo autovalore (ed autovettore) dell'arco a due cerniere.

Stesso discorso vale per il quarto e sesto autovalore, coincidenti rispettivamente con il terzo e quinto autovalore dell'arco a due cerniere.

Si osservi anche la vicinanza tra il terzo ed il quarto autovalore (ed anche tra il quinto ed il sesto) dell'arco a tre cerniere. Ciò può facilmente condurre a problemi di carichi critici coincidenti (vedi ad esempio Britvec [1973]).

### 6.8.5. Alcuni esempi dalla letteratura

Come primo esempio, si è scelto l'arco presentato in Vandepitte [1985], ad asse parabolico, di luce 10 metri, di freccia 10 metri, e di rigidezza flessionale  $EI = 1000kNm^2$ . Il carico sia uniformemente distribuito, di intensità pari a  $30kN/m$ . Il moltiplicatore critico, secondo quanto riportato in Vandepitte è pari a 1.554, mentre il programma AINS, con il seguente file di dati:

---

```

"ARCO RIALZATO DI VANDEPITTE", CARTAFILES, CARTAFILES
"ES6-4.ING", "ES6-4.USC"
10,65,1000,0,0
3,8,100,1E-10
FUNC, "INCASTRO", "PARABOLA", "FUNC"
10,0,1,1,1,30

```

---

fornisce i primi tre autovalori:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1.5510965 \\ \lambda_2 &= 2.8254903 \\ \lambda_3 &= 4.1568526\end{aligned}\tag{6.66}$$

Come si vede, con una suddivisione in 65 tratti, la differenza tra il valore di Vandepitte e quello del programma è di appena 0.18 percento. Si noti anche che il valore fornito dal programma è a vantaggio di sicurezza.

Un secondo esempio, sempre da Vandepitte, prevede gli stessi dati dell'arco precedente, ma una freccia di 2 metri, e conduce, secondo Vandepitte, ad un moltiplicatore critico di 3.441. Il file di dati per il programma AINS va modificato solo nella terzultima riga, e fornisce:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 3.430658 \\ \lambda_2 &= 5.759719 \\ \lambda_3 &= 9.671291\end{aligned}\tag{6.67}$$

Un modo particolarmente comodo di esprimere il moltiplicatore critico di un carico uniformemente distribuito  $g$  agente su di un arco ad asse parabolico, nell'ipotesi di suolo rigido, è tramite la formula:

$$g_c = \gamma \frac{EI_c}{l^3}\tag{6.68}$$

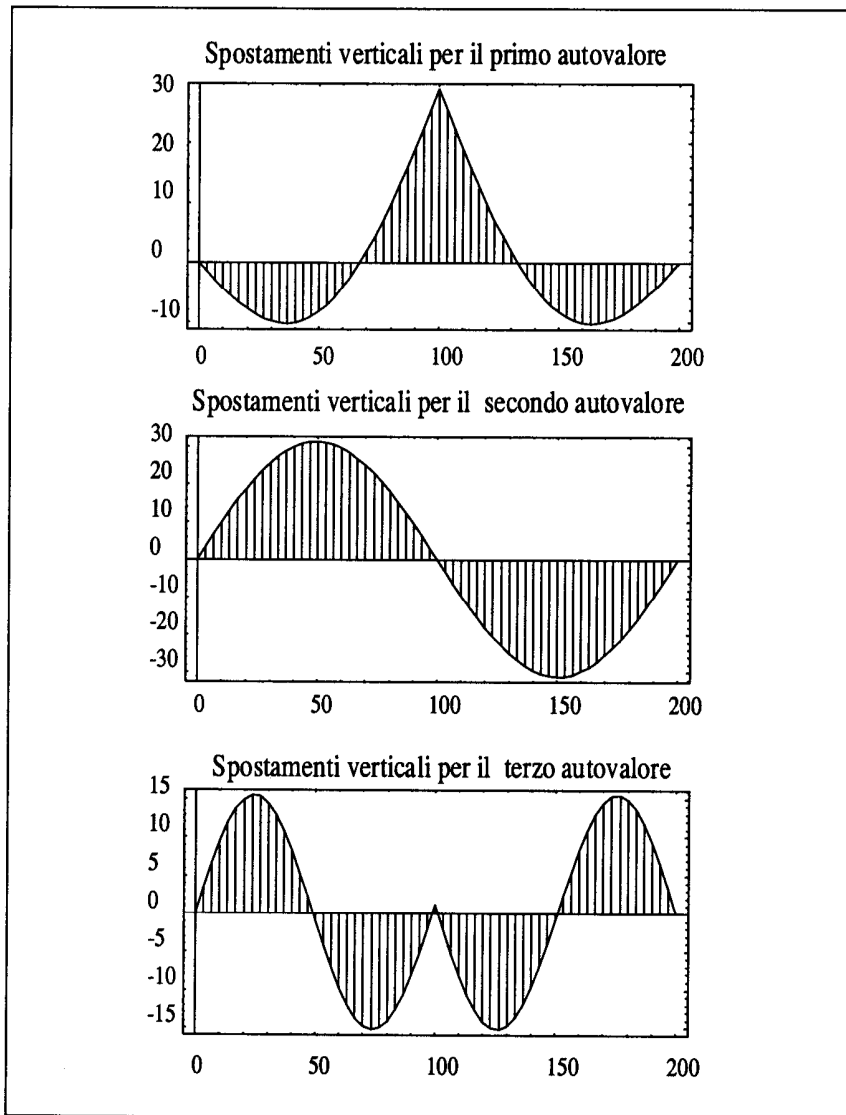
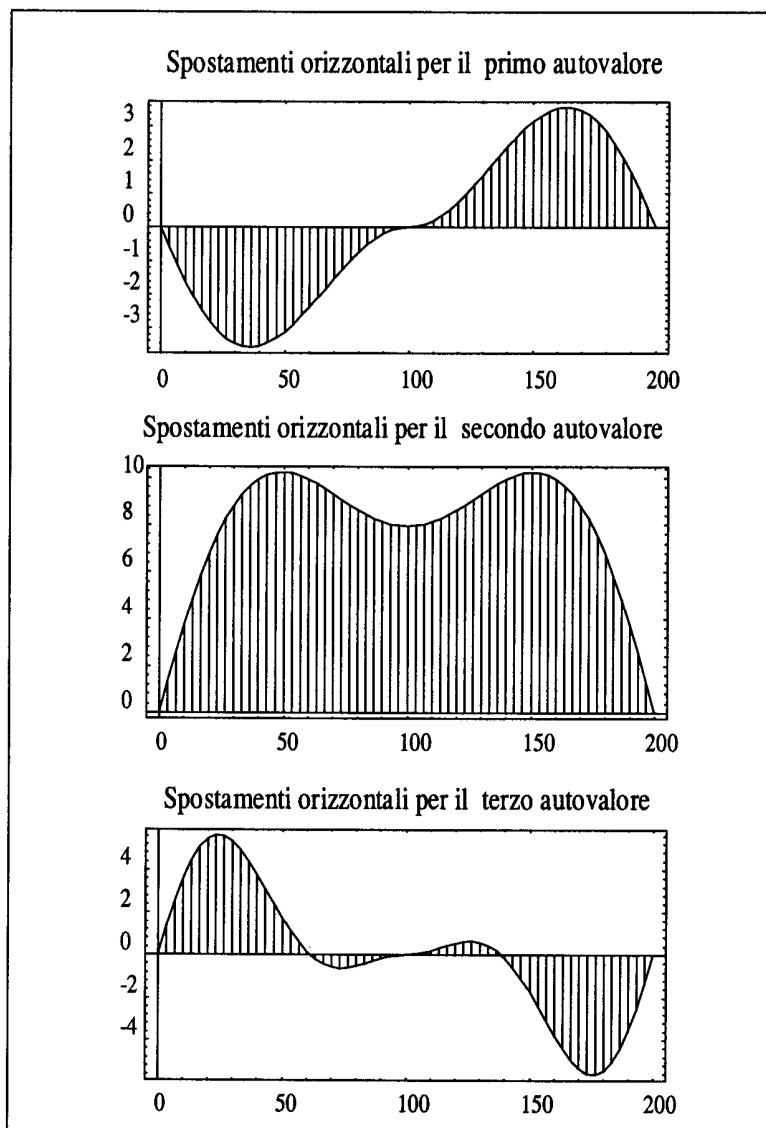


Figura 6.8- Gli spostamenti verticali dovuti ai primi tre autovalori per un arco ribassato a 3 cerniere



*Figura 6.9-* Gli spostamenti orizzontali dovuti ai primi tre autovalori per un arco ribassato a 3 cerniere

dove  $I_c$  è il valore del momento di inerzia caratterizzante una legge di variazione  $I(z)$  del momento di inerzia con l'ascissa, e  $\gamma$  un coefficiente adimensionale dipendente solo da tale legge, e dal rapporto  $m = f/l$ . Infatti, se la struttura varia per similitudine geometrica secondo un coefficiente  $k$ , secondo tale legge varia  $1/g_c$ , che ha dimensione fisica  $[F^{-1}l]$  e secondo tale legge varia anche il rapporto  $I/l^3$ , che ha dimensione fisica  $[l]$ .

Altri mezzi di esprimere il moltiplicatore critico prevedono l'utilizzo della *spinta critica*:

$$H_g = \beta \frac{EI_c}{l^2} \quad (6.69)$$

oppure ancora lo sforzo di compressione ad un quarto della luce (Austin [1971]):

$$P_g = \alpha \frac{EI_c}{S^2} = \pi^2 \frac{EI_c}{(kS)^2} \quad (6.70)$$

dove  $S$  è la metà dello sviluppo dell'asse dell'arco. E' evidente in quest'ultima formula il desiderio di richiamare la ben nota formula di Eulero per le aste rettilinee.

In Tabella 6.2 si sono riportati i coefficienti  $\gamma$  per arco incastrato a sezione costante, con monta variabile da 0.1 a 1, così come ottenuti secondo il metodo proposto (con 60 tratti di divisione), secondo Timoshenko-Gere [1961], Austin [1971], Austin-Ross [1976], Van der Woude-Cousins [1979] e Vandepitte [1985].

$f/l$	C.D.M.	Timoshenko	Austin	Austin-Ross	Van der Woude	Vandepitte
0.1	60.795	60.7	60.64	60.93	60.929	—
0.2	102.887	101.0	100.96	103.11	103.106	103.2
0.3	119.787	115.0	114.96	120.05	120.041	—
0.4	117.253	111.0	111.04	117.53	117.512	—
0.5	105.049	97.4	97.60	105.31	—	—
0.6	90.295	83.8	—	—	—	—
0.7	76.391	—	—	—	—	—
0.8	64.451	59.1	—	—	—	—
0.9	54.575	—	—	—	—	—
1	46.513	43.7	—	—	—	46.6

Tabella 6.2- I coefficienti critici per arco incastrato a sezione costante

Si nota subito una sostanziale concordanza tra i risultati forniti dal programma AINS, da Austin-Ross, Van der Woude e Vandepitte, mentre i risultati di Timoshenko-Gere ed Austin — quasi coincidenti tra loro — sono notevolmente più bassi. Già Van der Woude notava questa discrepanza, ma annotava: "at this stage the writers can see no obvious reason for such discrepancies". Solo in seguito, Vandepitte precisava

che “les valeurs reprises dans le tableau de Timoshenko et Gere ont été calculées en négligeant l’effet favorable du déplacement horizontal de la charge extérieure sur son intensité critique”. Analogo appunto può essere mosso alla tabella riportata in Austin [1971]. Si veda anche Raithel-Franciosi [1985].

In Tabella 6.3 sono riportati i valori del coefficiente adimensionale per un arco a 2 cerniere a sezione costante, ed in Tabella 6.4 è riportato il coefficiente per arco ad 1 cerniera in chiave, e per arco a 3 cerniere. Ovunque si nota che — soprattutto per archi rialzati — i valori effettivi del carico critico sono superiori a quelli riportati da Timoshenko-Gere.

$f/l$	C.D.M.	Timoshenko	Austin	Austin-Ross	Van der Woude
0.1	29.048	28.5	28.48	29.07	29.074
0.2	46.064	45.4	45.44	46.10	46.103
0.3	49.416	46.5	46.56	49.46	49.457
0.4	44.970	43.9	43.84	45.01	45.008
0.5	38.165	38.4	38.40	38.20	—
0.6	31.595	30.5	—	—	—
0.7	26.050	—	—	—	—
0.8	21.587	20.0	—	—	—
0.9	18.046	—	—	—	—
1	15.235	14.1	—	—	—

Tabella 6.3- I coefficienti critici per arco a 2 cerniere a sezione costante

Un caso di interesse classico — poichè permette alcuni sviluppi analitici — è quello di arco a sezione retta variabile secondo la legge:

$$I(z) = I_0 \sec \alpha(z) \quad (6.71)$$

facilmente riproducibile da programma ponendo  $w = -1$ . In Tabella 6.5 e Tabella 6.6 sono riportati i coefficienti adimensionali per arco incastrato e per arco a 2 cerniere, paragonati con i coefficienti riportati da Austin [1971] e con i risultati ottenuti applicando la formula approssimata di Aas-Jakobson (come riprodotta da Wastlund [1960]):

$$\begin{aligned} \text{arco incastrato} &\implies \gamma = \frac{646.4}{1 + 4(f/l)^2} \frac{f}{l} \\ \text{arco a 2 cerniere} &\implies \gamma = \frac{316}{1 + 7.2(f/l)^2} \frac{f}{l} \end{aligned} \quad (6.72)$$

In Tabella 6.7 sono infine forniti i carichi critici adimensionali per archi ad 1 cerniera ed a 3 cerniere. Poichè le tabelle di Austin [1971] sono limitate a bassi valori del rapporto  $f/l$ , le discrepanze sono molto basse.

$f/l$	C.D.M. 1 cerniera	Timoshenko 1 cerniera	C.D.M. 3 cerniere	Timoshenko 3 cerniere	Austin 3 cerniere
0.1	33.917	33.8	22.769	22.5	22.48
0.2	61.709	59.0	40.205	39.6	39.68
0.3	79.953	—	49.416	46.5	46.56
0.4	88.215	96.0	44.970	43.9	43.84
0.5	88.319	—	38.165	38.4	38.40
0.6	83.147	80.0	31.595	30.5	—
0.7	75.415	—	26.050	—	—
0.8	64.451	59.1	21.587	20.0	—
0.9	54.575	—	18.046	—	—
1	46.513	43.7	15.235	14.1	—

Tabella 6.4- I coefficienti critici per arco ad 1 e 3 cerniere a sezione costante

$f/l$	C.D.M.	Austin	Aas-Jakobson
0.1	62.367	62.56	62.154
0.2	113.359	113.28	111.448
0.3	146.788	146.40	142.588
0.4	163.204	163.52	157.659
0.5	167.189	167.20	161.600
0.6	163.763	—	158.950
0.7	156.611	—	152.870
0.8	147.961	—	145.258
0.9	139.014	—	137.208
1	130.364	—	129.280

Tabella 6.5- I coefficienti critici per arco incastrato.  
Sezione variabile con la legge  $I(z) = I_c \sec \alpha(z)$ 

Un ulteriore caso di variazione di sezione studiato in letteratura è:

$$I(z) = I_0 \sec^3 \alpha(z) \quad (6.73)$$

e l'arco risulta molto più spesso alle imposte che non in chiave. I coefficienti adimensionali sono notevolmente più elevati che non nei casi precedenti, e — per archi rialzati — le discrepanze tra i risultati del programma e quelli di Timoshenko-Gere risultano significativi, come può osservarsi dalla Tabella 6.8 e dalla Tabella 6.9.

Tutti i coefficienti critici riportati corrispondono a deformate antisimmetriche, salvo quelli per arco a 3 cerniere ribassato. Una formula approssimata che permette il

calcolo del primo moltiplicatore critico per deformate simmetriche è fornita ancora una volta da Aas-Jakobson (vedi Wastlund [1960]) per arco con sezione variabile secondo la legge  $I(z) = I_c \sec \alpha(z)$ :

$$\begin{aligned} \text{arco incastrato} &\Rightarrow \gamma = \frac{1063.2}{1 + 4(f/l)^2} \frac{f}{l} \\ \text{arco a 2 cerniere} &\Rightarrow \gamma = \frac{722.4}{1 + 5.6(f/l)^2} \frac{f}{l} \end{aligned} \quad (6.74)$$

f/l	C.D.M.	Austin	Aas-Jakobson
0.1	29.718	29.76	29.478
0.2	50.437	50.56	49.068
0.3	60.086	60.24	57.524
0.4	61.922	62.08	58.736
0.5	59.752	60.00	56.429
0.6	55.996	—	52.784
0.7	51.857	—	48.851
0.8	47.855	—	45.079
0.9	44.185	—	41.628
1	40.894	—	38.537

Tabella 6.6- I coefficienti critici per arco a 2 cerniere.  
Sezione variabile con la legge  $I(z) = I_c \sec \alpha(z)$

f/l	C.D.M. 1 cerniera	C.D.M. 3 cerniere	Austin 3 cerniere
0.1	34.670	23.288	23.52
0.2	67.028	43.914	44.32
0.3	95.059	59.872	60.24
0.4	117.358	61.922	62.08
0.5	133.343	59.752	60.00
0.6	143.271	55.996	—
0.7	148.042	51.857	—
0.8	147.961	47.855	—
0.9	139.014	44.185	—
1	130.364	40.894	—

Tabella 6.7- I coefficienti critici per arco ad 1 e 3 cerniere.  
Sezione variabile con la legge  $I(z) = I_c \sec \alpha(z)$



In Tabella 6.10 sono forniti alcuni paragoni numerici tra i carichi critici forniti dal programma e quelli forniti dalle formule. Come si può agevolmente osservare, le formule giungono sempre a risultati approssimati per difetto, e quindi operano a vantaggio di sicurezza, e l'approssimazione è ovunque sorprendentemente buona.

f/l	C.D.M. Incastrato	Timoshenko Incastrato	Austin Incastrato	C.D.M. 1 cerniera	Timoshenko 1 cerniera
0.1	65.596	65.5	65.60	36.205	36.5
0.2	136.530	134.0	134.08	78.402	75.8
0.3	213.880	204.0	203.76	129.900	—
0.4	296.090	277.0	277.12	191.830	187.0
0.5	381.230	—	382.00	264.277	—
0.6	467.830	444.0	—	346.854	332.0
0.7	554.940	—	—	438.913	—
0.8	642.000	587.0	—	539.640	497.0
0.9	728.720	—	—	648.123	—
1	814.940	700.0	—	763.340	697.0

Tabella 6.8- I coefficienti critici per arco incastrato ed a 2 cerniere.  
Sezione variabile con la legge  $I(z) = I_c \sec^3 \alpha(z)$

f/l	C.D.M. 2 cerniere	Timoshenko 2 cerniere	Austin 2 cerniere	C.D.M. 3 cerniere	Timoshenko 3 cerniere
0.1	31.072	30.7	30.72	24.340	24.0
0.2	59.734	59.8	59.84	51.796	51.2
0.3	85.174	81.1	81.12	84.08	81.1
0.4	107.830	101.0	101.12	107.830	101.0
0.5	128.478	—	117.60	128.478	—
0.6	147.738	142.0	—	147.738	142.0
0.7	166.060	—	—	166.060	—
0.8	183.737	170.0	—	183.737	170.0
0.9	200.963	—	—	200.963	—
1	217.865	193.0	—	217.865	193.0

Tabella 6.9- I coefficienti critici per arco ad 1 e 3 cerniere.  
Sezione variabile con la legge  $I(z) = I_c \sec^3 \alpha(z)$

Si vuole infine studiare un caso che non rientra strettamente nelle ipotesi in cui si è operato nel presente capitolo.

Si consideri un arco di sezione costante ed asse parabolico, soggetto ad un carico uniformemente distribuito *lungo l'asse*, per cui l'asse non risulta più funicolare del carico. Di conseguenza si avranno spostamenti e momenti flettenti prima del rag-

giungimento della soglia critica del moltiplicatore, tanto più significativi quanto più l'arco è rialzato.

In Tabella 6.11 sono riportati i valori dei carichi critici per archi incastrati ed a 2 cerniere, così come ottenuti dal programma AINS (trascurando quindi la fase pre-critica) e come riportati da Austin-Ross [1976]. I carichi critici reali sono questa volta inferiori — come ovvio — a quelli calcolati da programma.

## 6.9. Un esempio concreto

Si sceglie ancora una volta come esempio il ponte di 400 metri di luce e 66 metri di freccia, il cui asse è già stato determinato nel capitolo 2. Operando con 34 tratti di divisione, con le quote, le forze, i momenti di inerzia calcolati in precedenza, si hanno i primi tre autovalori:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 20.106017 \\ \lambda_2 &= 31.253666 \\ \lambda_3 &= 57.109923\end{aligned}\tag{6.75}$$

Naturalmente un valore così alto è compatibile con le ipotesi di elasticità lineare, sotto cui la teoria è stata sviluppata, solo se la massima compressione sotto il peso proprio è non maggiore di  $\sigma_p/20.1$ . Poichè il valore della spinta  $H$  (cfr.2.39) è di 118604  $t$ , e l'area della sezione di mezzeria è di 114  $m^2$ , la compressione in mezzeria è di circa 100  $Kg\,cm^{-2}$ . La reazione all'imposta è invece pari a  $1.2H$ , mentre l'area è 131.53  $m^2$ ; la compressione all'imposta è quindi pressocchè uguale a quella in chiave.

Ciò importa una correzione al calcolo del moltiplicatore critico, poichè il prodotto  $100 \cdot 20$  è ben più elevato della stessa compressione di rottura. Poichè le compressioni sono quasi coincidenti, si può usare un unico modulo tangente  $E_t$ . Se si chiama  $\lambda_{ct}$  il moltiplicatore corretto, e si pone:

$$\lambda_{ct} = 20/5 = 4,\tag{6.76}$$

sotto tale valore è  $\sigma = 100 \cdot 4 = 400\,Kg\,cm^{-2}$ ; d'altro canto si ha un  $\lambda_{ct} = \lambda_c/5$  se  $E_t = E/5 = 60000\,Kg\,cm^{-2}$ .

Se alla  $\sigma$  pari a 400  $kg\,cm^{-2}$  corrisponde tale valore di  $E_t$ , allora il valore (6.75) è corretto.

f/l	C.D.M. Incastrato	Aas-Jakobson Incastrato	C.D.M. 2 cerniere	Aas-Jakobson 2 cerniere
0.1	102.78	102.23	66.87	66.51
0.2	188.59	183.31	116.75	114.77
0.3	247.06	234.53	143.27	140.10
0.4	277.55	259.32	151.03	148.19
0.5	286.49	265.80	147.98	146.33
0.6	282.02	261.44	140.07	139.73
0.7	270.55	251.43	130.58	131.32
0.8	256.12	238.92	121.05	122.58
0.9	240.94	225.68	112.13	114.19
1	226.13	212.64	104.02	106.42

Tabella 6.10- I coefficienti critici per deformate simmetriche.  
Sezione variabile con la legge  $I(z) = I_c \sec \alpha(z)$

f/l	C.D.M. Incastrato	Austin-Ross Incastrato	C.D.M. 2 cerniere	Austin-Ross 2 cerniere
0.1	60.77	60.4	29.01	28.6
0.15	84.73	83.4	39.22	38.2
0.2	102.12	99.3	45.33	43.4
0.25	112.28	107.7	47.44	44.9
0.3	115.42	109.6	46.31	43.5
0.35	112.55	106.4	43.02	40.4
0.4	105.21	100.0	38.59	36.5
0.45	95.20	-	33.81	-
0.5	84.14	83.0	29.19	28.5

Tabella 6.11- I coefficienti critici per arco incastrato ed a 2 cerniere.  
Sezione costante. Carichi distribuiti lungo l'asse

Il peso proprio, se fosse uniformemente distribuito, avrebbe una intensità di circa  $505 \text{ tm}^{-1}$ , e porterebbe — nell'ipotesi associata di arco parabolico — ai primi tre autovalori:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 15.87576 \\ \lambda_2 &= 25.7595 \\ \lambda_3 &= 45.13028\end{aligned}\tag{6.77}$$

con una riduzione nel rapporto:

$$\frac{15.87576}{20.106017} = 0.79 \quad (6.78)$$

Questo è l'ordine di grandezza dell'errore che si commette usando l'approssimazione dell'uniforme distribuzione del peso proprio.

## 6.10. Spostamenti e caratteristiche in teoria del secondo ordine

Si è calcolato il moltiplicatore critico  $\lambda_c$  del peso proprio per avere una misura del grado di stabilità della configurazione dell'arco in tale situazione. Più importante forse è eseguire il calcolo in secondo ordine della struttura sotto i carichi accidentali, come già esposto nel quinto paragrafo. Se l'arco è sottile possono così aversi maggiorazioni anche notevoli rispetto ai risultati ottenuti seguendo la via classica, e cioè quella esposta nel capitolo 4. A questo proposito si tenga presente una osservazione che stranamente non è sempre evidenziata dai cultori di teoria delle strutture. Se si opera secondo il metodo delle forze, così come nel capitolo 4, si adotta implicitamente la teoria del primo ordine, poichè si calcolano le caratteristiche sulla configurazione indeformata; si basa cioè il calcolo sull'ipotesi di piccoli spostamenti.

Si ottengono così le reazioni iperstatiche, e da queste i momenti, i tagli, gli sforzi normali. Se da questi si risale agli spostamenti, il fatto che essi siano soddisfacentemente piccoli non può confortare sulla giustezza dell'ipotesi di piccolezza; se questa infatti non fosse accettabile, le caratteristiche risulterebbero falsate.

Operando invece secondo il metodo degli spostamenti, sono questi le incognite del problema; se operando in primo ordine si verifica che essi sono piccoli, si può asserire che l'ipotesi è plausibile, e viceversa.

In Appendice 6.2 è riportato il listato del programma AS2, diretto al calcolo degli spostamenti e dei momenti in teoria del secondo ordine e, come usuale, sono trascritte solo le subroutine nuove o sostanzialmente modificate. Il peso proprio dipende dal moltiplicatore  $\lambda$ , per  $\lambda = 0$  si hanno gli spostamenti in teoria del primo ordine, per  $\lambda = 1$  invece gli spostamenti in teoria del secondo ordine sotto il peso proprio reale. Si deve verificare che se  $\lambda$  è prossimo ad un autovalore gli spostamenti divengono inammissibilmente elevati.

In sintesi, il programma costruisce e risolve il sistema di equazioni lineari:

$$(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{c} = \mathbf{b} \quad (6.79)$$

e tutta la parte relativa alla costruzione delle matrici  $\mathbf{K}$  di rigidezza globale, e  $\mathbf{B}$  di rigidezza geometrica è identica a quella discussa per il programma AINS. Le tre subroutine relative, "RigidezzeLocali", "RigidezzeGlobali" e "RigidezzeGeometriche" non sono quindi riprodotte.

Il vettore dei termini noti  $\mathbf{b}$  va calcolato secondo la (6.39), e quindi vanno costruite le matrici di trasferimento  $\mathbf{V}$  e  $\mathbf{W}$ , secondo le (6.31) e (6.33). Ciò è fatto nella subroutine "Trasferimento".

Successivamente si chiama la subroutine "SecondoMembro", che costruisce il vettore  $\mathbf{b}$  dei termini noti, operando le moltiplicazioni matriciali della (6.39), costruendo i vettori  $\mathbf{d}$  (cfr. 6.53, 6.54) e  $\mathbf{t}$ , e svolgendo la (6.59). Ciò fatto, tutto è pronto per risolvere il sistema di equazioni lineari, che viene affrontato con il metodo di A. Jennings (cfr. Corr e Jennings [1976]).

Calcolate quindi le rotazioni con la subroutine "Soluzione", si passa a dedurre gli spostamenti (subroutine "Spostamenti2") ed i momenti flettenti (subroutine "Momenti")

### 6.11. Un esempio

Si prende in considerazione un arco ad asse parabolico, di 200 metri di luce e 50 metri di freccia, soggetto ad un carico uniformemente distribuito  $g$  di intensità pari a  $225 \text{ tm}^{-2}$ . L'arco è costituito da due elementi paralleli, ciascuno con base  $b = 6.66 \text{ m}$ , la sezione è piena, alta in chiave 3 metri, per cui  $I_c = 30 \text{ m}^4$ . Alle imposte invece  $I = 60 \text{ m}^4$ , e la legge di variazione sarà parabolica. Infine, si sceglie una discretizzazione in 15 tratti, e si ipotizzano rigide le imposte.

Come primo esempio si considera un carico accidentale di tipo simmetrico, costituito da due forze verticali concentrate, di intensità pari a 5000 t, agenti alle dividenti 4 e 13, e da una variazione termica  $\Delta t$  di 25 gradi. Se si pone  $\lambda = 0$ , calcolando quindi i risultati in teoria del primo ordine, si ha il seguente file di ingresso dati:

---

```

"ARCO DI PROVA",VIDEOFILES,VIDEOFILES,"ES6-19.ING","ES6-19.USC"
200,15,3000000,0,0,0.00001,25,0
FUNC,"INCASTRO","PARABOLA",DATI
50,0,60,30,60
1500,3000,3000,3000,3000,3000,3000
3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000,1500
0,0,0,5000,0,0,0,0,0,0,0,0,0,5000,0,0,0
0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0
22500

```

---

La quintultima e quartultima riga contengono le forze verticali concentrate da peso proprio, equivalenti al carico  $g$  ipotizzato, la terzultima riga contiene il carico verticale accidentale, la penultima riga il carico orizzontale accidentale (nullo), e l'ultima riga contiene il valore della spinta.

Il programma AS2 fornisce:

---

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
-----------	-----------------	-------------------

1	0	0
2	1.81394559452079D-02	2.31671959192311D-02
3	5.58934643528245D-02	.058837069311991
4	7.42674519043096D-02	7.59012091611292D-02
5	1.76686520358227D-02	4.99966640460844D-02
6	-6.92667720350334D-02	1.90891610844086D-02
7	-.14962454877403	1.23079099104665D-03
8	-.196799925651329	-1.6666666666673D-03
9	-.196799925651328	1.66666666666603D-03
10	-.149624548774034	-1.23079099104737D-03
11	-6.92667720350388D-02	-1.90891610844089D-02
12	1.76686520358219D-02	-4.99966640460865D-02
13	7.42674519043129D-02	-7.59012091611336D-02
14	5.58934643528328D-02	-5.88370693119987D-02
15	1.81394559452154D-02	-2.31671959192382D-02
16	-3.52912756130167D-17	-4.00341652190273D-17

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
-----------	-------------------

1	-31459.0614743325
2	-12907.5974384637
3	12517.4669732466
4	44816.1317607879
5	17321.730257482
6	-3299.07086999378
7	-17046.2716216519
8	-23919.8719974773
9	-23919.8719974749
10	-17046.2716216532
11	-3299.07086999716
12	17321.7302574824
13	44816.1317607874
14	12517.4669732503
15	-12907.597438459
16	-31459.0614743441

TEMPO DI ESECUZIONE = 9.23046875 SEC.

RUN DEL 10-18-1994 ORE 11:55:23

Per ottenere invece i risultati in secondo ordine sotto il peso proprio reale, occorre sostituire l'ultimo dato della seconda riga del file di ingresso dati, ponendo  $\lambda = 1$ . Si ha:

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	2.05591698303633D-02	2.54255955453761D-02
3	6.26688220159434D-02	6.45799839605069D-02
4	8.31056875868268D-02	8.30193758225773D-02
5	2.33532263907331D-02	5.54328779994755D-02
6	-7.05689766971671D-02	2.17306634309821D-02
7	-.158452565392966	1.86541014913934D-03
8	-.210387585955966	-1.66666666666809D-03
9	-.210387585955966	1.66666666666524D-03
10	-.158452565392969	-1.86541014914176D-03
11	-7.05689766971691D-02	-2.17306634309847D-02
12	2.33532263907338D-02	-5.54328779994792D-02
13	8.31056875868324D-02	-8.30193758225836D-02
14	.062668822015956	-6.45799839605179D-02
15	2.05591698303701D-02	-2.54255955453827D-02
16	-3.86334074983945D-17	-4.00341652190273D-17

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	-35041.1742556837
2	-14211.0957652357
3	13965.1539209192
4	47916.0216524112
5	19478.7778708529
6	-3009.1232028175
7	-18486.5831835507
8	-26356.1612343582
9	-26356.1612343561
10	-18486.5831835528
11	-3009.12320281847
12	19478.7778708517
13	47916.02165241
14	13965.1539209273
15	-14211.0957652351
16	-35041.1742556939

TEMPO DI ESECUZIONE = 1.3203125 SEC.

RUN DEL 10-18-1994 ORE 11:55:34

con un leggero aumento sia degli spostamenti verticali che dei momenti flettenti. Analoghi aumenti si ottengono nel caso di un carico antisimmetrico costituito da due

forze orizzontali pari a 5000 *t* in corrispondenza delle dividenti 4 e 13. Per  $\lambda = 0$  infatti, si ha:

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	5.89683221281186D-02	5.50371006529107D-02
3	.169572774374002	.143520662449617
4	.266126451725256	.207889780683787
5	.289271658222308	.220233890815548
6	.252125111799087	.20537527224626
7	.169924587728772	.183455132494175
8	5.97979274586276D-02	.16877157779149
9	-5.97979274586239D-02	.16877157779149
10	-.169924587728766	.183455132494175
11	-.252125111799079	.205375272246259
12	-.289271658222299	.220233890815547
13	-.266126451725259	.207889780683792
14	-.169572774374014	.143520662449629
15	-5.89683221281287D-02	5.50371006529203D-02
16	3.65043657836463D-17	-1.46244274802002D-16

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	-87295.9326661874
2	-34767.5860884906
3	8871.87160033626
4	43622.4404002843
5	33928.5647557859
6	24234.6891112744
7	14540.8134667643
8	4846.93782225416
9	-4846.93782225505
10	-14540.8134667649
11	-24234.6891112731
12	-33928.5647557791
13	-43622.4404002855
14	-8871.87160034428
15	34767.5860884858
16	87295.9326662023

TEMPO DI ESECUZIONE = 1.2578125 SEC.



RUN DEL 10-18-1994 ORE 11:55:44

mentre tenendo conto degli effetti instabilizzanti del peso proprio si ha:

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	6.49700510540067D-02	.060638714317073
3	.189749603455762	.160462356238477
4	.300878378545815	.234548206298512
5	.331858209097879	.251070782592947
6	.292688888510451	.235403054357975
7	.198851994276107	.21037988256215
8	.070259402345411	.193234203638058
9	-7.02594023453936D-02	.193234203638058
10	-.198851994276091	.210379882562151
11	-.292688888510442	.235403054357978
12	-.331858209097874	.25107078259295
13	-.300878378545822	.234548206298523
14	-.189749603455783	.160462356238496
15	-6.49700510540243D-02	6.06387143170898D-02
16	4.16719522153169D-17	-1.64750974755237D-16

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	-96180.8136546056
2	-40270.8720090962
3	8619.30708181122
4	47627.9169906437
5	39475.7143675526
6	29405.87537416
7	18096.8864970666
8	6104.59641579739
9	-6104.59641579657
10	-18096.8864970633
11	-29405.8753741626
12	-39475.7143675471
13	-47627.9169906435
14	-8619.30708182178
15	40270.8720090861
16	96180.8136546329

TEMPO DI ESECUZIONE = 1.3203125 SEC.

RUN DEL 10-18-1994 ORE 11:55:54

Questo aumento tutto sommato moderato è dovuto al fatto che il moltiplicatore critico è molto lontano dall'unità. Ed infatti, i primi tre moltiplicatori critici per l'arco in esame, calcolati con il programma AINS, sono pari a:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 7.4602409 \\ \lambda_2 &= 11.969557 \\ \lambda_3 &= 19.614878\end{aligned}\tag{6.80}$$

ed i risultati dell'esempio precedente, in cui però si ponga  $\lambda = \lambda_1$  sono:

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	120609061.865643	112568457.741267
3	431563918.49042	361332343.041088
4	790124018.824177	600372409.93026
5	1031928358.19973	729334724.263889
6	1035578714.15869	730794866.647471
7	765511367.415784	658776907.51603
8	281915119.057302	594297407.734899
9	-281915119.057078	594297407.734899
10	-765511367.415611	658776907.516037
11	-1035578714.15861	730794866.647503
12	-1031928358.19977	729334724.263967
13	-790124018.824338	600372409.930404
14	-431563918.490609	361332343.041252
15	-120609061.865736	112568457.741354
16	1.199339946214D-07	-4.02655441771158D-07

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	-178548077401284
2	-128163434997496
3	-30058670276630.5
4	69381246667085.8
5	134018708311291
6	147233691133584
7	111182009066270
8	41068873760769.9
9	-41068873760743.6

10 -111182009066249  
 11 -147233691133571  
 12 -134018708311287  
 13 -69381246667142.8  
 14 30058670276552  
 15 128163434997498  
 16 178548077401422

TEMPO DI ESECUZIONE = 1.31640625 SEC.

RUN DEL 10-18-1994 ORE 11:56:17

Appare evidente che la sola utilità pratica risiede nell'avvertire che l'ipotesi di piccoli spostamenti non è più valida.

Un caso di carico interessante è quello delle forze sismiche, poste in intensità pari ad un decimo del peso proprio. Se esse sono ipotizzate agenti in verticale, saranno verso il basso nella semiluce di sinistra, e verso l'alto nella semiluce di destra, dando luogo al file di ingresso dati:

"ARCO DI PROVA",VIDEOFILS,VIDEOFILS,"ES6-26.ING","ES6-26.USC"

200,15,3000000,0,0,0.00001,0,1

FUNC, "INCASTRO", "PARABOLA", DATI

50,0,60,30,60

1500,3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000

3000,3000,3000,3000,3000,3000,3000,1500

150,300,300,300,300,300,300,225

-225,-300,-300,-300,-300,-300,-300,-150

0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0

22500

ed ai risultati (antisimmetrici come i carichi):

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	2.22830023568773D-02	2.07974688664189D-02
3	6.66418732330812D-02	5.62845655673819D-02
4	.111067275784924	8.59015006019439D-02
5	.137676610967416	.100093146032606
6	.134891672506992	9.89791706484366D-02
7	9.92869240084214D-02	8.94845710488178D-02
8	3.68310582781509D-02	8.11571222847817D-02
9	-3.68310582781473D-02	8.11571222847817D-02
10	-9.92869240084178D-02	8.94845710488178D-02
11	-.13489167250699	.098979170648437

12	-.137676610967413	.100093146032606
13	-.111067275784925	8.59015006019458D-02
14	-6.66418732330869D-02	5.62845655673872D-02
15	-2.22830023568834D-02	2.07974688664242D-02
16	1.58116846276411D-17	-5.34974999474677D-17

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	-32987.4651871585
2	-14864.1011143442
3	-42.0091054088821
4	10587.0661511328
5	16541.3256115109
6	17653.8883912914
7	13981.0636260798
8	5736.073974457
9	-5736.07397445698
10	-13981.063626079
11	-17653.8883912929
12	-16541.3256115081
13	-10587.0661511321
14	42.0091054058736
15	14864.10111434
16	32987.4651871673

TEMPO DI ESECUZIONE = 1.26953125 SEC.

RUN DEL 10-18-1994 ORE 11:56:25

Se invece si suppone che le forze sismiche agiscano in orizzontale, ad esempio verso destra, si ha:

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	2.31479492349598D-02	2.16047526192959D-02
3	6.52192971741121D-02	5.52618309706176D-02
4	.103442898718653	8.07442320003116D-02
5	.122442530947398	9.08773691889753D-02
6	.114920666240424	8.78686233061858D-02
7	8.14704388681244D-02	7.89485626735726D-02
8	2.94050184889636D-02	7.20065066230179D-02
9	-2.94050184889581D-02	7.20065066230179D-02
10	-8.14704388681195D-02	7.89485626735727D-02

11	-.114920666240421	8.78686233061865D-02
12	-.122442530947395	9.08773691889762D-02
13	-.103442898718655	8.07442320003147D-02
14	-6.52192971741188D-02	5.52618309706238D-02
15	-2.31479492349659D-02	2.16047526193015D-02
16	1.48548850430704D-17	-5.16393791600695D-17

---

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
-----------	-------------------

---

1	-34267.9212304027
2	-12741.4833767431
3	2429.52521975851
4	11423.7014608404
5	14924.7000231327
6	13946.9552118235
7	9692.71392303295
8	3452.3249872283
9	-3452.32498722802
10	-9692.7139230319
11	-13946.9552118247
12	-14924.7000231306
13	-11423.7014608401
14	-2429.52521976182
15	12741.4833767393
16	34267.9212304119

TEMPO DI ESECUZIONE = 1.2109375 SEC.

RUN DEL 10-18-1994 ORE 11:56:34

---

Infine, se l'arco è soggetto a forze accidentali proporzionali a quelle da peso proprio, sono da attendersi spostamenti e momenti flettenti nulli. Ed infatti se le forze verticali accidentali sono pari ad un decimo delle forze da peso proprio, si ha:

---

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	-7.18685190564909D-19	-6.70772844527249D-19
3	-3.83669328529648D-18	-3.1651793203125D-18
4	-1.21054425595405D-17	-8.67767883647519D-18
5	-1.59631581360167D-17	-1.07351271439292D-17
6	-7.08409549726737D-18	-7.18350208842943D-18
7	-3.01855333108876D-18	-6.0993575107818D-18
8	-9.06260862574813D-20	-5.70896721147097D-18

298 *Le strutture ad arco*

9	3.35596844314737D-18	-5.70896721147097D-18
10	6.6909149544052D-18	-6.15362674630534D-18
11	7.05177409892423D-18	-6.24985585151042D-18
12	1.36301349683831D-18	-3.97435161067606D-18
13	9.99841660398815D-18	-8.57989993448931D-18
14	1.81101566887511D-17	-1.39877266576646D-17
15	-3.75299020002183D-18	3.50279085335374D-18
16	-1.60253652356626D-34	6.6330050155182D-33

---

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
-----------	-------------------

---

1	1.06393215441048D-12
2	1.61550963316678D-12
3	3.25225581748303D-12
4	-2.62122412230447D-12
5	-7.16749113310428D-12
6	2.58920917254524D-12
7	5.92342823581195D-13
8	-2.65486999946022D-13
9	5.71485772659448D-14
10	1.54857261040914D-12
11	3.25411121186211D-12
12	-8.06077601730956D-12
13	3.11182874647711D-13
14	1.89265966082392D-11
15	-1.72478311108534D-11
16	5.55587759621441D-12

TEMPO DI ESECUZIONE = 1.22265625 SEC.

RUN DEL 10-18-1994 ORE 11:56:43

## Appendice 6.1. Il programma AINS

```
DEFDBL A-Z
DECLARE SUB sivib2 (G(), GD(), L(), LD(), BD(), ERRO(), U(), V(), W(), NA,
    NK, N, M, NRQD, NOI, TOLVEC)
DECLARE SUB errore (U(), W(), BD(), ERRO(), N, M, NRQD, LCK, TOLVEC,
    LT)
DECLARE SUB decouple (U(), V(), W(), BD(), N, M, LCK, TOLVEC)
DECLARE SUB orthog (W(), N, M, LCK)
DECLARE SUB premult (U(), V(), L(), LD(), NA, N, M, LCK, IRENT)
DECLARE SUB rand (U(), N, M, IRENT)
DECLARE SUB reduce (L(), LD(), NK, N)
DECLARE SUB forsub (U(), V(), L(), LD(), NK, N, M, LCK)
DECLARE SUB backsub (U(), V(), L(), LD(), NK, N, M, LCK)
DECLARE SUB AutoSpostamenti ()
DECLARE SUB RigidezzeGeometriche ()
DECLARE SUB RigidezzeGlobali ()
DECLARE SUB RigidezzeLocali ()
DECLARE SUB Geometria ()
DECLARE SUB UscitaDati ()
DECLARE SUB UscitaRisultati ()
DECLARE SUB IngressoDati ()
DECLARE SUB IngressoDatiArray ()
DECLARE SUB OpenFiles ()
REM *****
REM *
REM *          P R O G R A M M A      A I N S          *
REM *
REM *
REM *          d i                          *
REM *
REM *          V I N C E N Z O      F R A N C I O S I    *
REM *
REM *          Release 1.0.0. Gennaio 1988 (in BASIC HP) *
REM *          Release 3.0.0. Agosto 1994 (in Microsoft QBasic) *
```

```

REM *
REM *****
REM
REM *****
REM *
REM *           Questo programma calcola i carichi critici di un arco
REM *           funicolare del peso proprio
REM *
REM *****
OPTION BASE 1
REM
REM *****
REM *
REM *           C O M M O N
REM *
REM *****
REM
COMMON SHARED LUCE, T, E, CS, CD, FREC, RIAL
COMMON SHARED INERZS, INERZC, INERZD, W, QUNIF, HSPINTA
COMMON SHARED LTRAT, CERN
COMMON SHARED NVEC, NEIG, NOI, TOLVEC
COMMON SHARED ITER1, ITER2, TIME2
COMMON SHARED FVERT() AS DOUBLE, Q() AS DOUBLE
COMMON SHARED INERZ() AS DOUBLE, INCL() AS DOUBLE
COMMON SHARED LOCSTIF() AS DOUBLE, DIVCERN() AS DOUBLE
COMMON SHARED S1() AS DOUBLE, S2() AS DOUBLE
COMMON SHARED K() AS DOUBLE, B() AS DOUBLE, INDK() AS DOUBLE
COMMON SHARED EIG() AS DOUBLE, VECT() AS DOUBLE
COMMON SHARED SPOS() AS DOUBLE, SBAN() AS DOUBLE
COMMON SHARED TITLE$, STAMPA$, STAMPARIS$, FILEINGR$, FILEUSC$
COMMON SHARED ASSE$, VINCOLO$, SEZIONE$, CARICHI$, FILEINPUT$
REM
REM *****
REM *
REM *           DIMENSIONA GLI ARRAY STATICI
REM *
REM *****
REM
DIM TITLE$(100), TITLE1$(100), STAMPA$(10), STAMPARIS$(10)
DIM FILEINGR$(10), FILEUSC$(10), DIVCERN(3) AS DOUBLE
REM

```



```

REM *****
REM *
REM *          DEFINISCE ALCUNE LEGGI DI VARIAZIONE          *
REM *
REM *****
REM DEF FNQ (Z) = RIAL * Z / LUCE + 4 * FREC / LUCE ^ 2 * Z * (LUCE -
Z)
DEF FNINERZ1 (Z)
  FAUX = INERZS * (LUCE - Z) / LUCE + INERZD * Z / LUCE
  FAUX = FAUX - 2 * (INERZS + INERZD - 2 * INERZC) / LUCE ^ 2 * Z *
(LUCE - Z)
  FNINERZ1 = FAUX
END DEF
DEF FNA (Z) = 4 * FREC / LUCE ^ 2 * (LUCE - 2 * Z) + RIAL / LUCE
DEF FNINERZ2 (Z) = INERZC * COS(ATN(FNA(Z))) ^ W
CLS
REM
REM *****
REM *
REM *          LEGGE IL NOME DEL FILE DI INPUT DATI          *
REM *
REM *****
REM
PRINT "NOME DEL FILE DI INPUT"
INPUT FILEINPUT$
TIME1 = TIMER
OPEN FILEINPUT$ FOR INPUT AS #7
REM -----
REM CHIAMA LA SUBROUTINE PER L'INGRESSO DEI DATI
REM -----
CALL IngressoDati
TT = (T - 2) * (T - 1) / 2
LTRAT = LUCE / T
REM
REM *****
REM *
REM *          REDIMENSIONA ARRAY DINAMICI                    *
REM *
REM *****
REM
REDIM FVERT(T + 1) AS DOUBLE, Q(T + 1) AS DOUBLE
REDIM INERZ(T + 1) AS DOUBLE, LOCSTIF(T + 1) AS DOUBLE

```

```

REDIM S1(T - 2) AS DOUBLE, S2(T - 2) AS DOUBLE
REDIM INDK(T - 2) AS DOUBLE, K(TT) AS DOUBLE
REDIM B(TT) AS DOUBLE, INCL(T + 1) AS DOUBLE
REDIM EIG(T - 2) AS DOUBLE, VECT(T - 2, NVEC) AS DOUBLE
REDIM SPOS(T + 1, T - 2) AS DOUBLE, SBAN(T + 1, T - 2) AS DOUBLE
REDIM ERRO(NVEC), USUB(T - 2, NVEC), VSUB(T - 2, NVEC)
REM -----
REM CHIAMA LA SUBROUTINE PER L'INGRESSO DEI DATI IN ARRAY
REM -----
CALL IngressoDatiArray
REM -----
REM CHIAMA LA SUBROUTINE PER RIEMPIRE ALCUNI ARRAY
REM -----
CALL Geometria
REM -----
REM CHIAMA LA SUBROUTINE PER STAMPARE I DATI DI INGRESSO
REM -----
TIME2 = TIMER - TIME1
CALL UscitaDati
TIME1 = TIMER
REM -----
REM CHIAMA LA SUBROUTINE PER RIEMPIRE LA MATRICE
REM DELLE RIGIDENZE LOCALI DELLE CELLE
REM -----
CALL RigidezzeLocali
REM -----
REM CHIAMA LA SUBROUTINE PER ASSEMBLARE LA MATRICE
REM DI RIGIDENZA GLOBALE
REM -----
CALL RigidezzeGlobali
REM -----
REM CHIAMA LA SUBROUTINE PER CALCOLARE LA MATRICE
REM DI RIGIDENZA GEOMETRICA
REM -----
CALL RigidezzeGeometriche
REM -----
REM CHIAMA LA SUBROUTINE PER IL CALCOLO DEGLI AUTOVALORI
REM -----
CALL sivib2(B(), INDK(), K(), INDK(), EIG(), ERRO(), USUB(), VSUB(), VECT(),
    TT, TT, T - 2, NVEC, NEIG, NOI, TOLVEC)
REM -----
REM CHIAMA LA SUBROUTINE PER IL CALCOLO DEGLI SPOSTAMENTI

```