

## 5. I carichi mobili

### 5.1. Carichi fissi e carichi mobili

Nel capitolo precedente si sono prese in esame le sollecitazioni esterne *fisse*. Tali sono per esempio il peso proprio, i cedimenti anelastici dei vincoli, il ritiro del conglomerato, le distorsioni correttive impresse.

Per *fisse* non si intendono però solo le *sollecitazioni permanenti*, e cioè sempre presenti sulla struttura, ma anche quelle che interessano la struttura in un numero *limitato* di situazioni, tali da poter essere prese *tutte* in esame. Per esempio le variazioni termiche  $\Delta t$ , o  $\overline{\Delta t}$ , massime o minime; la forza sismica orizzontale, posta, per definizione, equivalente al sismo ondulatorio nel cosiddetto *calcolo sismico statico* — verso destra o verso sinistra — la forza sismica verticale, equivalente alla scossa sussultoria, verso l'alto e verso il basso; la spinta del vento; l'effetto frenante dei convogli; le condizioni di carico accidentale, se in numero finito. Queste situazioni sono definite 'movable' nella letteratura anglosassone, termine traducibile con 'rimuovibili'. Esse devono essere poi combinate con opportuni coefficienti nelle verifiche, dando luogo così alle condizioni di carico progettuali.

Esistono però anche sollecitazioni che interessano la struttura in un numero di situazioni teoricamente illimitato, e comunque in pratica così alto da rendere proibitivo il calcolo per ciascuna di esse. Sono i 'moving loads' anglosassoni, e cioè, in senso lato, i *carichi mobili*: treni viaggianti, segmenti di folla compatta o di automezzi disponibili sulla struttura in qualsiasi numero ed estensione, convogli eccezionali assimilabili a carichi concentrati singoli di forte entità. Tali carichi non possono essere studiati che attraverso le *linee di influenza*.

Nel caso dei ponti interessano principalmente le linee per una forza verticale (ed unitaria) viaggiante; naturalmente la forza viaggia sull'impalcato, ed è definita dall'ascissa  $z$  della sua retta di azione. Se  $S$  è la sezione di cui interessano i dati, e  $p(z)$  è il carico agente sull'impalcato, si ha:

$$v_S = \int_0^l v_S^F(z_S, z) p(z) dz \quad (5.1)$$

$$w_S = \int_0^l w_S^F(z_S, z) p(z) dz \quad (5.2)$$

$$M_S = \int_0^l M_S^F(z_S, z) p(z) dz \quad (5.3)$$

$$N_S = \int_0^l N_S^F(z_S, z) p(z) dz \quad (5.4)$$

$$T_S = \int_0^l T_S^F(z_S, z) p(z) dz \quad (5.5)$$

dove sotto integrale compaiono le linee di influenza di  $v$ ,  $w$ ,  $M$ ,  $N$  e  $T$  in  $S$  per forza verticale viaggiante.

Genericamente, si indica con:

$$E_S^R \quad (5.6)$$

la linea di influenza dell'ente  $E$  in  $S$  per effetto dell'ente  $R$  viaggiante sull'impalcato. L'ente  $E$  può essere una componente dello spostamento, o della sollecitazione interna; l'ente  $R$  è generalmente una forza verticale, ma può essere qualsiasi componente di forza o distorsione.

La  $E_S^R$ , per i principi di reciprocità, può ottenersi facendo agire in  $S$  l'ente  $E_C$  duale di  $E$ , intendendo come tale l'ente che appare come fattore di  $E$  nel prodotto numerico  $EE_C$  che fornisce l'espressione del lavoro connesso con  $E$ . Tale ente deve avere valore unitario; il suo segno è  $\pm$  secondo che  $E$  ed  $R$  sono *ambidue* della *classe forze* o della *classe spostamenti*, oppure appartengono ciascuno ad una delle due classi.

La linea  $E_S^R$  è il diagramma dell'ente duale di  $R$ . In sintesi si può scrivere:

$$E_S^R = R_d(z) \uparrow \begin{cases} E_d(S) = 1 & \text{se } E \in R \\ E_d(S) = -1 & \text{se } E \notin R \end{cases} \quad (5.7)$$

Si è indicato con la freccia verticale un simbolo esprimente il *rapporto di causalità*; precisamente:

$$a \uparrow b \quad (5.8)$$

significa "a causato da b": la causa segue la freccia, l'effetto la precede.

Valgono gli esempi che seguono:

- a) linea di influenza della rotazione in  $S$  per effetto di una forza verticale viaggiante:

$$\phi_S^{F_y} = v(z) \uparrow \mathcal{M}(S) = 1 \text{ tm} \quad (5.9)$$

b) linea di influenza del taglio in  $S$  per effetto di una coppia viaggiante:

$$T_S^M = \phi(z) \uparrow D_t = -1 \text{ m} \quad (5.10)$$

c) linea di influenza dello spostamento orizzontale in  $S$  per effetto di una distorsione  $D_m$  viaggiante:

$$w_S^{D_m} = M(z) \uparrow F_z(S) = -1 \text{ t} \quad (5.11)$$

d) linea di influenza del momento flettente in  $S$  per effetto di una distorsione  $D_t$  viaggiante:

$$M_S^{D_t} = T(z) \uparrow D_m = 1 \quad (5.12)$$

Per i principi di reciprocità può porsi:

$$E \in R \rightarrow E_S^R(z_T) = E_T^R(z_S) \quad (5.13)$$

Le linee di influenza possono banalmente costruirsi considerando  $s$  dividenti, e facendo agire in ciascuna di queste una forza, o una distorsione, di valore unitario. La  $E_S^R(z)$  è così rappresentata dagli  $s$  valori in corrispondenza delle suddette dividenti, ed è tanto più vicina al vero quanto più alto è il valore di  $s$ . Se, per esempio, si tratta della linea di influenza degli spostamenti per forza verticale viaggiante, si costruisce così la *matrice di Green*, quadrata, di dimensioni  $s \times s$ , qui di seguito riportata:

$$\mathbf{G} = \begin{matrix} & \begin{matrix} F_1 & F_2 & \dots & F_s \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_s \end{matrix} & \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1s} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{s1} & v_{s2} & \dots & v_{ss} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5.14)$$

L'elemento generico  $v_{ij}$  della  $\mathbf{G}$  è la componente verticale dello spostamento nella sezione  $i$  causato dalla forza  $F_j = 1$  agente nella sezione  $j$ ; si ha così:

$$v_i = \sum v_{ij} F_j \quad (5.15)$$

Ogni riga di  $\mathbf{G}$  rappresenta quindi la linea d'influenza  $s_{S_y}^{F_y}$  dell'abbassamento nella sezione  $i$  per forza verticale viaggiante, e cioè la:

$$v_S^{F_y}(z_i, z) \quad (5.16)$$

ove  $z_i$  è fissa, e  $z$  è la variabile. In termini matematici la (5.15) si scrive:

$$v(z_i) = \int_0^l f(z)G(z_i, z) dz, \quad (5.17)$$

ove  $G(z_i, z)$  è la *funzione di Green* degli abbassamenti, ed  $f(z)$  la funzione carico distribuito.

La matrice di Green è simmetrica e definita positiva; quindi la  $s_{S_y}^{F_y}$  relativa alla sezione  $i$  (riga  $i$ -ma) coincide con il diagramma degli abbassamenti dovuti ad  $F_y = 1$  agente sulla sezione  $i$  (colonna  $i$ -ma).

Per la precisione dei calcoli, conviene che  $s$  sia il più elevato possibile. D'altro canto, le sezioni  $r$  in cui occorre effettuare la verifica sono in numero ridotto; a volte addirittura una sola, quando si debbano valutare le condizioni di resistenza in una zona apparentemente compromessa, o quando si debba eseguire un collaudo. La costruzione delle linee di influenza attraverso i principi di reciprocità si rivela quindi preziosa, perchè permette di operare su matrici rettangolari  $r \times s$ , di dimensioni molto più ridotte della (5.14), con notevole risparmio di memoria interna e tempi di esecuzione. Per esempio, la matrice  $\mathbf{M}$  delle linee di influenza del momento per forza verticale viaggiante, e cioè delle  $M_S^F$ , è la seguente:

$$\mathbf{M} = \begin{matrix} & \begin{matrix} F_1 & F_2 & \dots & F_s \end{matrix} \\ \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_r \end{matrix} & \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1s} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{r1} & v_{r2} & \dots & v_{rs} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (5.18)$$

dove  $v_{ij}$  è la componente verticale dello spostamento della sezione  $i$  per effetto della distorsione  $D_m = -1$  agente nella sezione  $j$ .

## 5.2. Il vettore dei termini noti e le equazioni di congruenza

### 5.2.1. Il caso della distorsione flessionale baricentrica

Una distorsione concentrata di rotazione relativa baricentrica  $D_m$  agisca in corrispondenza della sezione  $S$  dell'arco. Gli spostamenti che ne derivano sulla struttura principale (Figura 5.1) sono costituiti da un insieme di tre segmenti di retta; il moto infatti è rigido, perchè la creazione di uno snodo in  $S$  trasforma la struttura in un meccanismo, nella quale la  $D_m$  non induce sollecitazioni. Gli angoli di rotazione relativa in  $A$ ,  $C$  e  $B$  possono trarsi con considerazioni geometriche elementari. Infatti il punto di zero del segmento di deformata relativo alla parte  $SC$  è sulla verticale di  $D$ ;

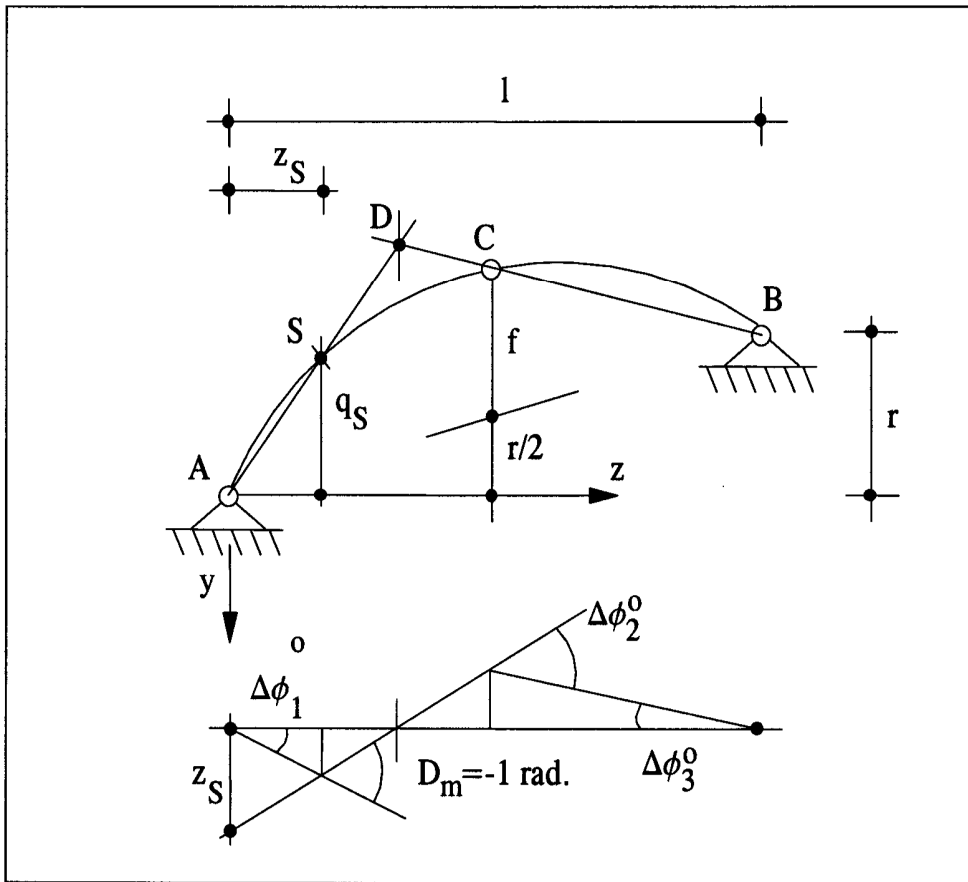


Figura 5.1- Gli spostamenti sulla struttura principale

tale punto, intersezione delle rette  $AS$  e  $BC$  ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  ed  $S$  indicano i baricentri di queste sezioni), è il centro della rotazione rigida di  $SC$ .

Più rapidamente i suddetti angoli si ottengono utilizzando il principio dei lavori virtuali. Assumendo, per esempio, come insieme di forze equilibrate il sistema  $X_i = 1$  (Figura 4.2) la (4.33) si scrive come segue:

$$1 \times \Delta\phi_i^0 + D_m M_{Si} = 0 \quad (5.19)$$

E' perciò:

$$\Delta\phi_i^0 = -D_m M_{Si}; \quad (5.20)$$

poichè nel caso in esame è:

$$D_m = -1 \text{ rad} \quad (5.21)$$

le prime delle (4.7), (4.10) e (4.13) porgono:

$$\Delta\phi_1^0 = M'_S = \left( \frac{r}{2fl} - \frac{1}{l} \right) z_S - \frac{1}{2f} q_S + 1 \quad (5.22)$$

$$\Delta\phi_2^0 = M''_S = -\frac{r}{fl} z_S + \frac{1}{f} q_S \quad (5.23)$$

$$\Delta\phi_3^0 = M'''_S = \left( \frac{r}{2fl} + \frac{1}{l} \right) z_S - \frac{1}{2f} q_S \quad (5.24)$$

Il sistema (4.24) fornisce i valori delle iperstatiche. Da essi si traggono le forze interne (4.47):

$$M(z) = \sum_1^3 X_i M_i(z) \quad (5.25)$$

$$N(z) = \sum_1^3 X_i N_i(z) \quad (5.26)$$

$$T(z) = \sum_1^3 X_i T_i(z) \quad (5.27)$$

Gli spostamenti  $v(z)$  si traggono dalle (4.56), (4.57) e (4.58):

$$v(z) = \int_0^z \frac{dv}{dz} dz + v_A - \phi_A z \quad (5.28)$$

se  $z \leq z_S$ , oppure da:

$$v(z) = \int_0^z \frac{dv}{dz} dz + v_A - \phi_A z - (z - z_S) \quad (5.29)$$

se  $z \geq z_S$ .

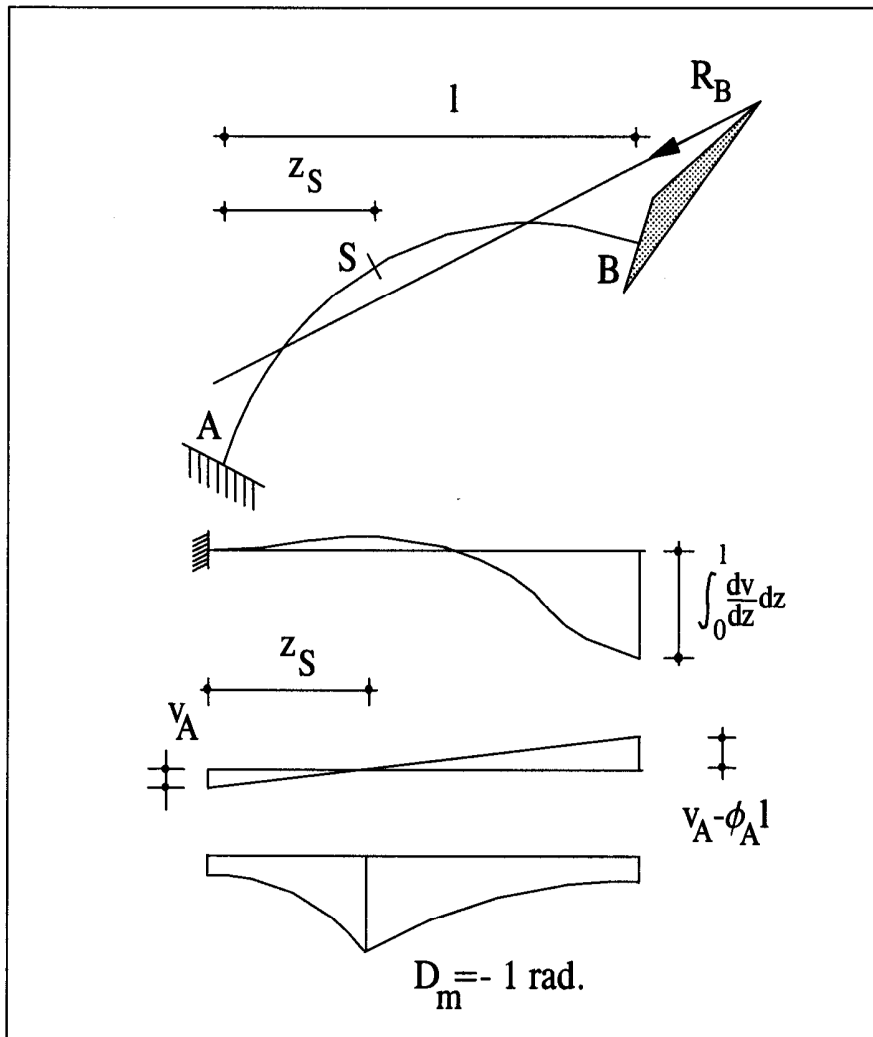


Figura 5.2- La mensola per il calcolo della deformata

Gli integrali delle (5.28) e (5.29) rappresentano la deformata della mensola incas-trata in A (Figura 5.2).

E' consigliabile, sul piano numerico, calcolarli sommando i contributi dei con-ci successivi , così come è già stato detto nel paragrafo 4.4. Le formule ricorrenti

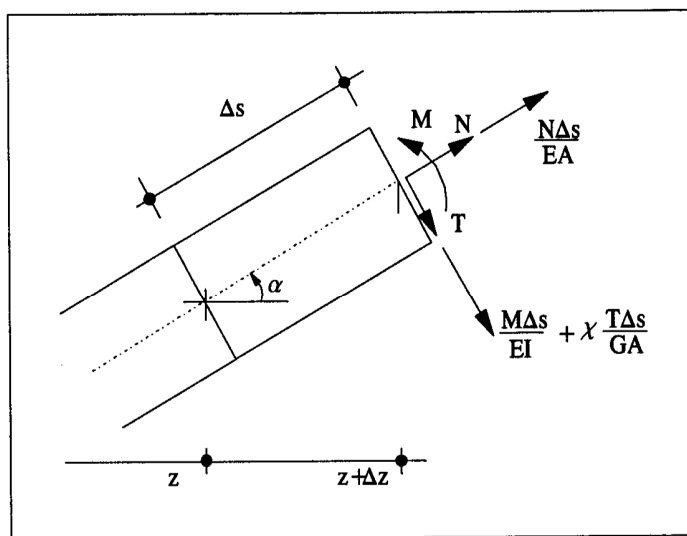


Figura 5.3- Il contributo del concio al calcolo della deformata

sono (Figura 5.3):

$$v(z + \Delta z) = v(z) - \phi(z)\Delta z + \frac{M\Delta s^2}{2EI} \cos \alpha - \frac{N\Delta s}{EA} \sin \alpha + \chi \frac{T\Delta s}{GA} \cos \alpha \quad (5.30)$$

$$\phi(z + \Delta z) = \phi(z) + \frac{M\Delta s}{EI} \quad (5.31)$$

Nella (5.29), poi, la parte  $v_A - \phi_A z$  è lo spostamento rigido della mensola dovuto alla cedibilità elastica dell'incastro  $A$ ; la parte  $-(z - z_S)$  è lo spostamento rigido del tratto  $SB$  dovuto alla distorsione  $D_m = -1$  in  $S$ .

Le due reazioni  $R_A$  ed  $R_B$  sono uguali e contrarie (Figura 5.4), poichè non esistono forze applicate. Il diagramma del momento è quindi fornito dai segmenti di verticale compresi tra l'asse dell'arco e la retta d'azione delle due reazioni; le lunghezze  $h$  di questi segmenti devono essere moltiplicate per la componente orizzontale  $H$  di  $R_A$ . Si ha quindi:

$$M(z) = h(z)H \quad (5.32)$$

ove  $h(z)$  è positivo se la retta d'azione della reazione è al disopra del baricentro della sezione retta all'ascissa  $z$ .



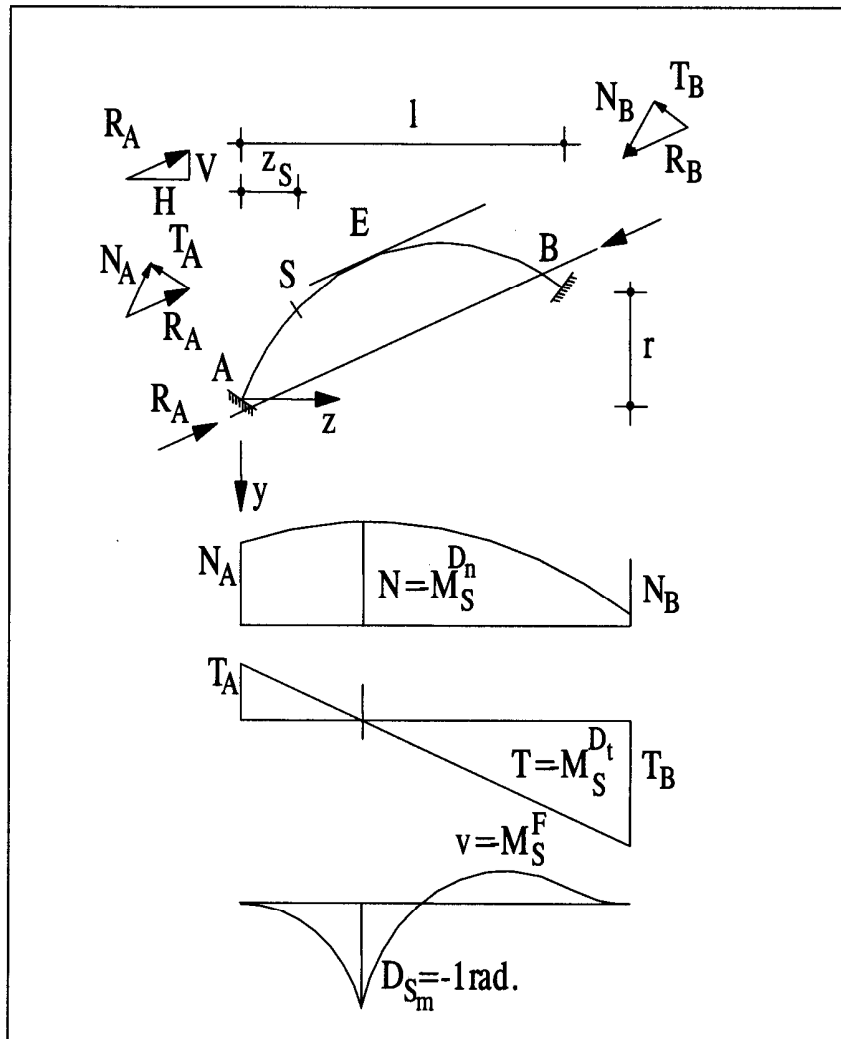


Figura 5.4- Il diagramma del momento

Così pure:

$$N(z) = -H \cos \alpha(z) + V \sin \alpha(z) \quad (5.33)$$

$$T(z) = -H \sin \alpha(z) - V \cos \alpha(z) \quad (5.34)$$

ove  $V$  è la componente verticale di  $R_A$ .

Le espressioni (5.32), (5.33) e (5.34) sono necessarie per il calcolo della linea di influenza  $M_S^F$  del momento in  $S$  per una forza verticale viaggiante; esse però rappresentano pure, per quanto detto nel paragrafo 1, le linee di influenza del momento in  $S$  per distorsioni viaggianti. Si ha infatti:

$$\begin{aligned} M(z) &= -M_S^{D^m} \\ N(z) &= -M_S^{D^n} \\ T(z) &= -M_S^{D^t} \\ v(z) &= M_S^F \end{aligned} \quad (5.35)$$

### 5.2.2. Il caso della distorsione assiale

Una distorsione concentrata di spostamento assiale relativo  $D_n$  agisca (Figura 5.5) in corrispondenza della sezione  $S$  dell'arco. Gli angoli di rotazione relativa in  $A$ ,  $C$  e  $B$  sono forniti dalla formula, analoga alla (5.20):

$$\Delta\phi_i^0 = -D_n N_{Si}; \quad (5.36)$$

nel caso in esame è:

$$D_n = -1 \quad (5.37)$$

e quindi:

$$\Delta\phi_i^0 = N_{Si} \quad (5.38)$$

Le seconde delle (4.7), (4.10) e (4.13) forniscono:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1^0 &= \left( \frac{1}{l} - \frac{r}{2fl} \right) \sin \alpha_S - \frac{1}{2f} \cos \alpha_S \\ \Delta\phi_2^0 &= \frac{r}{fl} \sin \alpha_S + \frac{1}{f} \cos \alpha_S \\ \Delta\phi_3^0 &= - \left( \frac{1}{l} + \frac{r}{2fl} \right) \sin \alpha_S - \frac{1}{2f} \cos \alpha_S \end{aligned} \quad (5.39)$$

Anche in questo caso valgono le (5.32), (5.33) e (5.34) e si ha:

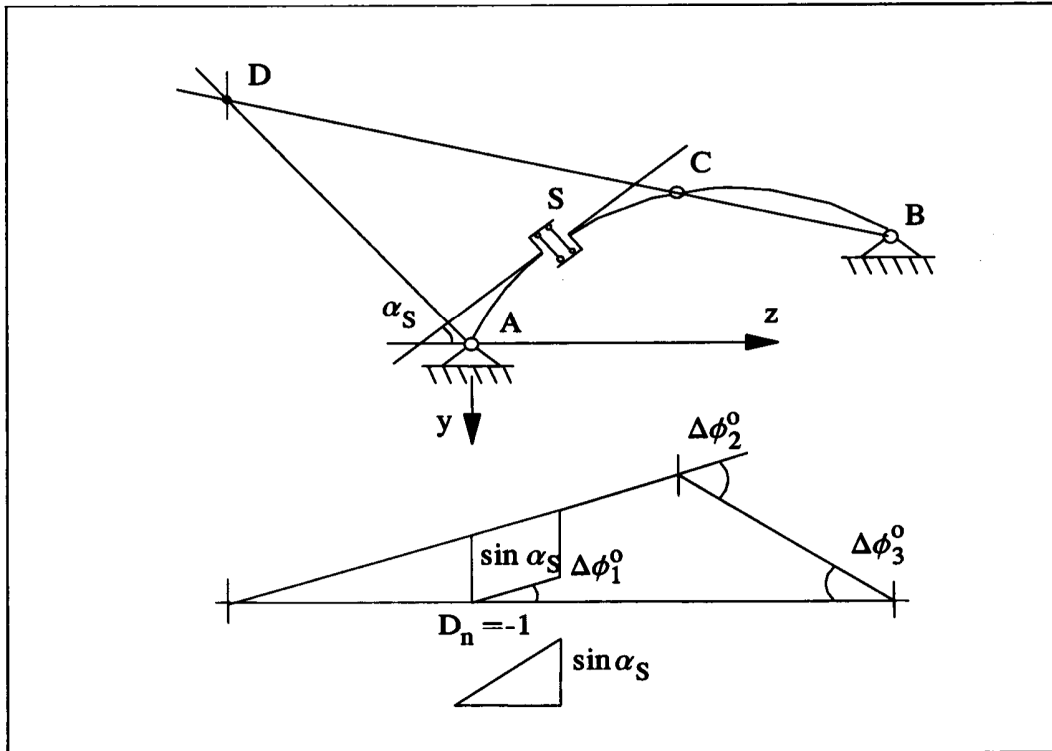


Figura 5.5- La distorsione di spostamento assiale relativo

$$\begin{aligned}
 M(z) &= -N_S^{D_m} \\
 N(z) &= -N_S^{D_n} \\
 T(z) &= -N_S^{D_t} \\
 v(z) &= N_S^F
 \end{aligned}
 \tag{5.40}$$

### 5.2.3. Il caso della distorsione tagliante

Una distorsione concentrata di scorrimento relativo  $D_t$  agisca (Figura 5.6) in corrispondenza della sezione  $S$  dell'arco. Si ha:

$$\Delta\phi_i^0 = -D_t T_{Si}; \tag{5.41}$$

poichè:

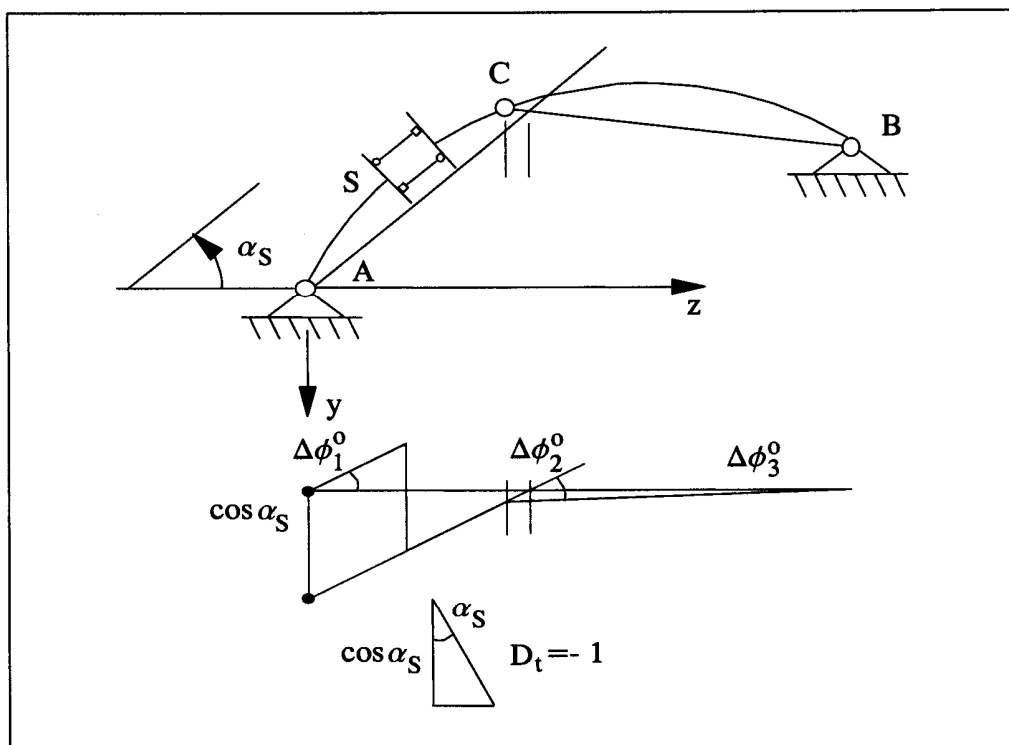


Figura 5.6- La distorsione di scorrimento relativo

$$D_t = -1 \tag{5.42}$$

è pure:

$$\Delta\phi_i^0 = T_{Si} \tag{5.43}$$

Le terze della (4.7), (4.10) e (4.13) forniscono quindi:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1^0 &= \left( \frac{r}{2fl} - \frac{1}{l} \right) \cos \alpha_S - \frac{1}{2f} \sin \alpha_S \\ \Delta\phi_2^0 &= -\frac{r}{fl} \cos \alpha_S + \frac{1}{f} \sin \alpha_S \\ \Delta\phi_3^0 &= \left( \frac{r}{2fl} + \frac{1}{l} \right) \cos \alpha_S - \frac{1}{2f} \sin \alpha_S \end{aligned} \tag{5.44}$$

e si ha:

$$\begin{aligned}
 M(z) &= -T_S^{D_m} \\
 N(z) &= -T_S^{D_n} \\
 T(z) &= -T_S^{D_t} \\
 v(z) &= T_S^F
 \end{aligned}
 \tag{5.45}$$

**5.2.4. Il caso della distorsione flessionale non baricentrica**

E' molto più utile, ai fini della verifica in fase elastica in una sezione  $S$ , conoscere il massimo ed il minimo del momento delle forze a sinistra (o a destra) di  $S$  rispetto ad un punto diverso dal baricentro. Questi punti sono l'estremo superiore  $E_1$  ed inferiore  $E_2$  del nocciolo centrale d'inerzia (Figura 5.7a). Nelle sezioni a sandwich questi punti sono invece il bordo di estradosso  $B_1$  ed il bordo di intradosso  $B_2$  (Figura 5.7b). Si hanno così i massimi e minimi dei due *momenti di nocciolo* nel primo caso, dei due *momenti di bordo* (*momento estradosale* e *momento intradosale*) nel secondo.

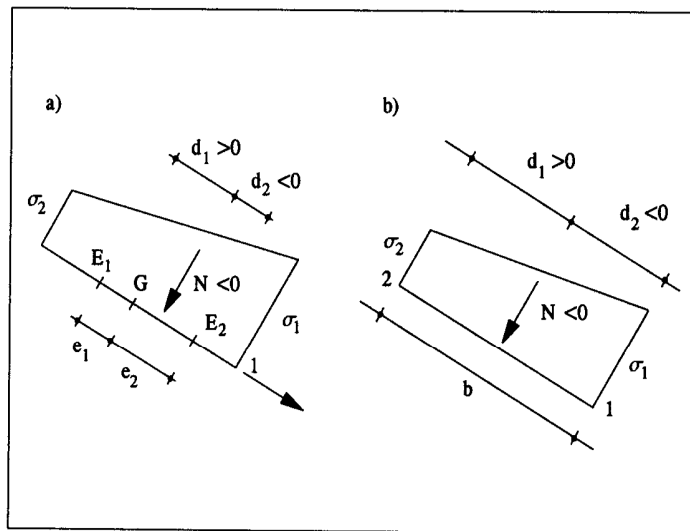


Figura 5.7- Punti notevoli ai fini del calcolo delle linee di influenza

Ad essi si associano i massimi e minimi valori delle tensioni intradosali  $\sigma_1$  ed estradosali  $\sigma_2$ . Nel primo caso si ha:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{Nd_1}{Ae_1} = \frac{M_{n1}}{Ae_1} \\ \sigma_2 &= -\frac{Nd_2}{Ae_2} = -\frac{M_{n2}}{Ae_2}\end{aligned}\quad (5.46)$$

ove  $d_1$  (o  $d_2$ ) è positiva se il punto  $E_1$  (o  $E_2$ ) è al disotto dell'intersezione del funicolare con la traccia della sezione. Infatti  $d_1$  e  $d_2$  non sono che le eccentricità di  $N$  rispetto ad  $E_1$  ed  $E_2$ , e questa è la convenzione del segno della eccentricità comunemente intesa, e cioè di quella rispetto al baricentro.

Ancora nella (5.46),  $A$  è l'area della sezione,  $e_1$  ed  $e_2$  i raggi di nocciolo  $GE_1$  e  $GE_2$  presi in assoluto.

Nel secondo caso invece è:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{Nd_1}{bA_i} = \frac{M_{ext}}{bA_i} \\ \sigma_2 &= -\frac{Nd_2}{bA_s} = -\frac{M_{int}}{A_s}\end{aligned}\quad (5.47)$$

ove  $b$  è l'altezza della sezione,  $A_i$  ed  $A_s$  le aree delle solette inferiori e superiori. La linea di influenza del momento di nocciolo  $M_{n1} = Nd_1$  — che è poi, per la prima delle (5.46), la linea di influenza della tensione intradossale  $\sigma_1$  — si ottiene imponendo che la distorsione  $D'_m = -1 \text{ rad}$  tra le due sezioni adiacenti in  $S$  avvenga intorno ad  $E_1$ . Così pure, la linea di influenza del momento di nocciolo  $M_{n2} = Nd_2$  — e cioè, per la seconda delle (5.46), la linea di influenza della tensione estradossale  $\sigma_2$  cambiata di segno — si ottiene imponendo che la  $D''_m = -1 \text{ rad}$  avvenga intorno ad  $E_2$ .

Alle ordinate positive della  $M_{n1S}^F$  corrispondono  $\sigma_1$  intradossali di trazione; alle ordinate positive della  $M_{n2S}^F$  corrispondono  $\sigma_2$  estradossali di compressione.

Una distorsione  $D'_m = -1 \text{ rad}$  intorno ad  $E_1$  corrisponde ad una distorsione baricentrica  $D_m = -1 \text{ rad}$  e ad un allontanamento baricentrico tra le due sezioni pari ad  $e_1$ ; quindi può dirsi che essa equivale alla somma di:

$$\begin{aligned}D_m &= -1 \text{ rad} \\ D_n &= -e_1\end{aligned}\quad (5.48)$$

Se ne traggono le espressioni di  $\Delta\phi_1^0$ ,  $\Delta\phi_2^0$ ,  $\Delta\phi_3^0$ :

$$\begin{aligned}\Delta\phi_1^0 &= M'_S + e_1 N'_S \\ \Delta\phi_2^0 &= M''_S + e_1 N''_S \\ \Delta\phi_3^0 &= M'''_S + e_1 N'''_S\end{aligned}\quad (5.49)$$

Le espressioni di  $M'_S$ ,  $M''_S$ ,  $M'''_S$  sono date dalle (5.22, 5.23, 5.24), quelle di  $N'_S$ ,  $N''_S$ ,  $N'''_S$  dalle (5.39).

Analogamente, una distorsione  $D_m'' = -1 \text{ rad}$  intorno ad  $E_2$  corrisponde alla somma di:

$$\begin{aligned} D_m &= -1 \text{ rad} \\ D_n &= e_2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1^0 &= M'_S - e_2 N'_S \\ \Delta\phi_2^0 &= M''_S - e_2 N''_S \\ \Delta\phi_3^0 &= M'''_S - e_2 N'''_S \end{aligned} \quad (5.51)$$

Espressioni identiche alle (5.49) e (5.51), ove si ponga  $e_1 = e_2 = b/2$ , valgono per i momenti di bordo:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1^0 &= M'_S + \frac{b}{2} N'_S \\ \Delta\phi_2^0 &= M''_S + \frac{b}{2} N''_S \\ \Delta\phi_3^0 &= M'''_S + \frac{b}{2} N'''_S \end{aligned} \quad (5.52)$$

per i momenti estradossali ( $M_{emax} \rightarrow \sigma_{1max}$ ,  $M_{emin} \rightarrow \sigma_{1min}$ ), e:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_1^0 &= M'_S - \frac{b}{2} N'_S \\ \Delta\phi_2^0 &= M''_S - \frac{b}{2} N''_S \\ \Delta\phi_3^0 &= M'''_S - \frac{b}{2} N'''_S \end{aligned} \quad (5.53)$$

per i momenti intradossali ( $M_{imax} \rightarrow \sigma_{2min}$ ,  $M_{imin} \rightarrow \sigma_{2max}$ ).

### 5.3. L'utilizzazione delle linee di influenza

Poichè il carico agisce sull'impalcato, le linee di influenza sono delle spezzate, costituite da  $n$  segmenti, tanti cioè quanti sono i tratti. Infatti, per definire le reazioni indotte dai carichi sulle stilate si fa l'ipotesi che la travata sia costituita da  $n$  travi appoggiate su di esse, e quindi una distorsione nell'arco (Figura 5.8) induce nella travata spostamenti rigidi, definiti dai valori che la deformata dell'arco assume in

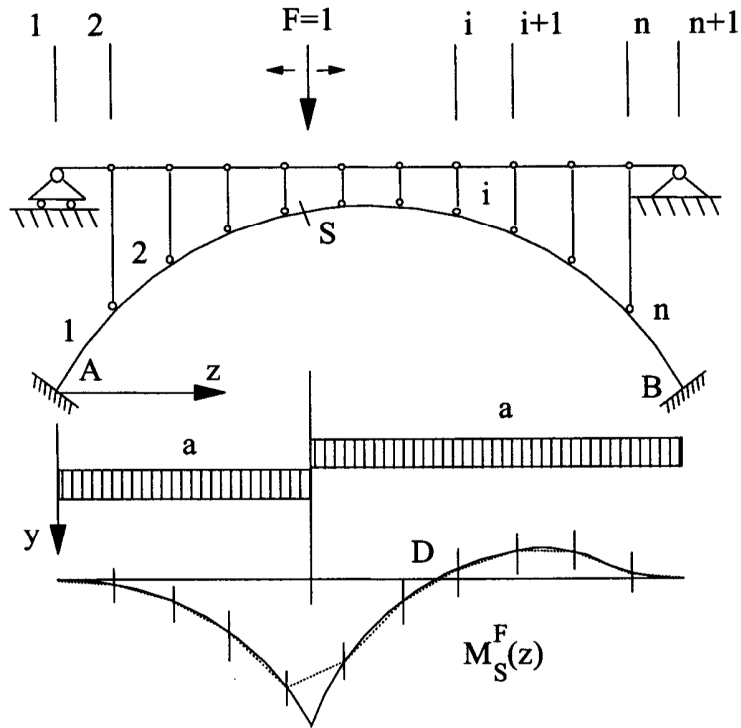


Figura 5.8- La linea di influenza per carichi sull'impalcato

corrispondenza delle stilate stesse. Ciò importa che qualsiasi linea di influenza è costituita da una successione di segmenti di retta, uno per ogni tratto tra le stilate.

Si suppone che la travata abbia i suoi estremi in corrispondenza delle verticali passanti per le imposte  $A$  e  $B$  dell'arco, e che in tali estremi ci siano un appoggio ed una cerniera, non cedevoli.

Di conseguenza, se  $n$  è il numero dei tratti tra le stilate, la linea di influenza  $E_S^R$  è definita dagli  $n + 1$  valori  $E_i$  alle ascisse:

$$z_i = (i - 1) \frac{l}{n} \quad (5.54)$$

ove  $i$  varia da 1 ad  $n + 1$ , ed i valori in  $z = 0$  e  $z = l$  sono nulli.



Sia le linee d'influenza del taglio e dello sforzo normale che quelle dei momenti estradossali ed intradossali presentano in  $S$  una discontinuità. Questa però si manifesta solo nella deformata dell'arco; la linea  $E_S^F$  è in ogni caso continua. Occorre però precisare che se la sezione  $S$  dell'arco non è ubicata sotto una stilata la linea  $E_S^F$  è unica. Se invece  $S$  si trova sotto una stilata (Figura 5.9) esistono per  $E_S^F$  due linee distinte, secondo che  $S$  si considera a sinistra della stilata, o a destra. Queste linee sono la  $E_{S_s}^F$  e la  $E_{S_d}^F$ . Se la  $S$  si considera a sinistra, come ordinata della  $E_S^F$  occorre assumere lo spostamento dell'arco immediatamente a destra di  $S$ , e viceversa. La differenza tra le due linee è notevole.

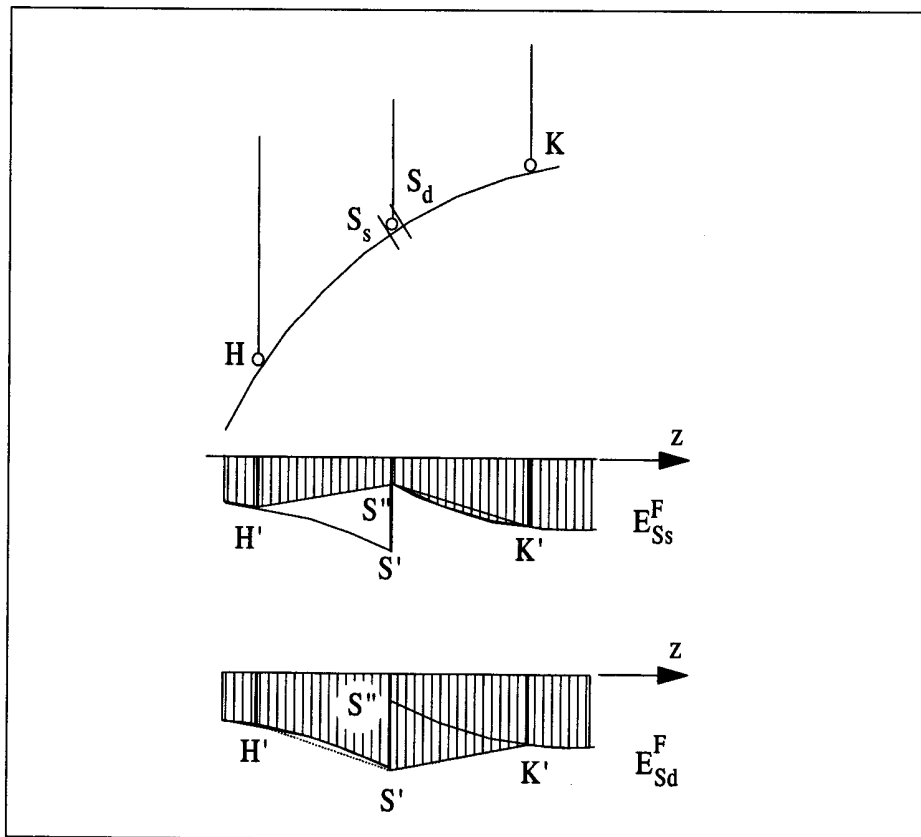


Figura 5.9- Le due linee di influenza ai due lati della stilata

Se si è in presenza di un carico accidentale uniforme  $a$  che possa agire ovunque sulla travata, si ottengono i massimi o minimi di  $E_S$  facendo agire il carico nelle zone

ove la linea d'influenza ha segno positivo o negativo. Per esempio, nella Figura 5.8 si ha (cfr. 5.3):

$$\begin{aligned} M_{Smax} &= \int_0^{z_D} a \, dz \times M_S^F(z) \\ M_{Smin} &= \int_{z_D}^l a \, dz \times M_S^F(z) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Si ha così, poichè  $a$  è costante:

$$\begin{aligned} M_{Smax} &= aA^+ \\ M_{Smin} &= aA^- \end{aligned} \quad (5.56)$$

ove  $A^+$  ed  $A^-$  sono le aree positiva e negativa del diagramma  $M_S^F$ . Le due condizioni di carico sono complementari.

Molto più raro è il caso di un carico  $p(z)$  distribuito con legge diversa dalla uniforme. Si può essere invece in presenza di una forza  $F$  verticale viaggiante; quando essa è all'ascissa  $z_F$  si ha:

$$M_S = F M_S^F(z_F) \quad (5.57)$$

L'intervallo (Figura 5.10) tra due stilate successive è  $\Delta z = l/n$ ; quindi la stilata in corrispondenza di  $F$ , o quella che immediatamente precede  $F$ , è caratterizzata da un indice  $i$  tale che:

$$(i-1)\Delta z \leq z_F \leq i\Delta z, \quad (5.58)$$

da cui:

$$\frac{z_F}{\Delta z} \leq i \leq \frac{z_F}{\Delta z} + 1 \quad (5.59)$$

Si può scrivere quindi:

$$i = \text{int} \left( \frac{z_F}{\Delta z} \right) + 1 \quad (5.60)$$

Si ha così:

$$E_S^F(z_F) = E_{Si} + \frac{E_{S(i+1)} - E_{Si}}{\Delta z} [z_F - (i-1)\Delta z], \quad (5.61)$$

ed analoghe.

Naturalmente, se la forza è una sola, i massimi o minimi possono verificarsi solo quando la  $F$  si trova su una dividente, e quindi la (5.61) perde di significato. In genere, questo caso però non si presenta, mentre è usuale quello del *treno viaggiante*, e cioè di più forze a distanza reciproca fissa, assimilato a volte ad un segmento di carico

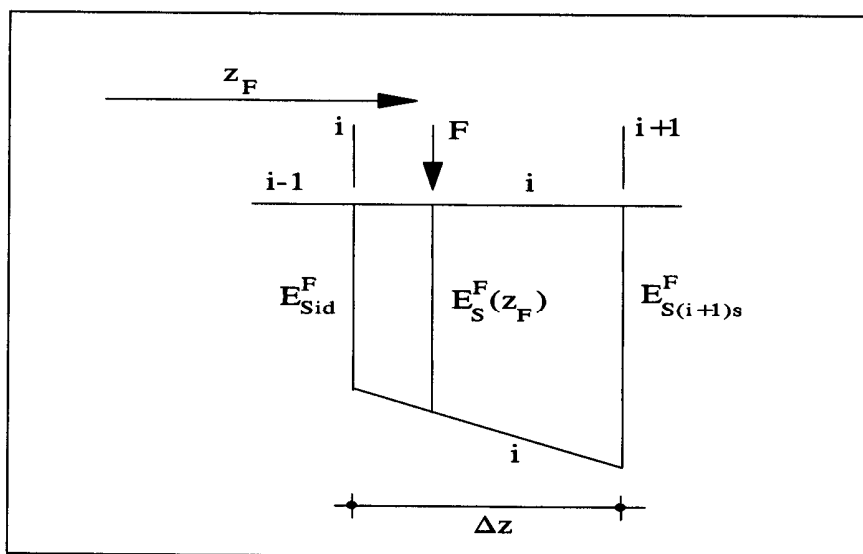


Figura 5.10- Caso della forza verticale viaggiante

uniforme  $a_v$ , di lunghezza  $l_v$  fissa. Se  $p$  sono le forze del treno (Figura 5.11), questo è definito dai due vettori colonna:

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_p \end{Bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{Bmatrix} 0 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_p \end{Bmatrix} \quad (5.62)$$

Le forze sono numerate così come si susseguono dalla prima a destra, fino all'ultima a sinistra; le loro posizioni reciproche sono definite dalle distanze  $d_i$  delle forze  $F_i$  dalla  $F_1$ . La posizione del treno è definita a sua volta dall'ascissa  $z_t$  della prima forza.

Nel calcolo si opera su una quantità finita di posizioni, che si ottengono facendo avanzare il treno, in ogni ciclo, della quantità  $d_t$  (*passo di transito*). Si assume  $d_t$  pari ad una frazione  $k$  della lunghezza del tratto:

$$d_t = \frac{1}{k} \frac{l}{n} \quad (5.63)$$

L'ascissa  $z_t$ , se il treno viaggia da sinistra a destra, varia come segue:

$$0 \leq z_t \leq (k + k')d_t \quad (5.64)$$

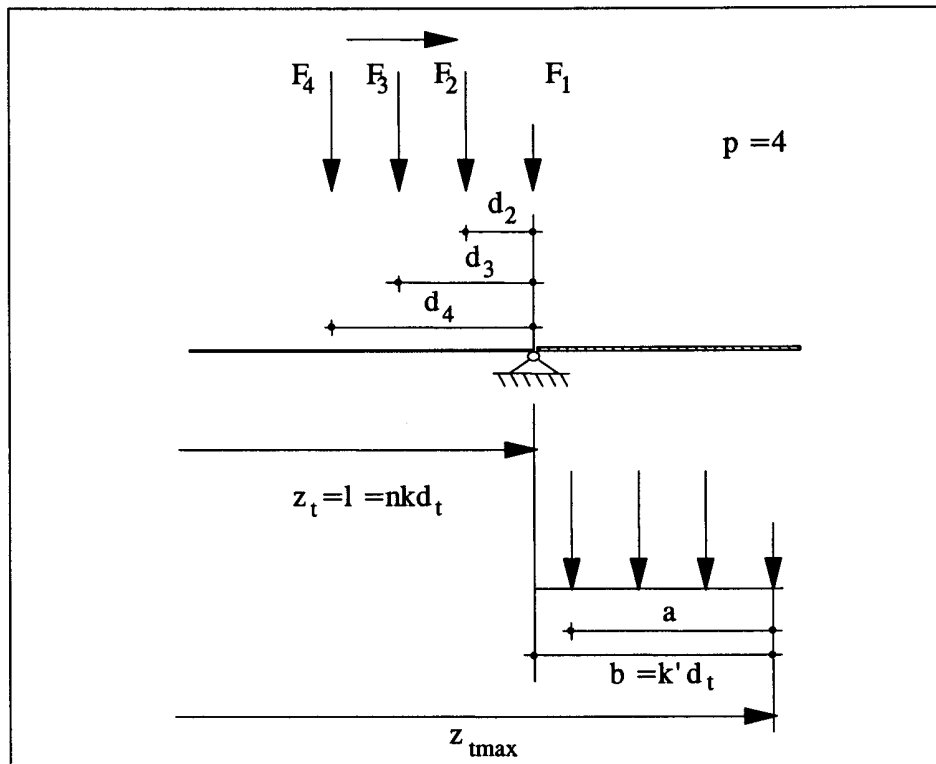


Figura 5.11- Il treno di carico

ove, se  $k$  è abbastanza elevato,  $k' > 1$ . Infatti il viaggio del treno deve considerarsi concluso quando nessuna forza interessa più la travata; se quindi  $a$  è la lunghezza complessiva del treno, il valore massimo di  $z_t$  è:

$$z_{tmax} = nkd_t + k'd_t \quad (5.65)$$

ove:

$$(k' - 1)d_t \leq a \leq k'd_t \quad (5.66)$$

Si ha quindi:

$$\frac{a}{d_t} \leq k' \leq \frac{a}{d_t} + 1, \quad (5.67)$$

e quindi:

$$k' = \text{int} \left( \frac{a}{d_t} \right) + 1 \quad (5.68)$$

La (5.68) è stata tratta ponendo come ultimo passo quello che porta l'ultima forza fuori della struttura.

#### 5.4. Il programma AVL

Il programma AVL, in grado di tracciare le linee di influenza dei momenti (baricentrici, intradossali ed estradossali), dei tagli e degli sforzi normali per un treno di forze verticali viaggianti, è una modifica del programma illustrato nel capitolo precedente. Sono assenti le variazioni termiche, i cedimenti vincolari anelastici, le forze, e le caratteristiche  $M^0$ ,  $N^0$  e  $T^0$  indotte da queste ultime sulla struttura principale.

Alcune subroutine sono identiche alle corrispondenti subroutine del programma ADL, e non sono quindi riportate nel listato in Appendice 5.1, altre sono modificate solo in minima parte. Degne di commento sono solo le tre subroutine nuove, e la subroutine "TerminiNoti", radicalmente modificata rispetto alla versione del capitolo 4.

La logica del programma non varia: dopo i soliti preliminari si chiama la subroutine "Cedibilita", che riempie la matrice delle equazioni di congruenza, e la subroutine "TerminiNoti", che invece riempie il secondo membro di queste equazioni, calcolando le incongruenze  $\Delta\phi_1^0$ ,  $\Delta\phi_2^0$ ,  $\Delta\phi_3^0$ , indotte dalla opportuna distorsione unitaria e negativa. Le formule da utilizzare sono indicate nel listato.

Calcolate le incognite iperstatiche, si calcolano gli spostamenti, trascurando in questo caso le componenti orizzontali. La parte dovuta alla distorsione (illustrata in Figura 5.2) è calcolata nella nuova subroutine "LineaDiInfluenza", e modifica solo gli spostamenti per  $z > z_S$ . Nel caso di linea di influenza per momento baricentrale si avrà  $v(z) = -(z - z_S)$ , come riportato nella (5.29). Se invece si vuole la linea di influenza del momento intradossale, occorre considerare che la rotazione si effettua intorno al bordo inferiore della sezione  $S$ , e quindi:

$$v(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < z_S \\ -(z - z_S - \frac{b_S}{2} \sin \alpha_S) & \text{se } z > z_S \end{cases} \quad (5.69)$$

Analogamente, per momenti estradossali la rotazione avviene intorno al bordo superiore della sezione  $S$ , e quindi:

$$v(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < z_S \\ -(z - z_S + \frac{b_S}{2} \sin \alpha_S) & \text{se } z > z_S \end{cases} \quad (5.70)$$

Infine, nei due casi di sforzo normale e taglio si ha:

$$v(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < z_S \\ -\sin \alpha_S & \text{se } z > z_S \end{cases} \quad (5.71)$$

e:

$$v(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z < z_S \\ \cos \alpha_S & \text{se } z > z_S \end{cases} \quad (5.72)$$

rispettivamente. La subroutine si conclude con la costruzione della richiesta linea di influenza, ottenuta portando nell'array LDI() i valori dello spostamento  $v$  sotto le stilate. Si osservi che se la sezione  $S$  è ubicata in corrispondenza della stilata  $I$ , la linea di influenza assume, in  $S$ , il valore dello spostamento immediatamente a destra di  $S$ , e quindi la linea  $E_S^F$  è la  $E_{S_s}^F$  (cfr. Figura 5.9). Non si pone tale problema per il momento baricentrico.

La successiva subroutine "Aree", anch'essa specifica al programma in esame, calcola le aree positive e negative sottese dalla linea di influenza appena ottenuta. L'ultima subroutine di calcolo, "Estremi", calcola il massimo ed il minimo della generica caratteristica  $E$  in  $S$  per effetto del treno viaggiante.

## 5.5. Un esempio numerico

L'esempio numerico è relativo all'arco già esaminato nel capitolo precedente, il treno di carico preso in esame è definito dalle due matrici (cfr. 5.62):

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 50 t \\ 100 t \\ 100 t \\ 100 t \end{Bmatrix} \quad \mathbf{z} = \begin{Bmatrix} 0 m \\ 5 m \\ 10 m \\ 15 m \end{Bmatrix} \quad (5.73)$$

ed il passo di transito (cfr. 5.63) è stato assunto pari a:

$$d_t = \frac{1}{10} \frac{l}{n} = 2.353 m \quad (5.74)$$

Infine, si hanno 17 tratti tra le stilate, e ciascun tratto è stato diviso in 8 concii.

Come primo esempio, si voglia costruire la linea di influenza del momento baricentrico all'estremo di sinistra, ossia per  $z_S = 0$ . Il file di ingresso dati è piuttosto lungo, dovendo contenere le  $17 \times 8 = 136$  quote dell'arco:

---

```

"ARCO DI KRK",FILES,FILES,"ES5-1.ING", "ES5-1.USC"
400,17,8,4,10,4000000,.1,24,24,24,12.9,10,12.9,1.5,1.5,1.5,6,6,6
2.3944e-8,1.5075e-9,-7.2012e-10,1.5075e-9,2.5087e-8,-9.8333e-10
-7.2012e-10,-9.8333e-10,2.7022e-10,2.3944e-8,-1.5075e-9,7.2012e-10
-1.5075e-9,2.5087e-8,-9.8333e-10,7.2012e-10,-9.8333e-10,2.7022e-10

```

0, "MOMENTO BARICENTRICO", DATI, 50, 100, 100, 100, 0, 5, 10, 15  
 0,2.19765478180774, 4.36684070522859, 6.50779755214777, 8.62076028785347  
 10.7059591423789, 12.7636196898508, 14.7939629258928, 16.797205343127  
 18.5982463377221, 20.3733159074014, 22.1226051083746, 23.8463009613211  
 25.5445865139709, 27.2176409021054, 28.8656394090106, 30.4887535234173  
 31.9506987449617, 33.3885503701786, 34.8024601110819, 36.1925762212691  
 37.5590435439738, 38.9020035588374, 40.2215944274266, 41.5179510375222  
 42.6860715521281, 43.8315044976182, 44.9543690500712, 46.0547813515915  
 47.1328545468728, 48.1886988187026, 49.222421422426, 50.234126719389  
 51.1435441606668, 52.0313162679593, 52.8975345728884, 53.7422878817973  
 54.5656623030022, 55.3677412731443, 56.1486055826578, 56.9083334003666  
 57.5855958397203, 58.241968416341, 58.8775184706834, 59.4923108371202  
 60.0864078634186, 60.6598694294319, 61.212752965015, 61.7451134671772  
 62.2093486666884, 62.653215868154, 63.0767605762001, 63.480025937273  
 63.8630527523924, 64.2258794891944, 64.5685422932734, 64.8910749988296  
 65.1547982816345, 65.3984765289023, 65.6221348989481, 65.8257962805038  
 66.0094812994106, 66.1732083246474, 66.3169934737001, 66.440850617273  
 66.5104843324374, 66.5602171190333, 66.5900545587627, 66.6

Data la simmetria, si sono riportate solo le quote del semiarco di sinistra, copiandole negli appunti di WINDOWS direttamente dal programma AF, e poi incollandole nel file ASCII di ingresso dati. Il corrispondente file prodotto da "UscitaDati" si presenta come:

```
=====
PROGRAMMA AVL - COSTRUZIONE DELLE LINEE DI INFLUENZA
ARCO DI KRK
=====
```

```
FILE DEI DATI = A:\CAP5\ES5-1.DAT
LUCE DELL'ARCO = 400
FRECCIA DELL'ARCO = 66.6
RIALZO A DESTRA = 0
MODULO DI YOUNG = 4000000
MODULO DI POISSON = .1
NUMERO DI FORZE DEL TRENO = 4
RAPPORTO TRA PASSO DELLE STILATE E PASSO DEL TRENO = 10
NUMERO DI TRATTI TRA LE STILATE = 17
NUMERO DI CONCI PER OGNI TRATTO = 8
NUMERO DI TRATTI COMPLESSIVO = 136
LARGHEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO A SINISTRA = 24
LARGHEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO AL CENTRO = 24
LARGHEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO A DESTRA = 24
ALTEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO A SINISTRA = 12.9
```

ALTEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO AL CENTRO = 10  
 ALTEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO A DESTRA = 12.9  
 SPESSORE DELLA SOLETTA A SINISTRA = 1.5  
 SPESSORE DELLA SOLETTA AL CENTRO = 1.5  
 SPESSORE DELLA SOLETTA A DESTRA = 1.5  
 SPESSORE COMPLESSIVO DELLE NERVATURE A SINISTRA = 6  
 SPESSORE COMPLESSIVO DELLE NERVATURE AL CENTRO = 6  
 SPESSORE COMPLESSIVO DELLE NERVATURE A DESTRA = 6

MATRICE DELLE CEDIBILITA' ELASTICHE A SINISTRA

.000000023944	.0000000015075	-.00000000072012
.0000000015075	.000000025087	-.00000000098333
-.00000000072012	-.00000000098333	.00000000027022

MATRICE DELLE CEDIBILITA' ELASTICHE A DESTRA

.000000023944	-.0000000015075	.00000000072012
-.0000000015075	.000000025087	-.00000000098333
.00000000072012	-.00000000098333	.00000000027022

VETTORE DELLE FORZE DEL TRENO E LORO DISTANZA DA DESTRA

1	50	0
2	100	5
3	100	10
4	100	15

Si sono omesse, per problemi di lunghezza, le quote dell'arco. La subroutine "UscitaRisultati" produce:

LINEA DI INFLUENZA DEL MOMENTO BARICENTRICO  
 ASCISSA IN CUI SI VUOLE LA LINEA DI INFLUENZA = 0  
 AREA AD ORDINATA NEGATIVA = -2747.05490280946  
 AREA AD ORDINATA POSITIVA = 2881.49917120719  
 VALORE MINIMO = -9266.11099682392  
 ASCISSA DELLA TESTA DEL TRENO = 75.2941176470588  
 VALORE MASSIMO = 7237.95909646686  
 ASCISSA DELLA TESTA DEL TRENO = 268.235294117647

```

=====
=
=          LINEA DI INFLUENZA          =
=
=====
    
```

---

ASSISSA	ORDINATA
---------	----------

---



1	0
2	-16.952872001795
3	-25.3175885225423
4	-26.8737193521674
5	-23.4085248086719
6	-16.6023625648591
7	-8.01676103868817
8	.943298575513381
9	9.08302096102082
10	15.4749660359416
11	19.5070907595234
12	20.9116269834823
13	19.7699167415981
14	16.4946853784196
15	11.7970213568351
16	6.64911063124006
17	2.25497227205307
18	0

TEMPO DI ESECUZIONE = 9.44970703125 SEC.

RUN DEL 10-03-1994 ORE 02:03:47

La stessa linea di influenza, ma per momenti intradossali, è fornita da:

LINEA DI INFLUENZA DEL MOMENTO INTRADOSSALE  
 ASCISSA IN CUI SI VUOLE LA LINEA DI INFLUENZA = 0  
 AREA AD ORDINATA NEGATIVA = -1852.22657220396  
 AREA AD ORDINATA POSITIVA = 4229.79640261748  
 VALORE MINIMO = -7244.04304098123  
 ASCISSA DELLA TESTA DEL TRENO = 70.5882352941177  
 VALORE MASSIMO = 9721.89231584933  
 ASCISSA DELLA TESTA DEL TRENO = 258.823529411765

```

=====
=
=          L I N E A   D I   I N F L U E N Z A          =
=
=====
    
```

ASCISSA	ORDINATA
1	0
2	-12.7278097723398
3	-20.3315179319313
4	-20.906851706337

208 *Le strutture ad arco*

5	-16.4060284465202
6	-8.65490347094145
7	.662001779059119
8	10.0439583754894
9	18.2327982832565
10	24.2742525130972
11	27.5680927296849
12	27.8964516530989
13	25.425537822145
14	20.6829785407881
15	14.5192719472034
16	8.06577198762292
17	2.70271348919896
18	0

TEMPO DI ESECUZIONE = 8.078125 SEC.

RUN DEL 10-03-1994 ORE 17:58:57

e per momenti estradossali:

LINEA DI INFLUENZA DEL MOMENTO ESTRADOSSALE  
 ASCISSA IN CUI SI VUOLE LA LINEA DI INFLUENZA = 0  
 AREA AD ORDINATA NEGATIVA = -3862.81451549208  
 AREA AD ORDINATA POSITIVA = 1754.13322187396  
 VALORE MINIMO = -11333.465416519  
 ASCISSA DELLA TESTA DEL TRENO = 80  
 VALORE MASSIMO = 4916.09807960161  
 ASCISSA DELLA TESTA DEL TRENO = 282.352941176471

```
=====
=
=          L I N E A   D I   I N F L U E N Z A          =
=
=====
```

ASSISSA	ORDINATA
1	0
2	-21.1779342312501
3	-30.3036591131532
4	-32.8405869979977
5	-30.4110211708235
6	-24.5498216587767
7	-16.6955238564355
8	-8.15736122446261

9	-6.67563612148794D-02
10	6.67567955878591
11	11.4460887893617
12	13.9268023138654
13	14.1142956610507
14	12.3063922160506
15	9.07477076646621
16	5.23244927485681
17	1.80723105490666
18	0

TEMPO DI ESECUZIONE = 8.890625 SEC.

RUN DEL 10-03-1994 ORE 18:20:25

Infine, la linea di influenza del taglio è data da:

LINEA DI INFLUENZA DEL SFORZO NORMALE  
 ASCISSA IN CUI SI VUOLE LA LINEA DI INFLUENZA = 0  
 AREA AD ORDINATA NEGATIVA = -347.771404963693  
 AREA AD ORDINATA POSITIVA = 0  
 VALORE MINIMO = -495.528616851842  
 ASCISSA DELLA TESTA DEL TRENO = 188.235294117647  
 VALORE MASSIMO = 0  
 ASCISSA DELLA TESTA DEL TRENO = 0

=====

=

= LINEA DI INFLUENZA =

=

=====

ASCISSA	ORDINATA
1	0
2	-0.655048407667461
3	-0.773034200094714
4	-0.925095759043466
5	-1.08565835072118
6	-1.23216420060738
7	-1.34554462290656
8	-1.41095500774821
9	-1.4185701274784
10	-1.36423046157452
11	-1.24976774731187
12	-1.08291855342897



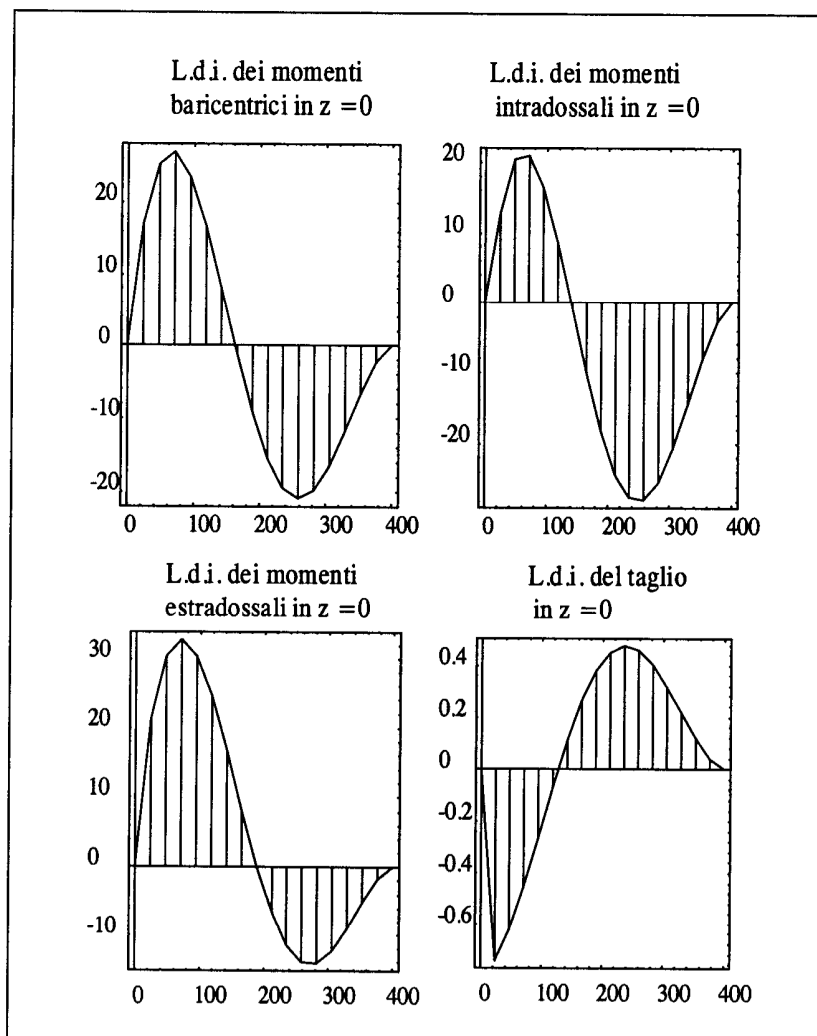


Figura 5.12- Le linee di influenza relative alla sezione di sinistra

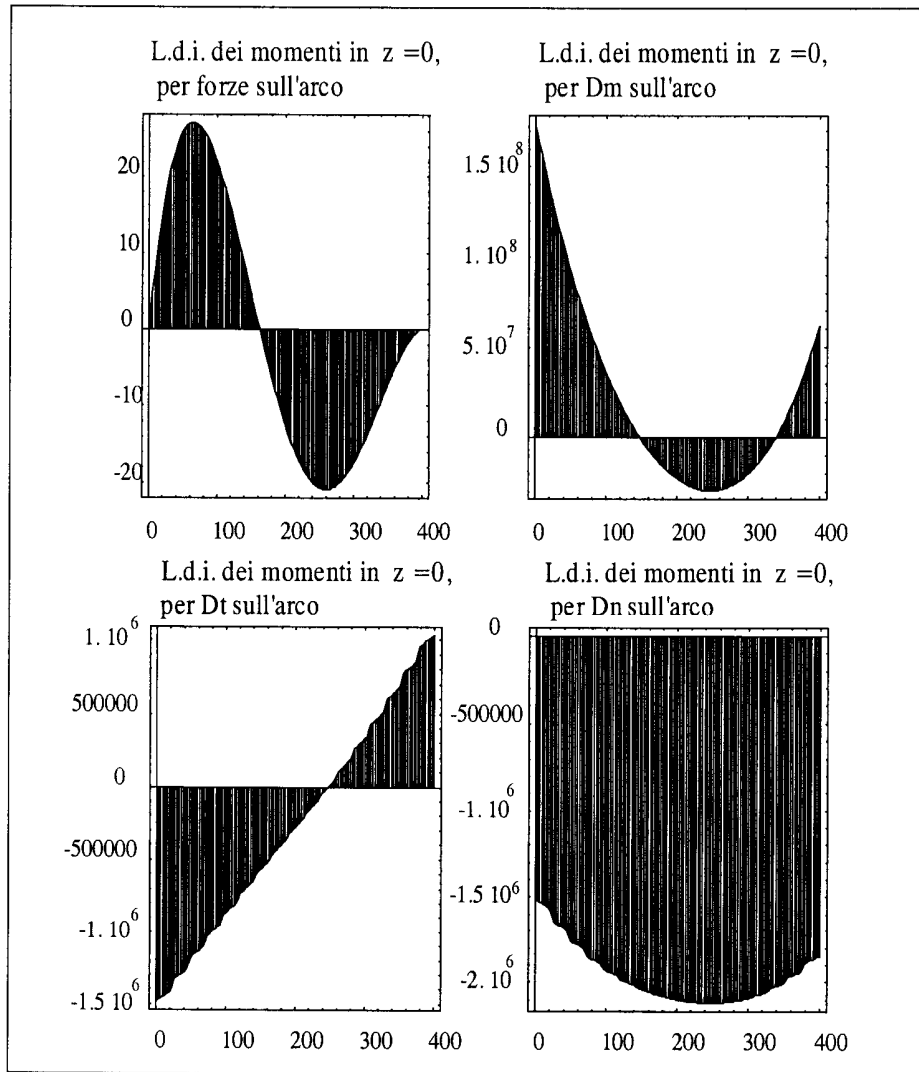


Figura 5.13- Linee di influenza per forze o distorsioni viaggianti sull'arco

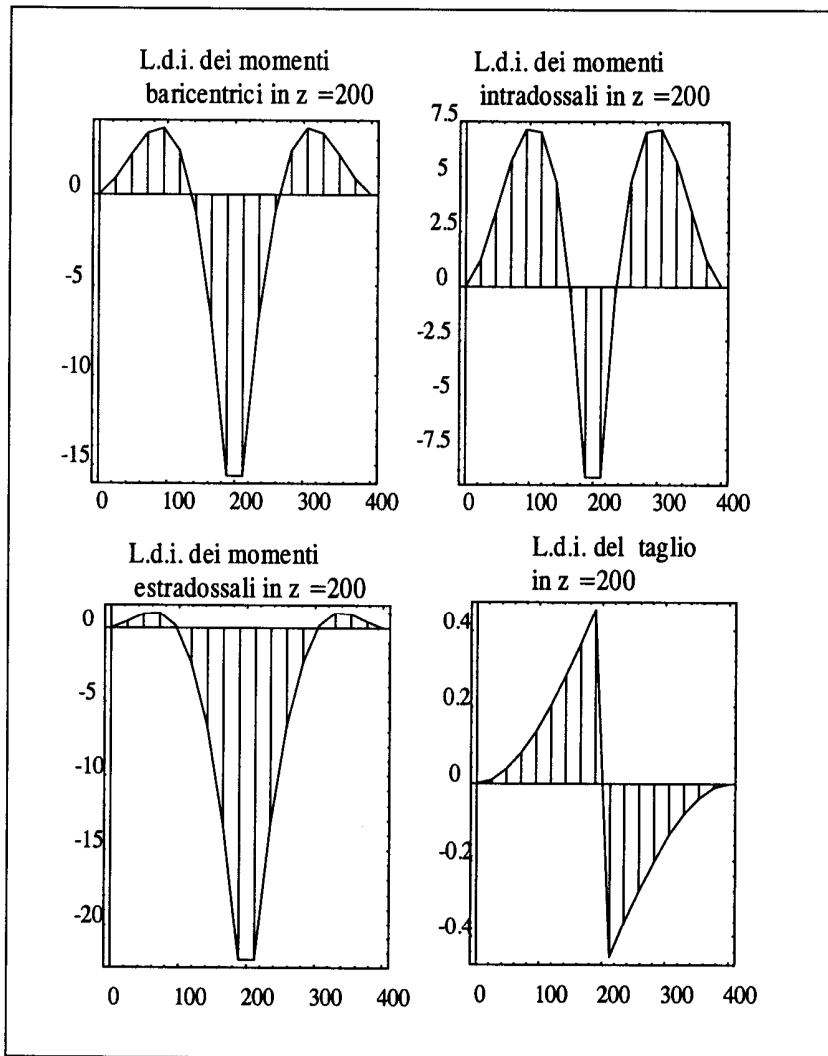


Figura 5.14- Le linee di influenza relative alla sezione di chiave

214 *Le strutture ad arco*

5	-.299993908624062
6	.55032512211304
7	.427785685738756
8	.311068959617552
9	.206283271855107
10	.118093333901022
11	4.94719427714535D-02
12	1.55971641975727D-03
13	-2.63434415231362D-02
14	-3.66651793785221D-02
15	-3.33660297411537D-02
16	-2.17225751465945D-02
17	-8.1531641365803D-03
18	0

TEMPO DI ESECUZIONE = 8.35009765625 SEC.

RUN DEL 10-04-1994 ORE 00:32:38

se la sezione è scelta immediatamente a sinistra della stilata, oppure:

LINEA DI INFLUENZA DEL TAGLIO  
 ASCISSA IN CUI SI VUOLE LA LINEA DI INFLUENZA = 117.65  
 AREA AD ORDINATA NEGATIVA = -24.7762157259293  
 AREA AD ORDINATA POSITIVA = 23.7069746748167  
 VALORE MINIMO = -131.941335010845  
 ASCISSA DELLA TESTA DEL TRENO = 117.647058823529  
 VALORE MASSIMO = 136.482424645611  
 ASCISSA DELLA TESTA DEL TRENO = 155.294117647059

```
=====
=
= LINEA DI INFLUENZA
=
=====
```

ASSISSA	ORDINATA
1	0
2	-.029142523429296
3	-9.50237580231047D-02
4	-.188387482043105
5	-.299982973273507
6	-.421094408622352
7	.42780699777043
8	.311092281247922



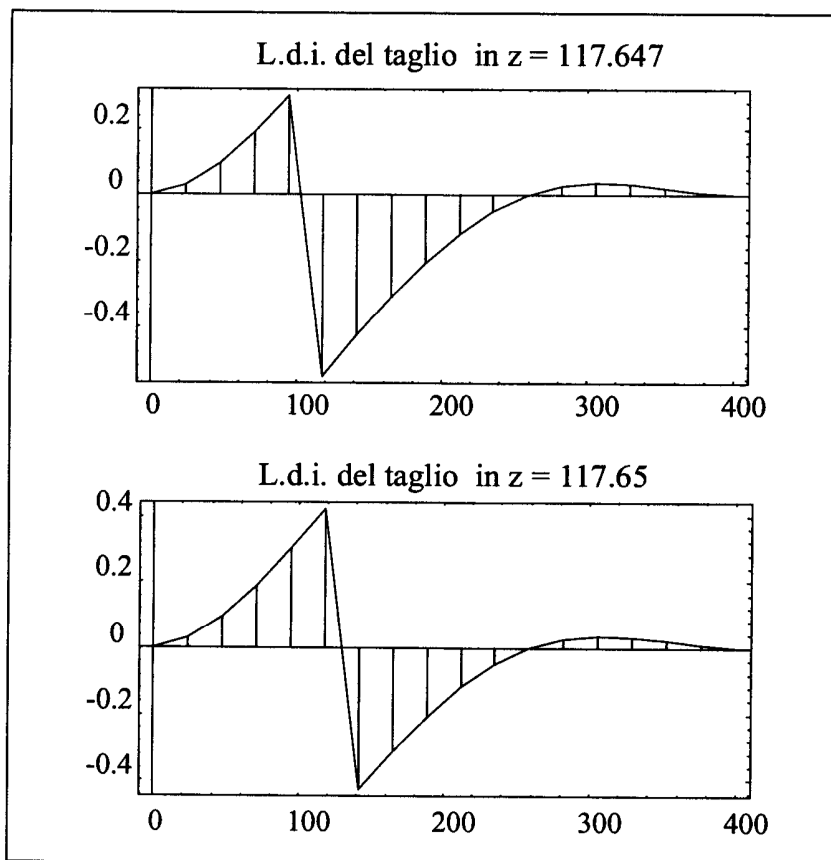


Figura 5.15- Le linee di influenza del taglio sotto la quinta stilata

9	.206307473107364
10	.118117176527907
11	4.94942006146185D-02
12	1.57929519874312D-03
13	-.026327393113406
14	-3.66531731987358D-02
15	-3.33581586200604D-02
16	-2.17184481488959D-02
17	-8.15185066680601D-03
18	0

TEMPO DI ESECUZIONE = 2.3699951171875 SEC.

se la sezione è scelta all'immediata destra. Ambedue le linee di influenza sono disegnate in Figura 5.15.

## 5.6. Il programma AMAX

La ricerca dei valori massimi e minimi di una delle caratteristiche della sollecitazione interna si riduce ad una applicazione ripetitiva del programma AVL appena illustrato. Tale compito è svolto dal programma AMAX, il cui listato è riportato in Appendice 5.2, limitatamente al programma principale ed alle quattro subroutine che hanno subito (minimi) cambiamenti.

Per evidenziare tali modifiche, le righe di programma aggiunte sono riportate in *boldface*, tranne che nella subroutine "UscitaRisultati", integralmente riscritta.

Si sono introdotte due quantità di interesse specifico, e cioè il valore QUNIF della stesa di carico uniforme accidentale  $a$ , ed il rapporto  $k_2$  (K2RAP) tra la distanza tra due stilate successive ed il passo delle ordinate del diagramma dei massimi o minimi. In definitiva, quindi, si hanno le seguenti quantità, illustrate in Figura 5.16:

- il numero T dei conci in cui è suddivisa la struttura per il calcolo degli integrali
- il numero TR1 dei passi di ordinata dei diagrammi dei massimi o minimi; TR1 è calcolato come prodotto tra il numero dei tratti tra le stilate TRAT ed il numero K2RAP
- la proiezione DELTA del concio generico, pari al rapporto tra la luce ed il numero T dei conci
- la distanza BIGDELTA tra due campate successive, pari al rapporto tra la luce ed il numero TRAT
- il passo di marcia SMALLDELTA del treno, pari al rapporto tra BIGDELTA e KRAP
- il passo di ordinata SMALL2DELTA dei diagrammi dei massimi o minimi, pari al rapporto tra BIGDELTA e K2RAP

I valori minimi e massimi delle caratteristiche si ritrovano alla fine nei due array EMIN ed EMAX, rispettivamente, di dimensioni TR1 + TRAT. Ed infatti, le dividenti tra le ordinate dei diagrammi sono TR1 + 1, comprese quelle in  $z = 0$  e  $z = l$ . Tuttavia occorre considerare che, fatta eccezione per il momento baricentrico, sotto ogni stilata il diagramma dei massimi (o dei minimi) presenta una discontinuità, e quindi occorre chiamare in gioco la sezione dell'arco a sinistra e quella a destra di ciascuna delle TRAT - 1 stilate. In totale quindi si hanno TR1 + TRAT ordinate.

Si noti che la matrice di cedibilità è costruita una sola volta, mentre il vettore dei termini noti viene calcolato nel ciclo in IP, quindi TR1 + TRAT volte.

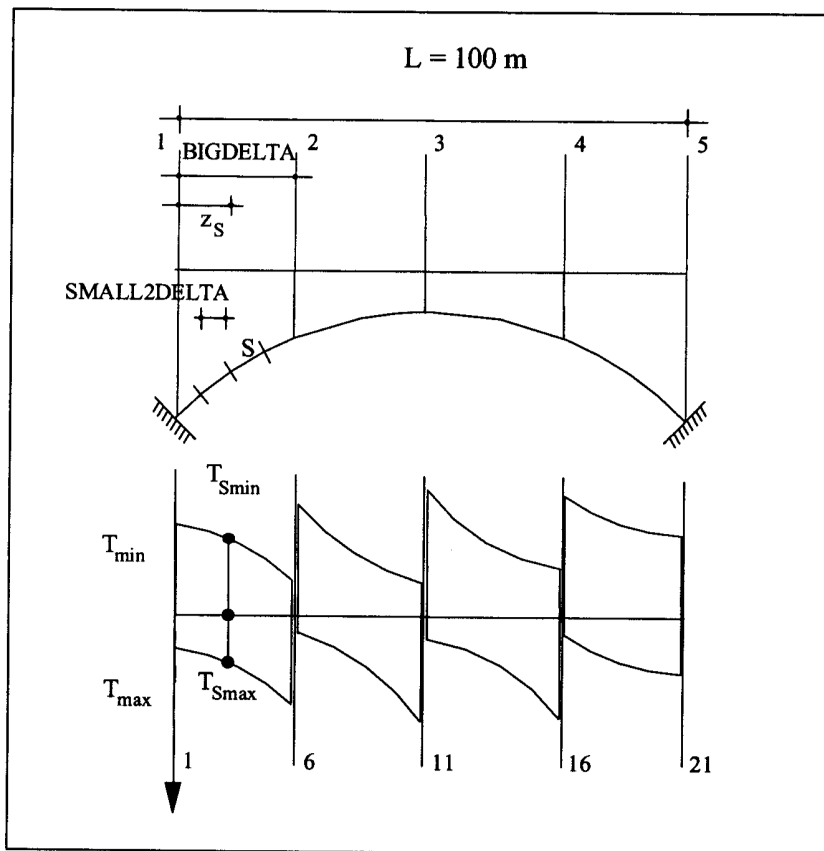


Figura 5.16- Alcune quantità di interesse

TRAT = 4, CONC = 8, KRAP = 10, K2RAP = 5, T = 32, TR1 = 20, BIGDELTA = 25 m  
 SMALL2DELTA = 5 m, DELTA = 3.125 m, SMALLDELTA = 2.5 m

### 5.7. Esempi numerici

Un primo esempio è relativo alla Figura 5.16, con luce di 100 metri, freccia di 30 metri ed asse parabolico. Se si vuole il diagramma dei minimi e massimi momenti baricentrici per effetto del carico accidentale occorre preparare un file di dati del seguente aspetto:

---

"ARCO DI PROVA",FILES,FILES,"ES5-15.ING", "ES5-15.USC"  
 100,4,8,4,10,30,5,4000000,1

218 *Le strutture ad arco*

24,24,24,3,2,3,.5,.5,.5,2,2,2  
2.3944e-8,1.5075e-9,-7.2012e-10  
1.5075e-9,2.5087e-8,-9.8333e-10  
-7.2012e-10,-9.8333e-10,2.7022e-10  
2.3944e-8,-1.5075e-9,7.2012e-10  
-1.5075e-9,2.5087e-8,-9.8333e-10  
7.2012e-10,-9.8333e-10,2.7022e-10  
"UNIFORME", "MOMENTO BARICENTRICO", "FUNC"  
30,0  
50,100,100,100,0,5,10,15

---

Il file ES5-15.USC, preparato dalla subroutine "UscitaRisultati", fornisce:

---

DIAGRAMMA DEI MASSIMI E MINIMI DEL MOMENTO BARICENTRICO  
STRUTTURA PERCORSA DA STESA DI CARICO UNIFORME

---

ASCISSA	MASSIMI	MINIMI
0	4974.76835005694	-3822.82894050109
5	2638.89986974137	-2848.73409807629
10	860.402199105928	-1739.11147930691
15	87.3541750019416	-884.298372208847
20	1674.62247989306	-1639.16145924581
24.9995	3687.26327282748	-2126.66830114636
25.0005	3687.34121386264	-2126.73534325238
30	2423.48489529872	-2279.03458319813
35	1417.69155638578	-1996.65717068603
40	845.180535120791	-1396.92194096176
45	1261.66144493084	-1035.5385074524
49.9995	2720.22564183235	-1023.50417376738
50.0005	2720.22563690376	-1023.50417808454
55	1261.61630067945	-1035.58582081723
60	845.075984511032	-1397.00230558444
65	1417.57776277291	-1996.82074992181
70	2423.33696901315	-2279.25648737742
74.9995	3687.15043712816	-2127.00684535321
75.0005	3687.07248934256	-2126.93981498829
80	1674.41916059898	-1639.51288564903
85	87.1060266447219	-884.697427165171
90	860.06699036256	-1739.51593149328
95	2638.41748048173	-2849.08382736261
100	4974.19758052451	-3823.18274713082

TEMPO DI ESECUZIONE = 9.123046875 SEC.