

4. Le sollecitazioni fisse

4.1. La matrice delle equazioni di congruenza

Si assume come *struttura principale* l'arco a tre cerniere; queste sono ubicate alle imposte A e B , e nella *chiave* C , cioè in mezzeria.

Le reazioni iperstatiche sono perciò le coppie della Figura 4.1, di valore e verso pari a quello dei momenti flettenti reali nelle stesse sezioni:

$$\begin{aligned} X_{1s} = M_A = X_1 & & X_{2s} = M_C = X_2 & & X_{3s} = M_B = X_3 \\ X_{1d} = -M_A = -X_1 & & X_{2d} = -M_C = -X_2 & & X_{3d} = -M_B = -X_3 \end{aligned} \quad (4.1)$$

I pedici s e d indicano la sinistra e la destra. Il momento è positivo se per esso sono tese le fibre di intradosso; le $X_i > 0$ sono quindi quelle della Figura 4.1. Le reazioni V_A, H_A, V_B, H_B sono quelle agenti dai vincoli sulla struttura, e sono positive se hanno il verso di y e z ; nella Figura 4.1 sono disegnate le reazioni agenti dalla struttura sui vincoli, nell'ipotesi che V_A, H_A, V_B, H_B siano positive. Sui vincoli agiscono anche le coppie $\mathcal{M}_A = X_1$, antioraria se M_A è positivo, ed $\mathcal{M}_B = -X_3$, oraria se M_B è positivo.

Nella Figura 4.2 sono rappresentati i tre sistemi sui quali si calcolano i coefficienti (di Maxwell) delle tre equazioni di congruenza, e cioè le nove rotazioni relative:

$$c_{ij} = \Delta\phi_{ij} \quad (4.2)$$

Il primo indice definisce la posizione della $\Delta\phi_{ij}$, e cioè A, B o C ; il secondo indice il sistema $X_1 = 1, X_2 = 1$ o $X_3 = 1$.

La matrice dei coefficienti è quindi la seguente:

$$\mathbf{C} = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \Delta\phi_{1i} \\ \Delta\phi_{2i} \\ \Delta\phi_{3i} \end{matrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.3)$$

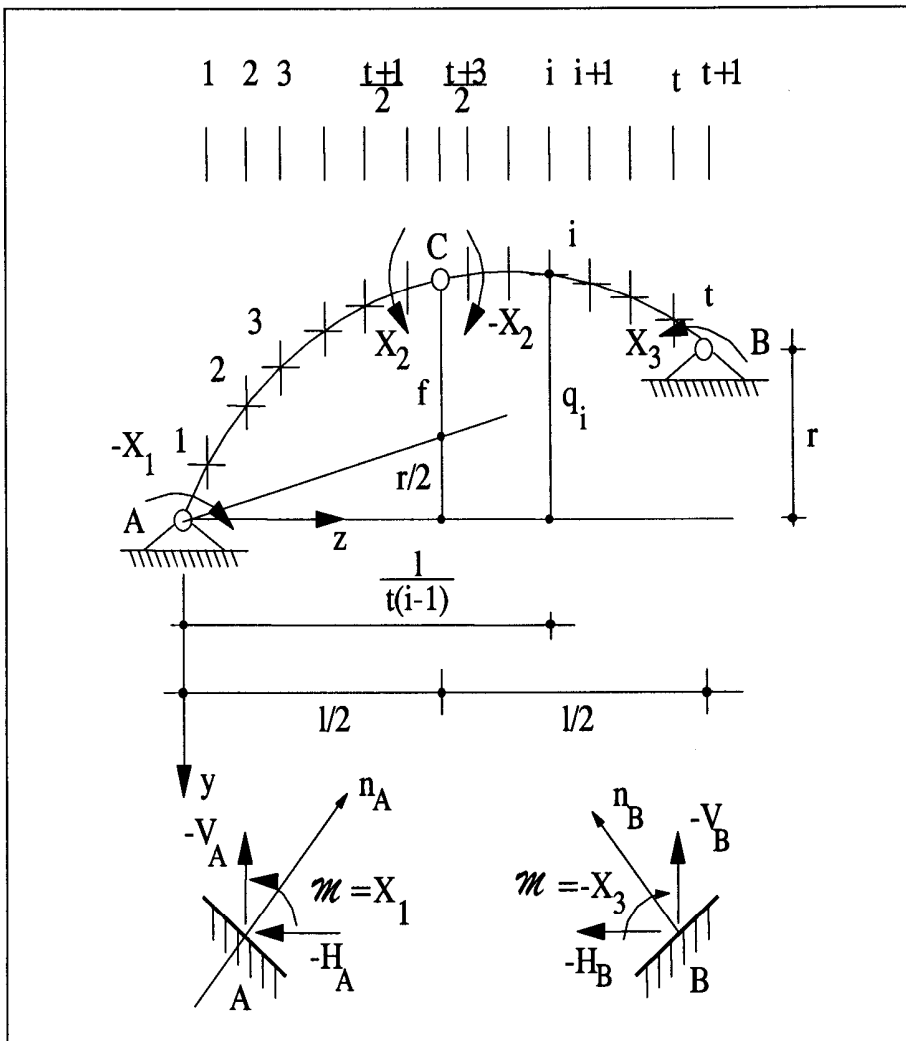


Figura 4.1- La struttura principale adottata

E' regola generale che gli spostamenti corrispondenti alle iperstatiche siano positivi se per essi le iperstatiche compiono lavoro positivo. Quindi la $\Delta\phi$ è positiva se la faccia di destra ruota in senso orario rispetto a quella di sinistra.

In tal modo la C, per sua natura simmetrica (Betti), è anche definita positiva.

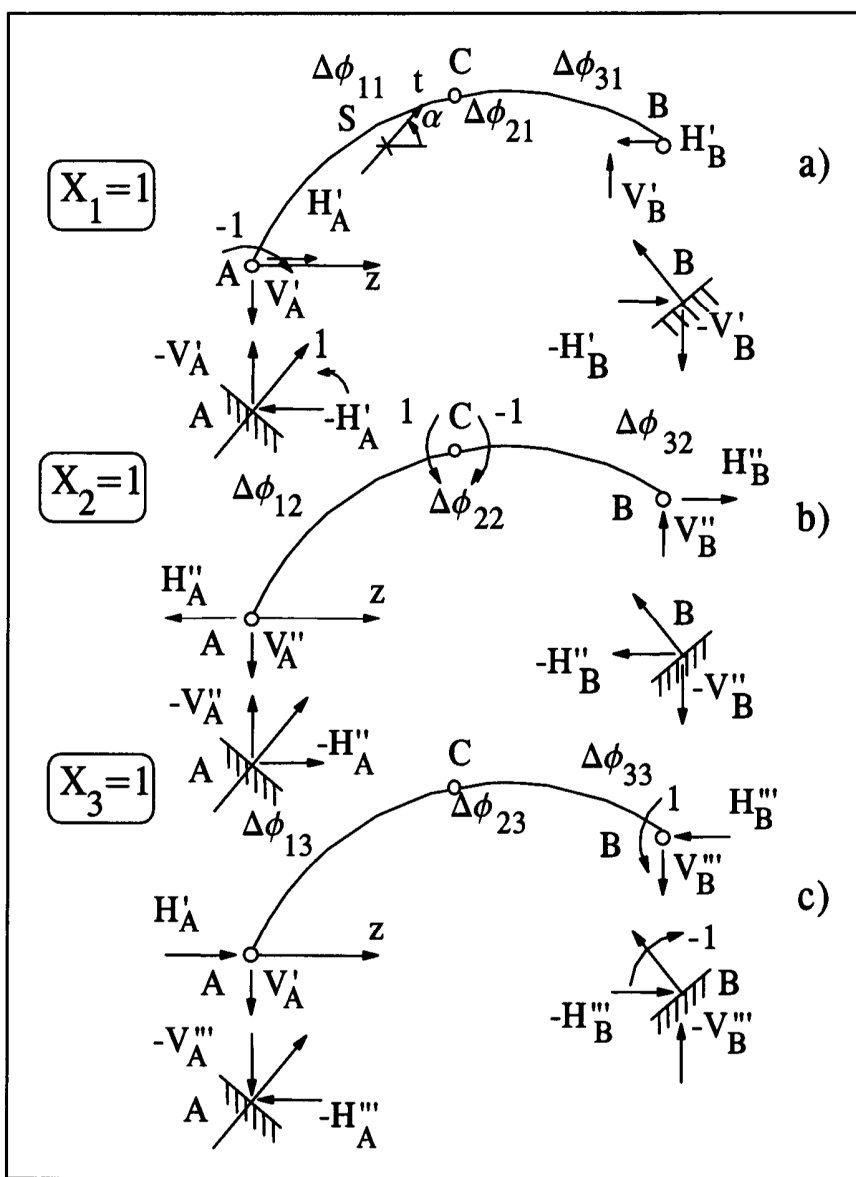


Figura 4.2- I sistemi per il calcolo della matrice di flessibilità

Nel sistema $X_1 = 1$ (Figura 4.2.a) le condizioni di equilibrio dell'intera struttura alla rotazione intorno ad A , e del semiarco CB alla rotazione intorno a C , si scrivono:

$$\begin{aligned} V'_B l + H'_B r + 1 &= 0 \\ V'_B \frac{l}{2} - H'_B (q_c - r) &= 0; \end{aligned} \quad (4.4)$$

si ha poi:

$$\begin{aligned} V'_A + V'_B &= 0 \\ H'_A + H'_B &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

E' così:

$$\begin{aligned} V'_A &= \frac{1}{l} - \frac{r}{2fl} & V'_B &= -\frac{1}{l} + \frac{r}{2fl} \\ H'_A &= \frac{1}{2f} & H'_B &= -\frac{1}{2f} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Si verifica che se $f > r/2$, allora $V'_A > 0$, mentre $f < r/2$, implica $V'_A < 0$.

Le espressioni delle caratteristiche della sollecitazione interna sono le seguenti:

$$\begin{aligned} M' &= -V'_A z - H'_A q(z) + 1 = \left(\frac{r}{2fl} - \frac{1}{l} \right) z - \frac{1}{2f} q(z) + 1 \\ N' &= -V'_B \sin \alpha + H'_B \cos \alpha = \left(\frac{1}{l} - \frac{r}{2fl} \right) \sin \alpha - \frac{1}{2f} \cos \alpha \\ T' &= V'_B \cos \alpha + H'_B \sin \alpha = \left(\frac{r}{2fl} - \frac{1}{l} \right) \cos \alpha - \frac{1}{2f} \sin \alpha \end{aligned} \quad (4.7)$$

L'angolo α in queste formule è l'inclinazione, sull'asse z orizzontale, dell'asse dell'arco in corrispondenza della sezione S generica. Essa è positiva se la tangente t all'asse dell'arco in S , orientata nel senso $A \rightarrow B$, è tale che $\tan(\alpha) > 0$; e cioè se il più piccolo angolo che porta z in t è antiorario.

Nel sistema $X_2 = 1$ (Figura 4.2.b) le stesse condizioni di equilibrio che hanno consentito di scrivere le (4.4) porgono:

$$\begin{aligned} V''_B l + H''_B r &= 0 \\ V''_B \frac{l}{2} - H''_B (q_c - r) + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Da queste, e poi dalle (4.5), si trae:

$$\begin{aligned} V''_A &= \frac{r}{fl} & V''_B &= -\frac{r}{fl} \\ H''_A &= -\frac{1}{f} & H''_B &= \frac{1}{f} \end{aligned} \quad (4.9)$$

con le caratteristiche:

$$\begin{aligned} M'' &= -\frac{r}{fl}z + \frac{1}{f}q(z) \\ N'' &= \frac{r}{fl}\sin\alpha + \frac{1}{f}\cos\alpha \\ T'' &= -\frac{r}{fl}\cos\alpha + \frac{1}{f}\sin\alpha \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nel sistema $X_3 = 1$ (Figura 4.2.c) le stesse condizioni di equilibrio che hanno portato alle (4.4) e (4.8) si scrivono come segue:

$$\begin{aligned} V_B'''l + H_B'''r - 1 &= 0 \\ V_B''' \frac{l}{2} - H_B'''(q_c - r) - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.11)$$

Da queste e poi dalle (4.5) si trae:

$$\begin{aligned} V_A''' &= -\frac{r}{2fl} - \frac{1}{l} & V_B''' &= \frac{r}{2fl} + \frac{1}{l} \\ H_A''' &= \frac{1}{2f} & H_B''' &= -\frac{1}{2f} \end{aligned} \quad (4.12)$$

con le caratteristiche:

$$\begin{aligned} M''' &= \left(\frac{r}{2fl} + \frac{1}{l} \right) z - \frac{1}{2f}q(z) \\ N''' &= -\left(\frac{r}{2fl} + \frac{1}{l} \right) \sin\alpha - \frac{1}{2f}\cos\alpha \\ T''' &= \left(\frac{r}{2fl} + \frac{1}{l} \right) \cos\alpha - \frac{1}{2f}\sin\alpha \end{aligned} \quad (4.13)$$

Si verifica che:

$$\begin{aligned} \frac{r}{2} > -f &\rightarrow V_A''' < 0 \\ \frac{r}{2} < -f &\rightarrow V_A''' > 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si è poi già detto che, contrariamente alla usuale definizione del segno delle rotazioni positive, una $\Delta\phi_i$ è positiva se la faccia di destra ruota in senso orario rispetto a quella di sinistra.

Il lavoro di una iperstatica X_{ih} per la rotazione $\Delta\phi_{ik}$ è quindi dato da:

$$X_{ih}\phi_{iks} - X_{ih}\phi_{ikd} = X_{ih}(\phi_{iks} - \phi_{ikd}), \quad (4.15)$$

e cioè da:

$$X_{ih} \Delta \phi_{ik}. \quad (4.16)$$

Per ottenere $\Delta \phi_{ij}$ si ricorre al principio dei lavori virtuali, scrivendo la condizione di equilibrio dell'arco AB sotto l'insieme di forze i , e utilizzando come insieme congruente di spostamenti quello connesso con le forze j .

La $\Delta \phi_{1j}$ è la rotazione relativa tra le due sezioni A dell'arco e del blocco; essa infatti alla fine deve risultare nulla. Conviene però supporre che la cerniera non sia ubicata proprio all'imposta, ma in una sezione ad essa molto vicina (Figura 4.3.a). In questo modo la $\Delta \phi_{1j}$ è relativa a due sezioni appartenenti ambedue all'arco, e sull'imposta A dell'arco agiscono le reazioni V'_A ed H'_A , e la coppia reattiva di valore -1 .

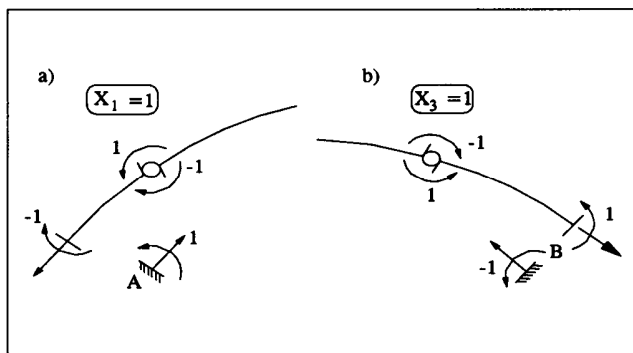


Figura 4.3- L'ubicazione delle cerniere d'imposta

Analogamente, si suppone che la cerniera in B sia prossima all'imposta (Figura 4.3.b), e quindi sull'imposta B dell'arco agiscono le reazioni V''_B ed H''_B , e la coppia reattiva di valore 1.

Le reazioni sull'arco nei tre casi della Figura 4.2 possono perciò rappresentarsi con i seguenti vettori:

$$\mathbf{r}'_A = \begin{pmatrix} V'_A \\ H'_A \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}'_B = \begin{pmatrix} V'_B \\ H'_B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{r}''_A = \begin{pmatrix} V''_A \\ H''_A \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}''_B = \begin{pmatrix} V''_B \\ H''_B \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$\mathbf{r}_A''' = \begin{pmatrix} V_A''' \\ H_A''' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_B''' = \begin{pmatrix} V_B''' \\ H_B''' \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

Si ha così:

$$1 \times \Delta\phi_{ij} - \mathbf{r}_{Ai}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_{Aj} - \mathbf{r}_{Bi}^T \mathbf{B} \mathbf{r}_{Bj} = \int_s M_i \frac{M_j ds}{EI} + \int_s N_i \frac{N_j ds}{EA} + \int_s T_i \chi \frac{T_j ds}{GA}, \quad (4.20)$$

da cui:

$$c_{ij} = \mathbf{r}_{Ai}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_{Aj} - \mathbf{r}_{Bi}^T \mathbf{B} \mathbf{r}_{Bj} + \int_s M_i \frac{M_j ds}{EI} + \int_s N_i \frac{N_j ds}{EA} + \int_s T_i \chi \frac{T_j ds}{GA}. \quad (4.21)$$

4.2. Le equazioni di congruenza

Dato un qualsiasi insieme di sollecitazioni applicate (forze, variazioni termiche, cedimento, ritiro etc.) agenti sull'arco, i valori delle iperstatiche sono quelli che riconducono al rispetto della congruenza in corrispondenza delle tre cerniere. Se quindi le rotazioni relative indotte — dalle sollecitazioni applicate — tra le facce connesse dalle cerniere A , C e B sono $\Delta\phi_1^0$, $\Delta\phi_2^0$, $\Delta\phi_3^0$, le iperstatiche sono fornite dal sistema:

$$\begin{aligned} c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + c_{13}X_3 + \Delta\phi_1^0 &= 0 \\ c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + c_{23}X_3 + \Delta\phi_2^0 &= 0 \\ c_{31}X_1 + c_{32}X_2 + c_{33}X_3 + \Delta\phi_3^0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Chiamando \mathbf{b} il vettore colonna:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \Delta\phi_1^0 \\ \Delta\phi_2^0 \\ \Delta\phi_3^0 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

il sistema precedente si scrive:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = -\mathbf{b} \quad (4.24)$$

Il vettore colonna \mathbf{b} non è intrinseco della struttura, come la matrice \mathbf{C} , ma dipende dalla sollecitazione applicata.

Siano $M^0(z)$, $N^0(z)$ e $T^0(z)$ i momenti, gli sforzi normali ed i tagli indotti dalla sollecitazione applicata sulla struttura principale.

Per ottenere $\Delta\phi_i^0$ ($i = 1, 2, 3$) si scrive l'espressione del principio dei lavori virtuali assumendo il sistema $X_i = 1$ come insieme di forze in equilibrio sull'arco, ed il sistema di spostamenti indotti dalla sollecitazione applicata come insieme di spostamenti congruenti. Si ha così:

$$1 \times \Delta\phi_i^0 - \mathbf{r}_{A_i}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_A^0 - \mathbf{r}_{B_i}^T \mathbf{B} \mathbf{r}_B^0 = \int_s \frac{M^0 M_i}{EI} ds + \int_s \frac{N^0 N_i}{EA} ds + \int_s \frac{\chi T^0 T_i}{GA} ds \quad (4.25)$$

da cui si trae:

$$b_i = \mathbf{r}_{A_i}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_A^0 - \mathbf{r}_{B_i}^T \mathbf{B} \mathbf{r}_B^0 + \int_s \frac{M^0 M_i}{EI} ds + \int_s \frac{N^0 N_i}{EA} ds + \int_s \frac{\chi T^0 T_i}{GA} ds \quad (4.26)$$

ottenendo così il termine b_i dovuto ad un qualsiasi insieme di forze applicate. Le distorsioni possono essere classificate in cedimenti vincolari anelastici delle due imposte A e B , distorsioni concentrate e distorsioni distribuite.

I cedimenti anelastici delle imposte si indicano con i due vettori:

$$\mathbf{s}_A^* = \begin{pmatrix} v_A^* \\ w_A^* \\ \phi_A^* \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_B^* = \begin{pmatrix} v_B^* \\ w_B^* \\ \phi_B^* \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Le distorsioni concentrate D_m , D_t e D_n corrispondenti al momento flettente, al taglio ed allo sforzo normale sono riportate nella Figura 4.4. Si osserva in questa sede che una distorsione è positiva se una qualsiasi caratteristica positiva — agente sulle due facce tra cui la distorsione agisce — compie per essa lavoro positivo.

Le distorsioni distribuite $\mu(s)$, $\theta(s)$, e $\lambda(s)$ hanno luogo per effetto di deformazioni ϵ^* e τ^* indipendenti dalle forze. Si suppone che tali deformazioni rispettino la condizione di planeità delle sezioni rette; sotto tale condizione è uso chiamarle *distorsioni di Volterra*. Se ds è la lunghezza di un concio elementare situato all'ascissa s , le tre suddette distorsioni distribuite generano all'ascissa s le tre distorsioni concentrate elementari:

$$\begin{aligned} dD_m &= \mu ds \\ dD_t &= \theta ds \\ dD_n &= \lambda ds \end{aligned} \quad (4.28)$$

Le μ , θ e λ sono positive se generano distorsioni positive.

Una variazione termica uniforme Δt equivale quindi ad una distorsione distribuita data da:

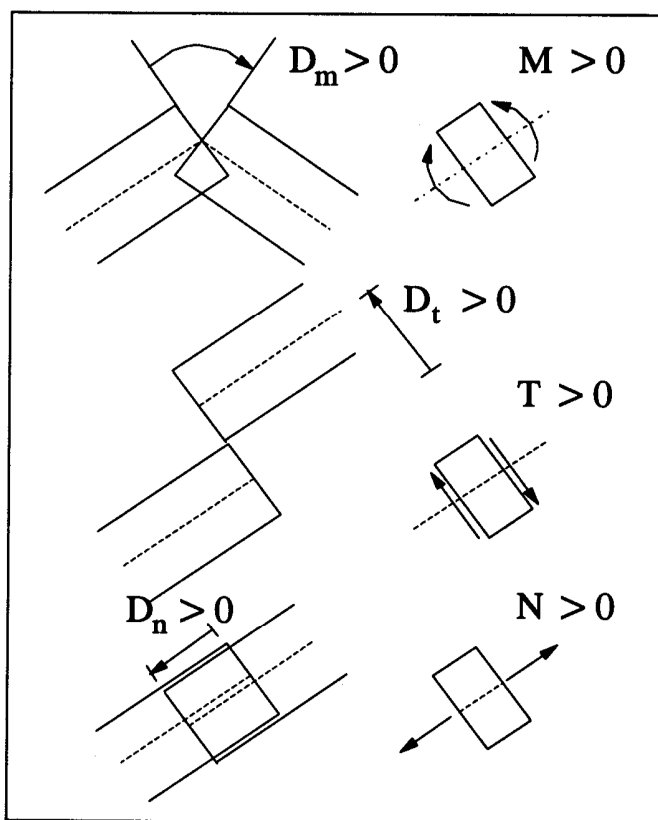


Figura 4.4- Distorsioni concentrate

$$\lambda = -\alpha \Delta t \quad (4.29)$$

ove α è il coefficiente di dilatazione termica.

Il ritiro ϵ_r , preso in valore assoluto, equivale ad una distorsione distribuita:

$$\lambda = \epsilon_r \quad (4.30)$$

Una variazione termica che varia linearmente lungo l'altezza, annullandosi nel baricentro (Figura 4.5), equivale ad una distorsione distribuita:

$$\mu = -\alpha \frac{\overline{\Delta t}}{h} \quad (4.31)$$

ove:

$$\overline{\Delta t} = \Delta t_i - \Delta t_e \quad (4.32)$$

è la differenza tra la variazione termica intradossale e quella estradossale, ed h è l'altezza della sezione.

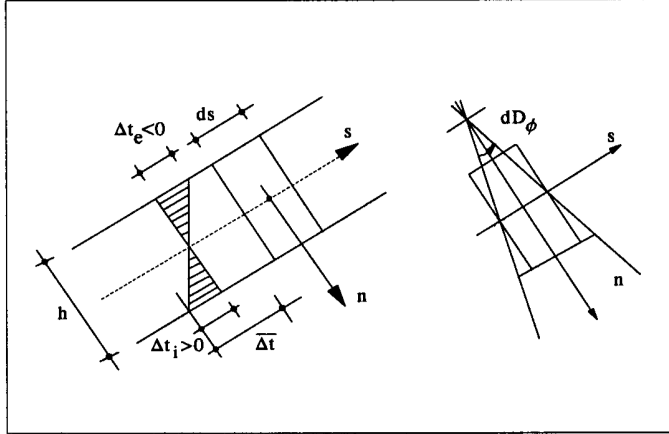


Figura 4.5- Variazione termica alla Navier

Le distorsioni suddette non generano sollecitazioni interne sulla struttura principale, e quindi non alterano i valori M^0 , N^0 e T^0 delle caratteristiche interne e quelli \mathbf{r}_A^0 ed \mathbf{r}_B^0 delle reazioni. Esse però intervengono direttamente nell'espressione del lavoro interno. La (4.25) si completa come segue:

$$\begin{aligned} & 1 \times \Delta\phi_i^0 - \mathbf{r}_{Ai}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_A^0 - \mathbf{r}_{Bi}^T \mathbf{B} \mathbf{r}_B^0 + \mathbf{r}_{Ai}^T \mathbf{s}_A^* + \mathbf{r}_{Bi}^T \mathbf{s}_B^* + \\ & + \sum_h D_{mh} M_{hi} + \sum_h D_{nh} N_{hi} + \sum_h D_{th} T_{hi} = \\ & = \int_s \frac{M^0 M_i}{EI} ds + \int_s \frac{N^0 N_i}{EA} ds + \int_s \frac{\chi T^0 T_i}{GA} ds - \\ & - \int_s \mu M_i ds - \int_s \lambda N_i ds - \int_s \theta T_i ds + \int_s \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} M_i ds + \int_s \alpha \Delta t N_i ds \end{aligned} \quad (4.33)$$

L'espressione (4.26) di b_i a sua volta diviene:

$$\begin{aligned}
b_i = & \mathbf{r}_{Ai}^T \mathbf{A} \mathbf{r}_A^0 + \mathbf{r}_{Bi}^T \mathbf{B} \mathbf{r}_B^0 + \mathbf{r}_{Ai}^T \mathbf{s}_A^* + \mathbf{r}_{Bi}^T \mathbf{s}_B^* - \\
& - \sum_h D_{mh} M_{hi} - \sum_h D_{nh} N_{hi} - \sum_h D_{th} T_{hi} + \\
& + \int_s \frac{M^0 M_i}{EI} ds + \int_s \frac{N^0 N_i}{EA} ds + \int_s \frac{\chi^{T^0} T_i}{GA} ds - \\
& - \int_s \mu M_i ds - \int_s \lambda N_i ds - \int_s \theta T_i ds + \int_s \frac{\alpha \overline{\Delta t}}{h} + \int_s \alpha \Delta t N_i ds
\end{aligned} \tag{4.34}$$

e le variazioni termiche sono poste in forma esplicita; esse infatti sono il più delle volte le uniche distorsioni presenti.

4.3. Le caratteristiche connesse con i carichi fissi

Si consideri (Figura 4.6) una forza verticale F applicata all'ascissa z_F . Per il calcolo delle reazioni occorre distinguere il caso in cui $z_F < l/2$ da quello in cui $z_F > l/2$, mentre per il calcolo delle caratteristiche occorre distinguere anche il caso $z > z_F$ da quello in cui $z < z_F$, dove z è l'ascissa della sezione corrente.

4.3.1. Il caso $z_F < l/2$

Nel caso $z_F \leq l/2$ le equazioni di equilibrio di tutto l'arco alla rotazione intorno ad A , e del semiarco CB alla rotazione intorno a C , si scrivono:

$$\begin{aligned}
V_B l + H_B r + F z_F &= 0 \\
V_B \frac{l}{2} - H_B (q_C - r) &= 0;
\end{aligned} \tag{4.35}$$

si ha poi:

$$\begin{aligned}
V_A + V_B + F &= 0 \\
H_A + H_B &= 0
\end{aligned} \tag{4.36}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
V_A = -F \left(1 - \frac{2f-r}{2fl} z_F \right) & \quad V_B = -F \frac{2f-r}{2fl} z_F \\
H_A = F \frac{z_F}{2f} & \quad H_B = -F \frac{z_F}{2f}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

4.3.2. Il caso $z_F \geq l/2$

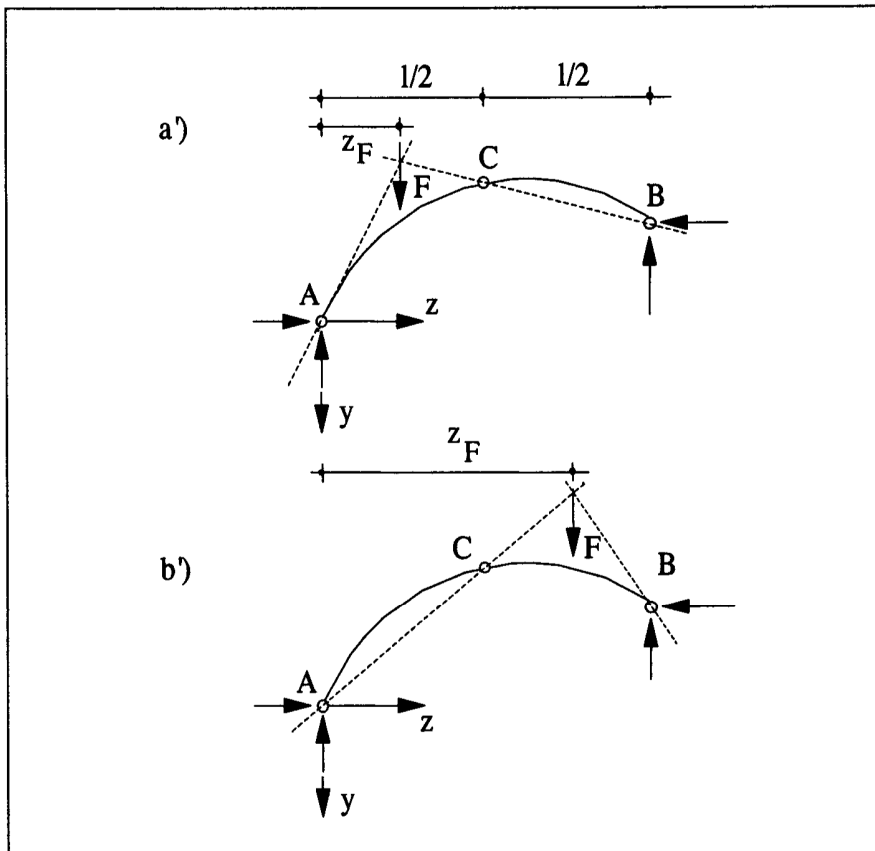


Figura 4.6- L'arco soggetto a carico verticale

Le equazioni di equilibrio di tutto l'arco alla rotazione intorno ad B , e del semiarco AC alla rotazione intorno a C , si scrivono:

$$\begin{aligned} V_A l + H_A r + F(l - z_F) &= 0 \\ V_A \frac{l}{2} + H_A r_C &= 0; \end{aligned} \quad (4.38)$$

da cui:

$$\begin{aligned}
V_A &= -F \frac{2f+r}{2fl} (l-z_F) & V_B &= -F \frac{(2f+r)z_F - rl}{2fl} \\
H_A &= F \frac{l-z_F}{2f} & H_B &= -F \frac{l-z_F}{2f}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

In ambedue questi casi le caratteristiche della sollecitazione interna sono date dal seguente quadro (il pedice d in N e T significa che in $z = z_F$ i valori sono quelli di destra):

$$\begin{aligned}
M^o &= \begin{cases} -V_A z - H_A q(z) & \text{se } z_F > z \\ -V_A z - H_A q(z) - F(z - z_F) & \text{se } z_F \leq z \end{cases} \\
N_d^o &= \begin{cases} V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha & \text{se } z_F > z \\ V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha + F \sin \alpha & \text{se } z_F \leq z \end{cases} \\
T_d^o &= \begin{cases} -V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha & \text{se } z_F > z \\ -V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha - F \cos \alpha & \text{se } z_F \leq z \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Si consideri poi (Figura 4.7) una forza orizzontale P applicata all'ascissa z_P . Si hanno due casi secondo che z_P sia minore o maggiore di $l/2$.

4.3.3. Il caso $z_P \leq l/2$

Le equazioni (4.35) si modificano come segue:

$$\begin{aligned}
V_B l + H_B r + P q_P &= 0 \\
V_B \frac{l}{2} - H_B (q_P - r) &= 0;
\end{aligned} \tag{4.41}$$

si ha poi:

$$\begin{aligned}
V_A + V_B &= 0 \\
H_A + H_B + P &= 0
\end{aligned} \tag{4.42}$$

e quindi:

$$\begin{aligned}
V_A &= P \frac{q_P(2f-r)}{2fl} & V_B &= -P \frac{q_P(2f-r)}{2fl} \\
H_A &= -P \frac{2f-q_P}{2f} & H_B &= -P \frac{q_P}{2f}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

4.3.4. Il caso $z_P \geq l/2$

Le equazioni (4.38) si modificano in:

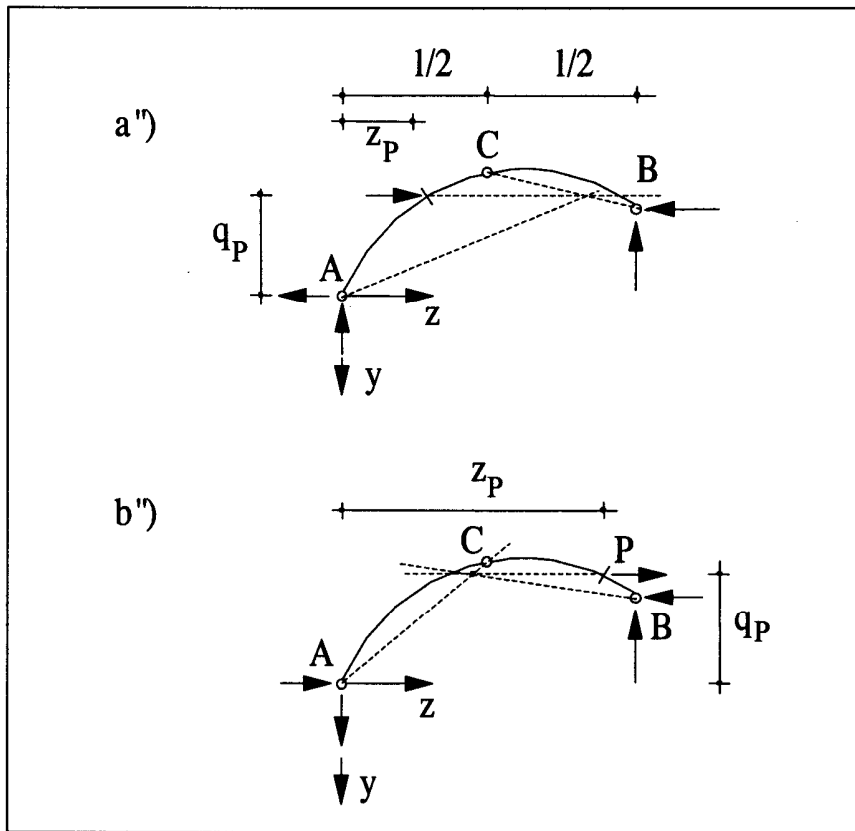


Figura 4.7- L'arco soggetto a carico orizzontale

$$\begin{aligned} V_A l + H_A r - P(q_P - r) &= 0 \\ V_A \frac{l}{2} + H_A q_P &= 0; \end{aligned} \quad (4.44)$$

e quindi:

$$\begin{aligned} V_A &= P \frac{2f+r}{2fl} (q_P - r) & V_B &= -P \frac{2f+r}{2fl} (q_P - r) \\ H_A &= -P \frac{q_P - r}{2f} & H_B &= -P \frac{2f - q_P + r}{2f} \end{aligned} \quad (4.45)$$

In ambedue questi casi le caratteristiche della sollecitazione interna sono date dal

seguinte quadro:

$$\begin{aligned}
 M^0 &= \begin{cases} -V_A z - H_A q(z) & \text{se } z_P > z \\ -V_A z - H_A q(z) - P(q - q_P) & \text{se } z_P \leq z \end{cases} \\
 N_d^0 &= \begin{cases} V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha & \text{se } z_P > z \\ V_A \sin \alpha - H_A \cos \alpha - P \cos \alpha & \text{se } z_P \leq z \end{cases} \\
 T_d^0 &= \begin{cases} -V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha & \text{se } z_P > z \\ -V_A \cos \alpha - H_A \sin \alpha - P \sin \alpha & \text{se } z_P \leq z \end{cases}
 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Naturalmente la precisazione di sforzo normale e taglio a destra vale solo per la struttura caricata dalle forze applicate.

4.4. Sollecitazioni esterne e spostamenti nella struttura reale

Ottenuti i valori delle tre iperstatiche, si calcolano per sovrapposizione le caratteristiche della sollecitazione interna:

$$\begin{aligned}
 M(z) &= M^0(z) + \sum_1^3 X_i M_i(z) \\
 N_d(z) &= N_d^0(z) + \sum_1^3 X_i N_i(z) \\
 T_d(z) &= T_d^0(z) + \sum_1^3 X_i T_i(z)
 \end{aligned} \quad (4.47)$$

La seconda e la terza delle (4.47) forniscono lo sforzo normale ed il taglio immediatamente alla destra di ogni sezione ove è applicata la forza F o la forza P .

Dalle relazioni di equilibrio del concio elementare (Figura 4.8):

$$\begin{aligned}
 -N_{is} + N_{id} - F_i \sin \alpha_i + P_i \cos \alpha_i &= 0 \\
 -T_{is} + T_{id} + F_i \cos \alpha_i + P_i \sin \alpha_i &= 0
 \end{aligned} \quad (4.48)$$

si trae:

$$\begin{aligned}
 N_{is} &= N_{id} - F_i \sin \alpha_i + P_i \cos \alpha_i \\
 T_{is} &= T_{id} + F_i \cos \alpha_i + P_i \sin \alpha_i
 \end{aligned} \quad (4.49)$$

Le (4.49) forniscono sforzo normale e taglio immediatamente alla sinistra della sezione di applicazione di F_i o P_i .

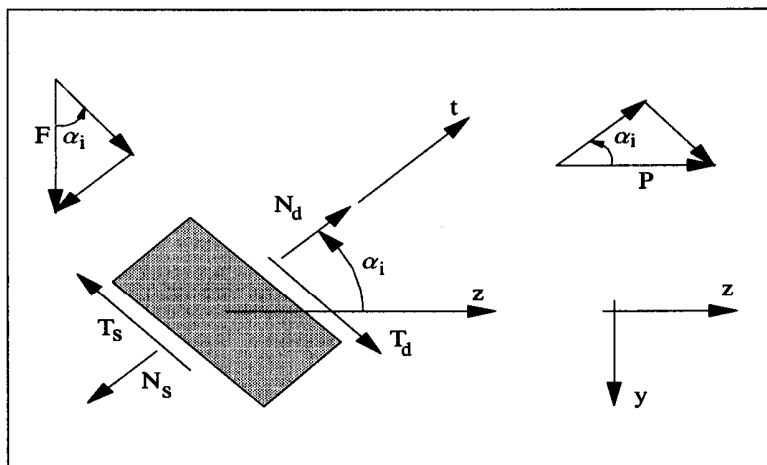


Figura 4.8- Il concio elementare

Per ottenere poi le componenti v_S , w_S e ϕ_S degli spostamenti della sezione S all'ascissa z_S conviene fare riferimento alla mensola AS (Figura 4.9), poichè solo dalle deformazioni di AS dipendono gli spostamenti di S .

Gli spostamenti v_S , w_S e ϕ_S in S sono somma di quelli connessi, per moto rigido di AS , agli spostamenti v_A , w_A e ϕ_A di A , e di quelli dovuti alle deformazioni dei conci elementari da A ad S .

Gli spostamenti della sezione A sono dati da:

$$\mathbf{s}_A = \mathbf{s}_A^* - \mathbf{A}\mathbf{r}_A \quad (4.50)$$

e d'altro canto può scriversi:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A^0 + \sum_1^3 X_i \mathbf{r}_{Ai} \quad (4.51)$$

Quindi si ha:

$$\mathbf{s}_A = \mathbf{s}_A^* - \mathbf{A} \left(\mathbf{r}_A^0 + \sum_1^3 X_i \mathbf{r}_{Ai} \right) \quad (4.52)$$

Gli spostamenti di A inducono in S gli spostamenti seguenti:

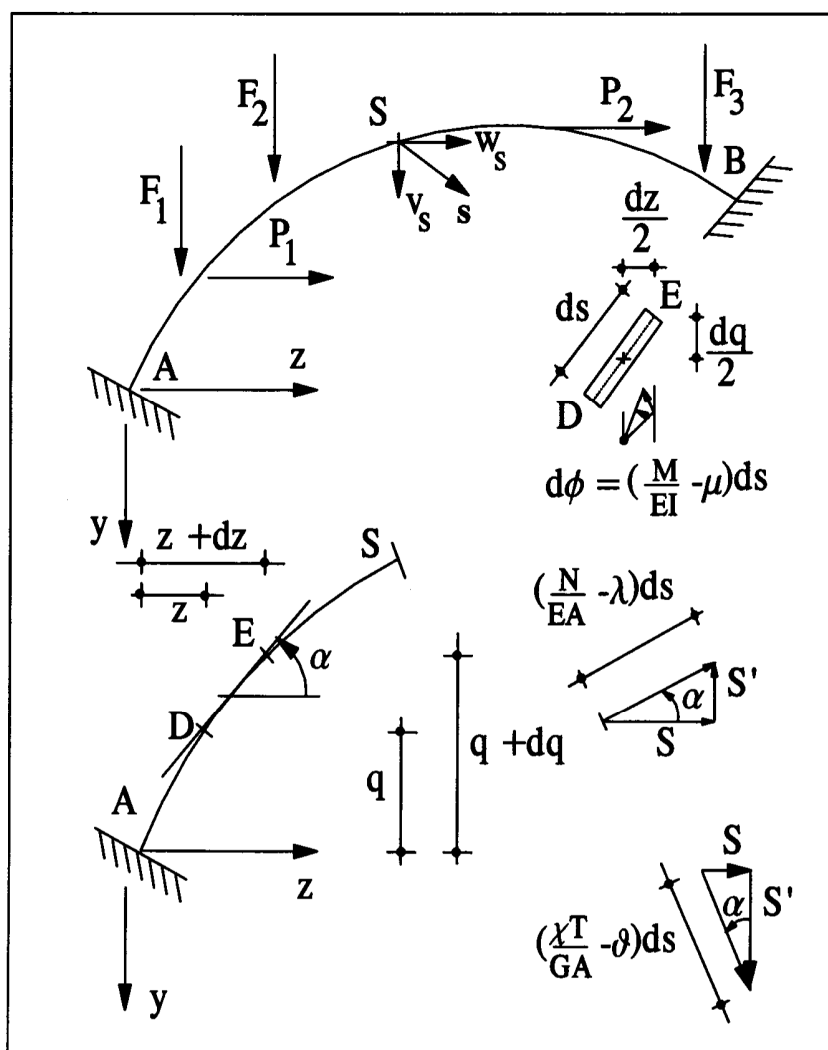


Figura 4.9- La mensola per il calcolo degli spostamenti

$$\begin{aligned}
v'_S &= v_A - \phi_A z_S \\
w'_S &= w_A - \phi_A q_S \\
\phi'_S &= \phi_A
\end{aligned}
\tag{4.53}$$

Il generico conio elementare DE si supponga fisso in D ; la sezione E presenta gli spostamenti:

$$dv = -\left(\frac{M}{EI} - \mu\right) ds \frac{dz}{2} - \left(\frac{N}{EA} - \lambda\right) ds \sin \alpha + \left(\chi \frac{T}{GA} - \theta\right) ds \cos \alpha \tag{4.54}$$

$$dw = -\left(\frac{M}{EI} - \mu\right) ds \frac{dq}{2} + \left(\frac{N}{EA} - \lambda\right) ds \cos \alpha + \left(\chi \frac{T}{GA} - \theta\right) ds \sin \alpha \tag{4.55}$$

Si può quindi scrivere:

$$\begin{aligned}
v''_E &= v''_D - \phi_D dz + dv \\
w''_E &= w''_D - \phi_D dq + dw \\
\phi''_E &= \phi''_D + \left(\frac{M}{EI} - \mu\right) ds
\end{aligned}
\tag{4.56}$$

Le (4.56), scritte di seguito per tutti i conici elementari così come si susseguono da A ad S , forniscono i termini di v_S e w_S dovuti alla deformazione del tratto AS .

Se in una sezione D di AS — quindi ad una ascissa $z_D \leq z_S$ — agiscono le distorsioni concentrate D_m , D_n e D_t , si hanno in S gli ulteriori spostamenti:

$$\begin{aligned}
v'''_S &= D_m(z_S - z_D) + D_n \sin \alpha_D - D_t \cos \alpha_D \\
w'''_S &= D_m(q_S - q_D) - D_n \cos \alpha_D - D_t \sin \alpha_D \\
\phi'''_S &= -D_m
\end{aligned}
\tag{4.57}$$

Le espressioni (4.57) sono valide per $z_D < z_S$. Se invece $z_D = z_S$ si ha:

$$\begin{aligned}
v'''_{Sd} &= D_n \sin \alpha_S - D_t \cos \alpha_S \\
w'''_{Sd} &= -D_n \cos \alpha_S - D_t \sin \alpha_S \\
\phi'''_{Sd} &= -D_m
\end{aligned}
\tag{4.58}$$

mentre i termini a sinistra sono nulli.

4.5. I casi più frequenti di carichi fissi

4.5.1. Il peso proprio

È questo, naturalmente, il caso di maggior rilievo. L'asse dell'arco è una curva funicolare di tale peso, che soddisfa la condizione di contenere i baricentri delle sezioni di imposta e di chiave; la curva funicolare per tre punti A , C e B è, come si sa, definita.

Si consideri la struttura principale (Figura 4.10.a) soggetta al peso proprio g . Poiché l'asse è funicolare del carico, si ha ovunque, anche se le imposte sono cedevoli, $M^0 = T^0 = 0$, mentre:

$$N^0 = -\frac{H_g}{\cos \alpha} \quad (4.59)$$

Alle due H_g si associa un unico segno, e cioè esse sono positive se convergono.

Poiché i momenti M^0 sono nulli, non si hanno flessioni, e la deformata è costituita da due tratti rettilinei AD e DB (Figura 4.10.c).

Il valore di $\Delta\phi_C^0$ può ottenersi dalla scrittura del principio dei lavori virtuali per il sistema di forze in equilibrio della Figura 4.10.b, e per il sistema di spostamenti congruenti della Figura 4.10.a. Si ha così:

$$1 \times \Delta\phi_C^0 = \int_s N'' \frac{N^0 ds}{EA} \quad (4.60)$$

Si ha poi:

$$H f_n - 1 = 0 \Rightarrow H = \frac{1}{f_n} \quad (4.61)$$

e quindi:

$$N'' = \frac{1}{f_n} \cos(\alpha - \alpha_r) \quad (4.62)$$

ed ancora:

$$N'' = \frac{1}{f} \frac{\cos(\alpha - \alpha_r)}{\cos \alpha_r} \quad (4.63)$$

Le (4.59) e (4.60) forniscono perciò la seguente espressione di $\Delta\phi_C^0$:

$$\Delta\phi_C^0 = -\frac{H_g}{Ef \cos \alpha_r} \int_s \frac{\cos(\alpha - \alpha_r)}{A \cos \alpha} ds \quad (4.64)$$

Se le imposte sono a livello si ha:

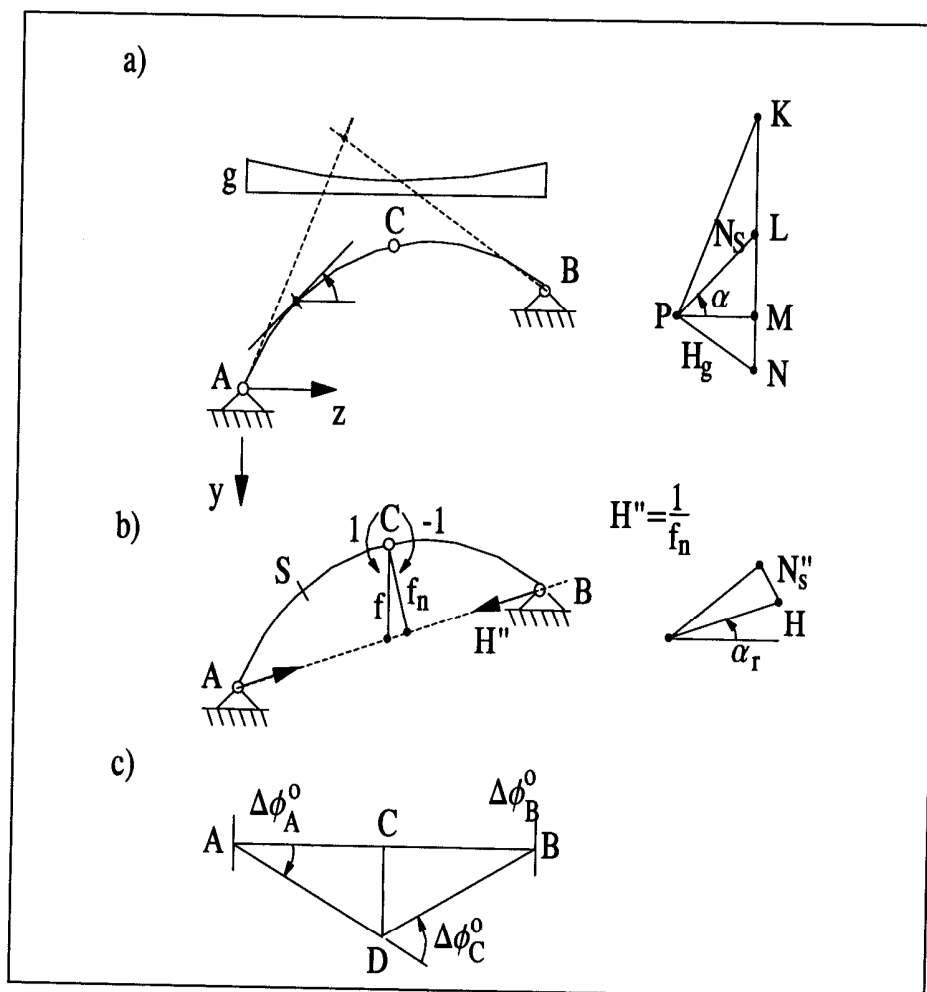


Figura 4.10- L'arco soggetto a peso proprio

$$\Delta\phi_C^0 = -\frac{H_g}{Ef} \int_s \frac{ds}{A} \quad (4.65)$$

Il vettore \mathbf{b} (cfr. 4.23) è quindi dato, se le imposte non sono cedevoli, da:

$$\mathbf{b} = \frac{H_g}{Ef \cos \alpha_r} \int_s \frac{\cos(\alpha - \alpha_r)}{A \cos \alpha} ds \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

Il sistema (4.24):

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = -\mathbf{b} \quad (4.67)$$

fornisce i momenti in A , C e B .

I coefficienti predominanti di \mathbf{C} (cfr. 4.24) contengono tutti il modulo I al denominatore; quindi i valori dei momenti da peso proprio sono tanto più elevati quanto più l'arco è rigido e ribassato, e cioè, a parità di luce, quanto più bassa è la freccia e quanto più alto il rapporto I/A . Il modulo elastico non gioca perchè esso è presente al denominatore di tutti i termini (4.24) e (4.66).

I momenti da peso proprio sono dovuti alle sole iperstatiche (Figura 4.11); quindi, poichè queste sono coppie, le reazioni in A e B equivalgono ad una coppia. I versi delle coppie reattive sono quelli della figura, e quindi la spinta S da esse generata è negativa, secondo la convenzione sui segni fatta in relazione al peso proprio.

La reazione reale sull'imposta A è la risultante della S e di X_1 ; così pure, la reazione reale sull'imposta B è la risultante di S e di X_3 . Esse sono uguali e contrarie, perchè sono in equilibrio con le due coppie X_2 in C , pur esse in equilibrio. Esse quindi agiscono ambedue su una retta r .

Il momento in una sezione Z generica è dato dal prodotto del segmento verticale ZQ compreso tra il baricentro di Z e la retta r , con la componente orizzontale ΔH di S :

$$M_S = \Delta H \times d_{zr} \quad (4.68)$$

ove $d_{zr} > 0$ se il baricentro di Z è ubicato alla sinistra della retta r orientata verso sinistra. L'asse dell'arco è quindi il diagramma dei momenti generati dal peso proprio, riferito alla fondamentale r . Essi sono positivi al disopra di r , e quindi in chiave; negativi al disotto di r , e quindi alle imposte.

Il poligono funicolare reale, tratteggiato nella figura, non passa più per A , C e B ; il polo P del poligono che passa per tali punti (Figura 4.11) si sposta in P' , ove PP' è la reazione S . I vettori KU ed UN rappresentano i pesi dei semiarci AC e CB ; $P'K$ e $P'N$ sono le reazioni di imposta.

La H_g è la spinta dovuta al peso proprio, ed è positiva; H_g è la spinta nella struttura principale, $H_g - \Delta H$ la spinta reale. La ΔH è negativa, e si chiama *caduta di spinta*.

Il momento nella sezione Z generica, oltre che dalla (4.68), può anche essere espresso in funzione di $H_g - \Delta H$:

$$M_S = (H_g - \Delta H) \times d_{zP} \quad (4.69)$$

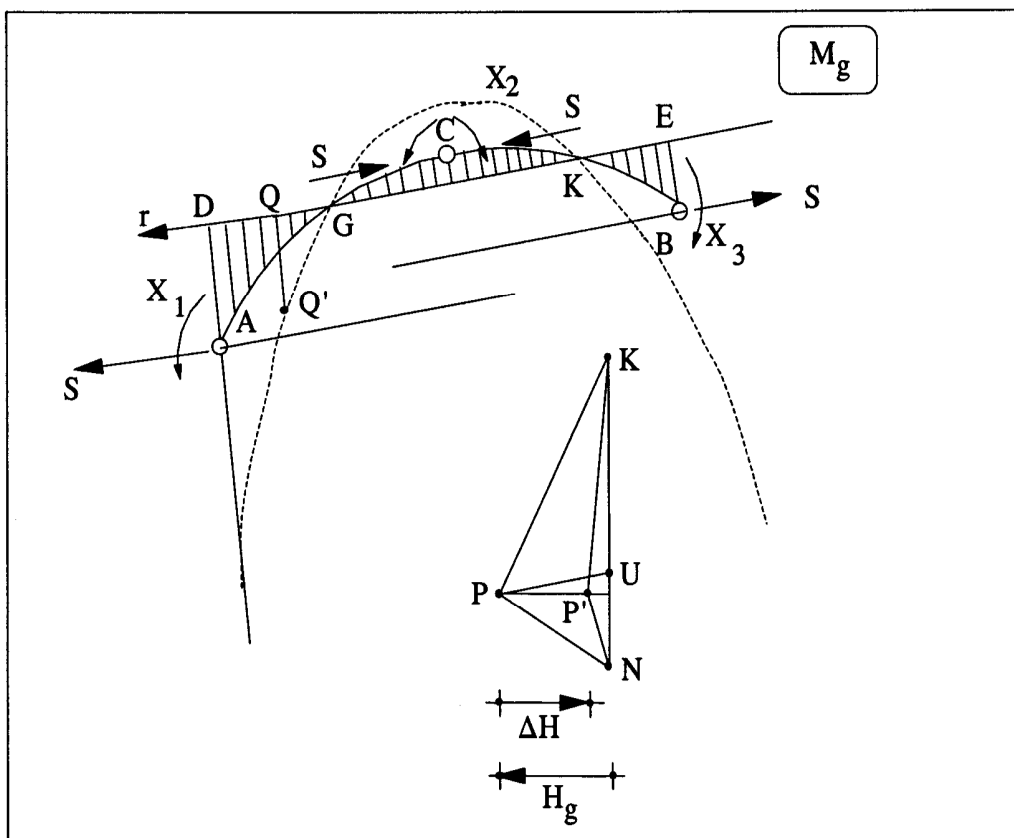


Figura 4.11- I momenti da peso proprio

ove d_{Zp} è la distanza ZQ' del baricentro della sezione Z dal poligono funicolare reale. Si ha $d_{Zp} > 0$ se il baricentro di Z è ubicato al disotto del poligono funicolare.

Se le imposte sono elasticamente cedevoli, i valori sia di C che di b aumentano; aumentano in genere i momenti connessi con il peso proprio.

Se l'arco è simmetrico secondo l'orizzontale (e quindi con imposte a livello) la retta r è orizzontale (Figura 4.12). In questo caso si ha, limitandosi all'effetto flettente nel calcolo della matrice C :

$$c_{11} = \frac{1}{E} \int_s \frac{M'^2}{I} ds = c_{33} \quad (4.70)$$

$$c_{12} = \frac{1}{E} \int_s \frac{M' M''}{I} ds = c_{32} \quad (4.71)$$

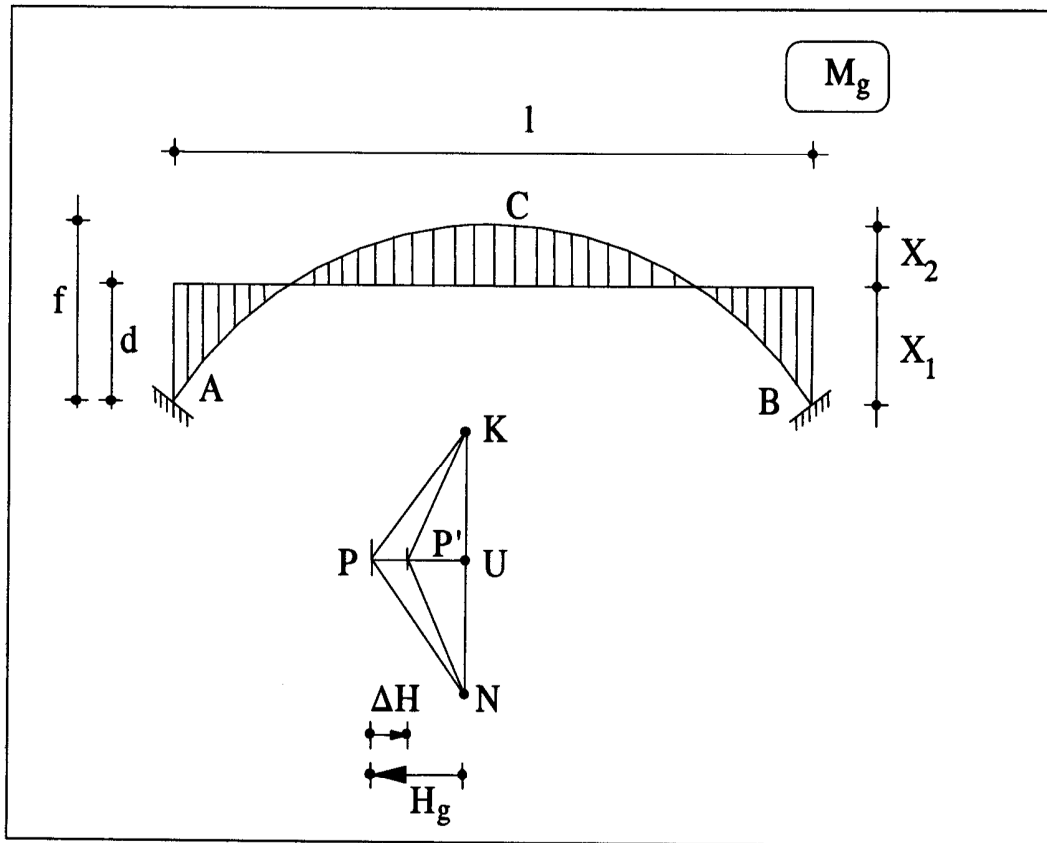


Figura 4.12- I momenti da peso proprio: il caso dell'arco simmetrico

Poichè poi $X_3 = X_1$, e $\Delta\phi_3^0 = \Delta\phi_1^0$, il sistema (4.24) si scrive come segue:

$$\begin{aligned} c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + c_{13}X_1 &= -\Delta\phi_1^0 \\ c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + c_{23}X_1 &= -\Delta\phi_2^0 \\ c_{31}X_1 + c_{32}X_2 + c_{33}X_1 &= -\Delta\phi_3^0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

La prima equazione coincide con la terza, ed il sistema si semplifica nell'altro:

$$\begin{aligned}(c_{11} + c_{13})X_1 + c_{12}X_2 &= -\Delta\phi_1^0 \\ (c_{21} + c_{23})X_1 + c_{22}X_2 &= -\Delta\phi_2^0\end{aligned}\quad (4.73)$$

Nell'ipotesi semplificativa di arco a sezione costante, e di peso proprio g uniformemente distribuito (e ciò implica un asse parabolico) si ha:

$$c_{11} = \frac{1}{EI} \int_s M'^2 ds = \frac{1}{EI} \int_s \left[-\frac{z}{l} - \frac{2}{l^2} z(l-z) + 1 \right]^2 dz \quad (4.74)$$

L'integrale dipende solo dalla luce, e quindi può porsi:

$$c_{11} = \frac{l}{EI} \bar{c}_{11} \quad (4.75)$$

ove \bar{c}_{11} è un numero. Analogamente può porsi:

$$c_{ij} = \frac{l}{EI} \bar{c}_{ij} \quad (4.76)$$

Si ha poi (cfr. 4.65):

$$\Delta\phi_2^0 = -\frac{gl^2}{8EAf^2} \int_s ds = -\frac{gl^3}{8EAf^2} \bar{c} \quad (4.77)$$

ove:

$$\bar{c} = \frac{1}{l} \int_s ds \quad (4.78)$$

è un numero.

Il sistema (4.72) diviene così il seguente

$$\begin{aligned}(\bar{c}_{11} + \bar{c}_{13})X_1 + \bar{c}_{12}X_2 &= -\frac{\bar{c}g}{16} \left(\frac{l}{f}\right)^2 \frac{I}{A} \\ (\bar{c}_{21} + \bar{c}_{23})X_1 + \bar{c}_{22}X_2 &= -\frac{\bar{c}g}{8} \left(\frac{l}{f}\right)^2 \frac{I}{A}\end{aligned}\quad (4.79)$$

Si conferma così la dipendenza dei momenti dai rapporti f/l ed I/A , e l'indipendenza dal modulo E .

Sia d la quota della retta r ; dalle due relazioni:

$$\begin{aligned}\Delta H \cdot (f - d) &= -X_2 \\ \Delta H \cdot d &= X_1\end{aligned}\quad (4.80)$$

si trae:

$$\begin{aligned}\Delta H &= \frac{X_1 - X_2}{f} \\ d &= f \frac{X_1}{X_1 - X_2}\end{aligned}\quad (4.81)$$

I momenti da peso proprio si minimizzano disegnando l'arco come funicolare del peso stesso; con tutto questo, essi possono raggiungere, per archi rigidi e ribassati, valori preoccupanti. Si possono ridurre tali valori, limitatamente alla sola struttura portante, e cioè al solo arco; con esclusione quindi del peso della trave di impalcato.

Ciò si ottiene, per esempio, facendo agire il peso dell'arco in presenza delle tre cerniere A , B , e C , e poi saldando le cerniere stesse. Oppure realizzando in un primo momento la sola soletta di intradosso, che si utilizza poi come centina per sorreggere il peso del getto della restante struttura; si ha così l'ulteriore vantaggio di alleggerire drasticamente la centina provvisoria. Oppure, infine, seguendo la tecnica del getto per conci successivi ancorati alle mensole, che così progressivamente si allungano fino a congiungersi in chiave. E' proprio quest'ultima tecnica che, eliminando del tutto la centina, ha permesso la realizzazione di ponti ad arco di grande luce, economicamente competitivi con le soluzioni a travata.

Resta però la necessità di calcolare il regime tensionale dell'arco soggetto a tutto il peso proprio — il cosiddetto *regime canonico* — quando l'arco è in conglomerato armato. In questo caso, infatti, una certa aliquota di tale regime riaffiora nel tempo per effetto delle deformazioni da fluage.

Sono proprio queste che hanno fatto abbandonare le tecniche dei cedimenti impressi — o delle distorsioni in chiave — che ebbero un tempo una notevole quanto effimera fortuna.

4.5.2. Il caso della variazione termica uniforme

L'effetto di una variazione termica uniforme Δt è analogo a quello studiato nel paragrafo 4.5.1, anche se nei due sensi.

Occorre calcolare le incongruenze $\Delta\phi_i^0$ nella struttura principale soggetta alla variazione Δt ; in essa (Figura 4.10.a) le caratteristiche della sollecitazione interna sono nulle:

$$M^0 = N^0 = T^0 = 0 \quad (4.82)$$

Anche in questo caso, poichè non si hanno rotazioni relative nei conci elementari, la deformata ADB (Figura 4.10.b) è costituita da due segmenti di retta. La (4.60) è sostituita dall'altra (cfr. 4.33):

$$1 \times \Delta\phi_C^0 = \alpha\Delta t \int_s \left(\frac{r}{fl} \sin \alpha + \frac{1}{f} \cos \alpha \right) ds = \alpha\Delta t \left(\frac{r^2}{fl} + \frac{l}{f} \right) \quad (4.83)$$

Quindi può porsi:

$$\mathbf{b} = \alpha \Delta t \left(\frac{r^2}{fl} + \frac{l}{f} \right) \begin{pmatrix} -0.5 \\ 1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

Il sistema (4.24) fornisce le iperstatiche. Anche nel caso in esame i momenti sono dovuti alle sole iperstatiche, che sono coppie, e quindi il loro diagramma è la curva d'asse riferita ad una fondamentale r (Figura 4.13).

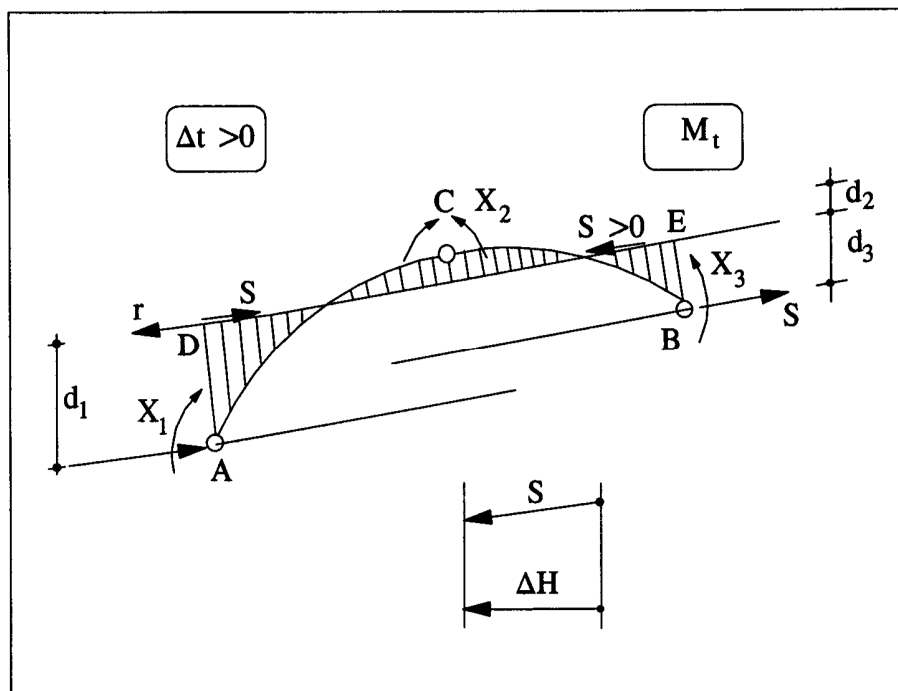


Figura 4.13- I momenti indotti da una variazione termica

Il valore di ΔH (positivo se in B è diretto verso sinistra) e la posizione di r sono definiti dalle tre condizioni:

$$\begin{aligned} \Delta H \times d_1 &= X_1 \\ \Delta H \times d_3 &= X_3 \\ \Delta H \times d_2 &= -X_2 \end{aligned} \quad (4.85)$$

e dalla relazione geometrica:

$$d_2 + \frac{d_1 + d_3}{2} = f. \quad (4.86)$$

Dalle (4.84) infatti si ricava:

$$\begin{aligned} d_1 &= -d_2 \frac{X_1}{X_2} \\ d_3 &= -d_2 \frac{X_3}{X_2} \end{aligned} \quad (4.87)$$

e quindi, dalla (4.85):

$$\begin{aligned} d_1 &= -f \frac{2X_1}{2X_2 - X_1 - X_3} \\ d_2 &= f \frac{2X_2}{2X_2 - X_1 - X_3} \\ d_3 &= -f \frac{2X_3}{2X_2 - X_1 - X_3} \\ \Delta H &= \frac{X_1 + X_3 - 2X_2}{2f} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Il momento flettente nella sezione generica è ancora dato dalla (4.86).

Poichè gli elementi di \mathbf{C} contengono il modulo elastico E al denominatore, e gli elementi di \mathbf{b} sono indipendenti da E , lo stato tensionale derivante dalla variazione termica è direttamente proporzionale al valore di E . Esso poi, come quello derivante dall'accorciamento dell'asse per effetto del peso proprio, è tanto più elevato, quanto più basso è il rapporto f/l e quanto più alto è il rapporto I/A .

La cedibilità delle imposte incrementa i valori di \mathbf{C} , ma non quelli di \mathbf{b} ; quindi essa esercita una azione benefica nei riguardi dello stato tensionale connesso con Δt , nella stessa ipotesi semplificativa del comma 4.5.1. (sezione costante, asse parabolico) il sistema (4.79) si scrive come segue:

$$\begin{aligned} (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{13}) X_1 + \bar{c}_{12} X_2 &= 0.5 \frac{EI}{f} \alpha \Delta t \\ (\bar{c}_{21} + \bar{c}_{23}) X_1 + \bar{c}_{22} X_2 &= -\frac{EI}{f} \alpha \Delta t \end{aligned} \quad (4.89)$$

Le (4.89) confermano che i momenti aumentano all'aumentare di E e di I , ed al diminuire di f , mentre sono indipendenti da l .

I momenti della Figura 4.13 sono dovuti ad un aumento di temperatura, cui corrisponde una *spinta addizionale* positiva, e cioè un incremento del valore di H_g . Se la Δt è negativa, i momenti cambiano di segno, e cioè appaiono concordi a quelli connessi con la caduta di spinta da peso proprio.

4.5.3. Il caso della variazione termica alla Navier

Una variazione termica alla Navier $\overline{\Delta t}$ si associa ai seguenti valori dei $\Delta\phi_i^0$:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_1^0 &= \alpha\overline{\Delta t} \int_s \frac{M'}{h} ds \\ \Delta\phi_2^0 &= \alpha\overline{\Delta t} \int_s \frac{M''}{h} ds \\ \Delta\phi_3^0 &= \alpha\overline{\Delta t} \int_s \frac{M'''}{h} ds\end{aligned}\quad (4.90)$$

Nel caso particolare del comma 4.5.1. si ha una h costante. Dovrà attendersi $X_1 = X_2 = X$, e cioè $\Delta H = 0$. Infatti tale soluzione, cui si associano momenti costanti $M = X$, implica che in ogni concio la rotazione relativa termica è proporzionale a quella elastica; se la proporzionalità diviene uguaglianza, la soluzione è congruente. Tale condizione si esprime come segue:

$$\alpha \frac{\overline{\Delta t}}{h} ds = \frac{X ds}{EI} \quad (4.91)$$

e quindi il valore costante del momento è:

$$M = \alpha \frac{\overline{\Delta t}}{h} EI \quad (4.92)$$

A tale soluzione si associano valori nulli di N , T , v , w e ϕ .

4.5.4. Il caso del ritiro

Negli archi in conglomerato armato occorre considerare il ritiro. Questo si equipara ad una variazione termica uniforme negativa, e quindi si ricade nel caso del comma 4.5.2., ove si ponga:

$$\alpha \Delta t_r = \epsilon_r \quad (4.93)$$

La ϵ_r è la deformazione finale da ritiro, ed è negativa; la Δt_r è la variazione termica equivalente al ritiro.

Gli effetti dell'accorciamento assiale da peso proprio, della variazione termica e del ritiro si sommano in valore assoluto.

4.5.5. Il caso delle forze sismiche

Infine, tra i carichi fissi rientrano le forze sismiche, nel cosiddetto approccio statico; esso consiste nel caricare l'arco, assieme al peso proprio, con forze verticali ed orizzontali date in modulo dalle forze F_g di peso proprio moltiplicate per i due coefficienti S_v ed S_o . Se l'arco non è simmetrico occorre considerare le forze sismiche orizzontali $S_o F_g$ agenti verso destra (prima condizione di sismo) e poi verso sinistra

(seconda condizione di sismo); è naturale che le due condizioni sono da considerare separatamente, e ciascuna sia da sola, che in concomitanza alle $S_v F_g$ ed alle $-S_v F_g$.

Tale calcolo è di primo approccio, poichè sotto sismo è necessario il calcolo dinamico; ma per strutture di non forte massa e di notevole rigidità, come in gran parte degli archi in conglomerato armato, il risultato è abbastanza vicino al vero se i coefficienti S_o ed S_v si assumono pari alle accelerazioni sismiche massime del terreno per scosse ondulatoria e sussultoria.

4.6. La descrizione del programma

Il programma ADL, riportato in Appendice 4.1, esegue l'analisi statica elastica in presenza delle sollecitazioni fisse appena descritte. Esaurita la solita fase preliminare (dichiarazione delle subroutine e delle variabili, dimensionamento degli array statici, definizione delle leggi di variazione dell'asse dell'arco, dello spessore dei setti etc..) si passa ad acquisire il nome del file di ingresso dei dati, e si chiama la subroutine "IngressoDati".

Del tutto analogamente a quanto detto al paragrafo 2.2., questa subroutine legge dal file tutti i dati non organizzati in array, secondo l'ordine riportato nel listato. Immediatamente dopo si calcola il modulo G , a partire dalla nota formula:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.94)$$

si dimensionano gli array dinamici, e si chiama la subroutine "IngressoDatiArray", che legge gli eventuali dati di ingresso organizzati in array. Più precisamente, possono specificarsi per punti sia le quote dell'arco sia le forze (verticali ed orizzontali) agenti in corrispondenza di ciascuna dividente. Usualmente, quindi, i dati di uscita del programma AF costituiscono parte dei dati di ingresso del programma ADL.

La successiva subroutine ("Geometria") si occupa del riempimento degli array delle aree, delle inerzie, dei fattori di taglio e delle inclinazioni dei tratti, nonché dell'eventuale deduzione delle quote e dei carichi a partire dalle corrispondenti funzioni. Questo esaurisce la fase di acquisizione dei dati, che quindi possono essere stampati (su carta, su video e/o su file) con la subroutine "UscitaDati".

Le leggi di variazione di area, momento di inerzia e fattore di taglio riportate nella subroutine "Geometria" sono relative ad una sezione a cassone. Con le notazioni del capitolo 2, l'area è fornita da:

$$A = ab - (a - c)(b - 2s) \quad (4.95)$$

il momento di inerzia da:

$$I = \frac{ab^3}{12} - (a - c) \frac{(b - 2s)^3}{12} \quad (4.96)$$

ed il fattore di taglio da:

$$\chi = \frac{A}{c(b - 2s)}. \quad (4.97)$$

Quest'ultima formula è tuttavia approssimata, e va sostituita se si volesse studiare una sezione rettangolare, ponendo $\chi = 1.2$.

La fase di calcolo inizia con la subroutine "Cedibilita", che calcola la matrice di flessibilità, e prosegue con la subroutine "TerminiNoti" che calcola i termini noti delle equazioni di congruenza. Queste equazioni vengono poi risolte dalla subroutine "Iperstatiche", ottenendo così le incognite iperstatiche.

Ciò fatto, il calcolo delle caratteristiche e degli spostamenti in ciascuna sezione è demandato alle subroutine "Caratteristiche" e "Spostamenti", rispettivamente. Il programma si chiude con la chiamata alla subroutine "UscitaRisultati", che stampa i risultati, e con la chiusura di tutti i buffer di stampa.

Poichè le fasi di ingresso ed uscita dati sono molto simili a quelle già descritte nel capitolo 2, ci si limita ad illustrare le subroutine di calcolo.

La fase di calcolo

Come già detto, il programma essenzialmente costruisce e risolve un sistema di tre equazioni lineari. La matrice dei coefficienti è riempita dalla subroutine "Cedibilita", secondo le indicazioni fornite nel testo. Quindi si calcolano prima i momenti, i tagli e gli sforzi normali dovuti alle incognite iperstatiche poste unitarie, poi le reazioni dovute a questi tre schemi di carico. Nel listato sono richiamate le formule del testo che vengono di volta in volta utilizzate.

La subroutine "Plv" si incarica di costruire i termini integrali della (4.21), sostituendo all'integrale una semplice sommatoria, mentre la subroutine "Imposte" permette di completare l'espressione (4.21) aggiungendo i due termini relativi all'influenza dei blocchi di fondazione.

Ambedue queste subroutine vanno chiamate ripetutamente, onde costruire tutti i termini della matrice di flessibilità al di sopra della diagonale principale. Per la simmetria, si ottengono subito gli altri termini.

La subroutine "TerminiNoti" calcola il secondo membro delle equazioni di congruenza. A tal fine si deducono prima le reazioni orizzontali e verticali a destra ed a sinistra, e poi le caratteristiche dovute alle forze verticali ed orizzontali presenti. La (4.34) viene poi costruita in tre passi, chiamando la subroutine "Plv1", che costruisce i termini integrali, la subroutine "Imposte" che aggiunge i primi due termini della (4.34) — quelli dovuti alle cedibilità elastiche delle imposte — ed infine la subroutine "Imposte1" che aggiunge il terzo e quarto termine della (4.34) — quelli dovuti agli eventuali cedimenti anelastici delle imposte.

Anche queste subroutine vanno chiamate tre volte, onde permettere la costruzione dei tre termini noti.

La successiva subroutine di calcolo, "Iperstatiche" è molto semplice, limitandosi a chiamare a sua volta la subroutine di libreria "slsim", che risolve il sistema di equazioni (lineari) di congruenza, riducendo la matrice alla Gauss. Qui, come in seguito, il nome in minuscolo indica che si tratta di una subroutine tratta da un qualsiasi package di algebra lineare.

Risolto il sistema di congruenza, la subroutine "Caratteristiche" implementa le formule (4.47) per calcolare momenti, tagli e sforzi normali, e le (4.49) per dedurre i valori modificati, a sinistra, di tagli e sforzi normali.

Nella successiva subroutine "Spostamenti" si utilizzano prima le (4.54), (4.55) e (4.56) per trarre gli spostamenti verticali, gli spostamenti orizzontali e le rotazioni, rispettivamente, e poi a queste quantità si aggiungono quelle derivanti dalla presenza dei blocchi, secondo le (4.52) e (4.53).

Un'ultima precisazione riguarda le subroutine interne "Imposte" ed "Imposte1", che fanno uso delle subroutine di libreria "product" e "dot" al fine di costruire alcuni tripli prodotti matriciali. E' ovvio che si sarebbe potuto semplificare moltissimo l'implementazione di questi prodotti, ma la loro estrema semplicità e la loro ridotta dimensione hanno sconsigliato una simile operazione, che si risolve in maggiore efficienza ma anche in maggiore oscurità del programma.

4.7. Verifiche

Una prima verifica del programma si esegue considerando un arco simmetrico, caricato simmetricamente o antisimmetricamente. Un arco simmetrico presuppone anche imposte simmetriche; nella Figura 4.14 si mostra come in questo caso la matrice **B** debba essere legata alla matrice **A**. Si ha così:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (4.98)$$

Nella Figura 4.15 invece sono date le condizioni di cedimenti anelastici delle imposte simmetriche ed antisimmetriche. Si hanno i due casi seguenti:

$$\text{cedimenti simmetrici} \Rightarrow \mathbf{s}_A^* = \begin{pmatrix} v_A^* \\ w_A^* \\ \phi_A^* \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_B^* = \begin{pmatrix} v_A^* \\ -w_A^* \\ -\phi_A^* \end{pmatrix} \quad (4.99)$$

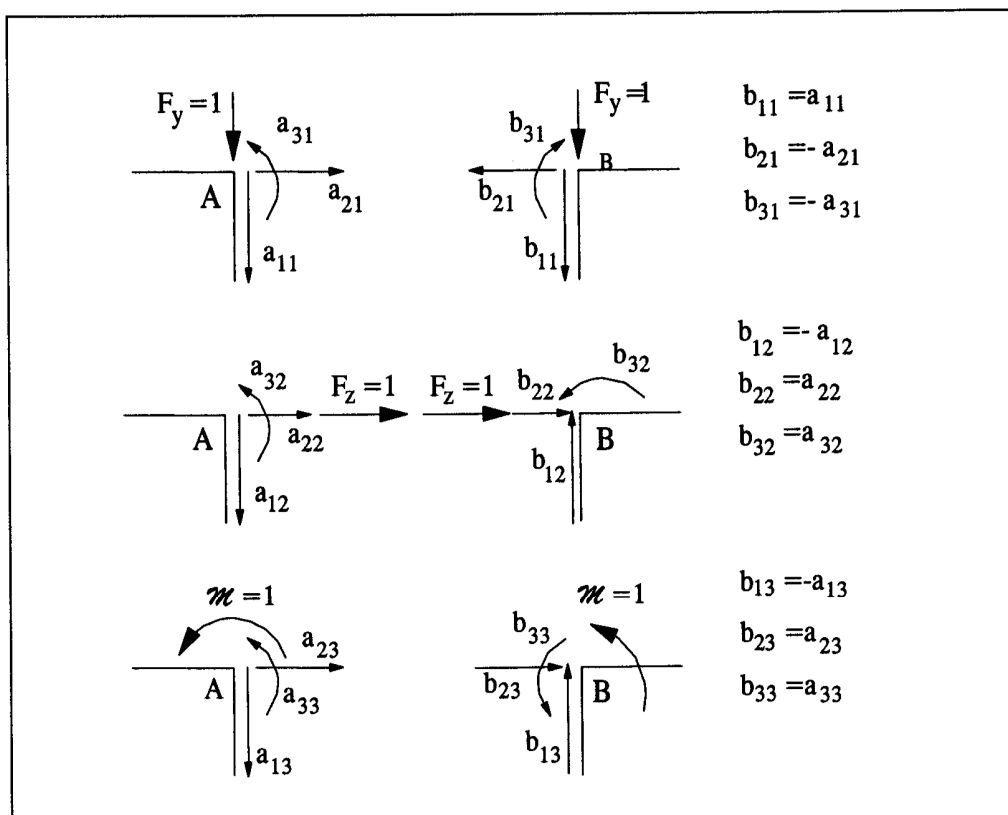


Figura 4.14- Il caso delle imposte simmetriche

$$\text{cedimenti antisimmetrici} \Rightarrow \mathbf{s}_A^* = \begin{pmatrix} v_A^* \\ w_A^* \\ \phi_A^* \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_B^* = \begin{pmatrix} -v_A^* \\ w_A^* \\ \phi_A^* \end{pmatrix} \quad (4.100)$$

L'arco preso in esame per le verifiche è ad asse parabolico, di sezione costante, ed è suddiviso in quattro tronchi. Si ha poi, come illustrato in Figura 4.16:

$$\begin{aligned} l &= 100 \text{ m}; & f &= 25 \text{ m}; & r &= 0; \\ a &= 12 \text{ m}; & b &= 3 \text{ m}; & s &= 0.3 \text{ m} & c &= 1.5 \text{ m} \end{aligned} \quad (4.101)$$

Sarà inoltre:

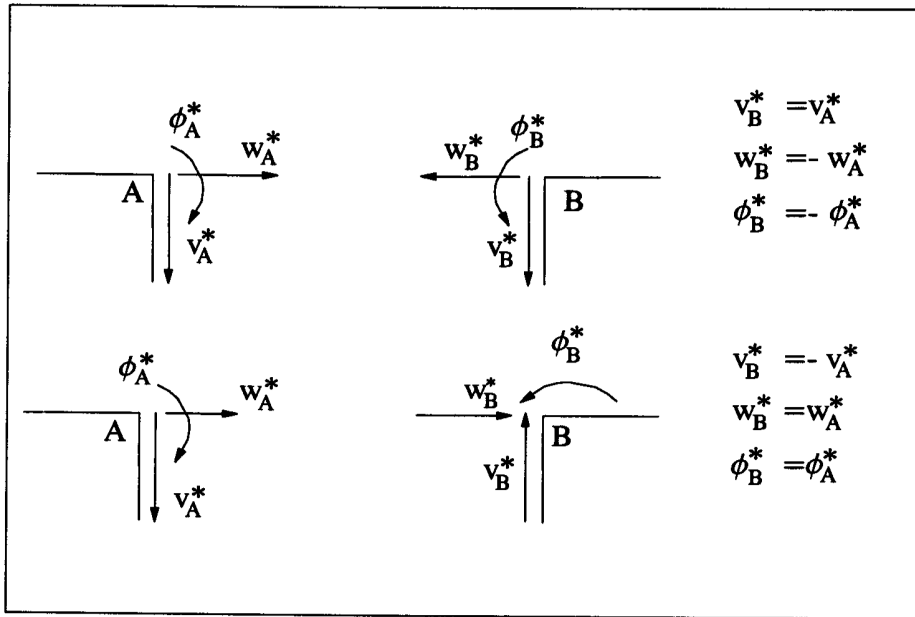


Figura 4.15- Il caso delle imposte antisimmetriche

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 10^{-7} m t^{-1} & 1 \cdot 10^{-7} m t^{-1} & 2 \cdot 10^{-7} t^{-1} \\ 1 \cdot 10^{-7} m t^{-1} & 5 \cdot 10^{-7} m t^{-1} & 1 \cdot 10^{-7} t^{-1} \\ 2 \cdot 10^{-7} t^{-1} & 1 \cdot 10^{-7} t^{-1} & 1 \cdot 10^{-7} m^{-1} t^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.102)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 10^{-7} m t^{-1} & -1 \cdot 10^{-7} m t^{-1} & -2 \cdot 10^{-7} t^{-1} \\ -1 \cdot 10^{-7} m t^{-1} & 5 \cdot 10^{-7} m t^{-1} & 1 \cdot 10^{-7} t^{-1} \\ -2 \cdot 10^{-7} t^{-1} & 1 \cdot 10^{-7} t^{-1} & 1 \cdot 10^{-7} m^{-1} t^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

Ponendo $E = 3000000 t m^{-2}$, $\nu = 0.1$ si calcola $G = 1363000 t m^{-2}$. Infine, il coefficiente di dilatazione termico è assunto pari ad $\alpha = 0.00001^\circ C^{-1}$.

4.7.1. Il caso della sollecitazione simmetrica

Un carico simmetrico completo è costituito dalle seguenti sollecitazioni:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 250t \\ 250t \\ 250t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25t \\ 0t \\ -25t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.104)$$

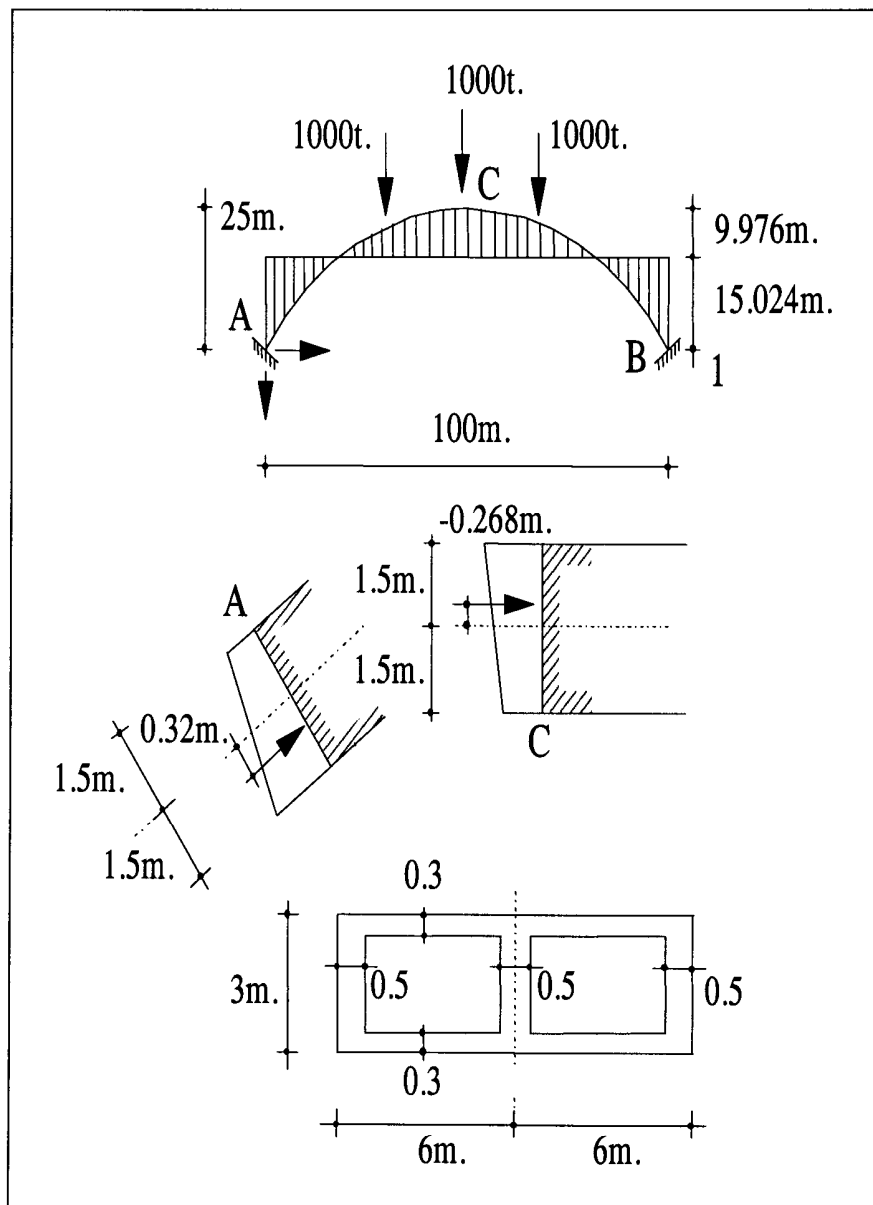


Figura 4.16- L'arco di prova per le verifiche

$$\mathbf{s}_A^* = \begin{pmatrix} 0.1m \\ 0.1m \\ 10^{-4}rad \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_B^* = \begin{pmatrix} 0.1m \\ -0.1m \\ -10^{-4}rad \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

$$\Delta t = 20^\circ C \quad \overline{\Delta t} = 20^\circ C \quad (4.106)$$

Il file dati si presenta come segue:

```

"ARCO DI VERIFICA - SOLLECITAZIONI SIMMETRICHE",FILES,FILES
"ES4-1.ING", "ES4-1.USC"
100,4,3000000,.1,0.00001,20,20
12,12,12,3,3,3,0.3,0.3,0.3,1.5,1.5,1.5
10e-7,1e-7,2e-7,1e-7,5e-7,1e-7,2e-7,1e-7,1e-7,10e-7
-1e-7,-2e-7,-1e-7,5e-7,1e-7,-2e-7,1e-7,1e-7
0.1,0.1,1E-4,0.1,-0.1,-1E-4
FUNC,DATI
25,0
0,250,250,250,0,0,25,0,-25,0

```

la stampa fornita dalla subroutine "UscitaDati" è la seguente:

```

=====
PROGRAMMA ADL - ANALISI ELASTICA
ARCO DI VERIFICA - SOLLECITAZIONI SIMMETRICHE
=====
FILE DEI DATI = A:\ CAP4\ ES4-1.DAT
LUCE DELL'ARCO = 100
FRECCIA DELL'ARCO = 25
RIALZO A DESTRA = 0
MODULO DI YOUNG = 3000000
MODULO DI POISSON = .1
COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICA = .00001
VARIAZIONE TERMICA ALLA NAVIER = 20
VARIAZIONE TERMICA UNIFORME = 20
NUMERO DI TRATTI = 4
LARGHEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO A SINISTRA = 12
LARGHEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO AL CENTRO = 12
LARGHEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO A DESTRA = 12
ALTEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO A SINISTRA = 3
ALTEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO AL CENTRO = 3
ALTEZZA DELLA SEZIONE RETTA DELL'ARCO A DESTRA = 3
SPESSORE DELLA SOLETTA A SINISTRA = .3
SPESSORE DELLA SOLETTA AL CENTRO = .3

```

SPESSORE DELLA SOLETTA A DESTRA = .3
 SPESSORE COMPLESSIVO DELLE NERVATURE A SINISTRA = 1.5
 SPESSORE COMPLESSIVO DELLE NERVATURE AL CENTRO = 1.5
 SPESSORE COMPLESSIVO DELLE NERVATURE A DESTRA = 1.5

MATRICE DELLE CEDIBILITA' ELASTICHE A SINISTRA

.000001	.0000001	.0000002
.0000001	.0000005	.0000001
.0000002	.0000001	.0000001

MATRICE DELLE CEDIBILITA' ELASTICHE A DESTRA

.000001	-.0000001	-.0000002
-.0000001	.0000005	.0000001
-.0000002	.0000001	.0000001

VETTORE DEI CEDIMENTI ANELASTICI A SINISTRA

.1	.1	.0001
----	----	-------

VETTORE DEI CEDIMENTI ANELASTICI A DESTRA

.1	-.1	-.0001
----	-----	--------

=====

=

=

TABELLA DELLE QUOTE DELL'ARCO

=

=====

DIVIDENTE	QUOTA
1	0
2	18.75
3	25
4	18.75
5	0

=====

=

=

CARICHI VERTICALI ED ORIZZONTALI SULL'ARCO

=

=====

DIVIDENTE	CARICO VERTICALE	CARICO ORIZZONTALE
1	0	0
2	250	25

4. Le sollecitazioni fisse 121

3	250	0
4	250	-25
5	0	0

Infine, i risultati, così come riportati dalla subroutine "UscitaRisultati", sono:

REAZIONE VERTICALE A SINISTRA = -375
 REAZIONE ORIZZONTALE A SINISTRA = 2054.78427329142
 REAZIONE VERTICALE A DESTRA = -375
 REAZIONE ORIZZONTALE A DESTRA = -2054.78427329142
 SOMMA DELLE FORZE VERTICALI = 750
 SOMMA DELLE FORZE ORIZZONTALI = 0
 CARICO VERTICALE MEDIO = 7.5
 CARICO ORIZZONTALE MEDIO = 0

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	18951.7833195699
2	-10200.4218046442
3	-20074.0735127156
4	-10200.4218046442
5	18951.7833195699

DIVIDENTE	N A SINISTRA	N A DESTRA
1	-1868.82741863314	-1868.82741863314
2	-2005.56002398333	-1916.11730488334
3	-2079.78427329142	-2079.78427329142
4	-1916.11730488334	-2005.56002398333
5	-1868.82741863314	-1868.82741863314

DIVIDENTE	TAGLIO A SINISTRA	TAGLIO A DESTRA
1	-932.870563974851	-932.870563974851
2	-583.517266210455	-818.304403847933
3	125	-125
4	818.304403847933	583.517266210455
5	932.870563974851	932.870563974851

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	.103959878236585	.100905286195311
2	-1.33364471447696D-02	1.89296719260687D-02

3	-.103504897949573	8.6434571391388D-05
4	-1.33364471447697D-02	-1.87568027832859D-02
5	.103959878236585	-.100732417052529

TRATTO	ROTAZIONE
1	1.86469990462785D-03
2	7.00627316618436D-03
3	4.33680868994202D-19
4	-7.00627316618436D-03
5	-1.86469990462785D-03

TEMPO DI ESECUZIONE = 2.21484375 SEC.
 RUN DEL 09-26-1994 ORE 11:50:09

4.7.2. Il caso della sollecitazione antisimmetrica

Un carico antisimmetrico completo è costituito invece dalle altre sollecitazioni:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25t \\ 0t \\ -25t \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25t \\ 25t \\ 25t \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

$$\mathbf{s}_A^* = \begin{pmatrix} 0.1m \\ 0.1m \\ 10^{-4}rad \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_B^* = \begin{pmatrix} -0.1m \\ 0.1m \\ 10^{-4}rad \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

$$\Delta t = 0^\circ C \quad \overline{\Delta t} = 0^\circ C \quad (4.109)$$

Si riportano solo i risultati, attesa la somiglianza con il caso precedente:

REAZIONE VERTICALE A SINISTRA = 67.347490837928
 REAZIONE ORIZZONTALE A SINISTRA = -37.5
 REAZIONE VERTICALE A DESTRA = -67.347490837928
 REAZIONE ORIZZONTALE A DESTRA = -37.5
 SOMMA DELLE FORZE VERTICALI = 0
 SOMMA DELLE FORZE ORIZZONTALI = 75
 CARICO VERTICALE MEDIO = 0
 CARICO ORIZZONTALE MEDIO = .75

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	3211.1245418964
2	2230.5622709482

3	-3.2701619190334D-13
4	-2230.5622709482
5	-3211.1245418964

DIVIDENTE	N A SINISTRA	N A DESTRA
1	70.4084945027568	70.4084945027568
2	63.6597331880271	52.4793933005281
3	12.5	-12.5
4	-52.4793933005282	-63.6597331880271
5	-70.4084945027568	-70.4084945027568

DIVIDENTE	TAGLIO A SINISTRA	TAGLIO A DESTRA
1	-31.3779926703424	-31.3779926703424
2	-43.4669172198121	-77.0079368823089
3	-92.347490837928	-92.347490837928
4	-77.0079368823089	-43.4669172198121
5	-31.3779926703424	-31.3779926703424

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	.100578627417541	.100333127705106
2	6.62866050758289D-02	.074721344953223
3	-1.26877390209917D-05	5.81791826122359D-02
4	-6.63119805538709D-02	.074721344953223
5	-.100604002895583	.100333127705106

TRATTO	ROTAZIONE
1	4.11392956022054D-04
2	2.31303807256117D-03
3	2.95582159877037D-03
4	2.31303807256117D-03
5	4.11392956022054D-04

TEMPO DI ESECUZIONE = 1.9140625 SEC.

RUN DEL 09-26-1994 ORE 13:06:58

4.7.3. Un caso limite

Un caso limite è quello della Figura 4.17. Si ha:

$$V_A = 0 \quad H_A = -1.5F \quad V_B = -1.5F \quad H_B = 0$$

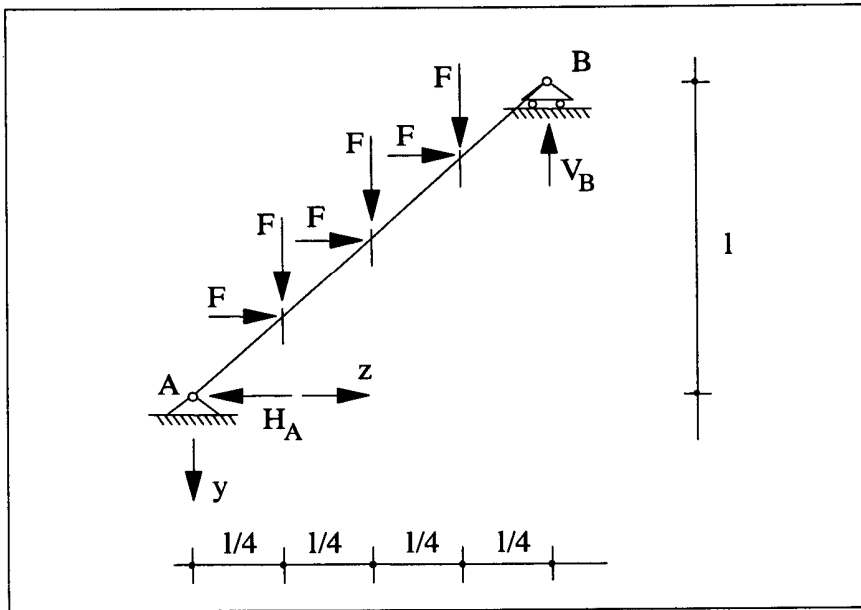


Figura 4.17- Un caso limite di arco rampante

In ogni punto di applicazione la risultante delle due forze è pari ad $F\sqrt{2}$, ed è ortogonale all'asse. Quindi si ha:

z	M	N_s	N_d	T_s	T_d
0	0	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$
$l/4$	$\frac{3}{4}Fl$	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}F\sqrt{2}$
$l/2$	Fl	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}F\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}F\sqrt{2}$
$3l/4$	$\frac{3}{4}Fl$	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}F\sqrt{2}$	$-\frac{3}{2}F\sqrt{2}$
l	0	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$-\frac{3}{2}F\sqrt{2}$	$-\frac{3}{2}F\sqrt{2}$

Le condizioni di vincolo della Figura 4.17 si traducono nelle seguenti espressioni delle matrici **A** e **B**:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \quad (4.110)$$

Si pone:

$$l = r = 20 \text{ m} \quad E = 3000000 \text{ tm}^{-2} \quad \nu = 0.1 \quad (4.111)$$

mentre i dati della sezione retta (costante) sono:

$$a = 6 \text{ m} \quad b = 1 \text{ m} \quad s = 0.1 \text{ m} \quad c = 0.6 \text{ m} \quad (4.112)$$

Le variazioni termiche sono nulle, e le forze vengono poste pari a $30 t$. Dovrebbe porsi, a rigore, un valore nullo della freccia. Problemi numerici consigliano però di assumere per essa un valore molto basso, ma positivo. Analogo ragionamento può farsi per le entrate delle matrici dei blocchi di fondazione. Si è posto:

$$f = 0.001 \text{ m} \quad a_{33} = b_{33} = 0.1 \text{ rad/tm} \quad b_{22} = 0.1 \text{ mt}^{-1}$$

ottenendo i risultati:

REAZIONE VERTICALE A SINISTRA = -1.40949610998209D-03
 REAZIONE ORIZZONTALE A SINISTRA = -89.9948533372993
 REAZIONE VERTICALE A DESTRA = -89.99859050389
 REAZIONE ORIZZONTALE A DESTRA = -5.14666270072883D-03
 SOMMA DELLE FORZE VERTICALI = 90
 SOMMA DELLE FORZE ORIZZONTALI = 90
 CARICO VERTICALE MEDIO = 4.5
 CARICO ORIZZONTALE MEDIO = 4.5

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE	
1	-6.56917740567663D-02	
2	449.983118532993	
3	599.979431413373	
4	449.953246867085	
5	-6.54351058708593D-02	

DIVIDENTE	N A SINISTRA	N A DESTRA
1	63.6302018089527	63.6302018089527
2	63.631792633617	63.6339138478972
3	63.6349744025036	63.6349744025036
4	63.63391347764	63.6317920512278
5	63.6302006963985	63.6302006963985

DIVIDENTE	TAGLIO A SINISTRA	TAGLIO A DESTRA
-----------	-------------------	-----------------

126 *Le strutture ad arco*

1	63.6417398171453	63.6417398171453
2	63.640149241049	21.2137424228838
3	21.2105608597577	-21.2158460114352
4	-21.2190278927242	-63.6454347108788
5	-63.6470256846476	-63.6470256846476

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	2.83516888377933D-02	2.84822003549835D-02
3	3.99874231738472D-02	.040244781608359
4	2.83506970823644D-02	2.87348898579418D-02
5	-3.21839105366095D-09	5.14663048419378D-04

TRATTO	ROTAZIONE
1	-6.56917740567663D-03
2	-4.60229112473756D-03
3	-1.24407279647066D-05
4	4.5770496062994D-03
5	6.54351142912409D-03

TEMPO DI ESECUZIONE = 1.15625 SEC.

RUN DEL 09-26-1994 ORE 19:48:41

Ponendo $F = 0$, e $\Delta t = 20^\circ$, si ha invece:

REAZIONE VERTICALE A SINISTRA = -.080190977043261
 REAZIONE ORIZZONTALE A SINISTRA = 7.99910106591162D-02
 REAZIONE VERTICALE A DESTRA = .080190977043261
 REAZIONE ORIZZONTALE A DESTRA = -7.99910106591162D-02
 SOMMA DELLE FORZE VERTICALI = 0
 SOMMA DELLE FORZE ORIZZONTALI = 0
 CARICO VERTICALE MEDIO = 0
 CARICO ORIZZONTALE MEDIO = 0

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	-1.99965509030504D-03
2	-1.05981642757564D-03
3	-7.9982259516636D-05
4	9.39847413871833D-04
5	1.99967259258991D-03

DIVIDENTE	N A SINISTRA	N A DESTRA
1	-.113265780013803	-.113265780013803
2	-.113265776656249	-.113265776656249
3	-.113265769728291	-.113265769728291
4	-.113265762516462	-.113265762516462
5	-.113265758804069	-.113265758804069

DIVIDENTE	TAGLIO A SINISTRA	TAGLIO A DESTRA
1	1.32903290206959D-04	1.32903290206959D-04
2	1.35734580732307D-04	1.35734580732307D-04
3	1.41397586238087D-04	1.41397586238087D-04
4	1.47061157719218D-04	1.47061157719218D-04
5	1.49893155713837D-04	1.49893155713837D-04

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	-1.63110549708891D-07	1.99991211990209D-03
3	-1.92802559673437D-07	3.99975768399359D-03
4	-1.19402799185855D-07	5.99950636015755D-03
5	-8.48860478436242D-13	7.9991010666251D-03

TRATTO	ROTAZIONE
1	-1.99965509030504D-04
2	-1.99978884001549D-04
3	-1.99983866565409D-04
4	-1.99980107902691D-04
5	-1.99967259246384D-04

TEMPO DI ESECUZIONE = 2.360107421875 SEC.

RUN DEL 09-27-1994 ORE 00:23:24

Deve aversi che le componenti verticali degli spostamenti sono nulle; lo spostamento BB' deve essere pari a $2\alpha l\Delta t$, e gli spostamenti orizzontali devono essere proporzionali a BB' secondo la distanza da A (cfr. Figura 4.18). Ciò si verifica appunto nel caso in esame, ove risulta:

$$BB' = 2 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 10^{-5} = 0.008 \text{ m} \quad (4.113)$$

e quindi:

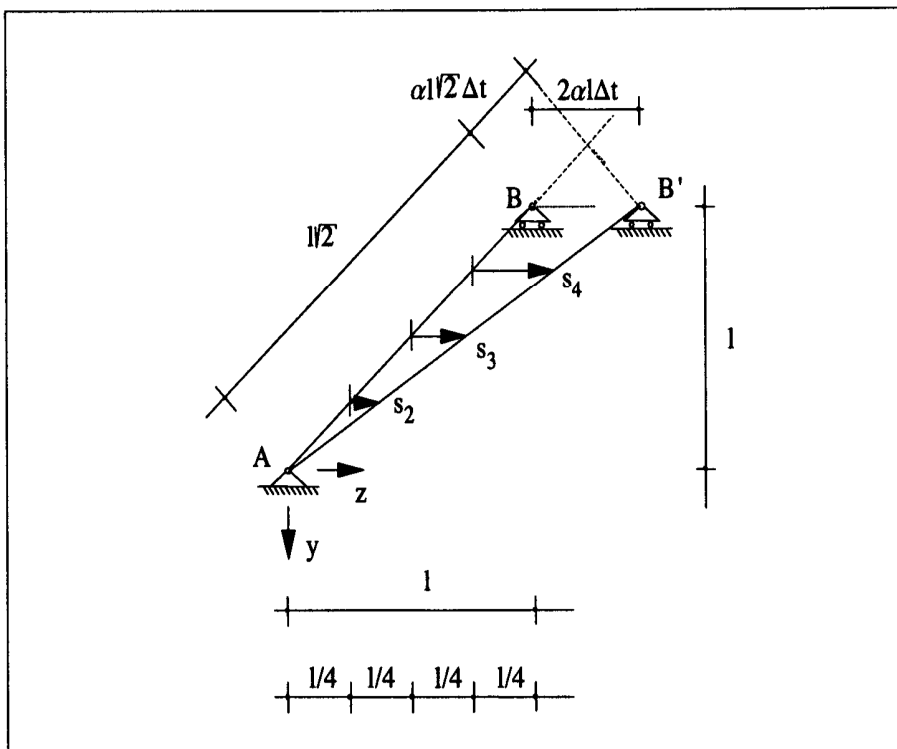


Figura 4.18- Gli spostamenti nel caso limite

$$\begin{aligned}
 w_2 &= 0.002 \text{ m} \\
 w_3 &= 0.004 \text{ m} \\
 w_4 &= 0.006 \text{ m}
 \end{aligned}
 \tag{4.114}$$

E' poi:

$$\phi = -\frac{\alpha l \sqrt{2} \Delta t}{l \sqrt{2}} = -\alpha \Delta t \implies \phi = -0.0002 \text{ rad};
 \tag{4.115}$$

4.7.4. Il caso del carico uniforme

L'arco prototipo sia soggetto al solo carico uniformemente distribuito (peso proprio), di intensità $g = 40 \text{ tm}^{-1}$. Questo equivale a caricare l'arco con tre forze verticali pari a:

$$F = g \frac{l}{4} = 1000 t \quad (4.116)$$

ottenendo i risultati:

REAZIONE VERTICALE A SINISTRA = -1500
 REAZIONE ORIZZONTALE A SINISTRA = 1947.66703122958
 REAZIONE VERTICALE A DESTRA = -1500
 REAZIONE ORIZZONTALE A DESTRA = -1947.66703122958
 SOMMA DELLE FORZE VERTICALI = 3000
 SOMMA DELLE FORZE ORIZZONTALI = 0
 CARICO VERTICALE MEDIO = 30
 CARICO ORIZZONTALE MEDIO = 0

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	-786.264270684913
2	194.97889376047
3	522.059948575597
4	194.97889376047
5	-786.264270684913

DIVIDENTE	N A SINISTRA	N A DESTRA
1	-2458.13362498366	-2458.13362498366
2	-2412.86674499576	-1965.6531494958
3	-1947.66703122958	-1947.66703122958
4	-1965.6531494958	-2412.86674499576
5	-2458.13362498366	-2458.13362498366

DIVIDENTE	TAGLIO A SINISTRA	TAGLIO A DESTRA
1	31.3997812622523	31.3997812622523
2	470.617610626965	-423.809580372951
3	500	-500
4	423.809580372951	-470.617610626965
5	-31.3997812622522	-31.3997812622522

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	5.17706218583695D-03	7.7897213512308D-04
3	8.31210922643316D-03	-4.39679485365844D-05

4	5.17706218583695D-03	-8.6690803219625D-04
5	1.22785896033983D-17	-8.79358970731749D-05

TRATTO	ROTAZIONE
1	0
2	-2.0662985360629D-04
3	-1.25162352846624D-19
4	2.06629853606289D-04
5	-2.33106114062344D-19
TEMPO DI ESECUZIONE = 1.139892578125 SEC.	
RUN DEL 09-27-1994 ORE 00:47:23	

Poichè al funicolare passante per i baricentri delle sezioni alle imposte ed in chiave corrisponde una spinta:

$$H_g = g \frac{l^2}{8f} = 2000 t \quad (4.117)$$

si ha una caduta di spinta da peso proprio pari a:

$$\Delta H = -52.333 t \quad (4.118)$$

Le eccentricità (positive se il centro di spinta è sotto il baricentro) sono:

$$\text{imposta} \quad e_A = \frac{M_A}{N_A} = \frac{786.26}{2458.13} = 0.320 m \quad (4.119)$$

$$\text{chiave} \quad e_C = \frac{M_C}{N_C} = -\frac{522.06}{1947.67} = -0.268 m \quad (4.120)$$

La posizione della caduta di spinta (cfr. Figura 4.12) è data da:

$$d = \frac{M_A}{\Delta H} = \frac{786.26}{52.333} = 15.024 m \quad (4.121)$$

$$f - d = -\frac{M_C}{\Delta H} = \frac{522.06}{52.333} = 9.9764 m \quad (4.122)$$

Le sezioni sono tutte compresse, poichè le eccentricità sono tutte contenute nel nocciolo.

Poichè è $A = 10.8 m^2$ ed $I = 14.904 m^4$, il raggio di inerzia ρ_x ed il raggio di inerzia r_x sono:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I}{A}} = 1.175 m; \quad r_x = 2 \frac{S_x^2}{b} = 0.92 m \quad (4.123)$$

Si ha quindi:

$$\text{imposta} \quad \sigma = \frac{N_1}{A} \mp \frac{M_1 b}{I} = \begin{cases} -14.85 \text{ Kgcm}^{-2} \\ -30.67 \text{ Kgcm}^{-2} \end{cases} \quad (4.124)$$

$$\text{chiave} \quad \sigma = \frac{N_3}{A} \mp \frac{M_3 b}{I} = \begin{cases} -23.29 \text{ Kgcm}^{-2} \\ -12.78 \text{ Kgcm}^{-2} \end{cases} \quad (4.125)$$

E' interessante osservare che la schematizzazione a quattro conchi non conduce, tutto sommato, ad errori macroscopici. Operando infatti con 34 conchi si hanno i seguenti risultati, posti in raffronto con quelli già ottenuti operando su 4 conchi.

t	4	34
F_i	1000 t	117.647 t
V_A	-1500 t	-1941.176 t
H_A	1955.247 t	1955.247 t
M_A	-786.264 tm	-708.770 tm
M_C	522.060 tm	410.066 tm
N_A	-2458.133 t	-2755.029 t
N_C	-1947.667 t	-1955.247 t
T_A	31.40 t	31.169 t
T_C	± 500 t	± 58.823 t
$v(l/4)$	5.18 mm	4.852 mm
$v(l/2)$	8.31 mm	8.210 mm
$w(l/4)$	0.78 mm	0.674 mm
$w(l/2)$	-0.04 mm	0 mm
$\phi(l/4)$	$-2 \cdot 10^{-4}$ rad	$-1.86 \cdot 10^{-4}$ rad
$\phi(l/2)$	0 rad	0 rad

In Figura 4.19 sono riportati i diagrammi ottenuti con 34 conchi. Si osservi che, al limite per $t \rightarrow \infty$, $F_i \rightarrow \infty$. Contemporaneamente tendono a zero le discontinuità nei diagrammi N e T ; in particolare, il diagramma del taglio tende alla curva media del fuso della Figura 4.19, e quindi si ha $T_C = 0$.

4.7.5. Il caso delle forze orizzontali

Sempre sullo stesso arco, agiscono le sole forze orizzontali (simulazione di un sismo ondulatorio con accelerazione pari ad un decimo della gravità):

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.126)$$

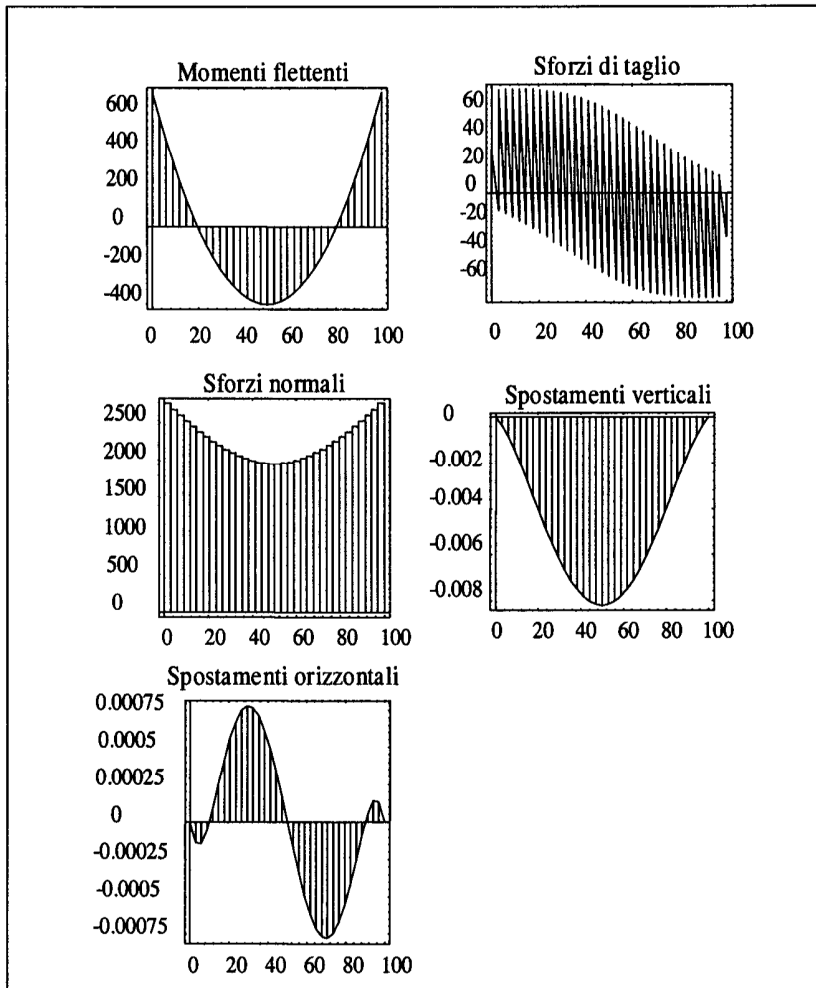


Figura 4.19- Risultati per l'arco di esempio

Si hanno i seguenti risultati, antisimmetrici:

REAZIONE VERTICALE A SINISTRA = 43.0301316760228
 REAZIONE ORIZZONTALE A SINISTRA = -150
 REAZIONE VERTICALE A DESTRA = -43.0301316760228
 REAZIONE ORIZZONTALE A DESTRA = -150
 SOMMA DELLE FORZE VERTICALI = 0
 SOMMA DELLE FORZE ORIZZONTALI = 300
 CARICO VERTICALE MEDIO = 0
 CARICO ORIZZONTALE MEDIO = 3

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	-973.49341619886
2	763.25329190057
3	-9.88376047672546D-14
4	-763.25329190057
5	973.493416198861

DIVIDENTE	N A SINISTRA	N A DESTRA
1	145.818079005614	145.818079005614
2	153.407738551658	63.9650194516666
3	50	-50
4	-63.9650194516666	-153.407738551658
5	-145.818079005614	-145.818079005614

DIVIDENTE	TAGLIO A SINISTRA	TAGLIO A DESTRA
1	55.5758946591818	55.5758946591818
2	28.5947195216521	-16.1266400283437
3	-43.0301316760228	-43.0301316760228
4	-16.1266400283437	28.5947195216521
5	55.5758946591818	55.5758946591818

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	1.07040669207565D-03	9.52380269837341D-04
3	-3.70667538307195D-06	7.32669180692937D-04
4	-1.07782004284179D-03	9.52380269837341D-04
5	-7.41335076614099D-06	-1.51110677790167D-18

TRATTO	ROTAZIONE
1	0
2	-7.34702527769007D-05
3	1.46477268414728D-04
4	-7.34702527769009D-05
5	-2.59668537892646D-20
TEMPO DI ESECUZIONE = 8.6171875 SEC.	
RUN DEL 09-27-1994 ORE 21:53:57	

4.7.6. Il caso della variazione termica

Una variazione termica uniforme $\Delta t = 25^\circ$ porta ai risultati seguenti, simmetrici:

REAZIONE VERTICALE A SINISTRA = 4.54844495401119D-15
REAZIONE ORIZZONTALE A SINISTRA = 241.075753920902
REAZIONE VERTICALE A DESTRA = -4.54844495401119D-15
REAZIONE ORIZZONTALE A DESTRA = -241.075753920902
SOMMA DELLE FORZE VERTICALI = 0
SOMMA DELLE FORZE ORIZZONTALI = 0
CARICO VERTICALE MEDIO = 0
CARICO ORIZZONTALE MEDIO = 0

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	3621.98545754145
2	-898.184928475464
3	-2404.9083904811
4	-898.184928475465
5	3621.98545754145

DIVIDENTE	N A SINISTRA	N A DESTRA
1	-192.860603136722	-192.860603136722
2	-215.62470939766	-215.62470939766
3	-241.075753920902	-241.075753920902
4	-215.62470939766	-215.62470939766
5	-192.860603136722	-192.860603136722

DIVIDENTE	TAGLIO A SINISTRA	TAGLIO A DESTRA
1	-144.645452352541	-144.645452352541

2	-107.81235469883	-107.81235469883
3	-4.54844495401119D-15	-4.54844495401119D-15
4	107.81235469883	107.81235469883
5	144.645452352541	144.645452352541

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
-----------	-----------------	-------------------

1	0	0
2	-1.65854405423759D-02	-2.86795883648885D-03
3	-3.01974630214796D-02	1.85730638482956D-04
4	-1.65854405423759D-02	3.23942011345477D-03
5	-4.17417836406919D-17	3.7146127696593D-04

TRATTO	ROTAZIONE
--------	-----------

1	0
2	9.51855950676688D-04
3	4.71109137351001D-19
4	-9.51855950676687D-04
5	4.50462709261678D-19

TEMPO DI ESECUZIONE = 1.2109375 SEC.

RUN DEL 09-27-1994 ORE 21:54:08

Nei diagrammi delle componenti v (o w) le condizioni di antisimmetria (o di simmetria) non sono completamente rispettate. Ciò dipende dal fatto che nelle (4.54) e (4.55) si è supposto che la rotazione relativa tra le facce del concio avvenga intorno al baricentro della sezione di mezzeria del concio stesso, e ciò è esatto solo se il momento è costante. L'errore tende a zero all'aumentare del numero dei concii

4.7.7. Il caso del carico su metà arco

Infine si carichi l'arco con le forze verticali:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 200 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.127)$$

simulando così il carico accidentale $a = 8 \text{ tm}^{-1}$ sul semiarco di sinistra. Si hanno i seguenti risultati:

REAZIONE VERTICALE A SINISTRA = -219.288273452142
 REAZIONE ORIZZONTALE A SINISTRA = 194.766703122958
 REAZIONE VERTICALE A DESTRA = -80.7117265478576

REAZIONE ORIZZONTALE A DESTRA = -194.766703122958

SOMMA DELLE FORZE VERTICALI = 300

SOMMA DELLE FORZE ORIZZONTALI = 0

CARICO VERTICALE MEDIO = 3

CARICO ORIZZONTALE MEDIO = 0

DIVIDENTE	MOMENTO FLETTENTE
1	-1043.04009967561
2	787.291053072487
3	52.2059948575597
4	-748.295274320393
5	885.78724553863

DIVIDENTE	N A SINISTRA	N A DESTRA
1	-287.386326569652	-287.386326569652
2	-272.273332396092	-182.830613296101
3	-194.766703122958	-194.766703122958
4	-210.300016603059	-210.300016603059
5	-204.240398427081	-204.240398427081

DIVIDENTE	TAGLIO A SINISTRA	TAGLIO A DESTRA
1	58.5705968879392	58.5705968879392
2	109.03507685573	-69.8503613442529
3	19.2882734521424	-80.7117265478576
4	14.9115547303373	14.9115547303373
5	52.2906406354887	52.2906406354887

DIVIDENTE	SPOS. VERTICALI	SPOS. ORIZZONTALI
1	0	0
2	1.71285961529265D-03	8.88750511630241D-04
3	8.28560353944651D-04	5.147056746747D-04
4	-6.82748315522595D-04	7.24162494898308D-04
5	-5.30113739733136D-06	-8.79358970731571D-06

TRATTO	ROTAZIONE
1	0
2	-8.93737442559901D-05

3 1.52545022029473D-04
 4 -4.80477735347322D-05
 5 9.66213129910941D-20
 TEMPO DI ESECUZIONE = 1.1484375 SEC.
 RUN DEL 09-27-1994 ORE 21:54:28

4.8. Un esempio

Si consideri l'arco della Figura 2.5, il cui asse è già stato definito nel Capitolo 2.

Le imposte A e B sono realizzate ciascuna su un telaio triangolare, per ridurre la luce e concedere una deformabilità elastica delle imposte stesse. I due telai sono simmetrici; quello di sinistra è dato dalla Figura 4.20.

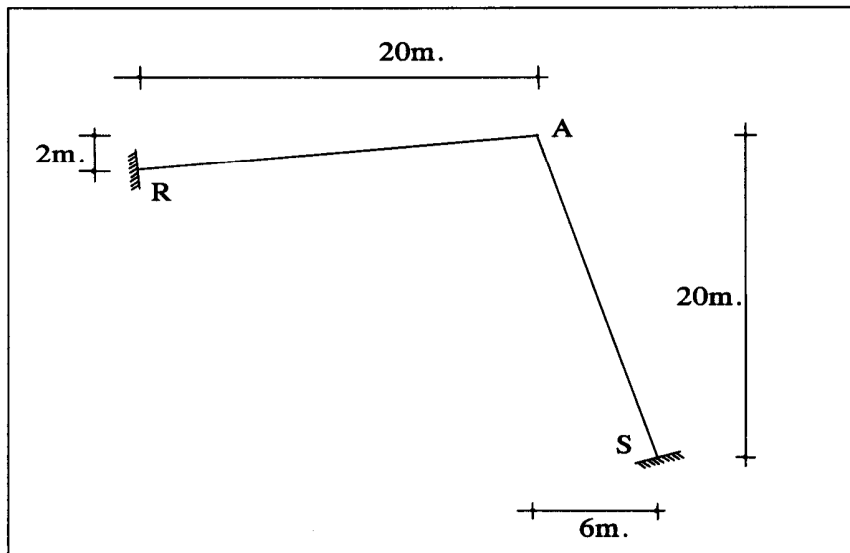


Figura 4.20- Il telaio di imposta dell'arco di esempio

Ambedue le aste sono caratterizzate da:

$$A = 150 \text{ m}^2 \quad I = 3000 \text{ m}^4. \quad (4.128)$$

E' inoltre:

$$E = 4 \cdot 10^6 \text{ tm}^{-2} \quad (4.129)$$