

### 3. La cedibilità elastica delle imposte

#### 3.1. La matrice delle cedibilità

Nel calcolo di un arco la cedibilità delle imposte è forse l'elemento di maggior incertezza, poichè chiama in gioco le proprietà fisiche del terreno. Il modello che si assume non può mai risultare così vicino al vero come quello su cui si basa l'analisi delle strutture monodimensionali, e, per quanto semplice possa essere, esige l'uso di procedimenti di calcolo non elementari.

Il problema in genere si pone nei termini di un blocco monolitico rigido alla cui frontiera appartiene quella che si considera come la sezione retta  $A_s A_i$  di imposta dell'arco; il blocco è collocato in roccia, o immerso nel terreno, a contatto diretto o tramite palificate (Figura 3.1).

Le forze applicate al blocco — oltre il peso proprio — interessano la parte  $A_s A_i$ ; con il riferimento della Figura 3.2, esse si riducono ad una forza  $\mathbf{F}$  applicata in  $A$ , di componenti  $F_y$  ed  $F_z$ , e ad una coppia  $\mathcal{M}$  agente nel piano  $yz$  e di momento  $\mathcal{M}$ . Il vettore colonna delle forze è dato da:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} F_y \\ F_z \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Queste forze equivalgono ad una risultante  $\mathbf{F}$  agente nel piano  $yz$ .

Corrispondentemente, la parte  $A_s A_i$  — solidale con il blocco — presenta un moto rigido, somma di una traslazione di componenti  $v$  e  $w$ , e di una rotazione  $\phi$  intorno all'asse  $x$ . Il vettore spostamento è dato da:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} v \\ w \\ \phi \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Questi spostamenti equivalgono ad una rotazione rigida del blocco intorno ad un asse parallelo ad  $x$  e di traccia  $R$  (*centro di rotazione*).

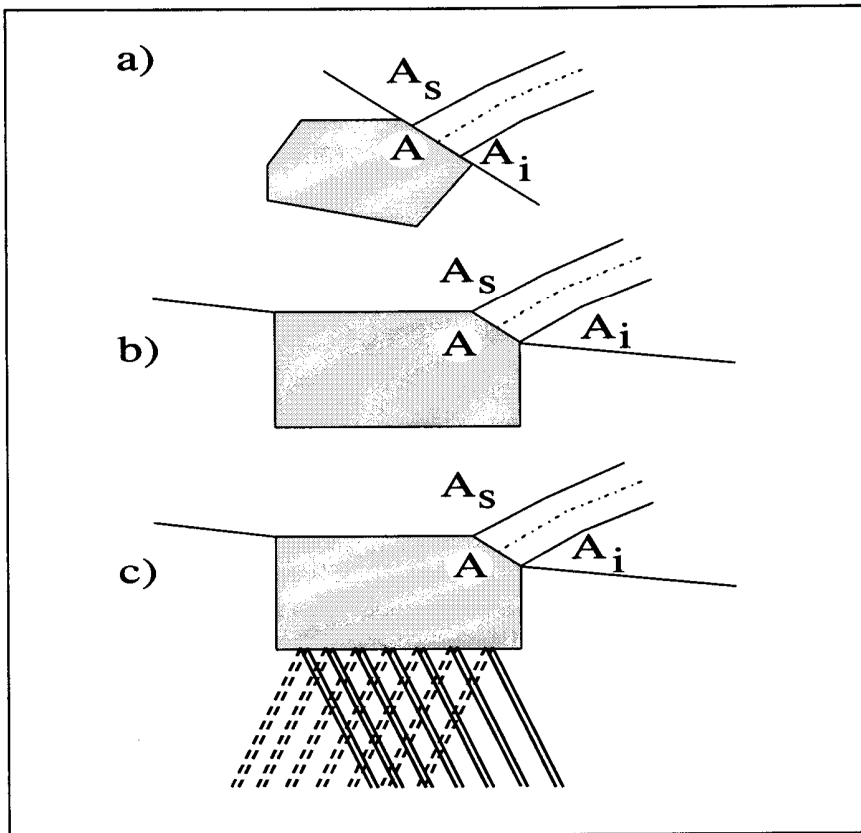


Figura 3.1- Alcuni schemi di blocchi di fondazione

In regime elastico lineare  $f$  ed  $s$  sono legati dalla relazione:

$$\mathbf{A}f = \mathbf{s} \quad (3.3)$$

dove  $\mathbf{A}$  è la *matrice delle cedibilità elastiche*. In esteso si ha:

$$\mathbf{A} = \begin{matrix} & \begin{matrix} F_y & F_z & \mathcal{M} \end{matrix} \\ \begin{matrix} v \\ w \\ \phi \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (3.4)$$

La prima riga rappresenta le componenti  $v$  dovute rispettivamente ad  $F_y = 1 t$ ,

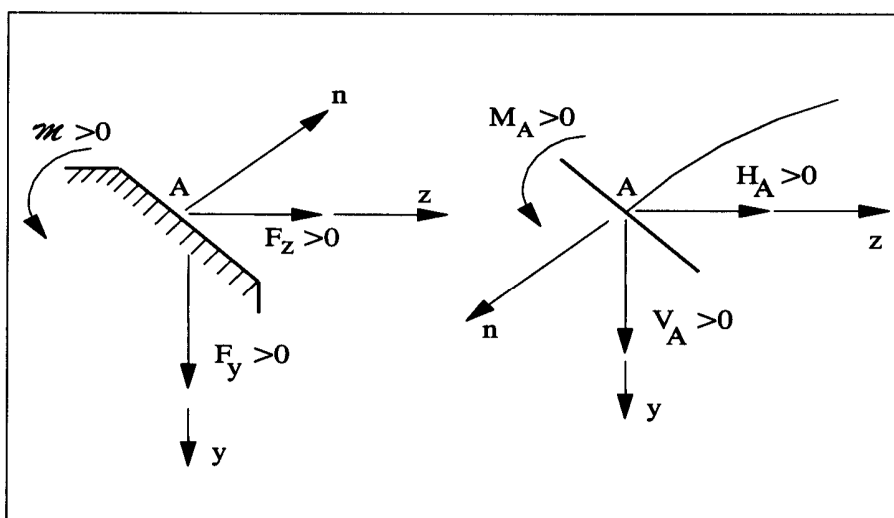


Figura 3.2- Le forze trasmesse dal blocco

$F_z = 1 t$ ,  $\mathcal{M} = 1 tm$ ; così le altre due righe rappresentano le componenti di  $w$  e  $\phi$  dovute ad  $F_y = 1 t$ ,  $F_z = 1 t$ ,  $\mathcal{M} = 1 tm$ .

Le dimensioni fisiche degli elementi di  $\mathbf{A}$  sono le seguenti:

$$[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} lF^{-1} & lF^{-1} & F^{-1} \\ lF^{-1} & lF^{-1} & F^{-1} \\ F^{-1} & F^{-1} & l^{-1}F^{-1} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  è simmetrica e, in genere, è definita positiva; l'energia di deformazione connessa con  $\mathbf{f}$ , o con  $\mathbf{s}$ , è data da:

$$L_A = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{f} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s} \quad (3.6)$$

### 3.2. Le leggi generali di trasferimento

Se si passa dal riferimento  $(y, z, x)$  all'altro  $(a, b, c)$ , pur esso triortogonale, si considera la *matrice di trasferimento*:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} c_{ay} & c_{az} & c_{ax} \\ c_{by} & c_{bz} & c_{bx} \\ c_{cy} & c_{cz} & c_{cx} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

La prima riga contiene i coseni direttori di  $a$  rispetto ad  $y, z, x$ , la seconda e la terza quelli di  $b$  e  $c$ . La  $\mathbf{T}$  è ortogonale:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \implies \det[\mathbf{T}] = 1 \quad (3.8)$$

Un vettore  $\vec{r}$  presenta componenti  $r_y, r_z, r_x$  rispetto ad  $(y, z, x)$ , ed  $r_a, r_b, r_c$  rispetto ad  $(a, b, c)$ , rappresentate nei due vettori colonna  $\mathbf{r}$  ed  $\mathbf{r}'$ . Si ha:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{T}\mathbf{r} \quad (3.9)$$

Nel nuovo riferimento la (3.3) si scrive:

$$\mathbf{A}'\mathbf{f}' = \mathbf{s}'; \quad (3.10)$$

dalle (3.9) e (3.10) si trae:

$$\mathbf{A}'\mathbf{T}\mathbf{f} = \mathbf{T}\mathbf{s} \quad (3.11)$$

da cui:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{T}\mathbf{f} = \mathbf{s} \quad (3.12)$$

e quindi, per la (3.3):

$$\mathbf{A}' = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^T \quad (3.13)$$

La (3.13) può essere utilizzata per conoscere la terna (1,2,3) cui corrisponde una matrice  $\mathbf{A}^*$  di tipo diagonale, e cioè:

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Infatti, dalla relazione:

$$\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{A}^* \quad (3.15)$$

si trae:

$$\mathbf{T}\mathbf{A} = \mathbf{A}^*\mathbf{T} \quad (3.16)$$

L'uguaglianza della riga  $i$ -esima delle due matrici della (3.16) si scrive:

$$\mathbf{t}_i^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{t}_i^T \quad (3.17)$$

Trasponendo, la (3.17) si scrive:

$$\mathbf{A} \mathbf{t}_i = \lambda_i \mathbf{t}_i \quad (3.18)$$

e cioè:

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) \mathbf{t}_i = 0 \quad (3.19)$$

Il sistema (3.19) è un sistema di  $n$  equazioni (nel caso in esame  $n = 3$ ) nelle  $n$  incognite  $c_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), che ammette soluzione non banale se e solo se:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}) = 0 \quad (3.20)$$

La (3.20), per la simmetria della  $\mathbf{A}$ , ammette  $n$  radici reali, distinte o coincidenti,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , e quindi definisce la  $\mathbf{A}^*$ . Ad ogni valore  $\lambda_i$  corrisponde una soluzione  $c_{ij}$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) del sistema (3.19), definita a meno di una costante; è così definito il riferimento (1,2,3), triortogonale per ipotesi, cui corrisponde una matrice diagonale.

### 3.3. Una legge particolare di trasferimento

Nel caso in esame ha interesse però un caso particolare di quello — generale e ben noto — che si è trattato; e cioè il caso in cui l'asse  $x$  resta inalterato. La  $\mathbf{T}$  si scrive quindi come segue:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} c_{ay} & c_{az} & 0 \\ c_{by} & c_{bz} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Il problema è quello di determinare (Figura 3.3) il riferimento  $(\eta, \zeta)$  nel piano  $(y, z)$  rispetto al quale la sottomatrice:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

diventa diagonale; in tal caso la  $\mathbf{A}^*$  si scrive come segue:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_\eta & 0 & \bar{a}_{13} \\ 0 & \bar{\lambda}_\zeta & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

La relazione che occorre soddisfare è la seguente:

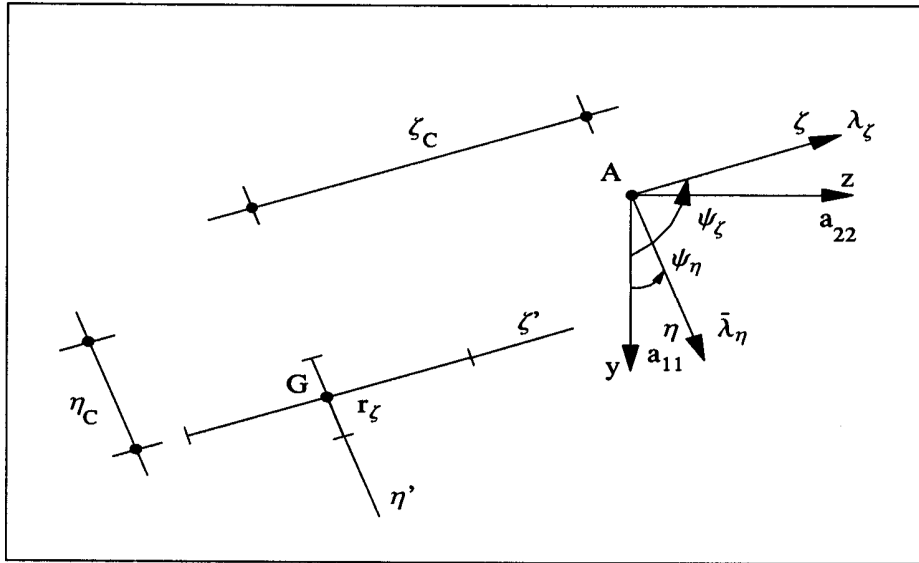


Figura 3.3- Un caso particolare di rotazione di assi

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \bar{\mathbf{A}} \quad (3.24)$$

e cioè:

$$\mathbf{TA} = \bar{\mathbf{A}}\mathbf{T} \quad (3.25)$$

Le matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}$  e  $\mathbf{T}$  possono convenientemente essere partizionate come segue:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

con:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

$$\mathbf{A}_{21} = (a_{31} \quad a_{32}) \quad \mathbf{A}_{22} = a_{33} \quad (3.29)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{11} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_\eta & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_\zeta \end{pmatrix} \quad \bar{\mathbf{A}}_{12} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{23} \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{21} = (\bar{a}_{31} \quad \bar{a}_{32}) \quad \bar{\mathbf{A}}_{22} = \bar{a}_{33} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{T}_{11} = \begin{pmatrix} c_{ay} & c_{az} \\ c_{by} & c_{bz} \end{pmatrix} \quad \mathbf{T}_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{T}_{21} = (0 \quad 0) \quad \mathbf{T}_{22} = 1. \quad (3.33)$$

La (3.25) si scinde allora nelle seguenti uguaglianze:

$$\mathbf{T}_{11}\mathbf{A}_{11} = \bar{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{T}_{11} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{13} &= c_{ay}a_{13} + c_{az}a_{23} & (\mathbf{T}_{12}\mathbf{A}_{12} &= \bar{\mathbf{A}}_{12}\mathbf{T}_{22}) \\ \bar{a}_{23} &= c_{by}a_{13} + c_{bz}a_{23} \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} a_{31} &= c_{ay}\bar{a}_{31} + c_{by}\bar{a}_{32} & (\mathbf{T}_{21}\mathbf{A}_{21} &= \bar{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{T}_{22}) \\ a_{32} &= c_{az}\bar{a}_{31} + c_{bz}\bar{a}_{32} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\bar{a}_{33} = a_{33} \quad (\mathbf{T}_{22}\mathbf{A}_{22} = \bar{\mathbf{A}}_{22}\mathbf{T}_{22}) \quad (3.37)$$

Se  $\psi$  è l'angolo  $(y, a)$ , può porsi:

$$c_{ay} = \cos \psi; \quad c_{az} = \sin \psi; \quad c_{by} = -\sin \psi; \quad c_{bz} = \cos \psi; \quad (3.38)$$

le (3.35) e (3.36) si scrivono:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{13} &= a_{13} \cos \psi + a_{23} \sin \psi \\ \bar{a}_{23} &= -a_{13} \cos \psi + a_{23} \sin \psi \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} a_{13} &= \bar{a}_{13} \cos \psi - \bar{a}_{23} \sin \psi \\ a_{23} &= \bar{a}_{13} \sin \psi + \bar{a}_{23} \cos \psi \end{aligned} \quad (3.40)$$

Le (3.40) sono la soluzione del sistema (3.39).

Operando come si è fatto per giungere alle (3.19) e (3.20), la (3.34) si traduce nel sistema:

$$(\mathbf{A}_{11} - \bar{\lambda}_i \mathbf{I})\mathbf{t}_i = 0, \quad (3.41)$$

la cui condizione per soluzione non banale è:

$$\det(\mathbf{A}_{11} - \bar{\lambda}_i \mathbf{I}) = 0 \quad (3.42)$$

per  $i = 1, 2$ .

In esteso, la (3.41) si scrive:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \bar{\lambda}_i)c_{iy} + a_{12}c_{iz} &= 0 \\ a_{21}c_{iy} + (a_{22} - \bar{\lambda}_i)c_{iz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

e la (3.42):

$$\det \begin{bmatrix} (a_{11} - \bar{\lambda}_i) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \bar{\lambda}_i) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.44)$$

e cioè:

$$\bar{\lambda}_i^2 - \bar{\lambda}_i(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \quad (3.45)$$

Le soluzioni della (3.45) sono:

$$\lambda_{1,2} \equiv \lambda_{\eta,\zeta} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2} \quad (3.46)$$

Dalle (3.43) si ha poi:

$$\tan \psi_\eta = \frac{c_{1z}}{c_{1y}} = -\frac{a_{11} - \bar{\lambda}_\eta}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22} - \bar{\lambda}_\eta} \quad (3.47)$$

$$\tan \psi_\zeta = \frac{c_{2y}}{c_{2z}} = -\frac{a_{11} - \bar{\lambda}_\zeta}{a_{12}} = -\frac{a_{21}}{a_{22} - \bar{\lambda}_\zeta} \quad (3.48)$$

Si verifica l'ortogonalità tra le rette  $\eta$  e  $\zeta$ :

$$\tan \psi_\eta \tan \psi_\zeta = -1 \quad (3.49)$$

Una forza  $\mathbf{F}$  agente sul blocco secondo  $\eta$  si associa ai seguenti vettori  $\mathbf{f}$  ed  $\mathbf{s}$ :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 F \\ 0 \\ \bar{a}_{13} F \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Una forza  $\mathbf{F}$  agente sul blocco secondo una parallela ad  $\eta$  definita dall'ordinata  $\zeta_c$  si associa invece ai seguenti vettori:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ -F\zeta_c \end{pmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_\eta F \\ 0 \\ \bar{a}_{13} F - a_{33} F\zeta_c \end{pmatrix} \quad (3.51)$$



Se la forza agisce su una parallela  $\eta'$  ad  $\eta$  tale che:

$$\zeta_c = \frac{\bar{a}_{13}}{a_{33}} = \frac{a_{13} \cos \psi + a_{23} \sin \psi}{a_{33}} \quad (3.52)$$

lo spostamento  $\mathbf{s}$  è una traslazione rigida  $\bar{\lambda}_\eta F$  secondo  $\eta'$ .

Analogamente, una forza  $\mathbf{F}$  agente sul blocco secondo una parallela a  $\zeta$  definita dall'ordinata  $\eta_c$  si associa ai seguenti vettori:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \\ F\eta_c \end{pmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{\lambda}_\zeta F \\ \bar{a}_{23}F + a_{33}F\eta_c \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Se la forza agisce su una parallela  $\zeta'$  ad  $\zeta$  tale che:

$$\eta_c = -\frac{\bar{a}_{23}}{a_{33}} = \frac{a_{13} \sin \psi - a_{23} \cos \psi}{a_{33}} \quad (3.54)$$

lo spostamento  $\mathbf{s}$  è una traslazione rigida  $\bar{\lambda}_\zeta F$  secondo  $\zeta'$ .

Una coppia  $\mathcal{M}$  agente sul blocco si associa ai seguenti vettori:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{M} \end{pmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{13}\mathcal{M} \\ \bar{a}_{23}\mathcal{M} \\ \bar{a}_{33}\mathcal{M} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

il vettore  $\mathbf{s}$  può anche scriversi come segue:

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} a_{33}\zeta_c\mathcal{M} \\ -a_{33}\eta_c\mathcal{M} \\ a_{33}\mathcal{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi\zeta_c \\ -\phi\eta_c \\ \phi \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

La (3.56) mostra che lo spostamento deriva da una rotazione rigida  $\phi = a_{33}\mathcal{M}$  del blocco intorno al punto  $G$  di coordinate  $\eta_c\zeta_c$ , intersezione delle due rette  $\eta'$  e  $\zeta'$  definite dalle (3.52) e (3.54).

### 3.4. L'ellisse di elasticità del blocco di fondazione

Secondo la teoria di Culmann,  $a_{33}$  è il *peso elastico*  $W$  del blocco,  $G$  il *baricentro elastico*,  $\eta'$  e  $\zeta'$  le *direzioni principali* dell'ellisse di elasticità, e:

$$r_\eta = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_\eta}{W}} \quad r_\zeta = \sqrt{\frac{\bar{\lambda}_\zeta}{W}} \quad (3.57)$$

i *semidiametri* delle ellissi ortogonali ad  $\eta'$  e  $\zeta'$ .

La ricerca delle direzioni principali  $\eta$  e  $\zeta$ , e delle cedibilità principali  $\lambda_\eta$ ,  $\lambda_\zeta$ , coincide con quella delle direzioni principali e delle tensioni (o dilatazioni) principali in uno stato piano di tensione (o di deformazione); essa può essere quindi eseguita anche graficamente — almeno a scopo di controllo dei risultati numerici — utilizzando il *cerchio di Mohr* (Figura 3.4). Operando sul riferimento  $(a_{ii}, a_{ij})$  parallelo e concorde al riferimento  $(yz)$ , si costruisce il punto  $C$  di coordinate  $((a_{11} + a_{22})/2, 0)$  ed il punto  $P$  (polo), di coordinate  $(a_{11}, a_{12})$ .

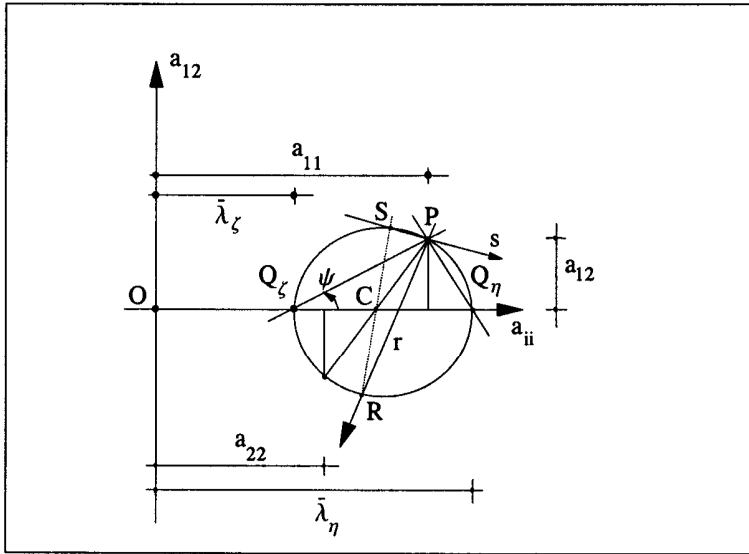


Figura 3.4- Il cerchio di Mohr per la ricerca delle autosoluzioni

Il cerchio di Mohr ha centro in  $C$  e raggio  $CP$ . Date due rette ortogonali orientate  $r$  ed  $s$  passanti per  $P$ , e tali da poterle sovrapporre alla coppia  $(yz)$  per rotazione intorno ad  $x$ , le coordinate delle intersezioni  $R$  ed  $S$  con il cerchio sono le seguenti:

$$R(a_{rr}, -a_{rs}) \quad S(a_{ss}, a_{sr}), \quad (3.58)$$

e quindi definiscono la matrice  $\mathbf{A}_{11}$  nel riferimento  $(rs)$ .

Se ne trae che le congiungenti  $P$  con gli estremi  $Q_\eta$  e  $Q_\zeta$  del diametro forniscono le direzioni principali  $\eta$  e  $\zeta$ , e che:

$$\bar{\lambda}_\eta = OQ_\eta \quad \bar{\lambda}_\zeta = OQ_\zeta \quad (3.59)$$

Inoltre può scriversi:

$$\tan 2\psi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad (3.60)$$

L'ellisse di Culmann definisce il centro  $R$  della rotazione rigida del blocco dovuta ad una forza  $F$ , di qualsiasi valore, agente sul blocco secondo una generica retta  $r$ . Esso infatti (Figura 3.5) è l'antipolo di  $r$  rispetto all'ellisse. L'entità della rotazione è:

$$\phi = FWd_{Gr}, \quad (3.61)$$

ove  $d_{Gr}$  è la distanza di  $G$  dalla retta orientata  $r$ . La  $d_{Gr}$  è positiva se  $G$  è ubicata alla sinistra di  $r$ ; nel caso in Figura 3.4 è  $d_{Gr} < 0$ ,  $F > 0$ , e quindi  $\phi < 0$ .

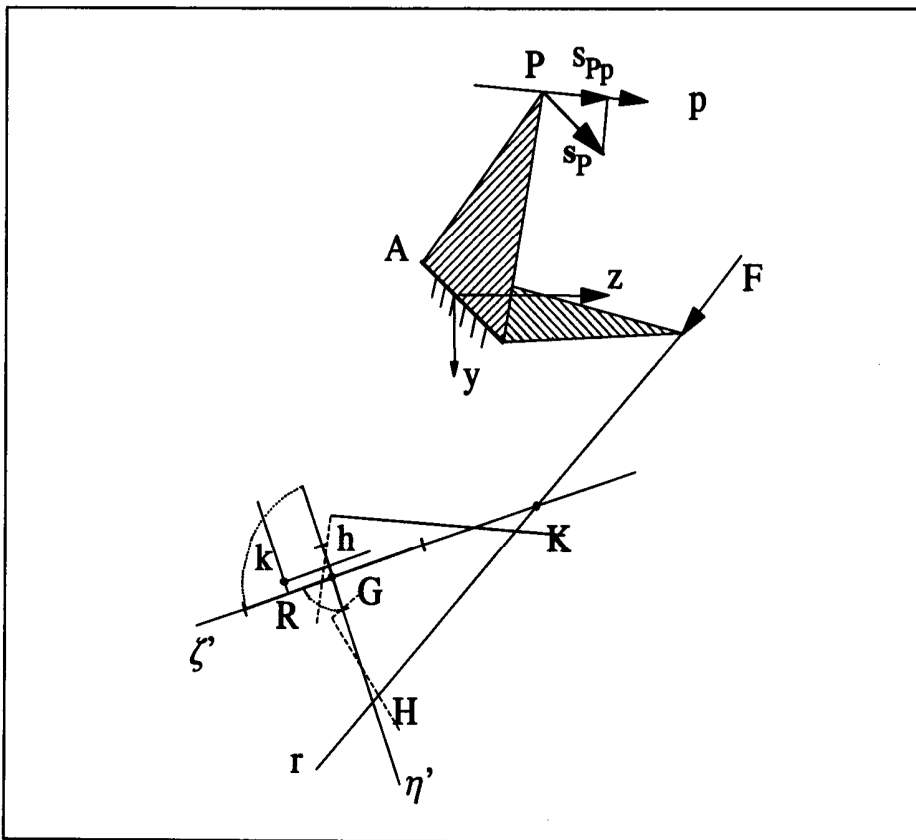


Figura 3.5- L'ellisse di Culmann

Se in  $A$  è applicata una coppia  $\mathcal{M}$ , (Figura 3.6) la  $r$  è la retta impropria ( $d_{Gr} = \infty$ ) ed  $F = 0$ ; è pure però  $Fd_{Gr} = \mathcal{M}$ , e quindi:

$$\phi = \mathcal{M}W, \quad (3.62)$$

conformemente alla (3.57).

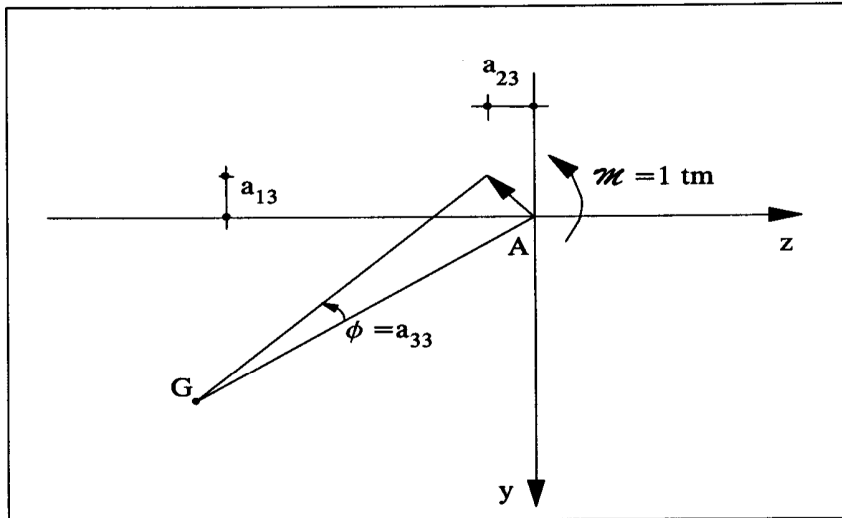


Figura 3.6- Il caso della coppia applicata

La rotazione (3.62) avviene intorno a  $G$ , che è l'antipolo della retta impropria. Un punto qualsiasi  $P$  collegato rigidamente con il blocco — in particolare, un punto  $P$  del blocco stesso — presenta uno spostamento  $\mathbf{s}_P$ . La componente  $s_{Pp}$  di  $\mathbf{s}_P$  secondo una retta orientata  $p$  è data da:

$$s_{Pp} = \phi d_{Rp}, \quad (3.63)$$

ove  $d_{Rp}$  è la distanza di  $R$  da  $p$ . Nel caso in esame, è  $\phi < 0$ ,  $d_{Rp} < 0$ , e quindi  $s_{Pp} > 0$ .

Per la (3.61), la (3.63) si scrive come segue:

$$s_{Pp} = FWd_{Gr}d_{Rp}; \quad (3.64)$$

per la (3.64) invece si ha:

$$s_{Pp} = \mathcal{M}Wd_{Rp}. \quad (3.65)$$

Le (3.62), (3.65), (3.61) e (3.64) si scrivono anche, più sinteticamente, come segue:

$$\phi = \mathcal{M}W \quad s_{Pp} = \mathcal{M}S_p \quad (3.66)$$

$$\phi = FS_r \quad s_{Pp} = FI_{rp}. \quad (3.67)$$

In queste formule  $S_p$  ed  $S_r$  sono i momenti statici del peso elastico rispetto alle rette  $p$  ed  $r$ ,  $I_{rp}$  il momento centrifugo del peso elastico rispetto alle stesse rette.

Se una forza  $\mathbf{F}$  agisce sul blocco secondo  $\eta'$ , la seconda delle (3.67) fornisce:

$$F\bar{\lambda}_\eta = FWr_\eta^2; \quad (3.68)$$

se invece la  $F$  agisce secondo  $\zeta'$ , si ha:

$$F\bar{\lambda}_\zeta = FWr_\zeta^2. \quad (3.69)$$

Si giustificano così le (3.57).

Una coppia  $\mathcal{M}$  provoca perciò una rotazione intorno al baricentro elastico  $G$ .

Una forza  $\mathbf{F}$  passante per  $G$  non induce rotazione, per la prima delle (3.67); ad essa si associa quindi una traslazione del blocco. Il centro  $R$  è quindi improprio, come si riconosce anche dalla costruzione della Figura 3.5, ed è il punto improprio della retta coniugata alla retta d'azione della  $\mathbf{F}$ .

### 3.5. Il baricentro elastico nel riferimento ordinario

Si è definito *baricentro elastico*  $G$  il centro di rotazione del blocco soggetto ad una coppia  $\mathcal{M}$ . Si ha quindi (Figura 3.6), sotto  $\mathcal{M}$ ,

$$v_G = -\phi z_G + v_A = 0 \quad (3.70)$$

$$w_G = \phi y_G + w_A = 0 \quad (3.71)$$

e, per  $\mathcal{M} = 1$ ,

$$v_G = -a_{33}z_G + a_{13} = 0 \quad (3.72)$$

$$w_G = a_{33}y_G + a_{23} = 0 \quad (3.73)$$

Può scriversi perciò:

$$y_G = -\frac{a_{23}}{a_{33}} \quad (3.74)$$

$$z_G = \frac{a_{13}}{a_{33}} \quad (3.75)$$

Se:

$$a_{13} = a_{23} = 0 \quad (3.76)$$

si ha che  $G$  coincide con il baricentro  $A$  dell'imposta. Inoltre (cfr. 3.47, 3.48, 3.60) si ha:

$$\psi_{1,2} = 0, 90^\circ \quad (3.77)$$

Le direzioni principali sono così  $y$  e  $z$ , e si ha: (Figura 3.7):

$$r_y = \sqrt{\frac{a_{11}}{a_{33}}} \quad r_z = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{33}}} \quad (3.78)$$

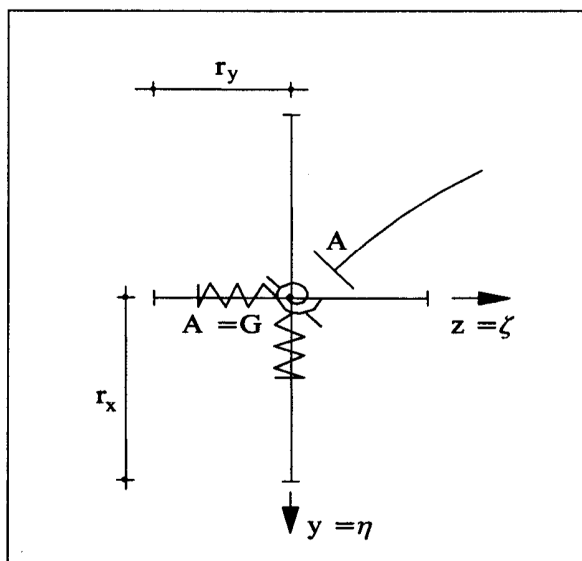


Figura 3.7- Il caso delle strutture semplici

La (3.76) significa che le due forze verticale ed orizzontale e la coppia non si influenzano reciprocamente nei riguardi delle cedibilità. E' quanto si suppone nelle strutture meno impegnative.

### 3.6. I casi di specializzazione

Può darsi che la matrice  $\mathbf{A}$  sia singolare, e cioè a determinante nullo. In questo caso la (3.3), intesa come sistema di tre equazioni nelle tre incognite  $F_y, F_z, \mathcal{M}$ , ha soluzione indeterminata o  $\infty$ . Il sistema:

$$\mathbf{A}\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.79)$$

ha invece soluzione non banale, definita a meno di una o due costanti, secondo che la  $\mathbf{A}$  sia di rango 2 o 1.

#### 3.6.1. Il caso della singolarità di rango 2

In questo caso, in cui esiste almeno un minore di ordine 2 non nullo, la soluzione può essere posta nella forma:

$$F_y = c_1 \mathcal{M} \quad (3.80)$$

$$F_z = c_2 \mathcal{M}; \quad (3.81)$$

la costante è  $\mathcal{M}$ . Le  $c_1$  e  $c_2$  sono date da:

$$c_1 = \frac{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad (3.82)$$

$$c_2 = \frac{a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \quad (3.83)$$

Quanto sopra equivale a dire che un vettore  $\mathbf{f}$  soddisfacente le (3.80) e (3.81) — e solo se la soddisfa — non provoca spostamenti. Tale vettore si traduce in una forza  $\mathbf{F}$  (di qualsiasi valore) inclinata su  $y$  dell'angolo  $(yF)$  dato da:

$$\tan(yF) = \frac{F_z}{F_y} = \frac{c_2}{c_1} \quad (3.84)$$

ed agente (Figura 3.8) ad una distanza da  $A$  tale che il suo momento rispetto ad  $A$  sia pari ad  $\mathcal{M}$ :

$$-F_y z_F + F_z y_F = \frac{F_y}{c_1}. \quad (3.85)$$

Dalla (3.85) si trae:

$$c_1 z_F - c_2 y_F = -1 \quad (3.86)$$

e poichè:

$$\frac{z_F}{y_F} = -\frac{c_1}{c_2} \quad (3.87)$$

si può scrivere:

$$z_F = -\frac{c_1}{c_1^2 + c_2^2} \quad (3.88)$$

$$y_F = \frac{c_2}{c_1^2 + c_2^2} \quad (3.89)$$

La retta d'azione della  $\mathbf{F}$  cui si associa  $\mathbf{s} = 0$  passa per il baricentro elastico  $G$ . Ad essa si associa una cedibilità  $a_{ii}$  nulla, e quindi minima; essa è quindi una delle direzioni principali, e si chiami  $\zeta'$ . Ciò significa che qualsiasi forza provoca solo una rotazione intorno a  $G$  ed una traslazione secondo la normale a  $\zeta'$ ; il blocco, visto come vincolo, può essere assimilato al vincolo della Figura 3.8.a, e cioè un incastro elastico, scorrevole su un piano rigido di traccia  $s$  normale a  $z'$ , con:

$$\tan(\zeta s) = \frac{c_2}{c_1}. \quad (3.90)$$

La costruzione della Figura 3.8.c permette di verificare che  $\bar{\lambda}_\zeta = 0$ , e fornisce sia  $\bar{\lambda}_\eta$  che  $\psi_\eta$ . Si ha:

$$\bar{\lambda}_\eta = a_{11} + a_{12}; \quad (3.91)$$

dalla (3.47) si trae quindi:

$$\tan \psi_\eta = \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad (3.92)$$

e dalla (3.48):

$$\tan \psi_\zeta = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \quad (3.93)$$

L'ellisse di elasticità (Figura 3.8.b) si specializza in un segmento  $HK$  di centro  $G$ , normale ad  $s$ ; si ha:

$$GH = GK = r_s = \sqrt{\frac{a_{11} + a_{22}}{a_{33}}} \quad (3.94)$$

### 3.6.2. Il problema inverso



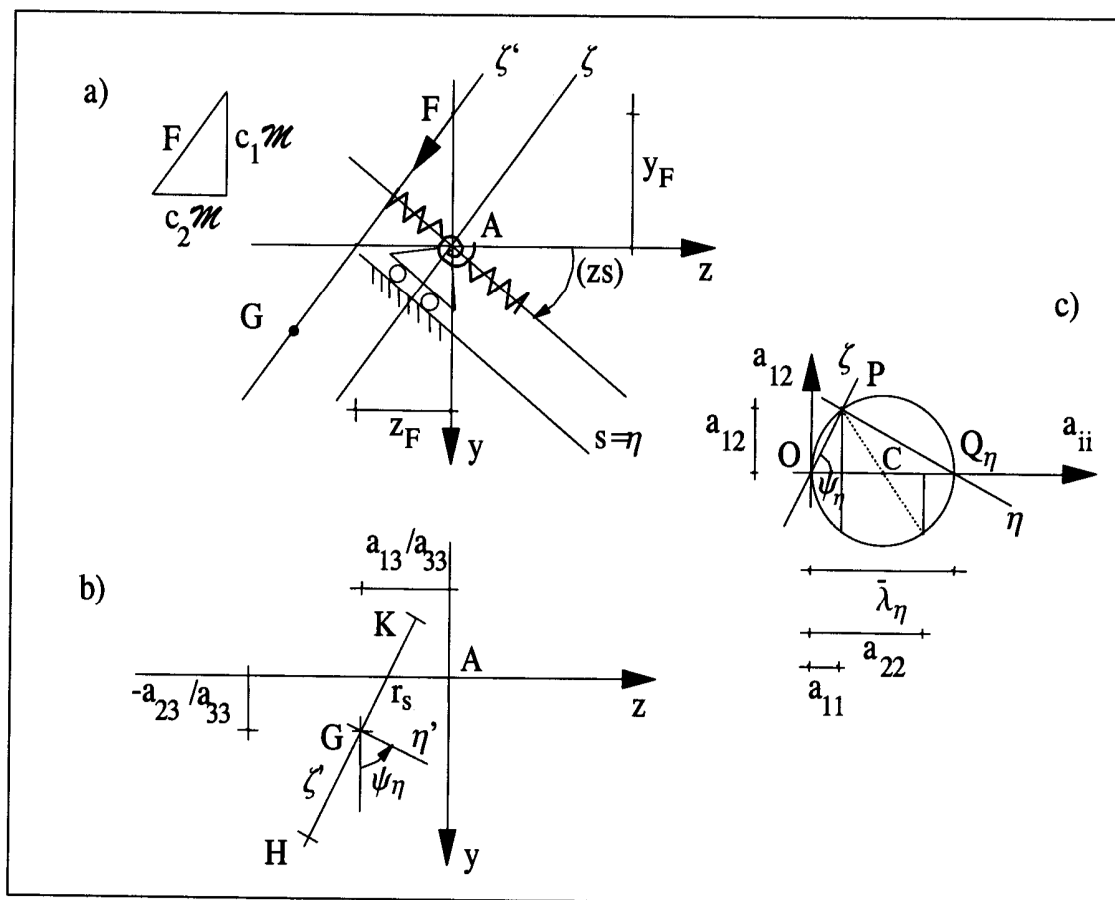


Figura 3.8- Il caso della singolarità d'ordine 2

Problema inverso di quello che si è trattato è il seguente: dato il piano rigido di scorrimento di traccia  $s$ , ed il valore di  $a_{ss}$  e di  $a_{33}$ , costruire la matrice  $\mathbf{A}$ .

La matrice  $\mathbf{A}'$  è:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{ss} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

La (3.13) porge:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A}' \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \mathbf{A}' \mathbf{T} \quad (3.96)$$

D'altro canto è (cfr. 3.7):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos(sy) & \cos(sz) & 0 \\ \cos(ny) & \cos(nz) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi_s & \sin \psi_s & 0 \\ -\sin \psi_s & \cos \psi_s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

Si ha così:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{ss} \cos^2 \psi_s & a_{ss} \sin \psi_s \cos \psi_s & 0 \\ a_{ss} \sin \psi_s \cos \psi_s & a_{ss} \sin^2 \psi_s & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.98)$$

A questa stessa espressione si può giungere dall'esame del cerchio di Mohr (Figura 3.8.c) Lo stesso cerchio può servire per operare graficamente: dato  $a_{ss} = \bar{\lambda}_\eta$  si costruisce il cerchio, dato  $\psi_s = \psi_\eta$  si costruisce  $P$ , e sono quindi note le coordinate  $(a_{11}, a_{12})$  di  $P$ , ed il valore  $a_{22} = a_{ss} - a_{11}$ .

Se il piano di scorrimento è orizzontale ( $\psi_\eta = 90^\circ$ ) è  $a_{11} = 0$ ,  $a_{22} = a_{ss}$ , e si ha:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}; \quad (3.99)$$

l'ellisse (Figura 3.9.a) è un segmento verticale  $HK$  di centro  $G = A$ , con:

$$GH = GK = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{33}}}. \quad (3.100)$$

Se la forza  $\mathbf{F}$  passa per il punto  $S$  di  $y$ , il centro di rotazione  $R$  giace su  $y$ ; si ha:

$$GR = \frac{r^2}{GS}. \quad (3.101)$$

Se  $a_{33} \rightarrow \infty$  (Figura 3.9.b) è  $r \rightarrow 0$ , e l'ellisse tende a contrarsi nel punto  $A$ . La forza  $\mathbf{F}$  deve comunque passare per  $A$ , altrimenti la (3.61) fornirebbe  $\phi = \infty$ . E' questo il caso dell'arco a due cerniere a spinta eliminata.

### 3.6.3. Il caso della singolarita' di rango 1

Se la matrice  $\mathbf{A}$  è di rango 1, la soluzione del sistema:

$$\mathbf{A} \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.102)$$

può essere posta nella forma:

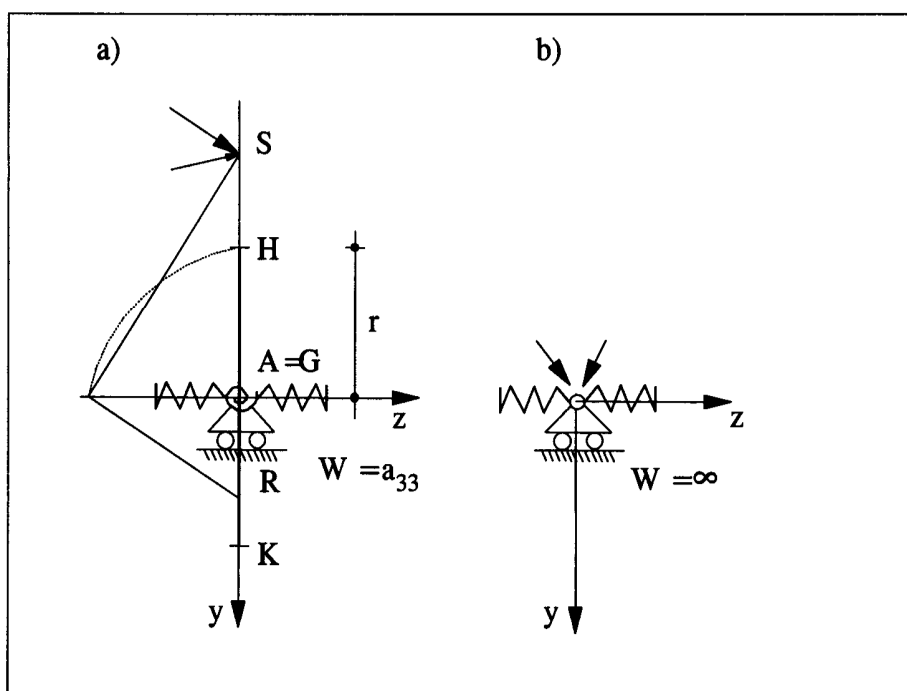


Figura 3.9- Casi particolari della singolarità d'ordine 2

$$F_y \frac{a_{i1}}{a_{i3}} + F_z \frac{a_{i2}}{a_{i3}} + \mathcal{M} = 0; \quad (3.103)$$

$F_z$  ed  $\mathcal{M}$  sono le due costanti.

Lo spostamento  $s$  è nullo se e solo se la  $\mathbf{F}$  soddisfa questa condizione, il che equivale ad imporre che il momento di  $\mathbf{F}$  rispetto al punto  $P$  di coordinate:

$$y_P = -\frac{a_{i2}}{a_{i3}} \quad z_P = \frac{a_{i1}}{a_{i3}} \quad (3.104)$$

sia nullo;  $P$  è proprio il baricentro elastico  $G$ . Poichè  $s = 0$  quando una qualsiasi forza passa per  $G$ , può dirsi che deve essere (3.57):

$$r_\eta = r_\zeta = 0 \quad (3.105)$$

L'ellisse si riduce (Figura 3.10) al baricentro elastico  $G$ . Il blocco equivale ad un incastro elastico girevole intorno al punto fisso  $G$ .

Si hanno le seguenti relazioni:

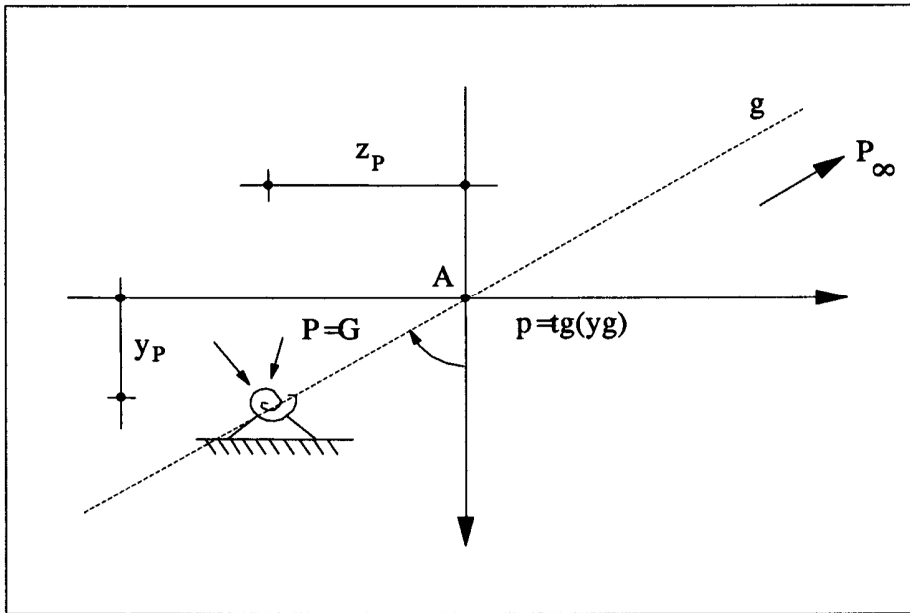


Figura 3.10- Il caso della singolarità d'ordine 1

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{s} = \begin{pmatrix} z_P^2 a_{33} \\ -z_P y_P a_{33} \\ z_P a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -y_P z_P a_{33} \\ y_P^2 a_{33} \\ -y_P a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{s} = \begin{pmatrix} z_P a_{33} \\ -y_P a_{33} \\ a_{33} \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

quindi la  $\mathbf{A}$  si scrive come segue:

$$\mathbf{A} = a_{33} \begin{pmatrix} z_P^2 & -y_P z_P & z_P \\ -y_P z_P & y_P^2 & -y_P \\ z_P & -y_P & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.109)$$

Se  $g$  è la congiungente  $AG$ , e:

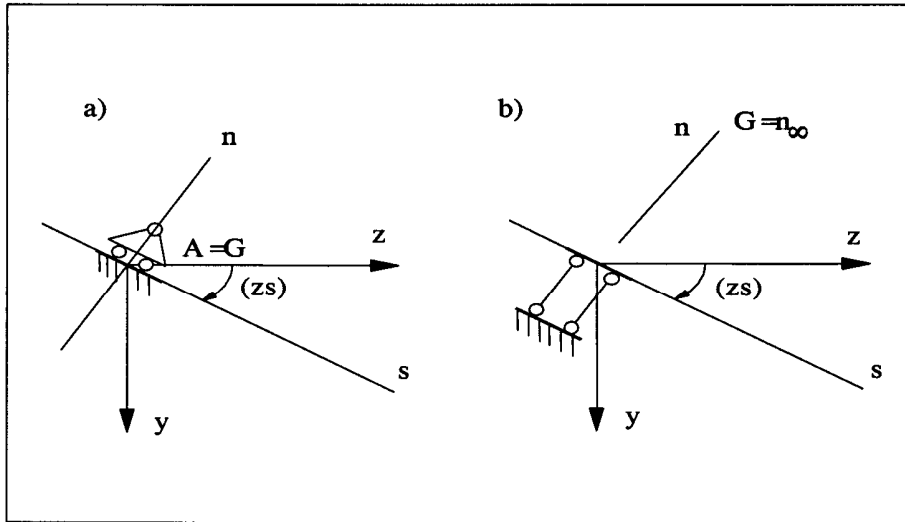


Figura 3.11- Casi particolari della singolarità d'ordine 1

$$p = \tan(\gamma) = \frac{z_P}{y_P} \quad (3.110)$$

la  $\mathbf{A}$  può anche scriversi come segue:

$$\mathbf{A} = a_{33} \begin{pmatrix} p^2 y_P^2 & -p y_P^2 & p y_P \\ -p y_P^2 & y_P^2 & -y_P \\ p y_P & -y_P & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.111)$$

### 3.6.4. I casi dell'appoggio, del bispindolo e della cerniera

Se, nel caso della Figura 3.8, si ha:

$$a_{ss} \rightarrow \infty \quad a_{33} \rightarrow \infty \quad (3.112)$$

il vincolo tende all'appoggio (Figura 3.11.a).

La matrice è la (3.98), dove  $a_{ss}$  ed  $a_{33}$  assumono valori molto elevati. Il cerchio di Mohr (Figura 3.8.c) si espande all'infinito.

Se, nel caso della Figura 3.10, si ha:

$$y_P \rightarrow \infty \quad (3.113)$$

fermo restando il valore di  $p$ , il vincolo tende al bispindolo (Figura 3.11.b). La matrice è la (3.111), ove  $y_P$  assume valori molto elevati, ed  $a_{33}$  valori molto bassi.

Se invece si ha:

$$a_{33} \rightarrow \infty \quad (3.114)$$

il vincolo tende alla cerniera in  $P$ ; in particolare in  $A$ , se si ha pure  $y_P \rightarrow 0$ . La matrice è la (3.111), ove  $a_{33}$  assume valori molto elevati.