

1. Cenni storici ed introduzione

1.1. Il problema delle centine

Nel secolo scorso nascono i primi archi in acciaio; allo stesso tempo rimontano gli ultimi archi lapidei. L'inizio di questo secolo è poi considerato comunemente — con la realizzazione del ponte Risorgimento (1911) sul Tevere in Roma — la data di nascita delle grandi strutture in cemento armato, in particolare degli archi in c.a.; anche se la tipologia del Risorgimento non è certo quella di una struttura monodimensionale ad asse curvilineo, e cioè dell'arco classico.

All'arco si connatura più il conglomerato che l'acciaio, poichè la presenza della compressione esige sezioni con forte inerzia; ed infatti le luci maggiori sono realizzate in conglomerato. Acquista quindi peso preminente, sul piano economico soprattutto, il problema della centina; ed è proprio questo che segna le tappe dell'evoluzione costruttiva dell'arco, o almeno la caratterizza.

Il primo ponte ad arco iscrittosi a più titoli nella storia dei ponti, quello di Plougastel, apparve rivoluzionario soprattutto nella risposta al problema della centina, e fece di E. Freyssinet l'indiscusso numero uno tra i costruttori di ponti di tutti i tempi. Si tratta di un ponte su tre arcate successive, ciascuna di 186.4 metri di luce — record dell'epoca — gettato a superare il corso dell'Elorn in Bretagna, poco distante dalla base navale di Brest. La costruzione durò cinque anni, dal 1926 al 1930, lasso di tempo straordinariamente breve in relazione all'opera ed all'epoca; e questa celerità di esecuzione, oltre al drastico risparmio nella quantità di legno, ridotta a 200 m^3 , fu dovuta all'aver utilizzato una unica centina per i tre archi.

Tale centina era montata su due zattere, per il cui collegamento era utilizzato lo stesso tirante della centina; e le zattere erano munite di motore, per vincere la corrente dell'Elorn. Per la prima volta fu adottata la tecnica dell'indurimento rapido sotto vapore caldo, e ciò costrinse a considerare con attenzione l'effetto delle deformazioni susseguenti (fluage, creep, viscosità). Era già noto sul piano teorico il fenomeno, studiato dall'americano Faber, che ne aveva esposto i lineamenti nel 1914 all'École des Ponts et Chaussées; ma non esisteva concordanza di pareri in merito, tanto che —

in quella stessa seduta — Pigeaud negava addirittura il problema, gridando “ le fluage, il n'existe pas ”, e Mesnager lo rimbeccava aspramente. ma ben altre preoccupazioni si profilavano imminenti per i francesi e gli europei in genere, e gli studi sul fluage ristagnarono. Fu a datare da Plougastel che si riconobbe la loro incidenza sotto il profilo costruttivo, e se ne ripresero le fila, dando inizio alla reologia.

Sotto la consulenza del Freyssinet fu realizzato il ponte di Zamora, sul rio Esla, in Spagna, di 210 metri di luce. Il progetto è del 1930, l'inizio dei lavori del 1934. Gli eventi della guerra civile costrinsero a sospendere i lavori, ripresi dopo il conflitto e terminati nel 1942. Il problema della centina fu questa volta risolto facendo ricorso alla tecnica di J. Melan (1853–1941), che utilizza come centina la stessa armatura dell'arco. Il sistema Melan, molto criticato per il suo costo in Europa, fu invece apprezzato con entusiasmo negli Stati Uniti, dove la Steel Corporation ravvisò in tale prassi un opportuno pied-à-terre nell'ambito dell'industria cementizia. Anche in Europa però esso trovò dei sostenitori, tra i quali il più geniale, G. Krall, riuscì a contenere i costi sfruttando le doti di riadattabilità dei betons giovani dovute appunto agli scorrimenti da fluage; sorsero così il nuovo ‘ponte di mezzo’, sull'Arno pisano, nobilissimo esempio di arco telaio, e l'arco di Safartak, a sezione cellulare alleggerita (Krall [1950], Krall [1967]). Quest'ultimo, sul Nilo azzurro in Etiopia, fu iniziato nel 1938; interrotto anch'esso, per gli eventi del secondo grande conflitto, trovò compimento nel 1948. La luce notevole, 120 metri, e la freccia di 35 metri, non impedì la realizzazione della centina in due tronchi verticali da congiungere per ribaltamento, secondo una tecnica già adottata dal Krall (Krall [1947], Krall [1948]) addirittura per l'arco finale (ponte Maria Cristina sul Calore).

Dopo il ponte di Plougastel il primato della luce passò nel 1934 al ponte di Tranenbergl in Svezia (luce 181 metri, freccia 26 metri), eseguito anch'esso con la consulenza del Freyssinet; e, dopo l'Esla, al ponte di Sandö sull' Ängermanälv in Svezia, costruito tra il 1918 ed il 1942 (luce 269 metri, freccia 40 metri). L'arco cellulare di Sandö detenne il primato per 20 anni. Su esso tuttavia gravò l'ombra del collasso della prima centina, che crollò il 31 agosto 1939 alle 16.40, sotto il peso di $1673 m^3$ di conglomerato della soletta inferiore, già gettata da alcune ore; quest'ultima non ebbe inconvenienti, ma diciotto persone persero la vita. La prima centina era analoga a quella di Plougastel; la seconda invece fu eseguita secondo metodi tradizionali, e risultò, come è naturale, estremamente più costosa.

Nel 1973 il ponte di Arrabida sul Douro a Porto, in Portogallo, con i suoi 270 metri di luce, supera di poco il Sandö; ma nel 1974 il ponte di Iguaçu sul rio Paraná (tra Brasile e Paraguay) raggiunge i 290 metri di luce; sempre nel 1974 il ponte di Gladesville sul Parramatta a Sidney, in Australia, attinge i 305 metri di luce; ed infine, nel 1980, si spiegano i 400 metri del ponte di Krk (Veglia) nel Quarnaro, sul braccio di mare tra il continente e l'isola di San Marco.

1.2. La costruzione per conci a sbalzo ancorati

La possibilità di attingere luci di tale entità è dovuta alla tecnica di getto per conci successivi ancorati (cable – anchored cantilever method). Questo procedimento, che si giova della precompressione locale per assicurare il concio di avanzamento, elimina completamente la centina; concettualmente è derivato dall'analoga tecnica di getto delle travate per conci successivi, che appunto sancì per parecchi anni, a causa della sua economicità, il prevalere della trave sull'arco, tanto da far prevedere a parecchi frettolosi maestri la morte di quest'ultimo.

Così operando, si sono realizzati nel 1980 il ponte Hokawazu in Giappone, su luce di 170 metri, (Inoue e Miyazaki [1980]), il ponte sul Krummbach in Svizzera, a servizio dell'autostrada del Sempione (Missbauer [1981]), nel 1981, su luce di 124 metri; il ponte Bloukrans in Sud Africa (Sirolli e Capitanio [1986]), nel 1986, su luce di 272 metri; il ponte della Val Crotta in Canton Ticino (Brenni e Dazio [1987]), nel 1987, su 90 metri di luce.

Naturalmente, il problema del raffronto economico tra arco e trave si pone sulle luci medie; in presenza di luci elevate il discorso si esaurisce nell'ambito dell'arco classico, e della tecnologia esecutiva, anch'essa condizionata dalle necessità di ammortamento degli impianti di cantiere. Particolare peso riveste la questione dei tempi di esecuzione. Ciò è valido in generale, attesi i più elevati livelli di rischio che si è costretti ad accettare in fase di realizzazione; ma lo è ancor più per gli archi realizzati con la tecnica dei conci a sbalzo, a causa delle deformazioni da fluage (Franciosi [1987]). Ad ogni modo, anche nel caso del ponte in Val Crotta, "si è optato per il ponte ad arco, in seguito a considerazioni economiche-costruttive nonché estetiche" (Brenni e Dazio [1987]).

Nel caso delle travi a conci precompressi sono chiamate in causa sia le deformazioni lente dell'acciaio che quelle del conglomerato; esse si riflettono soprattutto sugli spostamenti, sia in fase esecutiva — perchè sia rispettato l'appuntamento in chiave — che nel primo periodo di vita della struttura. Nel caso degli archi invece esercita un suo ruolo soltanto il fluage del conglomerato, e questo è di per sè più insidioso perchè protratto nel tempo; si pensi che nel già citato ponte di Sandö ancora a trent'anni dall'esecuzione erano rilevabili, con strumentazione corrente, fenomeni di tale tipo.

In un arco ove il getto sia effettuato in un sol tempo, valgono — se la viscosità è lineare, e se sono rispettate le ipotesi a base del principio di sovrapposizione degli effetti — i due teoremi fondamentali:

- a) le sollecitazioni interne indotte dalle forze applicate non variano per effetto del fluage; gli spostamenti invece si incrementano con la stessa legge che regola la $\epsilon(t)$ in funzione della σ e della data in cui questa è applicata;
- b) gli spostamenti indotti dalle distorsioni non variano per effetto del fluage; le sollecitazioni interne invece diminuiscono con la stessa legge che regola la $\sigma(t)$

in funzione della ϵ , e della data in cui questa è applicata

Nel suddetto arco quindi il fluage non ha influenza sui momenti dovuti all'accorciamento assiale da peso proprio; esso esalta solo gli spostamenti — del tutto trascurabili — connessi con tali momenti. Il fluage invece ha influenza, benefica, sui momenti derivanti dal ritiro, e da eventuali cedimenti delle fondazioni. Tutto sommato, quindi, in tale arco la viscosità non ha molto gioco.

Nell'arco eseguito invece a conci, il nucleo ereditario non è più lo stesso ad ogni ascissa; più precisamente, pur essendo il materiale lo stesso, il suo nucleo varia in relazione alle diverse date di getto. L'uniformità del nucleo è condizione necessaria per la validità dei due teoremi fondamentali, in particolare del primo; quindi è da prevedere una variazione delle sollecitazioni interne rispetto al quadro ottenibile in presenza delle sole deformazioni elastiche. Un ragionamento molto sommario può essere seguito considerando che la struttura si comporta come se, eseguendo il calcolo elastico classico, si assumesse un modulo elastico minore — e cioè una maggiore deformabilità — per i conci più giovani. La deformabilità quindi aumenta procedendo dalle imposte verso la chiave. Questa variazione si traduce in un innalzamento (vedi paragrafo seguente) della retta d'azione della caduta di spinta, e cioè in un aumento dei valori assoluti dei momenti negativi da peso proprio alle imposte (negativi), e in una diminuzione di quelli in chiave.

Naturalmente questo tipo di ragionamento è solo qualitativo; uno studio approfondito (Auciello et al. [1984]) però lo conferma, e mostra come la variazione, in un caso reale, sia del 5% se la realizzazione è eseguita in due mesi, e del 20% se essa è protratta a 6 mesi.

L'effetto non è trascurabile, se si pensa che i momenti da peso proprio sono dello stesso ordine di grandezza di quelli dovuti alle variazioni termiche ed ai carichi accidentali; anzi, in relazione a questi ultimi, possono addirittura essere notevolmente maggiori.

1.3. I metodi di Mörsch e di Culmann

Primo calcolo elastico di un arco può essere considerato quello effettuato da Alberto Castigliano sul ponte Mosca a Torino (Albenga [1953], Benvenuto [1981]). Il procedimento, nella sua essenza, è quello denominato comunemente *delle forze*, o *delle reazioni*, o ancora *della congruenza*: si riduce l'arco a struttura isostatica (mensola, arco a tre cerniere, trave curva con cerniera ed appoggio, per esempio) introducendo tre snodi semplici, e si calcolano le corrispondenti reazioni — esterne od interne — imponendo in essi le tre condizioni di congruenza.

E' caratteristico di tale procedimento che, essendo l'asse dell'arco funicolare del peso proprio, le equazioni di congruenza importino un calcolo spinto fino ad 8 - 10 cifre significative; infatti un qualsiasi effetto (spostamento o caratteristica della sol-

lecitazione interna) calcolato sulla struttura isostatica sotto la generica reazione X_i è molto più elevato di quello effettivo.

Ciò indusse Mörsch (Franciosi [1951]) a proporre il brillante procedimento che da lui prende nome, e che può applicarsi sia agli archi incastrati che a quelli a due cerniere.

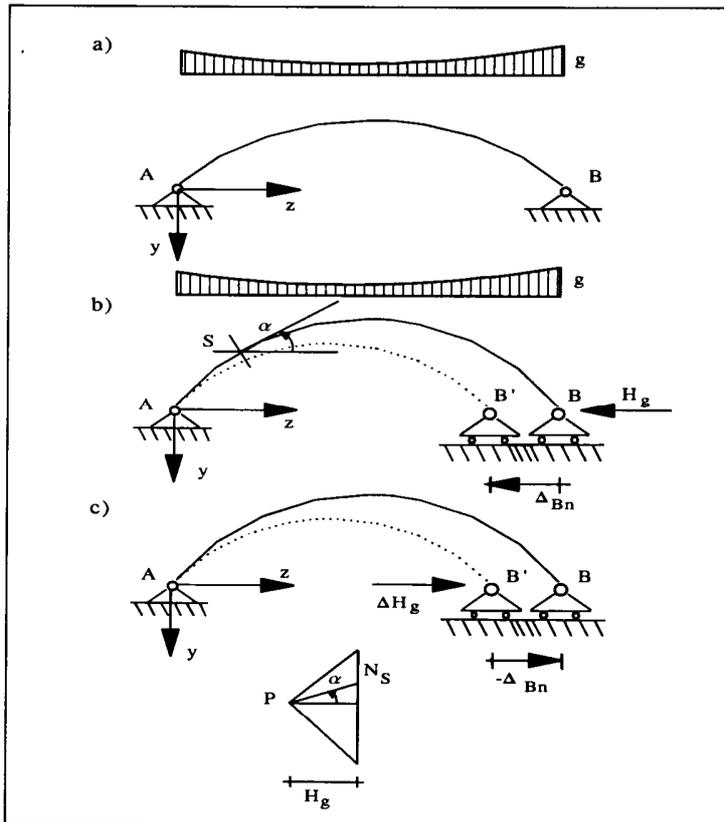


Figura 1.1- Il procedimento di Mörsch

Riferendosi a quest'ultimo, (Figura 1.1), il sistema isostatico equivalente sia quello in b), ove H_g è la base del poligono funicolare del peso proprio g condotto per i baricentri delle due sezioni di imposta e della sezione in chiave. Questo poligono coincide con l'asse dell'arco.

La reazione isostatica X è la componente orizzontale della reazione in B , e cioè la spinta H . Se si considera il solo effetto del momento flettente, l'energia di deformazione L_H è nulla se $H = H_g$, e qui è anche minima, perchè comunque $L_H \geq 0$ (Figura 1.2). Quindi, per il teorema di Menabrea, si ha $X = H_g$.

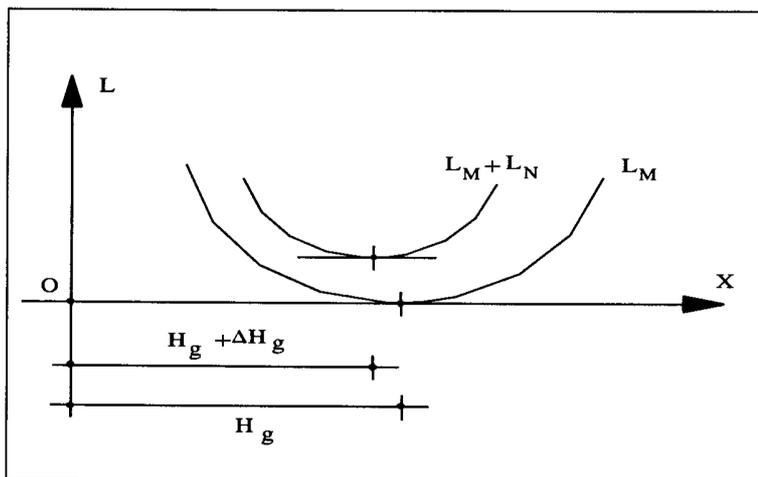


Figura 1.2- Il teorema di Menabrea

Poichè esiste il carico, la posizione $L = 0$ non è realistica; ed infatti per $X = H_g$ è pur vero che ovunque $M = 0$, ma esiste anche lo sforzo normale:

$$N = \frac{H_g}{\cos \alpha} \quad (1.1)$$

ove α è l'inclinazione dell'asse dell'arco sull'orizzontale. Quindi in corrispondenza di $X = H_g$ esiste un'energia L_N , e la somma $L_M + L_N$ non è minima. Lo è invece in $X = H_g - \Delta H_g$.

Per effetto degli sforzi (1.1), B si sposta in B' , ed è, per il principio dei lavori virtuali:

$$\Delta_{Bn} = \int_s N' \frac{N ds}{EA} = H_g \int_s \frac{ds}{EA} = H_g \int_0^l \frac{dz}{EA \cos \alpha} \quad (1.2)$$

La ΔH_g è il valore della forza orizzontale in B che riporta B' in B . Poichè alla $X = 1$ corrisponde uno spostamento:

$$\Delta'_B = \int_s M' \frac{M' ds}{EI} = \int_s \frac{q^2(z) ds}{EI} \quad (1.3)$$

ove $q(z)$ è la quota dell'asse sulla congiungente le imposte, l'equazione di congruenza:

$$\Delta_{Bn} + X\Delta'_B = 0 \quad (1.4)$$

porge:

$$X = -H_g \int \frac{a}{b} = \Delta H_g \quad (1.5)$$

dove:

$$a = \int_0^l \frac{dz}{EA \cos \alpha} \quad b = \int_0^l \frac{q^2 dz}{EI \cos \alpha} \quad (1.6)$$

Questo è il valore della *caduta di spinta da sforzo assiale*; ad essa si associano i momenti:

$$M = \Delta H_g q(z) \quad (1.7)$$

che risultano tutti positivi.

Se l'arco è incastrato (vedi pure il cap.4) il procedimento è analogo. Le incognite sono tre (Figura 1.3), ma si riducono a due per ragioni di simmetria; queste sono la caduta di spinta X_1 , e le coppie di imposta X_2 ed $X_3 = -X_2$. La X_3 e la $-X_1$ possono ridursi alla $-X_1$, e la X_2 e la X_1 alla X_1 , applicate su una retta orizzontale a distanza d_H dalla congiungente le imposte.

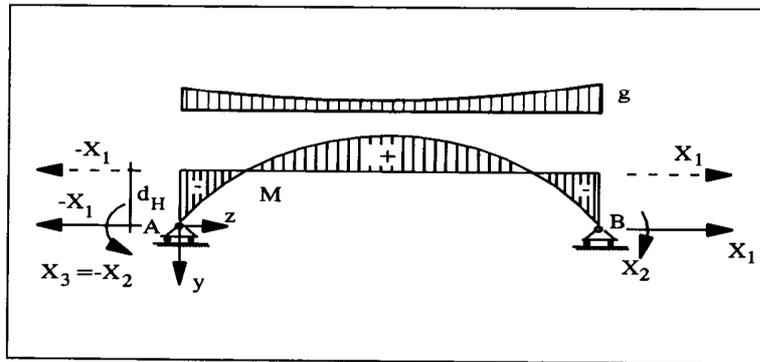


Figura 1.3- Il caso dell'arco incastrato

Le condizioni di congruenza sono le due seguenti:

$$\Delta_{11}X_1 + \Delta_{12}X_2 = -\Delta_{Bn} \quad (1.8)$$

$$\Delta_{21}X_1 + \Delta_{22}X_2 = 0 \quad (1.9)$$

ove:

$$\Delta_{11} = \int_s \frac{M'^2 dz}{EI \cos \alpha} \quad (1.10)$$

$$\Delta_{22} = \int_s \frac{M''^2 dz}{EI \cos \alpha} \quad (1.11)$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = \int_s \frac{M' M'' dz}{EI \cos \alpha} \quad (1.12)$$

Nelle relazioni precedenti, $M'(z)$ è il momento indotto da $X_1 = 1$, $M''(z)$ è il momento indotto da $X_2 = 1$:

$$M'(z) = q(z) \quad (1.13)$$

$$M''(z) = 1 \quad (1.14)$$

Quindi:

$$\Delta_{11} = \int_s \frac{q^2(z) dz}{EI \cos \alpha} \quad (1.15)$$

$$\Delta_{22} = \int_s \frac{dz}{EI \cos \alpha} \quad (1.16)$$

$$\Delta_{12} = \Delta_{21} = \int_s \frac{q(z) dz}{EI \cos \alpha} \quad (1.17)$$

In definitiva, è:

$$\Delta H_g = X_1 = -H_g \frac{a}{d} \quad (1.18)$$

$$M_B = X_2 = H_g \frac{b}{d} \quad (1.19)$$

con:

$$a = \int_s \frac{dz}{EA \cos \alpha} \int_s \frac{dz}{EI \cos \alpha} \quad (1.20)$$

$$b = \int_s \frac{dz}{EA \cos \alpha} \int_s \frac{qdz}{EI \cos \alpha} \quad (1.21)$$

$$d = \int_s \frac{q^2 dz}{EI \cos \alpha} \int_s \frac{dz}{EI \cos \alpha} - \left[\int_s \frac{qdz}{EI \cos \alpha} \right]^2. \quad (1.22)$$

Sarà allora:

$$d_H = -\frac{X_2}{X_1} = \frac{\int_s qdz}{EI \cos \alpha} \bigg/ \int_s \frac{dz}{EI \cos \alpha} \quad (1.23)$$

Il numeratore rappresenta il momento statico S_{AB} delle quantità $dW = ds/EI$ rispetto alla congiungente le imposte A e B ; il denominatore è la somma W di tali quantità. Quindi d_H è la distanza del baricentro delle quantità dW dalla retta AB .

Se ne trae che se i momenti di inerzia reali si moltiplicano per una funzione $\lambda(z)$ crescente dalla chiave all'imposta il baricentro sale, e viceversa. E' questa l'idea che ha ispirato Boussiron e Vallette nella progettazione del ponte di La Roche Guyon, sulla Senna (1934, luce di 161 metri); l'arco è incastrato, e la variazione inconsueta della sezione — tale da farlo apparire a due cerniere — vale a portare il suddetto baricentro più in basso, alleviando così i momenti alle imposte.

Quanto detto conferma anche quel che si è detto nel precedente paragrafo a proposito dell'effetto della variazione del nucleo ereditario lungo l'asse dell'arco.

Il metodo di Mörsch si adotta per il calcolo dei momenti da peso proprio, quando l'asse è funicolare di tale peso, come dovrebbe essere in ogni arco ben calcolato. Naturalmente, la presenza degli elaboratori di dati rende il metodo non più indispensabile, poichè l'effetto del peso proprio si calcola con precisione con l'ordinario programma, valido per qualsiasi tipo di carico. Resta però del metodo di Mörsch, oltre al fatto storico, il peso non trascurabile della visione intuitiva del fenomeno, e la possibilità di una verifica — quantitativa, o anche solo qualitativa — dei risultati.

Il metodo di Mörsch può essere usato anche per calcolare gli effetti di un cedimento vincolare orizzontale alle imposte, del ritiro, delle variazioni termiche. Se Δ_{BA}^* è il cedimento, ϵ_r la deformazione ultima da ritiro, Δt la variazione termica, i risultati precedenti restano inalterati, purchè al posto di Δ_{Bn} (cfr.1.2) si ponga, nei tre casi, Δ_{BA}^* , $-\epsilon_r l$ ed $\alpha l \Delta t$, rispettivamente, dove Δ_{BA}^* è lo spostamento relativo di B rispetto ad A , positivo quindi se tra le due imposte si verifica — come di norma — un allontanamento. La l è la luce; ϵ_r è negativo; α è il coefficiente di dilatazione termico, espresso in inversi di gradi, se Δt è espresso in gradi.

Si è detto che l'asse dell'arco è funicolare del peso proprio. Questo è il modo più razionale di progettare un arco, poichè si minimizzano i momenti permanenti;

l'intuizione suggerisce, anche al profano, che conviene centrare quanto più possibile il funicolare per livellare le tensioni sulla generica sezione. Non sempre però questa regola dettata dal comune buon senso fu rispettata. Il metodo di Tolkmitt consisteva infatti nel disegnare l'arco come funicolare del peso proprio e di metà del carico accidentale uniformemente distribuito; ciò alleviava i momenti dovuti al carico accidentale, ma aggravava i permanenti. Così pure Max Ritter proponeva di correggere l'asse con due forze fittizie per compensare in parte l'effetto delle cadute da sforzo assiale e da ritiro. Ma tutto ciò fa parte della storia — anche se gloriosa — degli archi da ponte.

Altro fondamentale metodo è quello dei *pesi elastici*, o della *ellisse di elasticità*, dovuto a K. Culmann. Esso, al contrario, di quello di Mörsch, è utile per il tracciamento delle linee di influenza, e quindi per il calcolo degli effetti più gravosi del carico accidentale. In sintesi, ci si rifà alle ds/EI già introdotte in questo paragrafo, e chiamate appunto pesi elastici dW . Considerando queste come masse concentrate nei baricentri dei concetti elementari ds , valgono — in relazione agli spostamenti relativi tra le due facce S_s ed S_d risultanti da un sezionamento in S , e soggette a due forze uguali e contrarie $\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}$, $\mathbf{F}_d = \mathbf{F}$ (Figura 1.4) — i seguenti quattro teoremi, condensati nella tabella seguente:

	\mathcal{M}	\mathbf{F}
$\Delta\phi_S$	$\mathcal{M} \times W$	$F \times S_f$
Δs_{Sa}	$\mathcal{M} \times S_a$	$F \times I_{af}$

La prima riga contiene i valori della rotazione relativa $\phi_{Sd} - \phi_{Ss}$. La seconda riga è relativa a due punti P' e P'' , giacenti su una retta orientata a , e collegati rigidamente ad S_s ed S_d . La quantità Δs_{Sa} è la proiezione normale sulla retta a dello spostamento relativo $\mathbf{s}_{P''} - \mathbf{s}_{P'}$:

$$\Delta s_{Sa} = s_{P''a} - s_{P'a} \quad (1.24)$$

La prima colonna è relativa al caso limite in cui le due forze si riducono a due coppie $\mathcal{M}_s = -\mathcal{M}$ ed $\mathcal{M}_d = \mathcal{M}$. La W è il peso elastico globale:

$$W = \sum dW \quad (1.25)$$

la S_a è il momento statico dei dW rispetto alla retta a .

La seconda colonna è il caso corrente di due forze qualsiasi $-\mathbf{F}$ ed \mathbf{F} ; S_f è il momento statico dei dW rispetto alla retta d'azione f delle forze, orientata come \mathbf{F}_d , I_{af} il momento centrifugo dei dW rispetto alle rette a ed f .

Ci si è trasferiti così nell'ambito della ben familiare geometria piana delle masse, e di essa possono utilizzarsi tutti i risultati. In particolare, se C è il centro della rotazione relativa tra S_s ed S_d dovuta alle due forze $-\mathbf{F}$ ed \mathbf{F} agenti secondo la retta f , è $\Delta s_{Sa} = 0$ per qualsiasi retta a passante per C , e quindi è pure $I_{af} = 0$ per

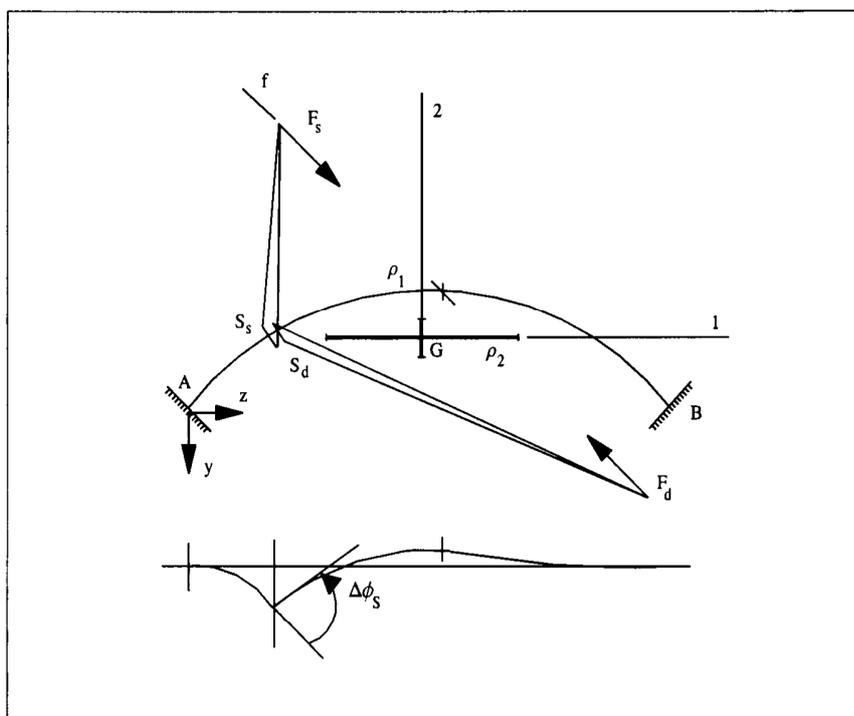


Figura 1.4- L'ellisse di Culmann

qualsiasi retta a passante per C . Se ne trae che il centro relativo della retta f rispetto alla distribuzione dW di masse coincide con C .

Se è costruita l'ellisse di inerzia delle masse dW , e cioè l'ellisse di elasticità, la retta f ed il centro C della rotazione relativa tra S_s ed S_d (quale che sia S) si corrispondono, rispetto a tale ellisse, come retta e antipolo, o come punto ed antipolare. Per questo l'ellisse di elasticità, o *ellisse di Culmann*, si chiama anche *ellisse degli spostamenti relativi*.

Il pregio della teoria è quello di poter risalire direttamente dallo spostamento relativo — più precisamente dal centro di esso — alle due forze uguali e contrarie che lo producono; e cioè di far conoscere direttamente lo stato tensionale e gli spostamenti indotti da una qualsiasi distorsione. Nella figura precedente, ad esempio, si desidera la linea di influenza del momento flettente in S ; il centro della rotazione relativa è il baricentro di S , e la retta d'azione f di $-\mathbf{F}$ ed \mathbf{F} è l'antipolare di tale baricentro rispetto all'ellisse di Culmann.

Nel metodo di Culmann si è sempre nell'ambito del procedimento delle reazioni; si

evita però la risoluzione del sistema di congruenza, e si instaura la relazione biunivoca tra il centro della distorsione e la retta d'azione del sistema distorcente.

Naturalmente, pure il metodo di Culmann è accantonato quando si possiede il programma generale dell'arco, che prevede in input anche le distorsioni. Ma resta di esso l'estrema estetica formale, e soprattutto la possibilità del controllo qualitativo delle uscite dall'elaboratore.

1.4. I metodi moderni

Nell'analisi statica dell'arco — effetto del peso proprio, del ritiro, dei cedimenti anelastici delle imposte, delle variazioni termiche, dei treni di carico accidentale — resta privilegiato il procedimento delle reazioni iperstatiche. Il procedimento degli spostamenti è anch'esso perseguibile, come caso particolare del procedimento agli elementi finiti (FEM); esso però richiede un numero di incognite tanto più elevato rispetto al primo, da far apparire come un non senso la sua scelta. Si può giustificare la sua scelta solo per il vantaggio di usare programmi già pronti, ed a cui ci si sia abituati; resta peraltro la necessità di adattare tali programmi al tracciamento delle linee di influenza.

Si consideri poi che scopo dell'analisi statica è la ricerca delle sollecitazioni interne, e secondariamente degli spostamenti; sembra quindi più razionale un procedimento che fornisca le sollecitazioni interne, traendo da queste gli spostamenti, e non viceversa. Va da sé che questo è vero se gli spostamenti possono essere *a priori* previsti rispettosi dell'ipotesi di piccolezza, perchè se tale certezza non c'è, e l'ipotesi di piccolezza deve quindi essere verificata, ciò non può farsi esaminando gli spostamenti ottenuti dall'analisi statica, che è legittimata proprio da questa ipotesi. In tal caso occorre procedere calcolando gli spostamenti con metodi che possano tener conto, almeno in parte, della variazione di geometria provocata dai carichi sulla struttura. Ciò accade molto di rado negli archi, ma, se accade, il procedimento delle reazioni deve essere sostituito da quello degli spostamenti, per esempio dal FEM. In genere anche quest'ultimo effettua l'analisi statica non tenendo conto della variazione di geometria, ma ciò può ottenersi, sia pure a costo di qualche complicazione.

Oltre l'analisi statica si deve affrontare però l'analisi dinamica, soprattutto in relazione alla possibilità di sismi di qualsiasi tipo. Ciò è stato fatto in passato, e anche in epoca abbastanza recente (Henrych [1981], Sakiyama [1986]), affrontando il problema a partire dalle equazioni differenziali di equilibrio nelle componenti $v(z)$ e $w(z)$ dello spostamento dei punti dell'asse. La soluzione però è sempre del tipo numerico, ottenuta discretizzando il sistema differenziale in sistema algebrico. Più moderna appare la discretizzazione sulla struttura, ed è appunto quanto si fa con FEM (o con il CM, come si vedrà). In tal caso al posto delle funzioni $v(z)$ e $w(z)$ appaiono i vettori \mathbf{v} e \mathbf{w} degli spostamenti di n nodi; si è così nel pieno del procedimento degli

spostamenti, nella più ampia accezione del termine.

Tale procedimento quindi è lo strumento di calcolo indispensabile nell'analisi dinamica. In genere, come si è già detto, tale analisi si effettua non tenendo conto delle variazioni di geometria; ma, come si farà constatare, ciò può indurre in forti errori sia nel calcolo dei periodi fondamentali che in quello delle forze sismiche equivalenti. Anche nell'analisi dinamica è perciò opportuno tenere conto delle variazioni di geometria. L'estensione in tal senso del FEM è quindi utile sia per l'analisi statica che per quella dinamica delle strutture sottili; essa si riduce, in ultima analisi, alla ricerca dei moltiplicatori critici del peso proprio, e delle rispettive deformate in situazione euleriana.

Ciò può farsi, come si è detto, utilizzando il FEM; altro metodo è quello del *procedimento per celle* (cells method, in sigla CM), che non si pone in alternativa al FEM, ma ad esso vantaggiosamente si affianca, altro non fosse per verificare con l'uno i risultati dell'altro.

Il FEM è più generale; esso nasce infatti per le strutture bi e tridimensionali, nel cui ambito vanta una indiscussa superiorità, e naturalmente può essere adoperato anche per le strutture monodimensionali, pur se in tal caso appare arma eccessivamente potente. Il CM invece è specifico delle strutture monodimensionali, ma in tale dominio presenta notevoli punti di vantaggio sul FEM (Raithel e Franciosi C. [1984,1985]).

Innanzitutto, il numero delle incognite è nettamente minore; dividendo l'arco in $n+2$ tronchi, il CM richiede n incognite, il FEM invece $3(n+3)$. E' pur vero che il FEM tiene conto anche delle deformazioni dovute a taglio e sforzo normale, ma nel caso in esame questo è un punto a suo sfavore, perchè esso non può liberarsi dall'obbligo di tale precisione, quando non se ne senta il bisogno; ed è proprio questo che accade negli archi, se non sono estremamente ribassati e tozzi. Di ciò si ha conferma numerica (Franciosi C. [1988]).

In secondo luogo, il CM calcola autovalori convergenti dal basso, mentre nel FEM essi convergono dall'alto. Si sa come sia conveniente calcolare gli autovalori per difetto, se essi rappresentano carichi critici, e come quasi tutti i procedimenti approssimati diano invece autovalori in eccesso. In tal senso CM e FEM si integrano, poichè forniscono un intervallo di definizione per ogni autovalore.

In terzo luogo, deve considerarsi che il CM schematizza la struttura in un insieme di barre rigide collegate da cerniere, dotate di resistenza elastica; questo è un classico sistema olonomo, ove la scelta delle coordinate lagrangiane può farsi in più modi. In esso la formulazione dei termini del primo e secondo ordine nelle coordinate lagrangiane può farsi con estrema aderenza ai dettami della meccanica analitica, facendoli dipendere dalla sola geometria del sistema. Invece nel FEM si è obbligati a scegliere come coordinate lagrangiane gli spostamenti v_i, w_i, ϕ_i di ogni nodo, ed il sistema olonomo che ne deriva è un insieme di m nodi, e cioè di m punti materiali, collegati da elementi elastici. In questo sistema, ove le forze agiscono solo sui nodi, i termini del secondo ordine non sono più da ricercare nel lavoro delle forze, come accade nei sistemi olonomi classici, ma nel lavoro interno agli elementi di collegamento, in maniera quindi del

tutto diversa da quanto si fa di norma in meccanica analitica. Infatti occorre considerare il lavoro che le σ dovute alle forze applicate compiono per effetto delle $\epsilon^{(2)}$, deformazioni del secondo ordine nelle derivate prime degli spostamenti che si generano negli elementi per effetto degli spostamenti dei nodi; ed il concetto di deformazione, come quello degli spostamenti in un elemento elastico, non ricentrano certamente nel bagaglio della meccanica analitica. E' quindi una forzatura considerare i termini in $\epsilon^{(2)}$ come termini del secondo ordine nelle coordinate lagrangiane; altrettanto forzata è perciò l'estensione a tali sistemi dei teoremi della meccanica analitica.

1.5. Il calcolo in fase plastica ed a rottura

Gli studi sulla fase ultraelastica rimontano a molto tempo addietro; almeno il concetto di adattamento plastico è del 1914 — data in cui il giovane ingegnere Gabor Kazinczy pubblicava in Budapest [Betonszemle] un suo studio sulla trave incastrata — e quello di cerniera plastica del 1940 (Van Den Broek [1940]). Tuttavia, i procedimenti di calcolo in fase plastica dell'arco possono essere considerati moderni; infatti appena nel 1952, nel corso della discussione su un lavoro di H.J. Greenberg e W. Prager [1952] appare il concetto di relazione limite tra momento flettente e sforzo normale (Franciosi V. [1952]), ed è del 1964 (Franciosi V. et al. [1964]) la prima coerente idea di un procedimento di calcolo dell'arco al collasso incrementale. La proposta di un metodo semplificato, basato su un'estensione del procedimento di J. Heyman, e reso operativo attraverso programma, è appena del 1983 (Franciosi V. [1983], Franciosi C. [1984,1985]), e così pure lo studio dell'effetto della cedibilità elastica, utile specialmente in presenza di archi bow-string.

Il moltiplicatore di crisi per *collasso statico* — e cioè il moltiplicatore di crisi di un insieme di forze F_i che crescono, a partire dai valori di esercizio, secondo un comune parametro moltiplicativo — sembra avere poco peso nelle strutture da ponte. Poichè infatti le condizioni di carico sono infinite, solo alcune di queste potrebbero essere prese in esame; non sarebbe possibile cioè — come si fa invece in campo elastico lineare utilizzando le linee di influenza — ottenere le reali condizioni di massimo pericolo.

Ma questa è la minore delle ragioni che sembrano privare di significato il collasso statico; il motivo maggiore è che nel calcolo di tale moltiplicatore le cedibilità elastiche dei vincoli e le distorsioni non giocano alcun ruolo, quale che sia il loro valore. La gravità di tale fatto è evidente, specie in relazione alle variazioni termiche, i cui effetti in campo elastico possono anche superare quelli del carico accidentale.

Infine si fa la considerazione — ed appare a prima vista determinante — che il *collasso incrementale* precede il collasso statico. Se ne trae la conclusione che il solo moltiplicatore di crisi che interessa è quello che si riferisce al collasso incrementale, poichè così operando si possono superare tutte le suddette perplessità.

Ciò è vero, ma occorre non perdere di vista la diversa natura dei due collassi;

mentre il primo implica la rovina istantanea, il secondo è una crisi di tipo progressivo, che è rivelata appunto da inequivoci fenomeni di eccessivi spostamenti, ed alla quale è possibile porre rimedio, altro non fosse salvando vite e beni che invece sono travolti nel collasso statico. Si capisce perciò che, se è vero che il collasso incrementale avviene sotto un moltiplicatore delle forze inferiore in genere a quello minimo da collasso statico, è anche vero che rispetto al secondo tipo di crisi si esige una sicurezza maggiore che non al primo. Quindi i due tipi di crisi vanno considerati sullo stesso piano di importanza.

1.6. Piano dell'opera

La trattazione è eseguita nello stesso ordine che si terrebbe nella progettazione di un arco da ponte. L'arco è considerato in modo completo: i carichi sono di tipo qualsiasi, verticali o orizzontali; le distorsioni chiamate in gioco sono del tipo di Volterra (rispettose cioè della pianeità delle sezioni), nei tre modi possibili, e le variazioni termiche ed il ritiro sono un loro caso particolare; le imposte non sono necessariamente a livello; le cedibilità elastiche delle imposte sono regolate da una matrice completa.

Nel capitolo 2 si tratta del calcolo delle quote dell'asse perchè quest'ultimo risulti funicolare del peso proprio.

Nel capitolo 3 è costruita la matrice delle cedibilità delle imposte, la relativa ellisse di elasticità alla Krall (Krall [1968]), e si esaminano i casi di particolarizzazione.

Il capitolo 4 contiene il calcolo delle caratteristiche della sollecitazione interna (N, M, T) e degli spostamenti ($v(z)$ e $w(z)$) sotto carichi fissi e distorsioni, eseguito con il procedimento delle reazioni iperstatiche. La struttura principale è l'arco a tre cerniere.

Nel capitolo 5 sono tracciate le linee di influenza delle sollecitazioni interne, ed i diagrammi dei loro valori massimi e minimi.

Nel capitolo 6 si tratta della stabilità di tipo euleriano, e si traggono i valori del moltiplicatore critico del peso proprio per archi incastrati, con una, due o tre cerniere, rampanti o meno, con qualsiasi legge di variazione delle inerzie, e con eventuale cedibilità angolare elastica delle imposte.

Nel capitolo 7 è invece effettuata l'analisi modale dinamica, considerando l'effetto de-irrigidente dello sforzo assiale da peso proprio, e si calcolano gli effetti di forze o scuotimenti alterni.

Il metodo adottato nei capitoli 6 ed 7 è quello delle celle, nella maniera già proposta in più sedi, e con riferimento anche ad altri tipi strutturali.

Nel capitolo 8 si tratta del collasso statico e del collasso incrementale.

Per ogni argomento è stato fornito il listing del programma in BASIC, ed alcuni esempi. Riferimento costante si è fatto ad un arco ideale di 400 metri di luce, che di fatto utilizza, per quanto possibile, i dati del ponte di Krk, così come deducibili dalle

24 *Le strutture ad arco*

riviste (Stojadinovic e Stanko [1981], Stojadinovic [1982], Stanko [1982]).

Non è stato trattato il problema della viscosità, per il quale si rimanda a (Franciosi V. [1987]).