

L' ELLISSE D' ELASTICITÀ

74 — Generalità.

Consideriamo un sistema elastico cementato da forze applicate tutte in corrispondenza di un suo elemento superficiale S (fig. 153). Sia questo tanto piccolo da poterne trascurare senza errore apprezzabile le deformazioni a confronto degli spostamenti; potremo allora riguardarlo come rigido, sicchè le deformazioni del sistema dipendano esclusivamente dalla risultante R delle forze applicate e non dalla legge con cui queste sono distribuite sull'elemento. Ammettiamo inoltre che il lavoro di deformazione del sistema non possa annullarsi, se non quando sia nulla detta risultante.

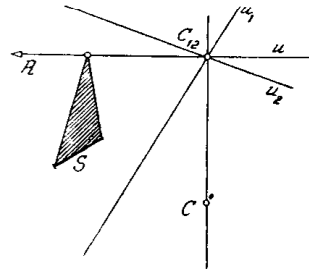


Fig. 153

Ciò premesso, lo spostamento di S è completamente definito dalla retta d'azione u e dal modulo R della risultante; se in particolare trattasi d'un sistema piano, esso si può riguardare come un moto rigido nel piano del sistema e si riduce perciò ad una rotazione intorno ad un punto C appartenente al piano stesso. Ci limitiamo qui a studiare questo caso particolare, che presenta notevole interesse per le applicazioni tecniche.

Fra le rette ed i punti del piano, le prime pensate come linee d'azione delle risultanti R di forze applicate all'elemento superficiale S considerato, i secondi riguardati come i relativi centri di rotazione C dell'elemento stesso, sussiste una corrispondenza avente le seguenti proprietà:

1°) un punto C non può appartenere alla retta u cui corrisponde. Infatti, se C fosse su u , per il teorema di Clapeyron, sarebbe nullo il lavoro di

deformazione, qualunque fosse l'intensità della R ; mentre, per l'ipotesi fatta, detto lavoro non può annullarsi se la R è diversa da zero;

2°) ad una data retta u corrisponde uno ed un sol punto C , perchè, per il teorema di Kirchoff, la soluzione dell'equilibrio elastico corrispondente ad una data azione R è unica. Variando poi il modulo della R , per il principio di sovrapposizione degli effetti, varia, con legge proporzionale, l'ampiezza della rotazione, ma non il centro intorno al quale essa avviene;

3°) ad un dato punto C corrisponde una ed una sola retta u . Infatti se C corrispondesse contemporaneamente ad u_1 e u_2 , corrisponderebbe anche a qualunque retta u passante per il loro punto di concorso C_{12} , che può sempre riguardarsi come linea d'azione della risultante R di opportune forze agenti secondo u_1 ed u_2 ; in particolare corrisponderebbe alla $C_{12} C$, ciò che è impossibile, perchè si è visto che retta e centro corrispondenti non possono appartenersi;

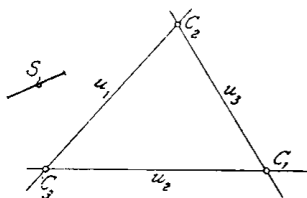


Fig. 154

4°) se il punto C_1 corrispondente alla retta u_1 appartiene ad un'altra retta, il punto C_2 corrispondente a quest'ultima appartiene ad u_1 (fig. 154). Essendo nullo il lavoro della R_2 per lo spostamento dovuto alla R_1 , per il primo principio di reciprocità deve anche annullarsi il lavoro della R_1 per lo spostamento dovuto alla R_2 ; ma quest'ultimo non può essere nullo per un valore arbitrario della R_2 , perchè altrimenti, contrariamente all'ipotesi fatta, si annullerebbe il corrispondente lavoro di deformazione; dunque il centro C_2 di rotazione di S si deve trovare su u_1 . Ne consegue che al fascio di rette di centro C_1 corrisponde, come punteggiata di centri, la retta u_1 .

La corrispondenza definita gode, riassumendo, delle seguenti proprietà:

è biunivoca,

è priva di elementi uniti,

ad elementi che si appartengono corrispondono elementi che pure si appartengono.

Possiamo dunque affermare che essa è una polarità piana uniforme.

* * *

Riferiamo ora il sistema ad una coppia di assi $O (z, y)$, che supporremo rigidamente collegati con l'elemento S , e siano (fig. 155):

$$(476) \quad X_1, \quad X_2, \quad X_3 = qX_1 = -pX_2$$

i parametri di una forza R agente su S ,

$$(477) \quad \eta_1 = -\varphi z_c \quad , \quad \eta_2 = \varphi y_c \quad , \quad \eta_3 = \varphi \quad ,$$

quelli della corrispondente rotazione φ intorno al centro C .

Per il principio di sovrapposizione degli effetti sussistono le forme lineari:

$$(478) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 + \eta_{13} X_3 \quad , \\ \eta_2 = \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 + \eta_{23} X_3 \quad , \\ \eta_3 = \eta_{31} X_1 + \eta_{32} X_2 + \eta_{33} X_3 \quad , \end{array} \right.$$

ove i coefficienti dei parametri della R , spostamenti del tipo stesso degli η_{ik} che figurano nelle equazioni di Müller-Breslau, hanno, per il teorema di Maxwell, determinante simmetrico. Le (478) esprimono dunque la correlazione involutoria già rilevata.

Se sono nulle le componenti finite X_1 e X_2 della R , la u coincide con la retta all'infinito del piano cioè sull'elemento S agisce esclusivamente una coppia di momento X_3 , e le (478) divengono:

$$(479) \quad \eta_1 = \eta_{13} X_3 \quad , \quad \eta_2 = \eta_{23} X_3 \quad , \quad \eta_3 = \eta_{33} X_3 \quad ;$$

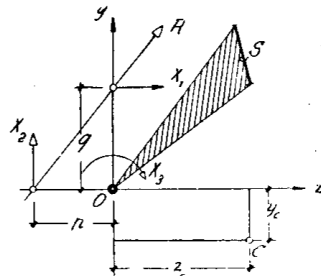


Fig. 155

il corrispondente centro di rotazione, che è il centro della polarità, prende il nome di *centro dell'elemento S* e, per le (477) ha le coordinate:

$$(480) \quad z_o = -\frac{\eta_1}{\varphi} = -\frac{\eta_{13}}{\eta_{33}} \quad , \quad y_o = \frac{\eta_2}{\varphi} = \frac{\eta_{23}}{\eta_{33}} \quad .$$

L'ampiezza della rotazione:

$$(481) \quad w = \eta_3 = 1 \eta_{33} \quad ,$$

corrispondente all'azione di una coppia X_3 di momento unitario, dicesi *peso elastico*.

Se come origine delle coordinate si assume il centro elastico, le (478) prendono la forma più semplice:

$$(482) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta_1 = \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 \quad , \\ \eta_2 = \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 \quad , \\ \eta_3 = w X_3 \quad ; \end{array} \right.$$

infatti per $X_1=1$ l'elemento S ruota intorno all'origine O e perciò sono

nulli i coefficienti $\eta_{13} = \eta_{31}$ ed $\eta_{23} = \eta_{32}$. Vediamo così che *il momento X_3 non influisce sull'entità degli spostamenti finiti, nè le componenti finite della R influiscono sulla rotazione*. Si rileva inoltre che *una forza passante per il centro elastico ($X_3=0$) provoca una pura traslazione di S (alla retta sostegno u della forza agente corrisponde un punto improprio)*.

Se oltre ad assumere come origine delle coordinate il centro elastico, assumiamo come assi y e z gli assi della polarità, notoriamente ortogonali, si annulla ancora il coefficiente $\eta_{12} = \eta_{21}$ e le (478) prendono la *forma canonica*:

$$(483) \quad \eta_1 = \eta_{11} X_1, \quad \eta_2 = \eta_{22} X_2, \quad \eta_3 = w X_3;$$

in questo caso dunque *ciascun parametro della R influisce esclusivamente sulla corrispondente componente dello spostamento*.

Le prime due delle (483), sostituendovi a X_1 e X_2 in funzione di X_3 secondo la terza delle (476), e tenendo presenti le espressioni η_1 ed η_2 date dalle (477), divengono:

$$-\varphi z_c = \eta_{11} \frac{X_3}{q}, \quad \varphi y_c = -\eta_{22} \frac{X_3}{p},$$

e per la terza delle (483), ricordando che è $\varphi = \eta_3$, ancora:

$$-\frac{\eta_{11}}{w} = z_c q, \quad -\frac{\eta_{22}}{w} = y_c p.$$

Ciò prova che le costanti:

$$(484) \quad \rho_z^2 = \frac{\eta_{11}}{w}, \quad \rho_y^2 = \frac{\eta_{22}}{w},$$

sono *i moduli delle involuzioni che la polarità subordina sui suoi assi centrali*; su ciascun di questi sono coppie di punti coniugati l'intersezione della u e la proiezione ortogonale del corrispondente centro C .

L'equazione della *conica fondamentale della polarità*:

$$\eta_{11} z^2 + \eta_{22} y^2 + \frac{\eta_{11} \eta_{22}}{w} = 0,$$

essendo notoriamente positivi gli spostamenti del tipo η_{ii} che vi figurano come coefficienti, non può essere soddisfatta per valori reali diversi da zero delle coordinate; detta conica è perciò immaginaria. La *conica centrale*, avente l'altra equazione:

$$(485) \quad \eta_{11} z^2 + \eta_{22} y^2 - \frac{\eta_{11} \eta_{22}}{w} = 0,$$

che, con riguardo alle (484), può anche scriversi:

$$(485') \quad \frac{z^2}{\rho_y^2} + \frac{y^2}{\rho_x^2} = 1,$$

è invece reale e si riconosce per un'ellisse, cui si dà il nome di *ellisse d'elasticità* o *ellisse degli spostamenti elastici* dell'elemento superficiale S del sistema dato.

La (485') coincide con l'ellisse centrale d'inerzia di una massa distribuita, di grandezza uguale al peso elastico w , avente il centro elastico come baricentro e, rispetto agli assi della polarità, i momenti principali centrali d'inerzia:

$$(486) \quad \eta_{11} = J_x = \rho_x^2 w \quad , \quad \eta_{22} = J_y = \rho_y^2 w \quad .$$

L'ellisse d'elasticità si può anche riguardare come conica fondamentale della polarità non uniforme che si ottiene moltiplicando la primitiva polarità uniforme per una simmetria. In questa nuova correlazione, alla retta u corrisponde come polo il punto O' , simmetrico di C rispetto al centro elastico, mentre lo stesso C le corrisponde come *antipolo* (fig. 156); reciprocamente, al punto C corrisponde come polare la u' , simmetrica di u rispetto ad O , mentre la stessa u gli corrisponde come *antipolare*.

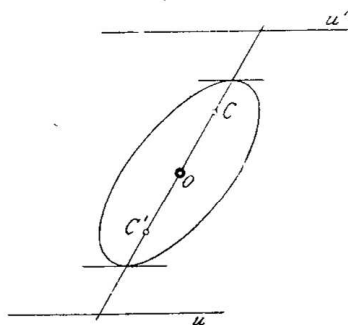


Fig. 156

75 — Teoremi di Culmann.

Sappiamo già dalla terza delle (483) che agendo sull'elemento superficiale esclusivamente una coppia di momento $X_3 = m$, l'elemento stesso ruota intorno al centro elastico O e che la rotazione vale:

$$(487) \quad \eta_3 = wX_3 = \varphi = mw \quad .$$

Se invece agisce una forza finita R , potremo ridurla al centro elastico O e valutare lo spostamento di S sovrapponendo gli effetti (fig. 157):

del momento di trasporto $m = Rd_u$, il quale produce una rotazione intorno ad O ,

della forza per il centro O , equipollente alla R , la quale produce una pura traslazione ortogonalmente alla direzione coniugata ad u nell'ellisse d'elasticità (centro di rotazione nel punto improprio corrispondente alla u per il centro O). A parità di momento $m = Rd_u$ l'elemento superficiale S subisce dunque una rotazione la cui ampiezza è, per la (487):

$$(488) \quad \varphi = R w d_u \quad ;$$

ma il cui centro è ora l'antipolo della u rispetto all'ellisse d'elasticità.

Per effetto di questa rotazione un punto qualunque A , rigidamente

collegato all'elemento S , si sposta sulla normale al raggio AC che lo unisce al centro di rotazione, nella misura $\overline{AA'} = \overline{AC}\varphi$, sicchè la componente di tale spostamento secondo una certa direzione v , formante l'angolo α con AA' , vale:

$$\eta_v = \overline{AC}\varphi \cos \alpha = \varphi d'_v ,$$

e per la (488), anche:

$$(489) \quad \eta_v = R w d_u d'_v .$$

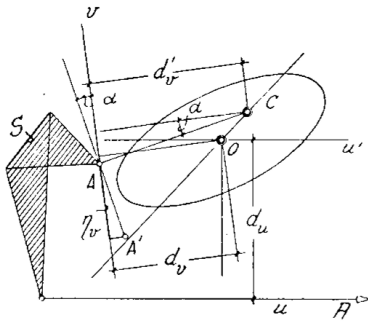


Fig. 157

Le (488) e (489), ove si ricordi quanto abbiamo osservato a proposito della distribuzione del peso elastico w , esprimono i seguenti due teoremi fondamentali, dovuti al Culmann:

la rotazione dell'elemento S dovuta ad una forza R agente su S è uguale al prodotto della forza per il momento statico del peso elastico w rispetto alla linea d'azione della forza;

lo spostamento di un punto qualsiasi A , solidale con S , dovuto ad una forza R agente su S e valutato secondo una data direzione v , è uguale al prodotto della forza per il momento centrifugo del peso elastico rispetto alla linea d'azione della forza ed alla retta secondo cui si valuta lo spostamento.

Il segno della rotazione è quello stesso del momento Rd_u ; il senso dello spostamento resta determinato da quello della rotazione: assunto il verso positivo su v , lo spostamento è positivo se il verso del momento Rd_u concorda con quello del momento d'una forza spirante nel senso positivo su v , rispetto al centro di rotazione C .

Se in luogo di una forza finita, agisce su S una coppia di momento m , la (489) diviene:

$$(489') \quad \eta_v = m w d_v = m S_v ,$$

ossia: *lo spostamento è uguale al prodotto del momento della coppia per il momento statico del peso elastico rispetto alla retta secondo cui si valuta lo spostamento.*

Se la retta u è baricentrica, il prodotto d'inerzia:

$$(490) \quad J_{uv} = w d_u d'_v ,$$

che figura nella (498), è indeterminato essendo $d_u = 0$, $d'_v = x$; ricordando allora che è (fig. 158):

$$(491) \quad J_{uv} = J_{vu} = w d_v d'_u ,$$

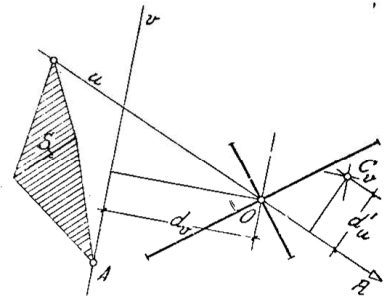


Fig. 158

valuteremo il momento centrifugo, cui è proporzionale lo spostamento, prendendo prima il momento statico del peso elastico rispetto alla retta secondo cui si vuol valutare lo spostamento e quindi il momento di second'ordine rispetto alla linea d'azione della forza. Se poi entrambe le rette u e v sono baricentriche, si ricade nel caso precedente, perchè, detta v' una qualunque parallela alla baricentrica v , è notoriamente $J_{uv} = J_{uv'}$.

Infine se la retta secondo cui si valuta lo spostamento coincide con la linea d'azione della forza, il momento centrifugo coincide col momento d'inerzia J_u .

76 — Determinazione dell'ellisse d'elasticità.

Nelle (488) e (489), esprimenti le rotazioni e gli spostamenti, figurano soltanto il peso elastico ed i suoi momenti statici di primo e di second'ordine. Non interessa quindi conoscere la legge con cui il peso elastico è effettivamente distribuito sul sistema; alla distribuzione effettiva se ne può sostituire una qualunque *quadraticamente equivalente*, tale cioè che conservi inalterati il peso, il centro elastico e l'ellisse d'elasticità, riguardabile come ellisse centrale d'inerzia dei pesi elastici elementari.

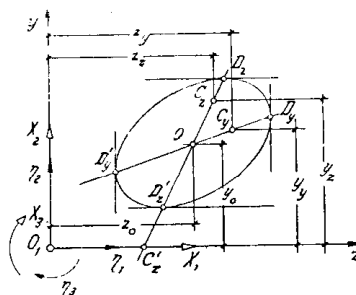


Fig. 159

Applichiamo ora i teoremi di Culmann alla determinazione degli spostamenti η_1 , η_2 ed η_3 delle (478); con riferimento alla fig. 159 e tenuta presente l'osservazione fatta a proposito dei segni, avremo:

$$(492) \quad \begin{cases} \eta_1 = X_1 J_z - X_2 J_{zy} - X_3 S_z, \\ \eta_2 = -X_1 J_{yz} + X_2 J_y + X_3 S_y, \\ \eta_3 = -X_1 S_z + X_2 S_y + X_3 W. \end{cases}$$

Gli elementi del determinante dei coefficienti η_{ik} del sistema ricordato restano così determinati in valore e segno:

$$(493) \quad \begin{cases} \eta_{11} = J_z & , & \eta_{12} = -J_{zy} & , & \eta_{13} = -S_z & , \\ \eta_{22} = J_y & , & \eta_{23} = S_y & , & \eta_{33} = W & . \end{cases}$$

Le coordinate del centro elastico sono: *

$$(494) \quad z_0 = \frac{S_y}{W} \quad , \quad y_0 = \frac{S_z}{W}$$

e quelle degli antipoli C_z e C_y degli assi z e y di riferimento, rispettivamente:

$$(495) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_x = \frac{J_{xy}}{S_x} \quad , \quad y_x = \frac{J_x}{S_x} \quad , \\ z_y = \frac{J_y}{S_y} \quad , \quad y_y = \frac{J_{xy}}{S_y} \quad . \end{array} \right.$$

L'asse C_zO è coniugato all'asse z ed i punti C_z, C'_z , si corrispondono nell'involuzione che la polarità subordina su di esso; è possibile così determinare il diametro dell'ellisse $D_zD'_z$ coniugato all'asse z . In modo analogo resta determinato il diametro $D_yD'_y$ coniugato all'asse y . Notoriamente poi le tangenti all'ellisse parallele agli assi hanno come punti di tangenza le due coppie di punti $D_zD'_z, D_yD'_y$.

Per procedere alla determinazione dell'ellisse d'elasticità relativa ad un dato elemento superficiale S di un sistema piano, conviene supporre l'elemento stesso cimentato dapprima esclusivamente da una coppia $X_3=1$; avremo allora dalle (492):

$$(496) \quad \eta_1 = \eta_{13} = -S_z \quad , \quad \eta_2 = \eta_{23} = S_y \quad , \quad \eta_3 = \eta_{33} = w \quad ;$$

si determinano così il peso elastico w e, per le (494), anche le coordinate z_o ed y_o del centro elastico. Supposto poi agire sull'elemento una forza $X_1=1$, ancora dalle (492) si ottiene:

$$(496') \quad \eta_1 = \eta_{11} = J_z \quad , \quad \eta_2 = \eta_{21} = -J_{zy} \quad , \quad \eta_3 = \eta_{31} = -S_z \quad ,$$

e similmente, per una forza $X_2=1$:

$$(496'') \quad \eta_1 = \eta_{12} = -J_{zy} \quad , \quad \eta_2 = \eta_{22} = J_y \quad , \quad \eta_3 = \eta_{32} = S_y \quad .$$

Mediante le (495) potranno allora determinarsi gli antipoli C_z e C_y degli assi. Conoscendosi così una coppia di diametri coniugati, l'ellisse resta individuata.

77 — Ellisse degli spostamenti terminali.

Un caso particolare di notevole interesse è quello in cui il sistema si riduca ad una trave piana, che in generale riguarderemo incastrata rigidamente ad un estremo e del resto libera. In questo caso l'ellisse d'elasticità relativa ad un elemento superficiale coincidente con l'estremo libero A determina gli spostamenti assoluti di questo, ovvero soltanto gli spostamenti di esso relativamente all'altro estremo, se la trave è vincolata in modo diverso da quello supposto (fig. 160). L'ellisse relativa a questo

particolare elemento superficiale, estremo del sistema, dicesi *ellisse degli spostamenti elastici terminali* o, più brevemente, *ellisse terminale d'elasticità*.

Supponiamo applicata all'elemento terminale una coppia $X_3=1$ e determiniamo, col metodo generale dei lavori virtuali — applicando cioè la (382) — gli spostamenti η_{is} ; osservando che è $N_s=T_s=0$, avremo genericamente:

$$\eta_{is} = \int_s \frac{M_i M_s}{EJ} ds$$

ed essendo:

$$M_1 = -y, \quad M_2 = z, \quad M_3 = 1,$$

singularmente per i tre spostamenti:

$$\eta_{1s} = - \int_s y \frac{ds}{EJ}, \quad \eta_{2s} = \int_s z \frac{ds}{EJ}, \quad \eta_{3s} = \int_s \frac{ds}{EJ}.$$

Ma per le (496) questi spostamenti valgono ordinatamente i momenti statici — S_z ed S_y del peso elastico rispetto agli assi z ed y e lo stesso peso elastico w ; possiamo dunque concludere che:

il peso elastico d'una trave è distribuito con continuità sull'asse, ed è uguale alla somma dei pesi elastici $dw=ds/EJ$ dei suoi elementi ds :

$$(497) \quad w = \int_s \frac{ds}{EJ} = \int_s dw;$$

il centro elastico, di coordinate:

$$(498) \quad z_o = \frac{\int_s z dw}{w}, \quad y_o = \frac{\int_s y dw}{w},$$

coincide col baricentro dell'asse affetto dalla distribuzione di peso elastico w .

Si potrebbe ora completare la determinazione dell'ellisse applicando il metodo generale del numero precedente; ma per i sistemi piani come quello di cui si tratta, scomponibili in tronchi approssimativamente prismatici, torna più comodo determinare le ellissi dei singoli tronchi e poi comporle trattandole come ellissi d'inerzia parziali di una distribuzione piana di masse. Il procedimento, che prende il nome di *composizione in serie delle ellissi*, è giustificato trattandosi d'un sistema a connessione semplice o, come suol dirsi *in serie*, per cui gli spostamenti di A relativamente a B possono riguardarsi come somma di quelli che si otterrebbero per l'elasticità dei singoli tronchi, supposto ogni volta indeformabile il complesso dei tronchi rimanenti.

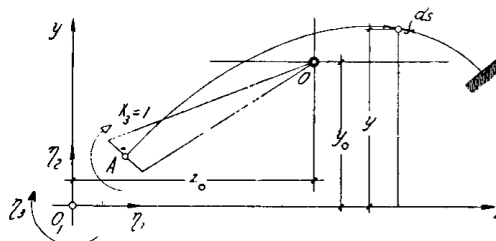


Fig. 160.

78 — Ellisse terminale di un tronco prismatico.

La teoria dell'ellisse d'elasticità, date le promesse fatte al n° 74, non sarebbe a rigore applicabile all'elemento terminale d'un tronco prismatico molto corto, perchè le deformazioni dell'elemento stesso non sono più trascurabili rispetto ai suoi spostamenti, e quindi non è privo d'influenza il modo con cui sono distribuite le forze su di esso. L'estensione della teoria a questi prismi cortissimi è però sostanzialmente la stessa

fatta al n° 25 per poter applicare i risultati del problema di Saint-Venant alle travi; l'accetteremo di conseguenza sotto le stesse condizioni e per gli stessi motivi allora dichiarati.

Sia dunque l la lunghezza di un tronco prismatico che rigarderemo rigidamente incastrato ad un solo estremo e siano rispettivamente EA ed EJ le sue rigidità a forza normale ed a flessione, entrambe costanti (fig. 161).

Il peso elastico, per la (497), sarà:

$$(499) \quad w = \int_0^l \frac{dz}{EJ} = \frac{l}{EJ}$$

e siccome è distribuito uniformemente sull'asse, il baricentro elastico coincide col punto medio O di questo. D'altronde, applicando alla sezione terminale una coppia $X_3=1$ (fig. 175 a), la sezione stessa

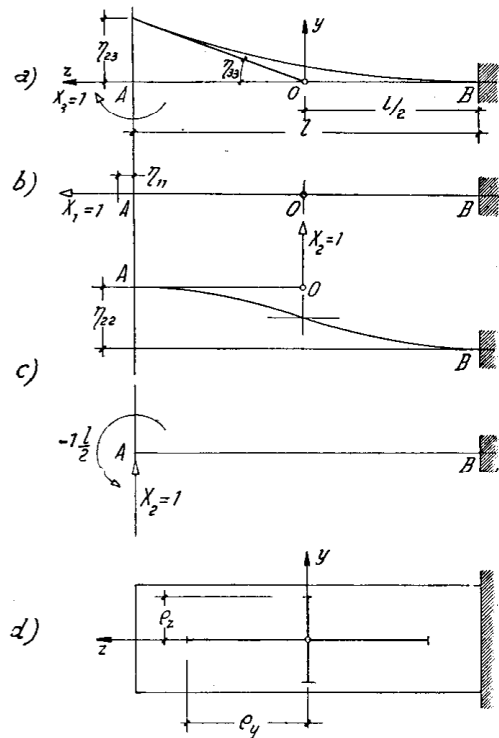


Fig. 161

subisce la rotazione $\gamma_{33} = l/EJ = w$ e gli spostamenti $\gamma_{13} = 0$, $\gamma_{23} = l_2/2EJ = wl/2$, sicchè il centro di rotazione deve trovarsi sull'asse primitivo, alla distanza $\gamma_{23}/\gamma_{33} = l/2$ dalla sezione terminale.

Scegliamo ora come assi di riferimento l'asse del prisma e la normale ad esso per il baricentro elastico, coi quali, per ragioni di simmetria, è prevedibile coincideranno gli assi dell'ellisse d'elasticità; applichiamo successivamente le forze $X_1=1$ ed $X_2=1$ e per ciascuna di esse calcoliamo le due componenti di spostamento, la rotazione dovendo essere nulla in entrambi i casi, trattandosi di forze baricentriche. Dato il legame rigido che si suppone esistere tra il baricentro elastico e l'elemento terminale, potremo ridurre ciascuna forza al centro di quest'ultimo.

La riduzione della prima forza implica il semplice spostamento di

essa sulla sua retta d'azione; agendo in A , essa produce spostamenti secondo l'asse z di questo punto e del centro O , entrambi uguali alla variazione di lunghezza del prisma (fig. 161 *a*):

$$\eta_{11} = \frac{l}{EA};$$

lo spostamento η_{21} , secondo l'asse y , è nullo.

La riduzione della seconda forza traduce nel punto A la stessa $X_2=1$ ed il momento di trasporto $-1l/2$, sicchè lo spostamento di A secondo l'asse z è nullo e quello secondo l'asse y è uguale alla freccia della mensola AB caricata nel modo sopra descritto (fig. 161 *c*). Siccome poi la rotazione dell'elemento terminale è nulla, il braccio rigido AO segue lo spostamento di A con una pura traslazione, per modo che anche il baricentro elastico O subisce lo stesso spostamento. Possiamo ora calcolarlo osservando che esso consta dei contributi di freccia dovuti singolarmente:

alla flessione relativa alla forza $X_2=1$:

$$\eta'_{22} = 1 \frac{l}{3EJ};$$

alla flessione relativa al momento $-1l/2$:

$$\eta''_{22} = -1 \frac{l}{2} \frac{l}{2EJ};$$

al taglio $X_2=1$:

$$\eta'''_{22} = 1\chi \frac{l}{GA}.$$

Lo spostamento cercato vale dunque:

$$\eta_{122} = \eta'_{22} + \eta''_{22} + \eta'''_{22} = \frac{l^3}{3EJ} - \frac{l^3}{4EJ} + \chi \frac{l}{GA} = \frac{1}{12} \frac{l^3}{EJ} + \chi \frac{l}{GA},$$

in quanto è nulla la componente η_2 , in accordo d'altronde col primo principio di reciprocità.

Il fatto che lo spostamento dovuto a ciascuna delle due forze X_1 e X_2 abbia componente nulla secondo la direzione dell'altra forza, conferma che gli assi di riferimento scelti coincidono cogli assi dell'ellisse d'elasticità.

Per determinare ora i semiassi dell'ellisse applichiamo le (493); avremo:

$$\eta_{11} = \frac{l}{EA} = J_x = w \rho_x^2,$$

$$\eta_{122} = \frac{1}{12} \frac{l^3}{EJ} + \chi \frac{l}{GA} = J_y = w \rho_y^2,$$

dalle quali, con riguardo alla (499), si trae (fig. 161 a):

$$(500) \quad \rho_x = \sqrt{\frac{J}{A}} = \rho \quad , \quad \rho_y = \sqrt{\frac{l^2}{12} + \lambda \frac{E}{G} \rho^2} .$$

Il semiasse ortogonale all'asse del prisma è uguale al raggio d'inerzia ρ della sezione retta rispetto all'asse normale al piano del sistema; l'altro, disteso sull'asse, riceve un contributo dal taglio, trascurando il quale diviene:

$$(501) \quad \rho_y = l \sqrt{\frac{1}{12}} ,$$

ed allora coincide col semiasse dell'ellisse d'inerzia d'un rettangolo disteso sopra una mediana avente la stessa lunghezza del tronco.

79 — Il metodo analitico rigoroso.

Supponiamo ora che la lunghezza l del prisma precedentemente considerato divenga infinitesima (fig. 162). Avremo per l'elemento di lunghezza ds :

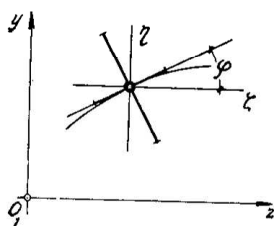


Fig. 162

il peso elastico:

$$dw = \frac{ds}{EJ} ,$$

i semiasse dell'ellisse d'elasticità:

$$\rho_t = \rho \quad , \quad \rho_n = \rho \sqrt{\lambda \frac{E}{G}} = c ;$$

i momenti principali d'inerzia:

$$dJ_t = \rho^2 dw \quad , \quad dJ_n = c^2 dw ;$$

i momenti di second'ordine rispetto agli assi baricentrici ζ e η , rispettivamente paralleli a quelli z ed y di riferimento del sistema:

$$\begin{aligned} dJ_\zeta &= dJ_t \cos^2 \varphi + dJ_n \sin^2 \varphi = (\rho^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi) dw , \\ dJ_\eta &= dJ_t \sin^2 \varphi + dJ_n \cos^2 \varphi = (\rho^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi) dw , \\ dJ_{\zeta\eta} &= (dJ_\eta - dJ_t) \sin \varphi \cos \varphi = (c^2 - \rho^2) \sin \varphi \cos \varphi dw ; \end{aligned}$$

quelli rispetto agli assi di riferimento:

$$(502) \quad \left\{ \begin{aligned} dJ_z &= (y^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi) dw , \\ dJ_y &= (z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi) dw , \\ dJ_{yz} &= [zy + (c^2 - \rho^2) \sin \varphi \cos \varphi] dw . \end{aligned} \right.$$

I momenti di second'ordine di tutto il sistema rispetto agli assi z ed y sono perciò:

$$(503) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_z = \int_s (y^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi) dw , \\ J_y = \int_s (z^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi) dw , \\ J_{zy} = \int_s [zy + (c^2 - \rho^2) \sin \varphi \cos \varphi] dw ; \end{array} \right.$$

e poichè questi, in funzione delle coordinate z_z, y_z, z_y, y_y , degli antipoli C_z e C_y degli assi di riferimento, rispetto all'ellisse di elasticità dell'elemento ds , valgono:

$$J_z = \int_s y y_z dw \quad , \quad J_y = \int_s z z_y dw \quad , \quad J_{zy} = \int_s z y_y dw = \int_s y z_z dw \quad ,$$

si trae per dette coordinate:

$$(504) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_z = z + \frac{(c^2 - \rho^2) \sin \varphi \cos \varphi}{y} , \\ y_z = y + \frac{\rho^2 \cos^2 \varphi + c^2 \sin^2 \varphi}{y} , \\ z_y = z + \frac{\rho^2 \sin^2 \varphi + c^2 \cos^2 \varphi}{z} , \\ y_y = y + \frac{(c^2 - \rho^2) \sin \varphi \cos \varphi}{z} . \end{array} \right.$$

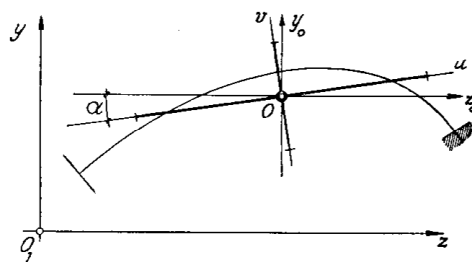


Fig. 163

L'ellisse d'elasticità del sistema è così pienamente individuata: le (497) e (498) ne determinano il peso elastico ed il baricentro elastico; per averne gli assi si calcolano prima i momenti di second'ordine rispetto agli assi z_0 ed y_0 paralleli a quelli di riferimento, passanti per il baricentro del sistema (fig. 163):

$$(505) \quad J_{x_0} = J_z - y_0^2 w \quad , \quad J_{y_0} = J_y - z_0^2 w \quad , \quad J_{x_0 y_0} = J_{zy} - z_0 y_0 w \quad ;$$

indi si traggono:

gli angoli α che gli assi dell'ellisse formano con l'asse z :

$$(506) \quad \operatorname{tg} 2 \alpha = \frac{2 J_{x_0 y_0}}{J_{y_0} - J_{x_0}} ,$$

i momenti principali d'inerzia (supposto $J_{y_0} - J_{x_0} > 0$):

$$(507) \quad \left. \begin{array}{l} J_u \\ J_v \end{array} \right\} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4 J_{x_0 y_0}} .$$

80 — Il metodo approssimato.

Se la legge con cui varia il peso elastico in funzione di s non è esprimibile in forma analitica semplice, gl'integrali si possono calcolare con metodo approssimato, per esempio con la formula di Simpson. Si può anche suddividere il sistema in tronchi di lunghezza finita, di cui siano determinabili le ellissi d'elasticità, e, note queste, effettuarne la composizione coi noti metodi grafici della geometria delle masse o col metodo analitico già indicato, sostituendovi però agli integrali le somme dei termini relativi ai vari tronchi.

Detta allora Δs la lunghezza del tronco generico, gli assi della relativa ellisse parziale, nell'ipotesi che con sufficiente approssimazione il tronco si possa riguardare prismatico, valgono le espressioni:

$$(508) \quad \rho_t = \rho \quad , \quad \rho_n = \sqrt{\frac{\Delta s^2}{12} + \chi \frac{E}{G} \rho^2} ;$$

il centro elastico si può considerare coincidente col baricentro della sezione media del tronco. Le (497) e (498) divengono ora:

$$(497') \quad w = \Sigma \frac{\Delta s}{EJ} = \Sigma \Delta w \quad ,$$

$$(498') \quad z_o = \frac{\Sigma z \Delta w}{w} \quad , \quad y_o = \frac{\Sigma y \Delta w}{w} .$$

Determinate poi, mediante le (504) - ove φ sta ora ad indicare l'angolo formato dagli assi dell'ellisse del tronco con quelli di riferimento - le coordinate degli antipoli di questi rispetto all'ellisse parziale, avremo i momenti di second'ordine del sistema elastico rispetto agli assi z, y :

$$(509) \quad J_z = \Sigma \Delta w y y_z \quad , \quad J_y = \Sigma \Delta w z z_y \quad , \quad J_{zy} = \Sigma \Delta w y z_z = \Sigma \Delta w z y_y .$$

Le (505) (506) e (507) servono infine, come nel caso generale, a determinare le direzioni degli assi dell'ellisse ed i momenti principali d'inerzia dell'intero sistema.

* * *

Se nei procedimenti ultimi spiegati si trascura l'influenza del taglio, il semiasse longitudinale del tronco elementare si annulla, mentre si riduce alla misura:

$$(510) \quad \rho_n = \Delta s \sqrt{\frac{1}{12}}$$

per un tronco di lunghezza Δs .

Ma semplificazioni maggiori possono conseguirsi col metodo indicato da Ottorino Sesini, che ha inoltre il pregio d'una migliore approssimazione, in quanto tiene conto di una quota cospicua dell'influenza del taglio. Esso è basato sulle considerazioni seguenti.

Il semiasse longitudinale ρ_n d'un tronco elementare vale $\rho \sqrt{\chi \frac{E}{G}}$ ovvero è nullo secondo che si consideri o trascuri il contributo di deformazione dovuto al taglio. Ora essendo $\chi > 1$ ed $E > G$, è sempre $\chi \frac{E}{G} > 1$ (per la sezione rettangolare, ad esempio, per cui è $\chi = \frac{6}{5}$, posto $\frac{E}{G} = \frac{5}{2}$, sarebbe $\rho_n = \rho \sqrt{3}$). Ne deriva che è sempre $\rho_n > \rho$ e che, assumendo $\rho_n = \rho$, ci poniamo in condizioni intermedie fra il tener conto delle deformazioni dovute al taglio ed il trascurarle totalmente.

Con la posizione fatta, le ellissi parziali degenerano in cerchi, l'antipolo C_z relativo ad un asse z qualunque situato alla distanza y^* dal baricentro elastico O dell'elemento si trova sulla normale all'asse per il punto O , ad una distanza $\frac{\rho^2}{y^*}$ da questo, mentre la distanza di C_z da un'altro asse y distante di z^* da O e formante l'angolo ϑ col precedente, ha l'espressione $z^* + \frac{\rho^2}{y^*} \cos \vartheta$ (fig. 164).

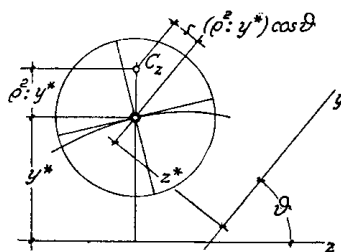


Fig. 164

Il momento centrifugo rispetto agli assi z, y è dunque:

$$dJ_{zy} = y^* \left(z^* + \frac{\rho^2}{y^*} \cos \vartheta \right) dw ,$$

ossia:

$$dJ_{zy} = (y^* z^* + \rho^2 \cos \vartheta) dw ,$$

e ancora:

$$dJ_{zy} = \frac{ds}{EJ} z^* y^* + \frac{ds}{EA} \cos \vartheta .$$

In questa espressione non figurano più, come nelle (502), gli angoli che gli assi dell'ellisse formano con gli assi z ed y , ma solo l'angolo formato da questi ultimi. Se poi gli assi sono ortogonali, come allora avevamo supposto, è semplicemente:

$$dJ_{zy} = z y \frac{ds}{EJ} ;$$

analogamente i momenti d'inerzia rispetto ai due assi sono:

$$dJ_z = y^2 \frac{ds}{EJ} + \frac{ds}{EA} , \quad dJ_y = z^2 \frac{ds}{EJ} + \frac{ds}{EA} .$$

Infine i momenti di second'ordine di tutto il sistema rispetto agli assi di riferimento, già dati dalle (503), sono ora:

$$(503') \quad \left\{ \begin{array}{l} J_z = \int_s y^2 ds + \int_s \frac{ds}{EA}, \\ J_y = \int_s z^2 ds + \int_s \frac{ds}{EA}, \\ J_{zy} = \int_s yz \frac{ds}{EJ} \end{array} \right.$$

Il metodo può essere utilmente applicato anche quando i tronchi abbiano lunghezza Δs finita, purchè sia $\Delta s \leq \rho_t \sqrt{12}$.

81 — Travi a grande curvatura.

Ricordando le (365) e (366) del n° 48, basta sostituire all'asse geometrico l'asse s^* , luogo dei punti O^* . Su questo si troveranno i baricentri elastici dei tronchi, aventi i pesi elastici:

$$\Delta w = \frac{\Delta s^*}{EJ''}$$

ed i semiassi, supposto $\Delta s^* \leq \rho_t \sqrt{12}$:

$$\rho_t = \rho_n = \sqrt{\frac{J''}{A''}}.$$

Basta appena ricordare che le caratteristiche A'' e J'' che figurano in queste espressioni si riferiscono alla seconda trasformata della sezione media del tronco che si considera.

82 — Sistemi reticolari.

Nella mensola reticolare di fig. 165 supponiamo rigide tutte le aste eccettuata quella s di polo m , e sia M il momento intorno a questo polo di una forza qualunque R applicata all'elemento terminale. Con le notazioni della figura, lo sforzo corrispondente nell'asta s vale notoriamente:

$$(511) \quad S = \frac{M}{r},$$

ed il relativo allungamento elastico:

$$\Delta s = \frac{Ss}{EA}.$$

In conseguenza di questa variazione di lunghezza dell'asta, la porzione di travatura A_1 , e con essa l'estremo libero, ruota rispetto all'altra porzione A_2 e perciò, rispetto all'incastro, dell'angolo:

$$(512) \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} = \frac{1}{r} \frac{Ss}{EA}.$$

La rotazione si compie intorno al polo dell'asta, qualunque sia la forza agente sull'elemento terminale; in altri termini gli antipoli rispetto all'ellisse d'elasticità, di tutte le rette del piano, in particolare quello della retta all'infinito, ossia il centro elastico, coincidono col polo m dell'asta. Ciò richiede che l'ellisse d'elasticità si riduca a questo punto, e pertanto *il peso elastico deve riguardarsi come una massa concentrata nel polo dell'asta considerata.*

Supposto agire sull'elemento terminale una coppia di momento M , per la teoria dell'ellisse d'elasticità la rotazione vale:

$$(513) \quad \Delta\varphi = M\Delta w,$$

mentre, dalla (512), si ha pure:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{M}{r} \frac{s}{EA} = M \frac{s}{EA r^2};$$

confrontando queste due ultime, si ottiene l'espressione del peso elastico:

$$(514) \quad \Delta w = \frac{s}{EA r^2}.$$

Se agisce una forza finita R , vale ancora la (511) ove si ponga $M = Ru$; avremo perciò la rotazione:

$$(515) \quad \Delta\varphi = R \Delta w u,$$

uguale al prodotto della forza per il momento statico del peso elastico rispetto alla linea d'azione della forza, come dev'essere per il primo teorema di Culmann.

Lo spostamento secondo una certa direzione v , di un punto C collegato all'estremo libero sarà:

$$\Delta\eta_v = \Delta\varphi v$$

e, per la (515), anche:

$$(516) \quad \Delta\eta_v = R \Delta w u v;$$

in accordo col secondo teorema di Culmann, detto spostamento è uguale

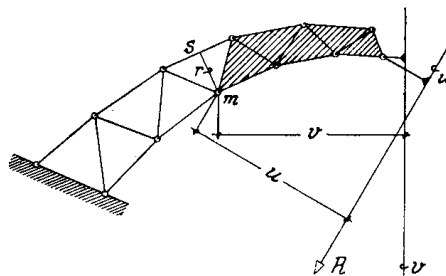


Fig. 165

al prodotto dell'intensità della forza per il momento centrifugo del peso elastico Δw rispetto alla linea d'azione della forza stessa ed alla retta secondo cui si valuta lo spostamento.

Se tutto il sistema è elastico, in luogo dalle (513) (515) e (516) avremo rispettivamente:

$$(513') \quad \varphi = \Sigma \Delta \varphi = M \Sigma \Delta w ,$$

$$(515') \quad \varphi = R \Sigma \Delta w u ,$$

$$(516') \quad \eta_v = R \Sigma \Delta w u v ,$$

ove le sommatorie vanno estese a tutte le aste della travatura; il centro di rotazione, per note proprietà della composizione delle rotazioni, cade nel baricentro dei momenti statici $\Delta w u$ dei pesi elastici relativi alle singole aste, rispetto alla linea d'azione della forza, cioè nell'antipolo di questa retta rispetto all'ellisse centrale d'inerzia dei pesi Δw applicati ai punti m . Introducendo ancora:

il peso elastico del sistema:

$$w = \Sigma \Delta w ,$$

la distanza $d = \Sigma \Delta w u / \Sigma \Delta w$ del baricentro elastico dalla linea d'azione u della forza,

la distanza $d'_v = \Sigma \Delta w u v / \Sigma \Delta w u$ del centro di rotazione dalla retta secondo cui si valuta lo spostamento, avremo infine:

$$\varphi = M w \quad , \quad \varphi = w d_a \quad , \quad \eta_b = R w d_a d'_b .$$

I momenti di second'ordine rispetto ad una coppia di assi y, z conservano la forma delle (509), sicchè l'ellisse d'elasticità può dedursi applicando il metodo generale analitico o grafico.

Nella ricerca di deformazioni che interessino la determinazione di incognite iperstatiche è sufficiente limitarsi alla considerazione dei pesi elastici delle aste di contorno, nel qual caso i poli di esse, ai quali vanno applicati i pesi Δw , coincidono tutti con nodi della travatura. Quando si vogliano invece considerare tutte le aste, il procedimento indicato cade in difetto per quelle il cui polo è all'infinito (le altre due aste interessate dalla corrispondente sezione di Ritter sono parallele). L'applicazione di una coppia non genera sforzo in tali aste, perchè rispetto ai loro poli il momento è quello stesso della coppia applicata, mentre nella (511) la distanza r è infinitamente grande. La presenza di aste di parete il cui polo sia improprio non altera dunque nè il valore del peso elastico totale, nè la posizione del baricentro elastico.

Gli assi dell'ellisse d'elasticità si possono determinare calcolando gli spostamenti che il baricentro elastico subisce quando vi siano applicate forze opportunamente dirette.

83 — Alcune applicazioni alla risoluzione di sistemi iperstatici.

Consideriamo la trave prismatica AB rigidamente incastrata ad entrambi gli estremi e soggetta al carico flettente P alle distanze a e b dagli incastrati (fig. 166). Assumiamo la mensola incastrata in B come sistema principale e determiniamo gli spostamenti che il baricentro elastico, notoriamente coincidente col punto medio dell'asse, subisce:

per effetto del carico P . Questo spostamento è dovuto all'elasticità del tronco b di trave; la porzione a di questa segue rigidamente gli spostamenti della sezione C (elemento terminale del suddetto tronco b), senza deformarsi. Il peso elastico che per ora interessa è dunque:

$$w_b = \frac{b}{EJ} ;$$

la rotazione e gli spostamenti di O dovuti al carico P valgono (fig. 166 a):

$$\varphi_P = Pw_b \frac{b}{2} = \frac{Pb^2}{2EJ} ,$$

$$\eta_{P_1} = 0 ,$$

$$\eta_{P_2} = Pw_b \frac{b}{2} \left(\frac{l}{2} - \frac{b}{3} \right) ;$$

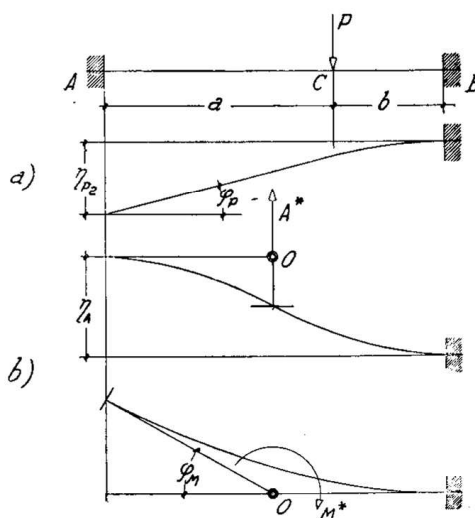


Fig 166

per effetto della reazione dell'incastrato. Questa, ridotta al baricentro elastico O , si risolve nella componente finita A^* e nel momento M^* . Notando che ora entra in gioco l'elasticità di tutta la trave, avremo:

per la reazione A^* , diverso da zero il solo spostamento secondo l'asse dell'ellisse y (fig. 166 b):

$$\eta_A = A J_y ;$$

per il momento M^* , diversa da zero la sola rotazione (fig. 166 c):

$$\varphi_{M^*} = M^* w .$$

Dalle condizioni:

$$\varphi_{M^*} = \varphi_P , \quad \eta_{A^*} = \eta_P ,$$

che debbono essere soddisfatte per la supposta rigidità degli incastri, la quale implica l'immobilità del baricentro elastico, si trae:

$$M^*w = \frac{Pb^2}{2EJ} \quad , \quad A^*J_y = \frac{Pb^2}{2EJ} \left(\frac{l}{3} - \frac{b}{3} \right) ,$$

da cui, osservando che, a prescindere dal taglio, è $J_y = w \rho^2_{y2} = l^2/12EJ$, si deduce:

$$M^* = \frac{Pb^2}{2l} \quad , \quad A^* = \frac{Pb^2}{2l^2} (3l - 2b) = \frac{Pb^2}{2l^2} (3a + b) .$$

Ridotta poi la reazione al baricentro della sezione d'incastro, si ottengono:

la reazione finita $A = A^*$,

il momento d'incastro:

$$M_A = M^* - A \frac{l}{2} = - \frac{Pab^2}{l^2} ,$$

espressioni concordanti con quelle ottenute al n° 32.

* * *

Il sistema elastico rappresentato in fig. 167, soggetto ad un carico flettente concentrato in posizione arbitraria sulla trave AB , sia rigidamente incastrato agli estremi C e B .

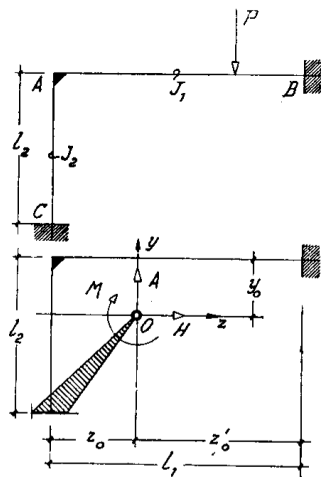


Fig. 167

Svincolato l'incastro C , il sistema si riduce ad una mensola analoga a quella del caso precedente, avente il peso elastico:

$$w = w_1 + w_2 = \frac{l_1}{EJ_1} + \frac{l_2}{EJ_2} .$$

Per effetto del carico P il baricentro elastico, di coordinate:

$$z_0 = \frac{w_1}{w_1 + w_2} \frac{l_1}{2} \quad , \quad y_0 = \frac{w_2}{w_1 + w_2} \frac{l_2}{2} ,$$

subisce gli spostamenti:

$$\varphi_P = \frac{Pw_b b}{2} \quad , \quad \eta_{Pz} = \frac{Pw_b b}{z} y_0 \quad , \quad \eta_{Py} = \frac{Pw_b b}{2} \left(z'_0 - \frac{b}{3} \right) ;$$

mentre quelli dovuti ai parametri della reazione d'incastro A valgono:

$$\varphi_M = Mw \quad , \quad \eta_H = HJ_z \quad , \quad \eta_A = AJ_y .$$

L'immobilità del baricentro suddetto importa dunque :

$$Mw = \frac{Pw_b b}{z} \quad , \quad AJ_y = \frac{Pw_b b}{z} \left(z'_o - \frac{b}{3} \right) \quad , \quad HJ_z = \frac{Pw_b b}{z} y_o .$$

Da queste, ricordando l'espressione di w e osservando che è :

$$J_y = w_1 \rho_{y1}^2 + w_1 \left(\frac{l_1}{2} - z_o \right)^2 + w_2 \rho_{y2}^2 + w_2 z_o^2 \quad ,$$

$$J_z = w_1 \rho_{z1}^2 + w_1 y_o^2 + w_2 \rho_{z2}^2 + w_2 \left(\frac{l_2}{2} - y_o \right)^2 \quad ,$$

si ottiene :

$$(517) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{Pw_b b}{2w} \quad , \\ A = \frac{\frac{Pw_b b}{2} \left(z'_o - \frac{b}{3} \right)}{w_1 \left[\rho_{y1}^2 + \left(\frac{l_1}{2} - z_o \right)^2 \right] + w_2 (\rho_{y2}^2 + z_o^2)} \quad , \\ H = \frac{\frac{Pw_b b}{2} y_o}{w_1 (\rho_{z1}^2 + y_o^2) + w_2 \left[\rho_{z2}^2 + \left(\frac{l_2}{2} - y_o \right)^2 \right]} \quad . \end{array} \right.$$

Spostandosi la forza P sulla trave l_1 parallelamente a se stessa, variano nelle espressioni dei parametri della reazione le quantità b e w_b ; le (517) sono dunque le equazioni delle linee d'influenza di detti parametri per un carico flettente concentrato che percorra l'architrave.

* * *

Supponiamo ora si tratti d'una trave ad arco, ancora rigidamente incastrata alle imposte (fig. 168).

Svincoliamo l'imposta A e determiniamo l'ellisse d'elasticità relativa a tale imposta riguardata come elemento terminale. Ci proponiamo di determinare la reazione R_1 dell'incastro rimosso, dovuta ad una forza concentrata P agente in corrispondenza della sezione S del sistema.

Per effetto della forza P si deforma soltanto la posizione d'arco compresa tra la sezione caricata e l'imposta B . Supposta allora nota l'ellisse e_b relativa a tale porzione, l'antipolo C rispetto a detta ellisse della p , retta d'azione del carico P , sarà il centro attorno a cui ruota nella deformazione il baricentro O di tutto il complesso elastico, che deve riguardarsi collegato

rigidamente all'elemento terminale del tronco che si deforma, e la rotazione vale:

$$\varphi_P = P w_b d_{pc} .$$

Se le imposte sono rigide, la reazione R_A dev'essere tale da annullare la suddetta rotazione, ciò che basta a determinarla. Essa infatti, per produrre una rotazione di θ intorno allo stesso centro, deve agire secondo la antipolare del punto C rispetto all'ellisse d'elasticità e dell'intero sistema. Affinchè poi la rotazione abbia lo stesso valore assoluto della φ , dev'essere:

$$R_A w d_{rc} = P w_b d_{pc} ,$$

da cui, essendo ormai noto d_{rc} , si trae:

$$R_A = P \frac{w_b}{w} \frac{d_{pc}}{d_{rc}} .$$

Il verso della R_A deve essere ovviamente tale da dar luogo rispetto a C ad un momento di segno opposto a quello della P rispetto allo stesso punto.

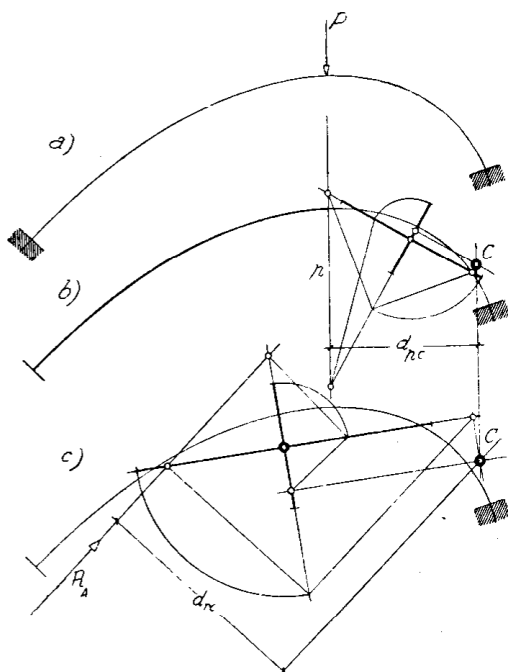


Fig. 168

84 — Spostamenti relativi.

In un sistema a parete piena, semplicemente connesso e rigidamente incastrato agli estremi, supponiamo eseguito un taglio completo secondo una sezione H ed applicato alle due faccie del taglio un generico sistema di forze distorcenti, avente per risultante le forze uguali ed opposte R e $-R$ (fig. 169 a).

È facile dimostrare che gli spostamenti relativi che le due faccie del taglio subiscono nella distorsione sono definiti dalla stessa ellisse d'elasticità terminale del sistema.

Infatti lo spostamento relativo in discorso è quello stesso che corrisponderebbe alla faccia H_B riguardata come elemento terminale del sistema

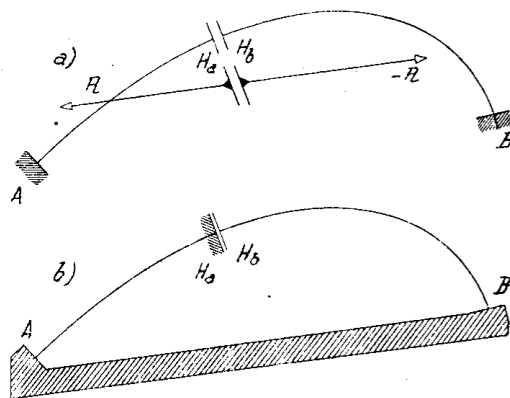


Fig. 169

ancora tagliato in S , ma con la faccia H_a del taglio rigidamente incastrata e le imposte A e B collegate da un legame rigido (fig. 169 *b*). Siccome a questo legame aggiunto corrisponde, per la sua rigidità, peso elastico nullo, e ne sono anche nulli i momenti statici di primo e di secondo ordine, i pesi elastici elementari rimangono inalterati in grandezza e posizione, e l'ellisse di elasticità del nuovo sistema è ancora quella terminale del sistema dato, svincolato da una delle imposte.

85 — Sistemi a connessione multipla.

L'ellisse degli spostamenti elastici della generica sezione S di un sistema elastico piano, che supporremo incastrato agli estremi, può dedursi con facili considerazioni dalle ellissi terminali relative alle due mensole A_1 e A_2 separate da un taglio eseguito secondo la sezione stessa (fig. 170).

Considereremo il caso particolarmente semplice in cui gli assi abbiano le stesse direzioni per le due ellissi e siano:

$w_1, O_1, \varphi_{z1}, \varphi_{y1}$, rispettivamente il peso di elasticità e_1 della mensola A_1 ;

$w_2, O_2, \varphi_{z2}, \varphi_{y2}$, le caratteristiche analoghe alle precedenti, per l'ellisse e_2 della mensola A_2 .

Supposto agire in O_1 una forza H_1 orizzontale (secondo uno degli assi dell'ellisse), la sezione estrema S_1 della mensola A_1 subisce una pura traslazione orizzontale, il cui valore è:

$$(518) \quad \zeta_1 = H_1 w_1 \varphi_{y1}^2 ;$$

analogamente agendo in O_2 una forza orizzontale H_2 (secondo uno degli assi dell'ellisse), la sezione estrema S_2 della mensola A_2 subisce lo spostamento, esso pure orizzontale:

$$(518') \quad \zeta_2 = H_2 w_2 \varphi_{y2}^2 .$$

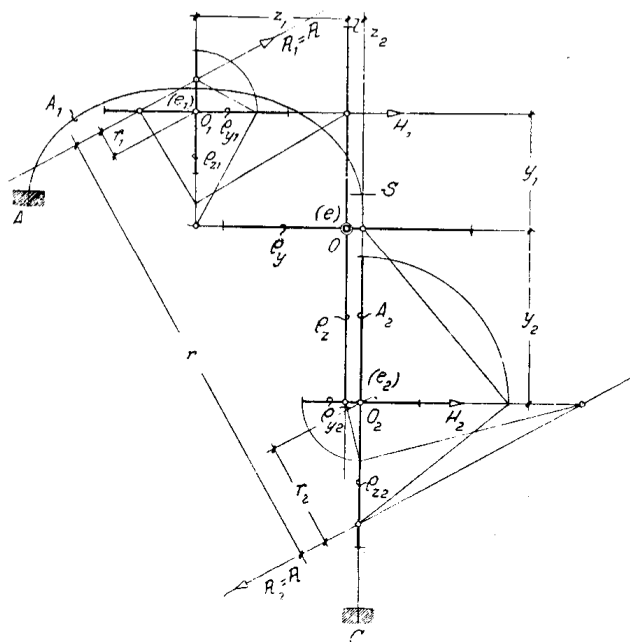


Fig. 170

Se vogliamo che i due spostamenti siano uguali, dev'essere soddisfatta la condizione:

$$(519) \quad \frac{H_1}{H_2} = \frac{w_2 \rho_{y2}^2}{w_1 \rho_{y1}^2} .$$

La risultante H di H_1 ed H_2 agendo sull'intero sistema, determinerà una pura traslazione ζ di S , uguale alle precedenti; pertanto il centro elastico O relativo alla sezione S del complesso deve trovarsi sulla retta d'azione di tali risultanti.

Indichiamo con y_1 e y_2 le distanze di questo centro O dalle rette d'azione di H_1 ed H_2 ; dalla (518) si trae:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{w_1 \rho_{y1}^2}{w_2 \rho_{y2}^2} ,$$

e da questa, introducendovi la distanza nota $y_1 + y_2 = y$:

$$(520) \quad y_1 = y \frac{w_1 \rho_{y1}^2}{w_1 \rho_{y1}^2 + w_2 \rho_{y2}^2} = \frac{y}{1 + \frac{w_2 \rho_{y2}^2}{w_1 \rho_{y1}^2}} .$$

Similmente, considerando uno spostamento verticale del giunto, si determina l'altra coordinata del centro elastico;

$$(520') \quad z_1 = \frac{z}{1 + \frac{w_2 \rho_{z2}^2}{w_1 \rho_{z1}^2}} .$$

Per determinare ora il peso elastico osserviamo che una forza R_1 agente sull'elemento S_1 della prima mensola determina una pura rotazione di detto elemento intorno ad O quando abbia per retta d'azione l'antipolare di questo punto rispetto all'ellisse e_1 ; e che, parimenti, una forza R_2 agente sull'elemento S_2 della seconda mensola determina una rotazione di S_2 identica alla precedente quando agisca secondo l'antipolare di O rispetto all'ellisse e_2 . L'uguaglianza di dette rotazioni importa:

$$\varphi = R_1 r_1 w_1 = R_2 s_2 w_2 .$$

Le forze R_1 ed R_2 agendo simultaneamente sull'intero sistema elastico determinano una pura rotazione della sezione S ; dunque esse debbono costituire una coppia ($R_1 = R_2 = R$), e la rotazione espressa in funzione del peso elastico w del complesso, detto $M = Rr$ il momento della coppia, vale:

$$\varphi = R r w .$$

Confrontando questa con le precedenti espressioni di φ , avremo perciò:

$$(521) \quad w = w_1 \frac{r_1}{r} = w_2 \frac{r_2}{r}.$$

In funzione del peso elastico w , lo spostamento orizzontale vale:

$$(522) \quad \zeta = (H_1 + H_2) w \rho_y^2,$$

da cui, tenute presenti le (518) e (519), si ottiene:

$$(523) \quad \rho_y^2 = \frac{w_1 \rho_{y1}^2}{w \left(1 + \frac{w_1 \rho_{y1}^2}{w_2 \rho_{y2}^2} \right)}.$$

Analogamente si trova:

$$(523') \quad \rho_z^2 = \frac{w_1 \rho_{z1}^2}{w \left(1 + \frac{w_1 \rho_{z1}^2}{w_2 \rho_{z2}^2} \right)}.$$

Sono così determinati anche i semiassi dell'ellisse d'elasticità del complesso.

Il procedimento, testè indicato, di deduzione dell'ellisse d'elasticità e dalle ellissi parziali e_1 ed e_2 , di-

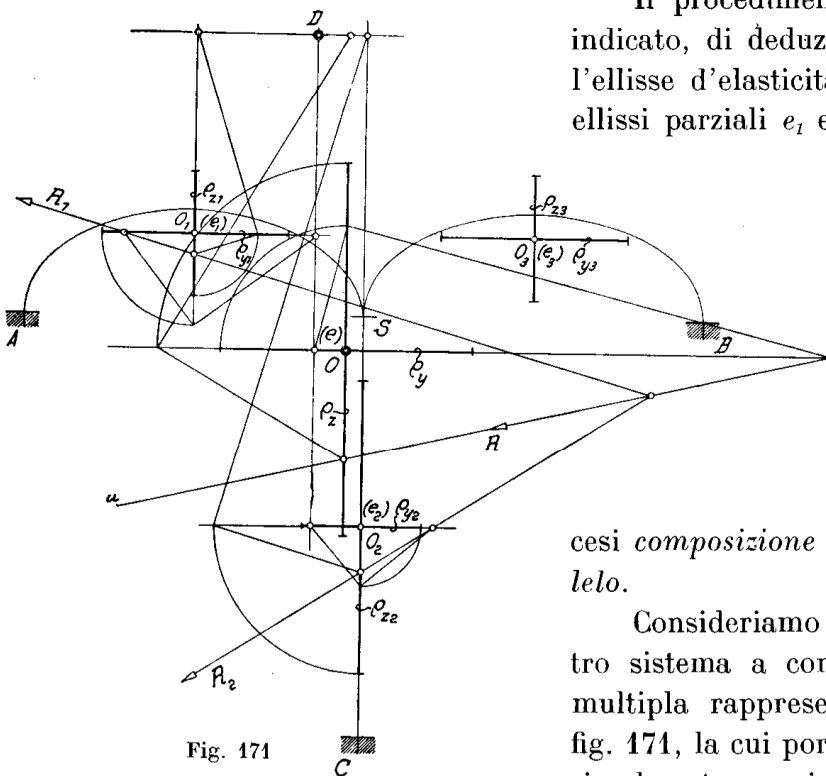


Fig. 171

cesi composizione in parallelo.

Consideriamo ora l'altro sistema a connessione multipla rappresentato in fig. 171, la cui porzione AC sia lo stesso sistema di

fig. 170, precedentemente studiato. Siano rispettivamente w_3 , O_3 , ρ_{z3} , ρ_{y3} , il peso elastico, il baricentro elastico e gli assi dell'ellisse di elasticità della nuova porzione SB ridotta ad una mensola BS_3 , incastrata in B.

Il comportamento elastico della porzione SB nel sistema effettivo è quello

stesso della mensola BS_3 , cui faccia seguito un concio elastico ideale avente come ellisse d'elasticità quella relativa alla sezione S del sistema AC , precedentemente determinata. Basta dunque comporre in serie l'ellisse e_3 con la e , per potere studiare la posizione BS del sistema, dato che l'ellisse e riproduce l'elasticità del sistema AC .

Una forza R che la porzione SB eserciti sul complesso AC , fa ruotare la sezione S intorno all'antipolo D della retta d'azione u di R rispetto all'ellisse e , e questa rotazione può anche considerarsi dovuta a due forze R_1 ed R_2 agenti secondo le antipolari di D rispetto ad e_1 ed e_2 rispettivamente. Possono così determinarsi le componenti R_1 ed R_2 di R assorbite dalle porzioni AS e CS , che per verifica debbono incontrarsi sulla linea d'azione di R .

86 — Cenno sull'ellisse trasversale.

Una teoria analoga a quella dell'ellisse d'elasticità di Culmann è stata data da Carlo Luigi Ricci per gli spostamenti trasversali.

Consideriamo una trave piana incastrata alle estremità cimentata da forze R normali al piano del sistema, e rigidamente collegata ad una certa sezione S di essa (fig. 172).

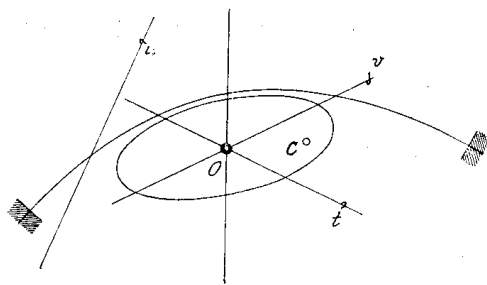


Fig. 172

Fra i centri di sollecitazione C , tracce su detto piano delle forze agenti, e gli assi u , ovviamente appartenenti al piano medesimo, intorno a cui S ruota nella deformazione, sussiste una corrispondenza biunivoca, involutoria, priva di elementi uniti, ossia una polarità del tipo di quella definita al n. 74. La conica centrale

di tale polarità è appunto l'ellisse trasversale della sezione S del sistema.

Ad un asse di rotazione coincidente con la retta all'infinito del piano (traslazione di S normale al piano del sistema), corrisponde il centro elastico O , che è il centro della polarità. Il valore che questa traslazione assume per effetto d'una forza d'intensità unitaria applicata in O è uguale al peso elastico. Una coppia torcente agente in un piano di traccia t (centro di sollecitazione improprio) fa ruotare la sezione S intorno all'asse v passante per O ed avente direzione coniugata a t rispetto all'ellisse d'elasticità; perciò se t coincide con uno degli assi dell'ellisse, la rotazione avviene intorno all'altro asse.