

I coefficienti  $\eta_{rk}^{(i)}$  delle incognite dei sistemi normali ridotti si prestano ad una notevole interpretazione statica che conviene rilevare <sup>(1)</sup>.

Supponiamo che la travatura possieda la sola iperstatica  $X_i$  e consideriamola soggetta esclusivamente al carico  $X_r = 1$ ; l'equazione di elasticità per l'unica incognita, che chiameremo ora  $X_{ir}$ , è:

$$0 = \eta_{ir} + X_{ir} \eta_{ii} ,$$

donde:

$$X_{ir} = - \frac{\eta_{ir}}{\eta_{ii}} = c_{ir} .$$

Pertanto la (430), nella forma:

$$\eta_{rk}^{(i)} = \eta_{rk} + \eta_{ik} X_{ir} = \eta_{rk} + c_{ir} \eta_{ik}$$

esprime lo spostamento del punto  $k$  dovuto al carico  $X_r = 1$  (oppure quello del punto  $r$  dovuto alla forza  $X_k = 1$ ) nel sistema avente la sola iperstatica  $X_i$ ; infatti  $\eta_{kr}$  è lo spostamento per  $X_r = 1$  nel sistema isostatico, ma a questo bisogna aggiungere quello dovuto alla presenza simultanea dell'unica iperstatica; poichè tale spostamento è  $\eta_{ik}$  per  $X_i = X_{ir} = 1$ , sarà  $\eta_{ik} X_{ir}$  per l'iperstatica  $X_{ir}$ . Analogamente si prova che  $\eta_{ro}^{(i)}$  è lo spostamento del punto  $r$  dovuto al carico effettivo nel suddetto sistema semplicemente iperstatico.

Più generalmente il coefficiente  $\eta_{rk}^{(i)}$  del sistema normale ridotto di ordine  $i$  si riconosce per lo spostamento del punto  $k$  dovuto al carico  $X_r = 1$  (oppure per quello del punto  $r$  dovuto al carico  $X_k = 1$ ) nel sistema avente le sole iperstatiche  $X_1, X_2, \dots, X_i$ ; mentre  $\eta_{ro}^{(i)}$  è lo spostamento del punto  $r$  per il carico effettivo nel suddetto sistema iperstatico.

#### B) METODO ABBREVIATO DI GAUSS.

Al metodo sopra esposto è però di regola preferibile il metodo abbreviato, il quale consiste nello scrivere soltanto la prima equazione di ciascun sistema ridotto.

All'uopo moltiplichiamo gli  $\eta_{ik}$  della prima equazione ordinatamente per  $c_{i2} = -\eta_{i2}/\eta_{ii}$ ,  $c_{i3} = -\eta_{i3}/\eta_{ii}$ ,  $\dots$ ,  $c_{ik} = -\eta_{ik}/\eta_{ii}$ ,  $\dots$ ,  $c_{in} = -\eta_{in}/\eta_{ii}$ , ma tralasciando via via l'operazione per i coefficienti dell'incognita  $X_i$ , delle  $X_1$  e  $X_2$ , delle  $X_1, X_2$  e  $X_3$ , ecc., i cui termini non interessano in quanto resteranno eliminati nell'ulteriore sviluppo del procedimento. Si effettuano poi le

(1) K. BEYER, *Die Statik im Eisenbetonbau*, 4<sup>o</sup> vol pag. 217, Berlino 1933. In proposito si veda anche la nota di C. RAYMONDI, *Contributo allo studio dei sistemi elastici staticamente indeterminati*, "Atti dell'Istituto di Scienze delle Costruzioni dell'Università di Pisa", n<sup>o</sup> 13, Pisa, 1949.

somme algebriche (430), deducendone così i coefficienti  $\eta_{2k}^{(1)}$  dell'equazione  $2^{(1)}$ .

Su questa si opera come sull'equazione 1; si moltiplicano cioè ordinatamente gli  $\eta_{2k}^{(1)}$  per  $c_{23} = -\eta_{24}^{(1)}/\eta_{22}^{(1)}$ ,  $c_{24} = -\eta_{24}^{(1)}/\eta_{22}^{(1)}$ , ...,  $c_{2k} = -\eta_{2k}^{(1)}/\eta_{22}^{(1)}$ , ...,  $c_{2n} = -\eta_{2n}^{(1)}/\eta_{22}^{(1)}$ , sempre tralasciando i termini che non interessano per il motivo già precisato. Applicando poi la (434) si calcolano i coefficienti  $\eta_{3k}^{(2)}$  della equazione  $3^{(2)}$ .

Così continuando, con la determinazione delle successive equazioni  $4^{(3)}$ ,  $5^{(4)}$ , ...,  $k^{(k-1)}$ , ...,  $n^{(n-1)}$ , si completa il sistema a scala, di risoluzione immediata. In particolare la ennupla di iperstatiche per  $\eta_{i0} = 1$  e tutti gli altri termini di carico nulli è la stessa degli elementi  $\zeta_{ki}$  della colonna  $i^{ma}$ , ovvero di quelli  $\zeta_{ik}$  della riga  $i^{ma}$ , della matrice coniugata (426), come si osservò al n° 64.

Le tabelle (443) e (444) mostrano come il metodo potrebbe essere applicato ad un sistema di cinque equazioni in altrettante incognite. La prima tabella contiene i calcoli e le verifiche occorrenti per giungere alle equazioni 1,  $2^{(1)}$ ,  $3^{(2)}$ ,  $4^{(3)}$  e  $5^{(4)}$  del sistema scalare. Per dedurre poi i coefficienti della matrice coniugata risolveremo le equazioni a scala per  $\eta_{50} = 1$  ed  $\eta_{40} = \eta_{30} = \dots = \eta_{10} = 0$ , ottenendone:

$$\begin{aligned} \xi_{55} &= -1/\eta_{55}^{(4)}, \\ \xi_{54} &= c_{45} \xi_{55}, \\ \xi_{53} &= c_{34} \xi_{54} + c_{35} \xi_{55}, \\ \xi_{52} &= c_{22} \xi_{53} + c_{24} \xi_{54} + c_{25} \xi_{55}, \\ \xi_{51} &= c_{12} \xi_{52} + c_{13} \xi_{53} + c_{14} \xi_{54} + c_{15} \xi_{55}; \end{aligned}$$

per  $\eta_{40} = 1$  ed  $\eta_{50} = \eta_{30} = \dots = \eta_{10} = 1$ , deducendone analogamente:

$$\begin{aligned} \xi_{45} &= \xi_{54}, \\ \xi_{44} &= c_{45} \xi_{45}, \\ \xi_{43} &= c_{34} \xi_{44} + c_{35} \xi_{45}, \\ \xi_{42} &= c_{23} \xi_{43} + c_{24} \xi_{44} + c_{25} \xi_{45}, \\ \xi_{41} &= c_{12} \xi_{42} + c_{13} \xi_{43} + c_{14} \xi_{44} + c_{15} \xi_{45}, \end{aligned}$$

e così via, secondo lo schema della tabella (444), fino a determinare l'ultimo coefficiente  $\zeta_{11}$ .

**METODO ABBREVIATO DI GAUSS PER UN SISTEMA DI 5 EQUAZIONI**  
**RIDUZIONE A FORMA SCALARE (443)**

$X_k$		$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	Verifica $[\eta_i^{(k)} = \sum_{k=1}^5 \eta_{ik}^{(k)}]$	Termini di carico $\eta_{i0}$
$i$	$k$	1	2	3	4	5	$\Sigma$	0
1	$\eta_{1k}$	$\eta_{11}$	$\eta_{12}$	$\eta_{13}$	$\eta_{14}$	$\eta_{15}$	$\bar{\eta}_1$	$\eta_{10}$
	$-c_{1k}$		$\eta_{12}/\eta_{11}$	$\eta_{13}/\eta_{11}$	$\eta_{14}/\eta_{11}$	$\eta_{15}/\eta_{11}$		$\eta_{10}/\eta_{11}$
2	$\eta_{2k}$	$(\eta_{21})$	$\eta_{22}$	$\eta_{23}$	$\eta_{24}$	$\eta_{25}$	$\bar{\eta}_2$	$\eta_{20}$
	$c_{12} \eta_{1k}$		$c_{12} \eta_{12}$	$c_{12} \eta_{13}$	$c_{12} \eta_{14}$	$c_{12} \eta_{15}$	$c_{12} \bar{\eta}_1$	$c_{12} \eta_{10}$
2 <sup>(1)</sup>	$c_{12} \eta_{2k}^{(1)}$		$\eta_{22}^{(1)}$	$\eta_{23}^{(1)}$	$\eta_{24}^{(1)}$	$\eta_{25}^{(1)}$	$\bar{\eta}_1^{(1)}$	$\eta_{20}^{(1)}$
	$-c_{2k}$			$\eta_{23}^{(1)}/\eta_{22}^{(1)}$	$\eta_{24}^{(1)}/\eta_{22}^{(1)}$	$\eta_{25}^{(1)}/\eta_{22}^{(1)}$		$\eta_{20}^{(1)}/\eta_{22}^{(1)}$
3	$\eta_{3k}$	$(\eta_{31})$	$(\eta_{32})$	$\eta_{33}$	$\eta_{34}$	$\eta_{35}$	$\bar{\eta}_3$	$\eta_{30}$
	$c_{13} \eta_{1k}$			$c_{13} \eta_{13}$	$c_{13} \eta_{14}$	$c_{13} \eta_{15}$	$c_{13} \bar{\eta}_1$	$c_{13} \eta_{10}$
	$c_{23} \eta_{2k}^{(1)}$			$c_{23} \eta_{23}^{(1)}$	$c_{23} \eta_{24}^{(1)}$	$c_{23} \eta_{25}^{(1)}$	$c_{23} \bar{\eta}_1^{(1)}$	$c_{23} \eta_{20}^{(1)}$
3 <sup>(2)</sup>	$\eta_{3k}^{(2)}$			$\eta_{33}^{(2)}$	$\eta_{34}^{(2)}$	$\eta_{35}^{(2)}$	$\bar{\eta}_3^{(2)}$	$\eta_{30}^{(2)}$
	$-c_{3k}$				$\eta_{34}^{(2)}/\eta_{33}^{(2)}$	$\eta_{35}^{(2)}/\eta_{33}^{(2)}$		$\eta_{30}^{(2)}/\eta_{33}^{(2)}$
4	$\eta_{4k}$	$(\eta_{41})$	$(\eta_{42})$	$(\eta_{43})$	$\eta_{44}$	$\eta_{45}$	$\bar{\eta}_4$	$\eta_{40}$
	$c_{14} \eta_{1k}$				$c_{14} \eta_{14}$	$c_{14} \eta_{15}$	$c_{14} \bar{\eta}_1$	$c_{14} \eta_{10}$
	$c_{24} \eta_{2k}^{(1)}$				$c_{24} \eta_{24}^{(1)}$	$c_{24} \eta_{25}^{(1)}$	$c_{24} \bar{\eta}_1^{(1)}$	$c_{24} \eta_{20}^{(1)}$
	$c_{34} \eta_{3k}^{(2)}$				$c_{34} \eta_{34}^{(2)}$	$c_{34} \eta_{35}^{(2)}$	$c_{34} \bar{\eta}_3^{(2)}$	$c_{34} \eta_{30}^{(2)}$
4 <sup>(3)</sup>	$\eta_{4k}^{(3)}$				$\eta_{44}^{(3)}$	$\eta_{45}^{(3)}$	$\bar{\eta}_4^{(3)}$	$\eta_{40}^{(3)}$
	$-c_{4k}$					$\eta_{45}^{(3)}/\eta_{44}^{(3)}$		$\eta_{40}^{(3)}/\eta_{44}^{(3)}$
5	$\eta_{5k}$	$(\eta_{51})$	$(\eta_{52})$	$(\eta_{53})$	$(\eta_{54})$	$\eta_{55}$	$\bar{\eta}_5$	$\eta_{50}$
	$c_{15} \eta_{1k}$					$c_{15} \eta_{15}$	$c_{15} \bar{\eta}_1$	$c_{15} \eta_{10}$
	$c_{25} \eta_{2k}^{(1)}$					$c_{25} \eta_{25}^{(1)}$	$c_{25} \bar{\eta}_2^{(1)}$	$c_{25} \eta_{20}^{(1)}$
	$c_{35} \eta_{3k}^{(2)}$					$c_{35} \eta_{35}^{(2)}$	$c_{35} \bar{\eta}_{30}^{(2)}$	$c_{35} \eta_{30}^{(2)}$
	$c_{45} \eta_{4k}^{(3)}$					$c_{45} \eta_{45}^{(3)}$	$c_{45} \bar{\eta}_4^{(3)}$	$c_{45} \eta_{40}^{(3)}$
5 <sup>(4)</sup>	$\eta_{5k}^{(4)}$					$\eta_{55}^{(4)}$	$\bar{\eta}_5^{(4)}$	$\eta_{50}^{(4)}$
	$-c_{5k}$							$\eta_{50}^{(4)}/\eta_{55}^{(4)}$

METODO ABBREVIATO DI GAUSS PER UN SISTEMA DI 5 EQUAZIONI.  
COEFFICIENTI  $\xi$  DEL SISTEMA CONIUGATO (444)

$X_i$	$\eta_{k0}$	$\eta_{50}$	$\eta_{40}$	$\eta_{30}$	$\eta_{20}$	$\eta_{10}$
	$k$	5	4	3	2	1
$X_5$	$c_{k2} \xi_{52}$					$c_{12} \xi_{52}$
	$c_{k3} \xi_{53}$				$c_{23} \xi_{53}$	$c_{13} \xi_{53}$
	$c_{k4} \xi_{54}$			$c_{34} \xi_{54}$	$c_{24} \xi_{54}$	$c_{14} \xi_{54}$
	$c_{k5} \xi_{55}$		$c_{45} \xi_{55}$	$c_{35} \xi_{55}$	$c_{25} \xi_{55}$	$c_{15} \xi_{55}$
	$-\eta_{k0}^{(k-1)}/\eta_{kk}^{(k-1)}$	$-1/\eta_{55}^{(4)}$	0	0	0	0
	$X_k = \xi_{5k}$	$\xi_{55}$	$\xi_{54}$	$\xi_{53}$	$\xi_{52}$	$\xi_{51}$
$X_4$	$c_{k2} \xi_{42}$					$c_{12} \xi_{42}$
	$c_{k3} \xi_{43}$				$c_{23} \xi_{43}$	$c_{13} \xi_{43}$
	$c_{k4} \xi_{44}$			$c_{34} \xi_{44}$	$c_{24} \xi_{44}$	$c_{14} \xi_{44}$
	$c_{k5} \xi_{45}$		$c_{45} \xi_{45}$	$c_{35} \xi_{45}$	$c_{25} \xi_{45}$	$c_{15} \xi_{45}$
	$-\eta_{k0}^{(k-1)}/\eta_{kk}^{(k-1)}$		$-1/\eta_{44}^{(3)}$	0	0	0
	$X_k = \xi_{4k}$	$(\xi_{45})$	$\xi_{44}$	$\xi_{43}$	$\xi_{42}$	$\xi_{41}$
$X_3$	$c_{k2} \xi_{32}$					$c_{12} \xi_{32}$
	$c_{k3} \xi_{33}$				$c_{23} \xi_{33}$	$c_{13} \xi_{33}$
	$c_{k4} \xi_{34}$			$c_{34} \xi_{34}$	$c_{24} \xi_{34}$	$c_{14} \xi_{34}$
	$c_{k5} \xi_{35}$			$c_{35} \xi_{35}$	$c_{25} \xi_{35}$	$c_{15} \xi_{35}$
	$-\eta_{k0}^{(k-1)}/\eta_{kk}^{(k-1)}$			$-1/\eta_{33}^{(2)}$	0	0
	$X_k = \xi_{3k}$	$(\xi_{35})$	$(\xi_{34})$	$\xi_{33}$	$\xi_{32}$	$\xi_{31}$
$X_2$	$c_{k2} \xi_{22}$					$c_{12} \xi_{22}$
	$c_{k3} \xi_{23}$				$c_{23} \xi_{23}$	$c_{13} \xi_{23}$
	$c_{k4} \xi_{24}$				$c_{24} \xi_{24}$	$c_{14} \xi_{24}$
	$c_{k5} \xi_{25}$				$c_{25} \xi_{25}$	$c_{15} \xi_{25}$
	$-\eta_{k0}^{(k-1)}/\eta_{kk}^{(k-1)}$				$-1/\eta_{22}^{(1)}$	0
	$X_k = \xi_{2k}$	$(\xi_{25})$	$(\xi_{24})$	$(\xi_{23})$	$\xi_{22}$	$\xi_{21}$
$X_1$	$c_{k2} \xi_{12}$					$c_{12} \xi_{12}$
	$c_{k3} \xi_{13}$					$c_{13} \xi_{13}$
	$c_{k4} \xi_{14}$					$c_{14} \xi_{14}$
	$c_{k5} \xi_{15}$					$c_{15} \xi_{15}$
	$-\eta_{k0}^{(k-1)}/\eta_{kk}^{(k-1)}$					0
	$X_k = \xi_{1k}$	$\xi_{15}$	$\xi_{14}$	$\xi_{13}$	$\xi_{12}$	$\xi_{11}$

C) METODO D'ITERAZIONE.

Supposta nota una ennupla di valori approssimati  $X_{k,v}$  delle iperstatiche, un valore più approssimato della generica  $X_i$  potrà in generale ottenersi dalla  $i^{\text{ma}}$  delle (402) posta nella forma:

$$(445) \quad X_{i,v} = - \frac{1}{\eta_{ii}} \left( \eta_{i0} + \sum_{k=1}^n \eta_{ik} X_{k,v-1} \right),$$

dove dalla somma  $\sum$  s'intende escluso il termine per  $k=1$ . Ricordando anzi la notazione  $-\eta_{ik}/\eta_{ii} = c_{ik}$  e ponendo  $-\eta_{i0}/\eta_{ii} = c_i$ , scriveremo le (445) nel modo seguente:

$$(445') \quad X_{i,v} = c_i + \sum_{k=1}^n c_{ik} X_{k,v-1}.$$

Il metodo è convergente, cioè  $X_{i,v}$  è più approssimato di  $X_{i,v-1}$ , quando gli elementi della diagonale principale della matrice (400) siano preponderanti sugli altri, più precisamente quando, per  $i$  arbitrari, sia

$$\left( \sum_{k=1}^n \eta_{ik} X_{k,v-1} \right) / \eta_{ii} = - \sum_{k=1}^n c_{ik} X_{k,v-1}.$$

Dalla ennupla  $X_{i,v}$  si passerebbe alle successive  $X_{i,v+1}, X_{i,v+2}, \dots$  iterando il procedimento, fino ad ottenere  $X_{i,\omega+1} = \infty X_{i,\omega} = X_i$ .

Il metodo converge in tutti i casi e richiede un minor numero di ripetizioni se alle (445) si sostituiscono le altre:

$$(446) \quad X_{i,v} = c_i + \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} X_{k,v} + \sum_{k=i+1}^n c_{ik} X_{k,v-1}.$$

e analogamente per le ripetizioni successive. Con ciò in ogni ripetizione  $v$  si calcola la  $X_{i,v}$  utilizzando tutte le  $X_{k,v}$  già calcolate ( $k < i$ ) nella ripetizione stessa.

La tabella (447) mostra come il metodo si applicherebbe ad un sistema di cinque equazioni in cinque incognite.

Scritto il sistema per disteso:

$$(447) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = c_1 + c_{12}X_2 + c_{13}X_3 + c_{14}X_4 + c_{15}X_5, \\ X_2 = c_2 + c_{21}X_1 + c_{23}X_3 + c_{24}X_4 + c_{25}X_5, \\ X_3 = c_3 + c_{31}X_1 + c_{32}X_2 + c_{34}X_4 + c_{35}X_5, \\ X_4 = c_4 + c_{41}X_1 + c_{42}X_2 + c_{43}X_3 + c_{45}X_5, \\ X_5 = c_5 + c_{51}X_1 + c_{52}X_2 + c_{53}X_3 + c_{54}X_4; \end{array} \right.$$

ed assunti i valori di prima approssimazione  $X_{i0} = c_i$ , conviene determinare

METODO D'ITERAZIONE PER UN SISTEMA DI 5 EQUAZIONI (447)

$c_i$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_i + A_i$
		$c_{21}(c_1 + A_1)$	$c_{31}(c_1 + A_1)$	$c_{41}(c_1 + A_1)$	$c_{51}(c_1 + A_1)$	$c_1 + A_1$
$c_2$	$c_{12}c_2$		$c_{32}(c_2 + A_2)$	$c_{42}(c_2 + A_2)$	$c_{52}(c_2 + A_2)$	$c_2 + A_2$
$c_3$	$c_{13}c_3$	$c_{23}c_3$		$c_{43}(c_3 + A_3)$	$c_{53}(c_3 + A_3)$	$c_3 + A_3$
$c_5$	$c_{14}c_4$	$c_{24}c_4$	$c_{34}c_4$		$c_{54}(c_4 + A_4)$	$c_4 + A_4$
$c_4$	$c_{15}c_5$	$c_{25}c_5$	$c_{35}c_5$	$c_{45}c_5$		
$A_i$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$A_5$	$A_i + B_i$
		$c_{21}(A_1 + B_1)$	$c_{31}(A_1 + B_1)$	$c_{41}(A_1 + B_1)$	$c_{51}(A_1 + B_1)$	$A_1 + B_1$
$A_2$	$c_{12}A_2$		$c_{32}(A_2 + B_2)$	$c_{42}(A_2 + B_2)$	$c_{52}(A_2 + B_2)$	$A_2 + B_2$
$A_3$	$c_{13}A_3$	$c_{23}A_3$		$c_{43}(A_3 + B_3)$	$c_{53}(A_3 + B_3)$	$A_3 + B_3$
$A_4$	$c_{14}A_4$	$c_{24}A_4$	$c_{34}A_4$		$c_{54}(A_4 + B_4)$	$A_4 + B_4$
$A_5$	$c_{15}A_5$	$c_{25}A_5$	$c_{35}A_5$	$c_{45}A_5$		
$B_i$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_i + C_i$
		$c_{21}(B_1 + C_1)$	$c_{31}(B_1 + C_1)$	$c_{41}(B_1 + C_1)$	$c_{51}(B_1 + C_1)$	$B_1 + C_1$
$B_2$	$c_{12}B_2$		$c_{32}(B_2 + C_2)$	$c_{42}(B_2 + C_2)$	$c_{52}(B_2 + C_2)$	$B_2 + C_2$
$B_3$	$c_{13}B_3$	$c_{23}B_3$		$c_{43}(B_3 + C_3)$	$c_{53}(B_3 + C_3)$	$B_3 + C_3$
$B_4$	$c_{14}B_4$	$c_{24}B_4$	$c_{34}B_4$		$c_{54}(B_4 + C_4)$	$B_4 + C_4$
$B_5$	$c_{15}B_5$	$c_{25}B_5$	$c_{35}B_5$	$c_{45}B_5$		
$C_i$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$C_5$	$C_i + D_i$

gli incrementi che corrispondono alle successive iterazioni, nella forma:

$$(448) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta X_{i,1} = X_{i,1} - X_{i,0} = \sum_{k=1}^n c_{ik} C_k = A_i, \\ \Delta X_{i,2} = X_{i,2} - X_{i,1} = \sum_{k=1}^n c_{ik} A_k = B_i, \\ \Delta X_{i,3} = X_{i,3} - X_{i,2} = \sum_{k=1}^n c_{ik} B_k = C_k, \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

oppure, per l'applicazione del metodo in via generale o per una conver-

genza più rapida, in conformità alle (446) e come previsto nella tabella, nell'altra forma:

$$(449) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} (C_k + A_k) + \sum_{k=i+1}^n c_{ik} C_k = A_i \\ \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} (A_k + B_k) + \sum_{k=i+1}^n c_{ik} A_k = B_i \\ \sum_{k=1}^{i-1} c_{ik} (B_k + C_k) + \sum_{k=i+1}^n c_{ik} B_k = C_i \\ \dots \\ \dots \end{array} \right.$$

In definitiva le incognite sono date dalle somme:

$$(450) \quad X_i = c_i + A_i + B_i + C_i + \dots,$$

i cui termini tendono al valore zero al crescere delle ripetizioni.

### 66 — Travature simmetriche.

Una travatura che ammetta un asse  $y$  di simmetria ortogonale e sia soggetta ad un carico  $P$  dissimmetrico (fig. 138 a) può essere studiata per sovrapposizione degli equilibri spettanti:

1°) ad un carico *simmetrico* costruito da un carico  $P/2$ , metà di quello assegnato, e dal carico simmetrico (fig. 138 b);

2°) ad un carico *antisimmetrico* costituito da un carico  $P/2$ , metà di quello assegnato, e dal carico simmetrico cambiato di segno (fig. 138 c). Cumulando queste due condizioni di carico si riproduce infatti la condizione dissimmetrica assegnata.

Simmetria o antisimmetria di carico implicano ovviamente simmetria o antisimmetria dei corrispondenti stati di tensione e di deformazione. Scelte pertanto due sezioni  $S_a$  ed  $S_b$  definite dalle ascisse  $\pm z$  e dalla comune ordinata  $y$ , avremo:

per la simmetria (fig. 139 b):

$$(451) \quad \left\{ \begin{array}{lll} N_a = N_b & , & M_a = M_b & , & T_a = -T_b & , \\ \zeta_a = -\zeta_b & , & \varphi_a = -\varphi_b & , & \eta_a = \eta_b & , \end{array} \right.$$

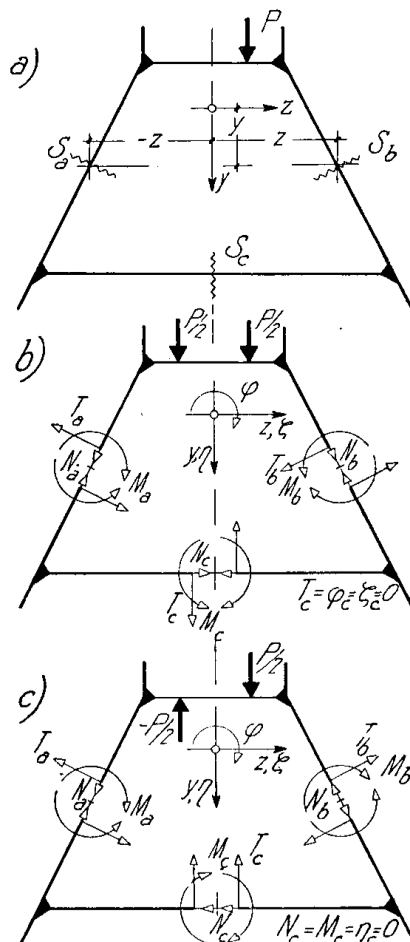


Fig. 138

cioè: le caratteristiche  $N$  ed  $M$  sono pari in  $z$ , la caratteristica  $T$  è dispari; la componente di spostamento parallela all'asse di simmetria  $y$  è pari in  $z$ , mentre la componente normale ad  $y$  e la rotazione sono dispari. In particolare per una sezione  $S_c$  sull'asse di simmetria dovendosi annullare le funzioni dispari in  $z$ , avremo:

$$(451') \quad T_c = 0 \quad , \quad \zeta_c = \varphi_c = 0 \quad ;$$

per l'antisimmetria (fig. 139 c):

$$N_a = -N_b \quad , \quad M_a = -M_b \quad , \quad T_a = -T_b \quad ; \\ \zeta_a = \zeta_b \quad , \quad \varphi_a = \varphi_b \quad , \quad \eta_a = -\eta_b \quad ,$$

cioè: le caratteristiche  $N$  ed  $M$  sono dispari in  $z$ , la caratteristica  $T$  è pari; la componente di spostamento parallela all'asse di simmetria  $y$  è dispari in  $z$ , mentre la componente normale ad  $y$  e la rotazione sono pari. In particolare per la sezione  $S_c$  si deduce:

$$(452') \quad N_c = M_c \quad , \quad \eta_c = 0 \quad .$$

Le (451) e (452), in particolare le (451') e (452') riducono l'effettivo grado d'iperstaticità, e perciò facilitano il calcolo.

Ad esempio, la travatura rappresentata in fig. 139 a, quattro volte staticamente indeterminata, potrebbe essere studiata assumendo come iperstatici momenti d'incastro  $X_A$  e  $X_B$ , il

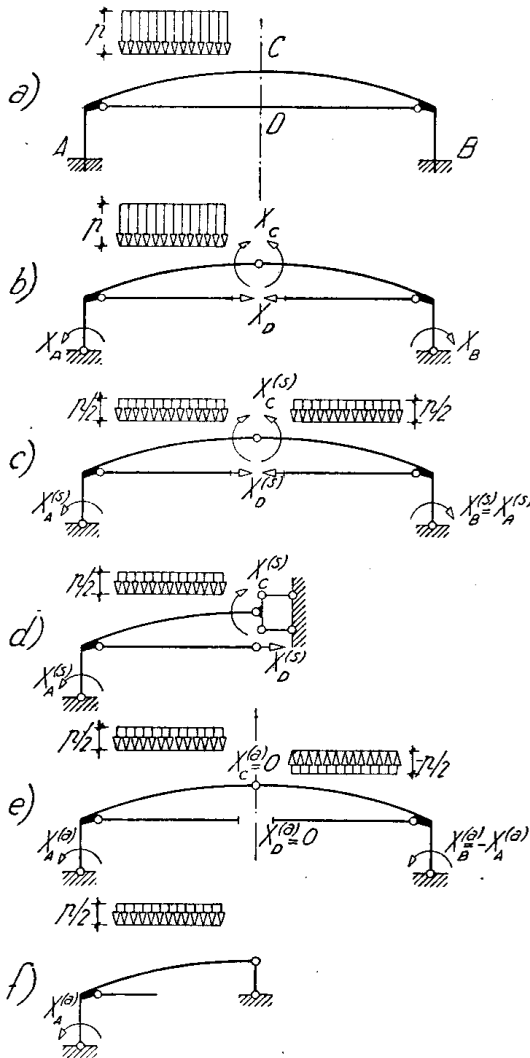


Fig. 139

momento flettente  $X_C$  nella chiave dell'arco e lo sforzo assiale  $X_D$  nella catena (fig. 139 b). Ma per il carico simmetrico, in base alle (451), è  $X_A = X_B$ , sicchè il sistema perde un'indeterminazione (fig. 139 c). Lo studio può allora limitarsi ad una mezza travatura con le iperstatiche  $X_A^{(s)}$ ,  $X_C^{(s)}$ ,  $X_D^{(s)}$  e vincolata come in fig. 739 d, in quanto, secondo le ultime due delle (451'), la sezione in  $C$  non ruota, nè si sposta orizzontalmente.

Per il carico antisimmetrico in virtù delle (452') è  $X_C = X_D = 0$ , sicchè tenuto conto delle (452), resta al sistema l'unica iperstatica  $X_A^{(a)} = -X_B^{(a)}$  (fig. 139 e). Anche qui lo studio può limitarsi ad una metà della travatura nelle condizioni di vincolo della figura 139 f cui porta la terza delle (452').



Talvolta conviene assumere come parametri iperstatici la semisomma e la semidifferenza di una data caratteristica della sollecitazione in due sezioni simmetriche. La matrice degli  $\eta_{ik}$  si spezza allora in due parti indipendenti, in quanto una delle parti si annulla per il carico simmetrico.

Nella travatura simmetrica della figura 140, ad esempio, potrebbero assumersi come incognite iperstatiche i momenti flettenti  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , ma convengono meglio gli altri parametri:

$$(453) \quad \begin{cases} X_a = (X_1 + X_4)/2, \\ X_b = (X_2 + X_3)/2, \\ X_c = (X_1 - X_4)/2, \\ X_d = (X_2 - X_3)/2. \end{cases}$$

Per carico simmetrico essendo  $X_1 = X_4$  e  $X_2 = X_3$  avremo:

$$X_c = X_d = 0$$

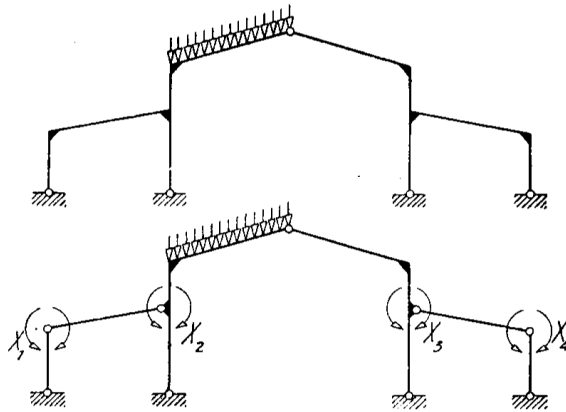


Fig. 140

mentre per carico antisimmetrico, con  $X_1 = -X_4$  e  $X_2 = -X_3$ , risulta:

$$X_a = X_b = 0$$

La matrice (400) prende allora la forma:

$$(454) \quad \left\{ \begin{array}{c|c|c|c} X_a & X_b & X_c & X_d \\ \hline \eta_{aa} & \eta_{ab} & 0 & 0 \\ \eta_{ba} & \eta_{bb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{cc} & \eta_{cd} \\ 0 & 0 & \eta_{dc} & \eta_{dd} \end{array} \right.$$

### 67 — Sistemi reticolari.

Certe travature possono, in prima approssimazione, assimilarsi a sistemi reticolari, cioè ad insiemi di travi collegate ai nodi mediante cerniere ideali prive di attrito.

È noto dalla statica che, indicati con  $a$  e  $v$  rispettivamente il numero delle travi e quello dei nodi, la definizione geometrica di uno schema reticolare importa come condizione necessaria:

$$(455) \quad a \geq 2v - 3 \quad \text{ovvero} \quad a \geq 3v - 6,$$

secondo che si tratti d'una travatura piana o spaziale; deve inoltre, essere diverso da zero il determinante detto di Föppl.

Quando le travi componenti una travatura soddisfacciano alle condizioni ora ricordate siano ad asse rettilineo, collegate ai nodi senza eccentricità e possa anche ammettersi che le forze esterne agiscano concentrate nei nodi dello schema, si annullano ovunque il momento flettente ed il taglio, mentre la caratteristica normale  $N$  rimane costante lungo l'asse delle singole travi; queste, per lo più a sezione costante, prendono allora la denominazione di *aste*.

Ove per l'asta generica sia costante il prodotto  $\alpha t_o$ , si indichi con  $\rho = s/EA$  l'estensibilità, con  $S$  lo sforzo normale effettivo e con  $S_m$  quello corrispondente ad una situazione d'equilibrio ipotetica qualsiasi, la (379) prende la forma propria dei sistemi reticolari:

$$(436) \quad P_m \eta_P + \sum C_m \Delta c = \sum S_m S \rho + \sum S_m \alpha t_o s .$$

In essa le somme al primo membro sono estese ai nodi gravati dai carichi d'esplorazione  $P_m$  ed a quelli in cui si sviluppano le relative reazioni  $C_m$ , mentre quelle al secondo membro si estendono a tutte le aste dello schema. È notevole che per essere ovunque nullo  $M_m$ , resta senza influenza la legge lineare con cui lo sbalzo termico varia nelle sezioni del sistema.

### 68 — Deformazioni delle travi reticolari.

Poichè le aste non si deformano altrimenti che variando di lunghezza in conseguenza delle dilatazioni assiali, la ricerca delle deformazioni d'una trave reticolare si riduce alla determinazione degli spostamenti dei nodi.

L'applicazione del metodo esposto al n° 53 porta ora a scrivere la (382) nella forma:

$$(457) \quad 1\eta^{(m)} = -\sum C_m \Delta c + \sum S S_m \rho + \sum S_m \alpha t_o s .$$

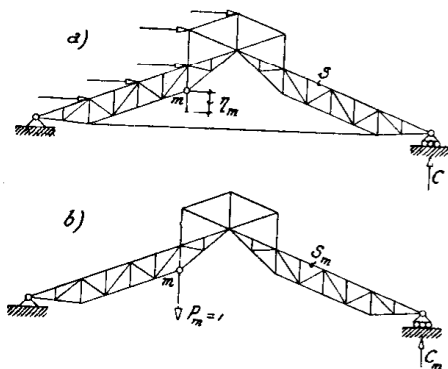


Fig. 141

Dato dunque un sistema reticolare, che per maggior generalità supporremo iperstatico, ma di cui sia noto l'equilibrio elastico, siano cioè conosciuti gli sforzi  $S$  effettivi nelle aste, i cedimenti anelastici dei vincoli  $\Delta c$  e le variazioni termiche  $\alpha t_o$ , eventualmente diverse per le varie aste, la determinazione della componente  $\eta^{(m)}$  dello spostamento di un nodo  $m$ , in una direzione assegnata, si effettua nel modo seguente (fig. 141 a): si libera la travatura dal carico effettivo e la si riduce ad un opportuno sistema principale (fig. 141 b); si applica quindi al nodo in questione

il carico d'esplorazione  $P_m=1$  nella direzione della componente cercata, e si determinano le reazioni  $C_m$  e gli sforzi  $S_m$  corrispondenti; si calcola infine il secondo membro della (457). Dello spostamento  $\eta^{(m)}$  conviene talvolta valutare separatamente le quote:

$$(458) \quad \eta_c^{(m)} = - \sum C_m \Delta c \quad , \quad \eta_P^{(m)} = \sum S S_m \rho \quad , \quad \eta_t^{(m)} = \sum S \alpha t_o s \quad ,$$

ordinatamente dovute ai cedimenti dei vincoli, all'azione dei carichi, ed alla situazione termica.

\* \* \*

Il lavoro di deformazione d'un sistema reticolare vale la somma dei lavori di deformazione delle aste, cioè:

$$(459) \quad \Phi_1 = \frac{1}{2} \sum S^2 \rho \quad .$$

Per il teorema di Castigliano pertanto lo spostamento del nodo cui sia applicato il carico  $P_m$ , valutato nella direzione del carico stesso, ha l'espressione:

$$(460) \quad \eta_P^{(m)} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial P_m} = \left( \sum \frac{S \partial S}{\partial P_m} \rho \right) P_m \quad .$$

Poichè è notoriamente  $\partial S / \partial P = S_m$ , confrontando quest'ultima con la seconda delle (458) si trova conferma che il metodo di Castigliano porta a valutare la quota di spostamento dovuta all'azione dei soli carichi.

Come applicazione determineremo lo spostamento orizzontale  $\delta$  del nodo  $C$  del sistema reticolare rappresentato in figura 142.

Immaginiamo applicato al nodo suddetto, oltre al carico effettivo  $P$ , una forza orizzontale  $H$ , e siano  $S$  gli sforzi nelle aste. Per la (460) lo spostamento cercato vale:

$$\delta = \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial H} \right)_{H=0} = \left( \sum S \frac{\partial S}{\partial H} \rho \right)_{H=0} \quad .$$

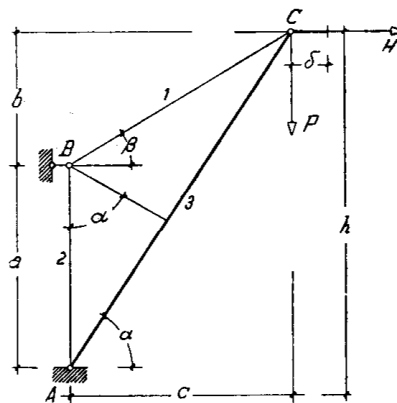


Fig. 142

Poichè con le notazioni della figura gli sforzi e le loro derivate rapporto ad  $H$  hanno le espressioni:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{a \cos \beta} (Pc + Hh) \quad , \quad \frac{\partial S_1}{\partial H} = \frac{h}{a \cos \beta} \quad , \\ S_2 &= \frac{\operatorname{tg} \beta}{a} (Pc + Hh) \quad , \quad \frac{\partial S_2}{\partial H} = \frac{h}{a \operatorname{ctg} \beta} \quad , \\ S_3 &= - \frac{1}{a \cos \alpha} (Pc + Hb) \quad , \quad \frac{\partial S_3}{\partial H} = - \frac{b}{a \cos \alpha} \quad , \end{aligned}$$

il calcolo della sommatoria fornisce successivamente:

$$\delta = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{h \rho}{\cos^2 \beta} (Pc + Hh) + \frac{h \rho_2}{\operatorname{ctg}^2 \beta} (Pc + Hh) + \frac{b \rho_3}{\cos^2 \alpha} (Pc + Hb) \right]_{H=0} =$$

$$= \frac{Pc}{a^2 \cos^2 \beta} [h (\rho_1 + \rho_2 \operatorname{sen}^2 \beta) + b \rho_3].$$

### 69 — Diagrammi di Williot.

Talvolta interessano gli spostamenti assoluti dei nodi d'una travatura anzichè le loro componenti secondo date direzioni; torna allora opportuno il seguente metodo grafico, dovuto al Williot.

Riferiamoci dapprima ad un elemento triangolare di travatura e supponiamo di aver già determinate le variazioni di lunghezza  $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ ,

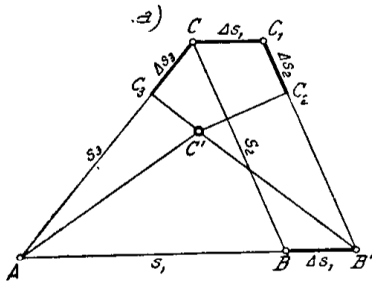
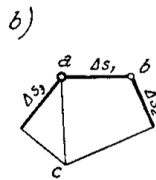


Fig. 143



dovute a cause qualsiasi, delle aste che lo costituiscono, rispettivamente di lunghezza  $s_1, s_2, s_3$ , (fig. 143 a). Per fissare le idee siano  $\Delta s_1$  positivo (allungamento),  $\Delta s_2$  e  $\Delta s_3$  negativi.

Per poter tracciare su questi dati lo schema deformato occorre fissare anzitutto un riferimento: stabiliremo che un nodo, ad esem-

pio  $A$ , rimanga fisso e che resti pure invariata una direzione passante per esso, per esempio la direzione  $AB$ .

Supposto rimosso in  $C$  il legame a cerniera, per l'allungamento  $\Delta s_1$  l'estremo  $B$  dell'asta  $s_1$  si porterà in  $B'$ ; l'estremo  $C$  dell'asta  $s_2$ , essendo  $\Delta s_2$  negativo, passerà prima in  $C_1$ , poi in  $C_2$ ; analogamente lo stesso estremo dell'asta  $s_3$  si porterà in  $C_3$ . Perchè ora questo punto ed il punto  $C_2$  vengano a coincidere in  $C'$  l'asta  $s_2$  deve ruotare intorno a  $B'$  e quella  $s_3$  intorno ad  $A$ ; ma agli archi di cerchio  $C_2C'$  e  $C_3C'$ , che debbono essere riguardati come infinitesimi, possono sostituirsi i loro segmenti di tangente in  $C_2$  e  $C_3$ , cioè le normali in questi punti a  $B'C_2$  e ad  $AC_3$ : il punto  $C'$ , nuova posizione di  $C$ , può cioè determinarsi come intersezione di dette normali. Lo spostamento assoluto di  $C$  sarà allora  $CC'$  ed il triangolo  $AB'C'$  sarà la configurazione deformata dell'elemento di travatura preso in esame.

La stessa ricerca può effettuarsi separatamente dallo schema della travatura, nel modo seguente (fig. 143 b).

Scelta una scala opportuna a rappresentare gli spostamenti, ed un polo  $a$  corrispondente al punto fisso  $A$ , portiamo da esso un segmento  $ab$  equipollente a  $\Delta s_1$ , nel senso  $AB$  perchè positivo: esso rappresenta lo spostamento del nodo  $B$ . Riportiamo poi da  $a$  e da  $b$  due segmenti equi-

pollenti rispettivamente a  $\Delta s_3$  ed a  $\Delta s_2$ , il primo nel senso  $CA$ , il secondo in quello  $CB$ , perchè entrambi *negativi*: se dai loro estremi tracciamo le normali ad essi, queste s'intersecano nel punto  $c$ , tale che il segmento  $ac$  rappresenta lo spostamento subito dal nodo  $C$  nella deformazione.

Il diagramma polare così ottenuto, i cui raggi  $ab, ac, \dots$ , uscenti dal polo  $a$  forniscono vettorialmente gli spostamenti dei nodi  $B, C, \dots$ , della travatura, prende il nome di *diagramma degli spostamenti* o *diagramma di Williot*.

Passiamo ora ad un sistema più complesso: quello ad esempio della travatura rappresentata in figura 144 a.

Per la condizione di carico indicata le aste 1, 3, 5, sono compresse, le rimanenti tese. Calcolate le variazioni di lunghezza  $\Delta s = S\rho$  conseguenti agli sforzi, in accordo ai vincoli imposti alla travatura riguardiamo fisso il nodo  $A$ , invariabile la direzione dell'asta 5, e procediamo alla costruzione del diagramma.

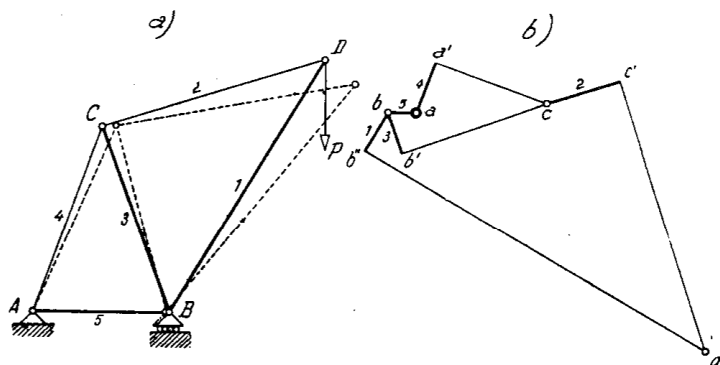


Fig. 144

A partire dal polo  $a$ , corrispondente al nodo fisso, portiamo nella direzione  $BA$ , perchè si tratta di un accorciamento, un segmento equipol-

lente a  $\Delta s_5$ : l'estremo  $b$  di esso corrisponde al nodo  $B$  della travatura. Per ottenere il punto  $c$  portiamo da  $a$  e da  $b$ , nel senso che risulta applicando la nota regola, segmenti equipollenti rispettivamente a  $\Delta s_4$  ed a  $\Delta s_3$ , e dagli estremi  $a'$  e  $b'$  di essi conduciamo le normali alle direzioni  $s_4$  ed  $s_3$ : queste s'intersecano nel punto  $c$ . Portando infine da  $c$  e da  $b$  segmenti equipollenti a  $\Delta s_2$  e  $\Delta s_1$ , e conducendo le normali per i loro estremi  $c'$  e  $b''$  si otterrà il punto  $d$ .

I segmenti  $\overline{ab}$ ,  $\overline{ac}$ ,  $\overline{ad}$ , del diagramma misurano, nella scala prefissata, gli spostamenti dei nodi  $A, B, C$ .

Riportando infine questi spostamenti sui corrispondenti nodi si può costruire lo schema della travatura deformata: ciò venne fatto nell'esempio adoperando una scala degli spostamenti dieci volte minore di quella usata per il Williot.

\* \* \*

Non sempre esiste un'asta uscente da un punto fisso della travatura,

la cui direzione rimanga invariata. Si assume allora provvisoriamente come direzione invariabile quella di un'asta qualunque uscente dal punto fisso: gli spostamenti che in questa ipotesi restano determinati dal diagramma non sono evidentemente quelli reali, ma differiscono da essi per una rotazione rigida di tutta la travatura intorno al nodo fisso, uguale a quella che l'asta supposta di direzione invariabile ha invece subito nella deformazione.

Nei singoli casi speciali le effettive condizioni di vincolo determinano l'ampiezza della suddetta rotazione.

Nell'esempio riportato in figura 145, riferentesi ad una incavallatura del tipo tedesco, la costruzione del Williot venne eseguita partendo dal

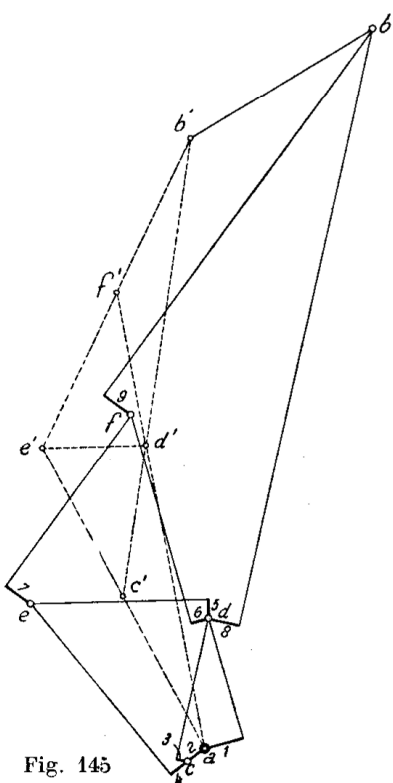
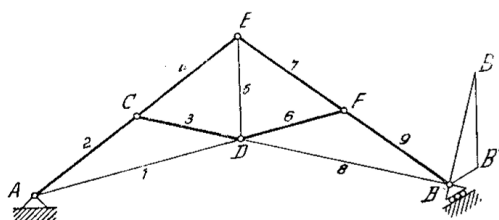


Fig. 145

nodo fisso  $A$ , nell'ipotesi che fosse invariabile la direzione dell'asta 2 del *puntone di falda*, ottenendone gli spostamenti  $\overline{ac}$ ,  $\overline{ad}$ ,  $\overline{ae}$ ,  $\overline{af}$ ,  $\overline{ab}$ . Ma il nodo  $B$  non può spostarsi che nella direzione del piano di scorrimento del carrello a cui è vincolato; la rotazione rigida di tutta la travatura intorno ad  $A$ , da sovrapporre agli spostamenti dati dal Williot per ottenere quelli effettivi, deve avere pertanto ampiezza tale da portare il suddetto nodo  $B$  sul piano di scorrimento.

Gli spostamenti conseguenti a tale rotazione avvengono su archi circolari di centro  $A$ , ai quali sostituiremo di regola le rispettive tangenti; essi avranno quindi direzione normale ai raggi  $CA$ ,  $DA$ ,  $FA$ ,  $BA$  che uniscono i vari nodi della travatura al nodo fisso, mentre saranno proporzionali alle lunghezze dei raggi stessi, dato che si tratta di una rotazione rigida.

Determiniamo anzitutto lo spostamento reale  $\overline{BB'} \equiv \overline{bb'}$  del nodo  $B$  come risultante dello spostamento  $\overline{BB''} \equiv \overline{ab}$  dato dal Williot e di quello  $\overline{B''B'} \equiv \overline{ab'}$  (seg-

mento della tangente in  $B$  alla circonferenza di centro  $A$  e raggio  $AB$ ) normale alla congiungente il punto  $B$  col centro di rotazione. Per ogni altro nodo, per esempio  $F$ , bisognerà analogamente comporre lo spostamento  $\overline{af}$  dato dal Williot con quello dovuto alla rotazione: quest'ultimo

definito in direzione dalla normale alla  $AF$  ed in grandezza dalla relazione:

$$\overline{af'} = (\overline{ab'} \cdot \overline{AF}) / \overline{AB} .$$

Ma se i punti  $f', e', d', \dots$ , devono trovarsi sulle normali per il polo  $a$ , rispettivamente ai raggi  $\overline{AF}, \overline{AE}, \overline{AD}, \dots$ , e ad una distanza da  $a$  proporzionale alle lunghezze dei raggi medesimi, il loro insieme individua uno schema simile a quello della travatura, rotato di  $90^\circ$  rispetto ad esso. Basterà pertanto costruire tale schema assumendo i punti  $a$  e  $b$  come nodi di estremità, per ottenere nei segmenti  $\overline{bb'}, \overline{cc'}, \overline{dd'}, \dots$ , gli spostamenti effettivi dei nodi.

\* \* \*

Se la travatura è relativamente estesa, iniziando la costruzione del diagramma da un nodo di estremità il disegno riesce ingombrante e poco preciso. Conviene allora partire da un nodo intermedio, che riterremo provvisoriamente fisso, assumendo come invariabile la direzione di un'asta qualunque uscente da esso: il diagramma darà gli spostamenti dei nodi, ancora a meno d'una rotazione che, come nel caso precedente, viene definita dalle condizioni di vincolo.

Valga come esempio il caso della figura 146, relativo ad una trave da ponte *semiparabolica*, di cui si vogliono le deformazioni corrispondenti all'azione di un carico verticale applicato al nodo  $F$  del *corrente inferiore*.

Determinati gli sforzi e quindi gli allungamenti elastici delle aste, si costruì il diagramma partendo dal nodo intermedio  $G$  considerato come fisso e supponendo invariabile la direzione dell'asta 8.

Se invece del punto  $g$ , si riguarda come polo del diagramma il punto  $a$  corrispondente al nodo  $A$  realmente fisso, si leggono gli spostamenti  $\overline{ac}, \overline{ad}, \dots, \overline{ab}$ , già depurati della traslazione  $\overline{ga}$ , cioè dello spostamento relativo tra il nodo fisso e quello supposto tale. Componendo poi i suddetti spostamenti

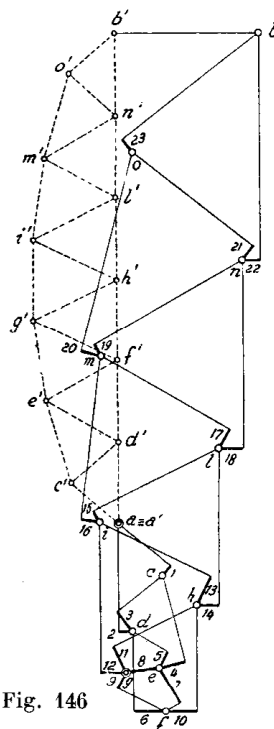
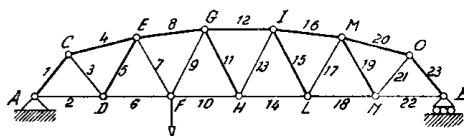


Fig. 146

ausiliari con quelli corrispondenti ad una rotazione rigida intorno ad  $A$  capace di annullare la componente di spostamento del nodo  $B$  non parallela al piano di scorrimento del carrello, otterremo gli spostamenti effettivi.

Guidiamo perciò da  $a \equiv a'$  la normale e da  $b$  la parallela a detto piano: avremo in  $\overline{bb'}$  lo spostamento effettivo di  $B$ . Costruito poi sulla  $\overline{a'b'} \equiv \overline{AB}$  lo schema simile a quello della travatura, rotato di  $90^\circ$ , i segmenti  $\overline{cc'}$ ,  $\overline{dd'}$ , ..., che vanno dai punti del diagramma ai nodi di questo schema, misurano gli spostamenti cercati.

### 70 — Metodo dei pesi elastici.

Se per i nodi d'un corrente - appartenente cioè al contorno superiore o a quello inferiore - d'una data travatura, e a partire da una fondamentale

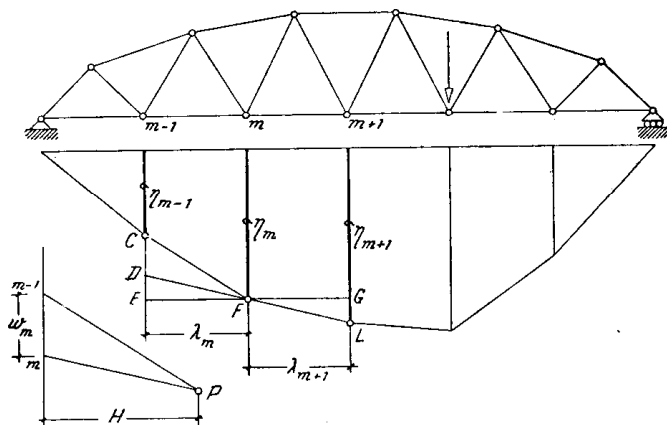


Fig. 147

rettilenea arbitraria (figura 147), si portano come ordinate in una direzione assegnata (verticale nel caso della figura) e in scala opportuna, gli spostamenti dei nodi valutati secondo tale direzione, e si uniscono con tratti di retta gli estremi delle successive ordinate, si ottiene un poligono d'inflessione di quel corrente.

Questo poligono, il cui tracciamento ricorre specialmente nella teoria dei ponti, potrebbe essere costruito previa determinazione degli spostamenti dei singoli nodi nella direzione voluta, eseguita per via analitica applicando ripetutamente il teorema dei lavori virtuali o quello di Castigliano, oppure graficamente, deducendo le componenti che interessano dagli spostamenti assoluti forniti da un diagramma di Williot; ma è più comodo tracciarlo come funicolare di certe forze parallele, chiamate *pesi elastici*, applicate ai nodi del corrente.

Supposto già costruito il poligono d'inflessione, si tracci una retta parallela alla direzione secondo cui si valutano gli spostamenti e da un polo  $P$  arbitrario si guidino le parallele ai successivi lati del poligono: esse staccano sulla retta indicata segmenti proporzionali alle forze che devono applicarsi ai successivi nodi del corrente, come si prova osservando che,



con le operazioni eseguite, si è semplicemente invertita la nota costruzione del poligono funicolare.

Con riguardo alla figura e detta  $H$  la distanza polare con cui s'immagina disegnato il poligono, avremo per il peso  $w_m$ , agente nel nodo  $m$ , l'espressione:

$$w_m = \frac{\overline{CD}}{\lambda_m} = H \frac{\overline{CD} - \overline{DE}}{\lambda_m};$$

o anche, osservando che è:

$$\overline{CE} = \eta_m - \eta_{m-1}, \quad \overline{DE} = \overline{GL} \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} = (\eta_{m+1} - \eta_m) \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}},$$

l'altra:

$$(459) \quad w_m = H \left( \frac{\eta_m - \eta_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\eta_{m+1} - \eta_m}{\lambda_{m+1}} \right),$$

la quale, *supposta unitaria la distanza polare*, può scriversi:

$$w_m = -\frac{1}{\lambda_m} \eta_{m-1} + \left( \frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}} \right) \eta_m - \frac{1}{\lambda_{m+1}} \eta_{m+1}.$$

Applichiamo ora ordinatamente ai nodi  $m-1$ ,  $m$  ed  $m+1$  le forze (fig. 148 a):

$$-\frac{1}{\lambda_m}, \quad \frac{1}{\lambda_m} + \frac{1}{\lambda_{m+1}}, \quad -\frac{1}{\lambda_{m+1}},$$

dirette cioè: verso l'alto le estreme, verso il basso quella intermedia. Per le forze-tensioni corrispondenti a questa condizione fittizia di carico e per gli spostamenti-deformazioni reali, scriviamo poi l'equazione dei lavori virtuali sotto la forma:

$$(460) \quad \sum P_m \eta + C_m \Delta c = \sum S_m S \rho$$

a cui si riduce la (456) ove si prescinda dalla variazione termica.

Poichè i tre carichi fittizi considerati costituiscono un sistema in equilibrio, i vincoli della travatura non reagiscono; il primo membro dell'equazione, cioè il lavoro virtuale esterno, sarà perciò uguale alla somma dei

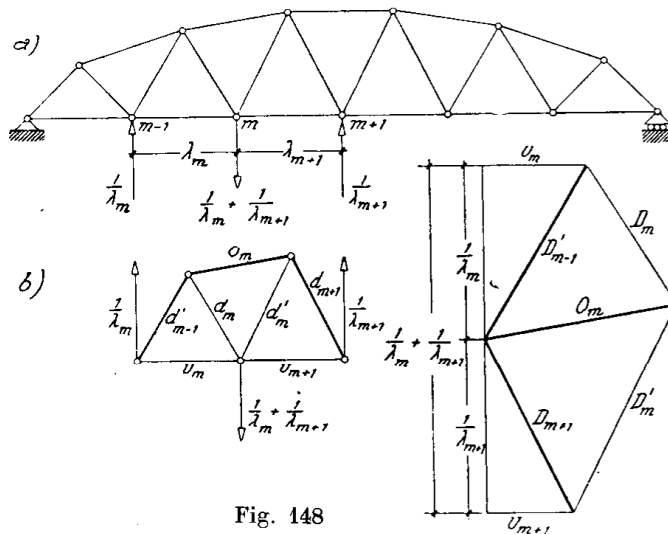


Fig. 148

lavori compiuti dalle suddette tre forze, per gli spostamenti reali:

$$\eta_{m-1} \quad , \quad \eta_m \quad , \quad \eta_{m+1} \quad ,$$

dei nodi cui sono applicate: sarà cioè fornito dalla stessa (459) che esprime il peso elastico  $w_m$ .

La (460), che allora scriveremo:

$$(461) \quad w_m = \sum S_m \Delta s \quad ,$$

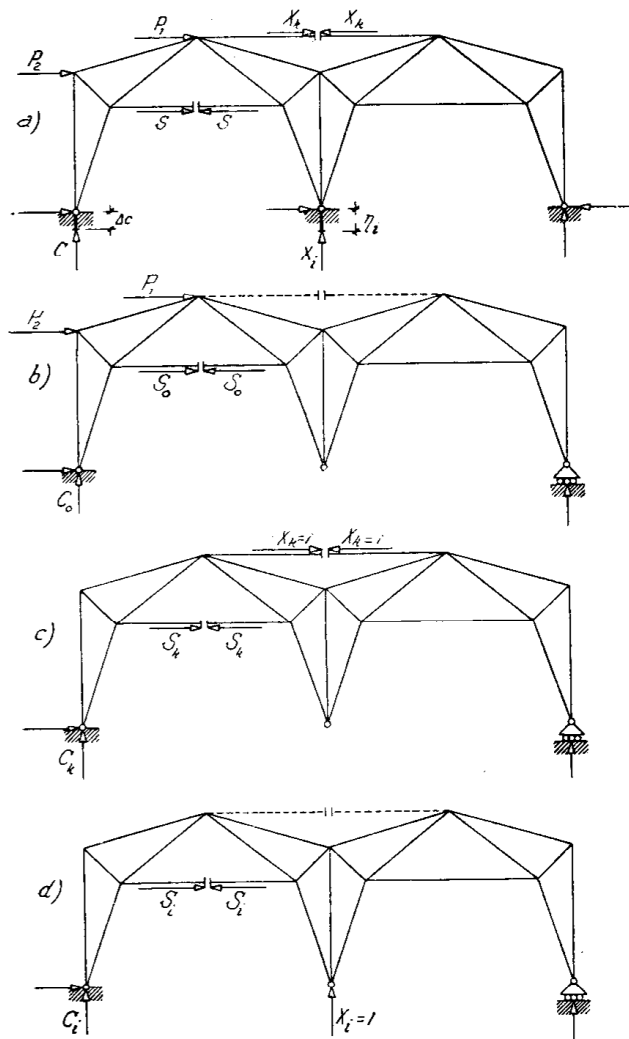


Fig. 149

indicandovi con  $\Delta s = S_p$  gli allungamenti effettivi e con  $S_m$  le forze nelle aste corrispondenti alla condizione fittizia di carico, può essere utilizzata per il calcolo dei pesi elastici. La sommatoria al secondo membro risulta limitata alle poche aste che entrano in tensione per il carico fittizio (fig. 148 b).

Calcolati i pesi  $w_m$ , il loro poligono funicolare costruito con distanza polare uguale all'unità dei pesi elastici, colle sue ordinate lette a partire da una fondamentale di riferimento da stabilirsi con riguardo alle condizioni di vincolo della travatura, fornirebbe le inflessioni del corrente *nella scala del disegno*; lo effettivo tracciamento si farà invece con una distanza polare  $\zeta$

volte minore, in modo che le ordinate risultino in scala  $\zeta$  volte più grande di quella delle lunghezze.

### 71 — Travature reticolari iperstatiche.

Il grado d'indeterminazione d'una travatura iperstatica avente  $v$  condizioni di vincolo,  $n$  nodi ed  $a$  aste è fornito dalla relazione:

$$(462) \quad n = a + v - 2v \quad \text{per travatura piana,}$$

ovvero dall'altra:

$$(463) \quad n = a + v - 3v \quad \text{per travatura spaziale.}$$

Al solito le iperstatiche possono essere tutte esterne (condizioni di vincolo sovrabbondanti) o tutte interne (aste sovrabbondanti) o parte dell'uno e parte dell'altro tipo. La distinzione tra iperstatiche esterne ed interne è ancora inessenziale, come si riconosce sostituendo i vincoli semplici con aste di vincolo, eventualmente indeformabili ove si tratti di vincoli rigidi.

La (391), espressione dello spostamento del punto cui è applicata la iperstatica  $X_i$  nella direzione dell'iperstatica stessa, notando ora che, per le ipotesi fatte, detto punto può considerarsi sempre coincidente con un nodo della travatura, diviene (fig. 149):

$$(464) \quad 1. \eta^{(i)} = - \sum C_i \Delta c + \sum S S_i \rho + \sum S_i \alpha t_o s ;$$

osservando poi che:

$$(465) \quad \eta_{ic} = - \sum C_i \Delta c \quad , \quad \eta_{it} = \sum S_i \alpha t_o s$$

e tenuto presente che per la (392) è inoltre  $S = S_o + \sum_{k=1}^n S_k X_k$ , alle equazioni di elasticità d'una travatura reticolare iperstatica può darsi la forma:

$$(466) \quad 1. \eta^{(i)} = \eta_{ic} + \eta_{it} + \sum S_i S_o \rho + \sum_{k=1}^n X_k \sum S_i S_k \rho ,$$

che poteva dedursi direttamente come caso particolare della (394).

Conviene ricordare che  $S_i$  e  $C_i$  sono gli sforzi e le reazioni per il carico d'esplorazione  $X_i=1$  (fig. 149 d), mentre  $S$  sono gli sforzi effettivi nelle aste,  $\eta^{(i)}$  e  $\Delta c$  gli spostamenti - assegnati - dei punti d'applicazione della  $X_i$  e della  $C_i$ , valutati nelle rispettive direzioni (fig. 149 a).

Per scrivere il sistema delle equazioni di elasticità occorre dunque conoscere  $n+1$  sistemi di sforzi nelle aste della travatura principale: il primo per gli  $S_o$ , relativo ai carichi assegnati, gli altri  $n$  per gli  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , relativi agli  $n$  carichi d'esplorazione  $X_1=1, X_2=1, \dots, X_n=1$ ; determinazione che nel modo migliore si effettua costruendo altrettanti cremoniani.

Conviene introdurre gli altri spostamenti:

$$(467) \quad \eta_{ia} = \eta_{ic} + \eta_{it} = - \sum C_i \Delta c + \sum S_i \alpha t_o s \quad , \quad \eta_{io} = \sum S_i S_o \rho \quad , \quad \eta_{ik} = \sum S_i S_k \rho$$

e dare alle equazioni la solita forma (389) di Müller-Breslau:

$$(468) \quad \eta^{(i)} = \eta_{ia} + \eta_{io} + \sum_{k=1}^n X_k \eta_{ik} .$$

Volendo poi separare l'effetto dei carichi dallo stato di autotensione si risolveranno separatamente i sistemi:

$$(469) \quad 0 = \eta_{i0} + \sum_{k=1}^n X_k \eta_{ik} ,$$

$$(470) \quad \eta^{(i)} = \eta_{i0} + \sum_{k=1}^n X_k \eta_{ik} .$$

Valgono naturalmente per i coefficienti e per i termini noti delle equazioni le avvertenze di cui ai n.ri 56 e 57.

Talvolta la soppressione dei legami interni sovrabbondanti, necessaria per trasformare la travatura iperstatica nella travatura principale, si effettua togliendo dallo schema le aste sovrabbondanti (fig. 150 a) anzichè rendendole inattive mediante un taglio ovvero svincolandole ad una delle loro estremità pur conservandole nello schema (fig. 150 b). Ciò è indifferente per la determinazione statica della travatura, ma non lo è nei confronti del lavoro virtuale del carico d'esplorazione  $X_i = 1$ , ossia dello spostamento effettivo espresso dalla (469).

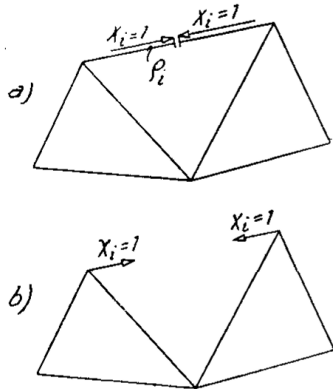


Fig. 150

Nel primo caso, infatti, quando l'asta s'immagina resa inattiva, ma sempre appartenente allo schema, il lavoro virtuale che compete ad essa è incluso nel lavoro interno al secondo membro; il lavoro esterno è invece nullo, perchè i punti d'applicazione delle due forze  $X_i$  uguali ed opposte sono coincidenti nel sistema effettivo e tali restano nella deformazione ( $\eta^{(i)} = 0$ ).

Se invece l'asta s'immagina soppressa e quindi la sua azione sostituita da forze  $X_i$  applicate ai suoi nodi terminali, il suo lavoro virtuale figura al primo membro come lavoro esterno; in tal caso infatti lo spostamento  $\eta^{(i)}$  è uguale alla variazione di lunghezza che l'asta iperstatica subisce nella deformazione effettiva. Osservando poi che, indipendentemente dall'essere l'asta iperstatica un tirante ( $X_i > 0$ ) o un puntone ( $X_i < 0$ ), le forze  $X_i$  agiscono sulla travatura sempre in senso opposto allo spostamento  $\eta^{(i)}$  richiesto dalla variazione di lunghezza - positiva o negativa - dell'asta, occorrerà scrivere detto lavoro sempre col segno negativo, cioè  $1\eta^{(i)} = -X_i \rho_i$ .

Tenuta presente la (459), la  $i^{ma}$  equazione d'elasticità:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial X_i} = 0 ,$$

ottenuta applicando il teorema di Menabrea, diviene:

$$\sum S_{\rho} \frac{\partial S}{\partial X_i} = 0 ,$$

cioè, osservando che, per le (393), la derivata  $S$  rapporto ad  $X_i$  è uguale alla forza  $S_i$ :

$$\sum S_i S_{\rho} = 0 ,$$

o ancora:

$$\sum S_o S_{i\rho} + \sum_{k=1}^n X_k \sum S_k S_{i\rho} = 0 ,$$

che è appunto la (469).

\* \* \*

Per calcolare i coefficienti ed i termini noti delle equazioni d'elasticità occorre conoscere le aree delle sezioni trasversali delle aste, le quali sono invece incognite nella fase di progetto. Si introducono allora valori provvisori, in base al confronto con opere analoghe a quelle in istudio od a criteri pratici, e si correggono poi con approssimazioni successive. Quando manchino più precisi riferimenti si può prescindere, in prima approssimazione, dalla presenza delle *aste di parete* ed ammettere che le rimanenti *aste di contorno* abbiano tutte la medesima sezione. Per una travatura a vincoli perfetti, alle estensibilità possono allora sostituirsi i rapporti  $\rho_s = s/E$ , o addirittura le lunghezze  $s$  delle aste, se la travatura è tutta dello stesso materiale. Più spesso si ammette una sezione comune a tutte le aste del contorno superiore ed un'altra a tutte quelle del contorno inferiore.

## 72 — Influenza di variazioni termiche o di montaggio difettoso.

Supposto ottenuto il sistema principale tagliando ovvero svincolando ad una delle estremità, anzichè sopprimendo, le aste iperstatiche, le (470) nella forma ridotta:

$$(471) \quad 0 = \eta_{it} + \sum_{k=1}^n X_k \eta_{ik} ,$$

con

$$(472) \quad \eta_{ik} = \sum S_i \alpha t s ,$$

valgono a studiare l'effetto separato di una variazione di temperatura, eventualmente diversa da asta ad asta.

Le (471) e (472) si prestano anche a studiare l'influenza del montaggio difettoso di una o più aste.

Un'asta d'una travatura iperstatica, la cui lunghezza sia diversa da quella richiesta dallo schema geometrico – sempre che tale diversità rientri nell'ordine di grandezza delle deformazioni elastiche – può essere montata sottoponendola a sforzi, i quali ovviamente faranno entrare in tensione anche altre aste del sistema. Hanno così origine gli *sforzi di montaggio* o *sforzi iniziali*.

Potremo assimilare la deficienza di lunghezza  $\delta_s$  di un'asta all'effetto d'una diminuzione di temperatura, tale che sia:

$$\delta_s = \alpha t s ;$$

le (472) prendono allora la forma:

$$(473) \quad \eta_{it} = \sum S_i \delta_s ,$$

con tanti termini nella sommatoria, quante sono le aste difettose.

### 73 — Esempio di risoluzione di travature iperstatiche.

A titolo di applicazione risolveremo un sistema elasticamente semplicemente iperstatico: l'arco reticolare a spinta eliminata rappresentato in figura 151.

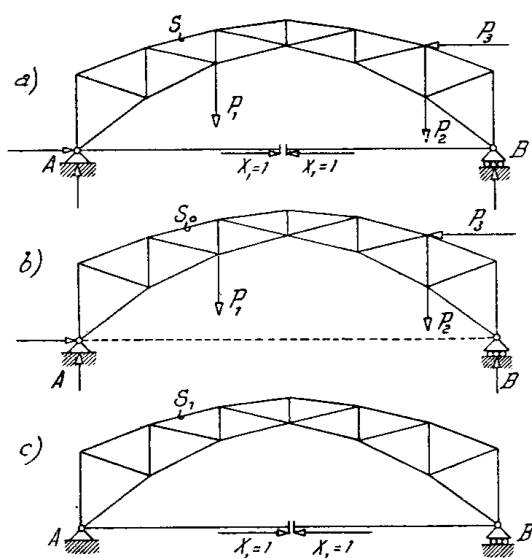


Fig 151

Tale sistema, esternamente isostatico, presenta un'asta sovrabbondante; assumendo come tale la *catena AB*, cioè come incognita iperstatica la tensione  $X_1$  in essa, il sistema principale corrispondente è una trave reticolare ad arco, semplicemente appoggiata agli estremi (fig. 151 b).

La relativa equazione dei lavori virtuali nella forma (469) può allora scriversi:

$$0 = \sum S_o S_i \rho + X_1 \sum S_i^2 \rho ,$$

avendo incluso nell'ultima sommatoria al secondo membro, come la-

avoro esterno, il lavoro virtuale della forza  $X_1 = 1$ .

Da essa si ricava:

$$X_1 = - \frac{\sum S_o S_i \rho}{\sum S_i^2 \rho} .$$

Per risolvere il sistema si devono dunque costruire due cremoniani

della travatura principale: il primo per ricavare le forze  $S_0$  dovute al carico assegnato, il secondo per ricavare le  $S_1$  dovute alla condizione di carico  $X_1 = 1$ . Introducendo i valori così ottenuti nelle sommatorie e calcolata la  $X_1$ , le forze effettive  $S$  si possono ottenere applicando la prima delle (393), che ora diviene:

$$(475) \quad S = S_0 + S_1 X_1 ,$$

oppure mediante un terzo cremoniano costruito per il carico dato e per la forza  $X_1$ , ormai nota.

\* \* \*

Consideriamo l'altro sistema reticolare semplicemente iperstatico rappresentato in figura 152a: un triangolo equilatero di contorno, i cui vertici sono collegati al centro  $O$  da aste formanti la parete.

Supposto il sistema omogeneo e le aste tutte della medesima sezione  $A$ , si tratta di determinare le forze  $X_1$  ed  $S$ , rispettivamente nelle aste di contorno ed in quelle di parete, dovute a tre carichi  $P$  uguali, applicati ai vertici dello schema e diretti come in figura.

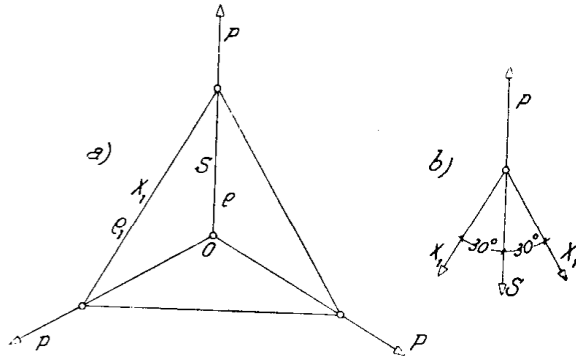


Fig. 152

Il lavoro di deformazione della travatura è, per la (459):

$$\Phi_1 = \frac{3}{2} (S^2 \rho + X_1^2 \rho_1) ;$$

l'unica equazione d'elasticità cui conduce il teorema di Menabrea:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial X_1} = 0$$

è pertanto:

$$S \rho \frac{\partial S}{\partial X_1} + X_1 \rho_1 = 0 ,$$

o anche, moltiplicando per  $EA$ :

$$S \frac{\partial S}{\partial X_1} s + X_1 s_1 = 0 .$$

L'equilibrio alla traslazione di un nodo di contorno nella direzione

del carico  $P$  ad esso applicato (fig. 152 *b*), conduce all'equazione:

$$P = S + 2 X_1 \cos 30^\circ = S + X_1 \sqrt{3} ,$$

che, derivata rispetto ad  $X_1$ , fornisce:

$$\frac{\partial S}{\partial X_1} = -\sqrt{3} .$$

Con riguardo a questa ed osservando che è  $s_1 = s\sqrt{3}$ , si ottiene:

$$-S s \sqrt{3} + X_1 s \sqrt{3} = 0 ,$$

di modo che risulta:

$$X_1 = S = \frac{P}{1 + \sqrt{3}} .$$

---