

CAPITOLO VIII

I METODI ENERGETICI APPLICATI ALLE TRAVATURE

50 — L'equazione dei lavori virtuali per le travature.

Le *travature* sono complessi resistenti ottenuti mediante opportuno collegamento di travi ad asse rettilineo, poligonale o curvo, a sezione costante o variabile. Diconsi *nodi* della travatura i punti ove s'intersecano gli assi di due o più travi.

Vogliamo studiare coi metodi generali della teoria dell'elasticità questi particolari sistemi elastici, tra i quali naturalmente possono farsi rientrare quelli più semplici precedentemente trattati. Ci limitiamo a considerare sistemi costituiti da travi piane e complanari, simmetrici e simmetricamente caricati rispetto al loro piano medio.

Nella sezione retta generica di una trave qualunque appartenente ad una travatura del tipo ora definito le caratteristiche della sollecitazione si riducono al più alle seguenti: un momento flettente M , una forza normale N ed una forza tagliante T . Dei parametri della tensione in un punto qualunque appartenente alla suddetta sezione, due soli saranno allora diversi da zero: la tensione normale, somma delle due dovute alla forza N ed al momento M , espressa (343/I), e quella tangenziale dovuta al taglio, esprimibile in via di approssimazione mediante la (302/I).

Quanto alle forze esterne generanti nel sistema le suddette tensioni considereremo (fig. 118):

carichi ripartiti $p(s)$, distribuiti in generale con legge arbitraria sopra la lunghezza s degli assi delle travi componenti;

carichi concentrati P ;

momenti esplicitamente applicati μ ;

componenti finite di reazioni dei vincoli C ;

momenti d'incastro m .

Ciò posto, indicando per una qualunque deformazione virtuale del sistema con η_p^* , η_P^* , Δc^* , rispettivamente lo spostamento del punto in corrispondenza del quale il diagramma del carico distribuito ha l'ordinata generica p , dei punti d'applicazione del carico P e della reazione C , spostamenti ciascuno valutato nella direzione della forza che agisce nel punto cui si riferisce; e ancora con φ^* e ϑ^* le rotazioni rispettivamente della sezione alla quale è applicato il momento μ e di quella dell'incastro in cui

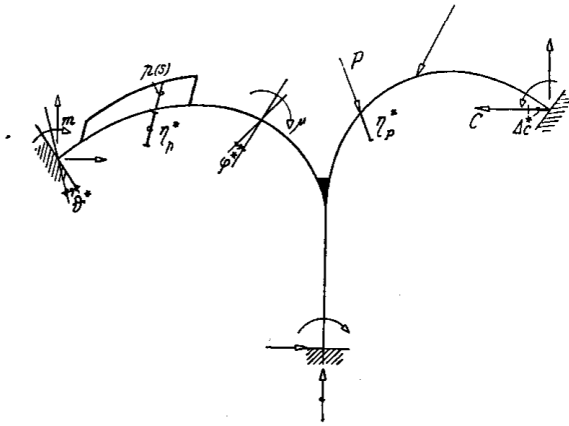


Fig. 118

agisce il momento m , il primo membro della 73/I diviene:

$$\int_V (\sum_i Y_i v_i^*) dV + \int_S [\sum_i (F_i + R_i) v_i^*] dS = \int_s p \eta_p^* ds + \sum P \eta_P^* + \sum \mu \varphi^* + C \Delta c^* + \sum m \vartheta^*.$$

Quanto al secondo membro, osserviamo anzitutto che, nelle ipotesi fatte circa la condizione di carico, non vi figurano che i termini contenenti la $\sigma_x = \sigma$ e la $\tau_{yx} = \tau$; che inoltre, tenendo conto di un'eventuale variazione di temperatura di t^o da quella di costruzione, è:

$$\epsilon_x^* = \epsilon^* = \frac{\sigma^*}{E} + (\alpha t)^* \quad , \quad \gamma_{yx}^* = \gamma^* = \frac{\tau^*}{G} ;$$

o ancora esprimendo le tensioni σ^* e τ^* , che corrispondono alla deformazione virtuale supposta, in funzione delle caratteristiche della sollecitazione N^* , M^* e T^* capaci di provocare:

$$\epsilon = \frac{N^*}{EA} + \frac{M^* y}{EJ} + (\alpha t)^* \quad , \quad \gamma^* = \frac{1}{G} \frac{T^* S_r}{J b_r} .$$

Con ciò, detto secondo membro diviene successivamente:

$$(377) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_V (\sum_{ik} \sigma_{ik} \epsilon_{ik}^*) dV = \int_V (\sigma \epsilon^* + \tau \gamma^*) dV = \int_V \left(\frac{N}{A} + \frac{My}{J} \right) \left[\frac{1}{E} \left(\frac{N^*}{A} + \frac{M^* y}{J} \right) + \right. \\ & \left. + (\alpha t)^* \right] dV + \int_V \frac{T}{G} \frac{T^* S_r^2}{J^2 b_r^2} dV = \int_s \frac{NN^*}{EA} ds \int_A dA + \int_s \frac{NM^*}{EAJ} ds \int_A y dA + \\ & + \int_s \frac{MN^*}{EAJ} ds \int_A y dA + \int_s \frac{MM^*}{EJ^2} ds \int_A y^2 dA + \int_s \frac{N(\alpha t)^*}{A} ds \int_A dA + \\ & + \int_s \frac{M}{J} ds \int_A y (\alpha t)^* dA + \int_s \frac{TT^*}{GA} \frac{1}{A \varphi^2} ds \int_A \left(\frac{S_r}{b_r} \right)^2 dA . \end{aligned} \right.$$

Ammetteremo lo sbalzo termico t , che supponiamo contribuisca alla deformazione virtuale, costante per tutti gli elementi della sezione generica definiti da una certa y , ossia per i punti di una medesima corda parallela all'asse neutro e che inoltre esso vari linearmente tra i valori t_i^* e t_e^* relativi ai lembi della sezione (fig. 119); detto t_o^* il suo valore in corrispondenza degli elementi dello strato neutro, riterremo cioè valida la legge:

$$t^* = t_o^* + \frac{t_i^* - t_e^*}{h} y = t_o^* + \frac{\Delta t^*}{h} y .$$

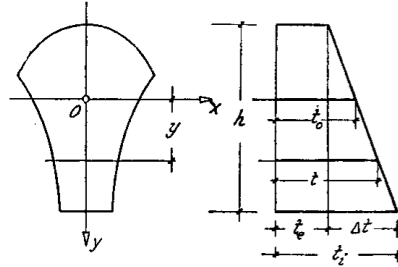


Fig. 119

cosicchè:

$$\int_A y t^* dA = \int_A t_o^* y dA + \int_A \frac{\Delta t^*}{h} y^2 dA = \frac{\Delta t^*}{h} J ,$$

essendo, com'è noto, $\int_A y dA = 0$, $\int_A y^2 dA = J$.

Tenuto conto ancora dell'espressione (308/I) del fattore di taglio χ , il detto secondo membro può scriversi:

$$\int_s \frac{NN^*}{EA} ds + \int_s \frac{MM^*}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{TT^*}{GA} ds + \int_s N \alpha t_o^* ds + \int_s \frac{M \alpha \Delta t^*}{h} ds ,$$

sichè l'equazione dei lavori virtuali diviene:

$$(378) \quad \int_s p r_p^* ds + \sum P r_p^* + \sum \mu \varphi^* + \sum C \Delta c^* + \sum m \vartheta^* = \\ = \int_s \frac{NN^*}{EA} ds + \int_s \frac{MM^*}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{TT^*}{GA} ds + \int_s N \alpha t_o^* ds + \int_s \frac{M \alpha \Delta t^*}{h} ds .$$

In essa i simboli privi di asterisco si riferiscono ad un sistema di forze-tensioni qualunque, purchè equilibrato, quelli segnati con asterisco ad una deformazione virtuale qualsiasi.

La (378) viene correntemente impiegata nella ricerca delle deformazioni dei sistemi elastici: sia che tale ricerca abbia fine a sè stessa, sia che essa occorra per la determinazione di incognite iperstatiche.

All'uopo sceglieremo:

come sistema di forze-tensioni, quello equilibrato corrispondente ad una opportuna condizione ipotetica di carico: e distingueremo con l'indice m i relativi carichi e caratteristiche della sollecitazione [simboli privi di asterisco nella (378)] ;

come deformazione virtuale, quella effettiva, dovuta alla reale condizione di carico: e scriveremo senza asterisco i relativi spostamenti, caratteristiche della sollecitazione e della variazione termica [simboli asteriscati nella (378)]. L'equazione prende così l'altra forma:

$$(379) \quad \int_s \mu_m \eta_{IP} ds + \sum P_m \eta_{IP} + \sum \mu_m \varphi + \sum C_m \Delta c + \sum m_m \vartheta = \\ = \int_s \frac{N_m N}{EA} ds + \int_s \frac{M_m M}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{T_m T}{GA} ds + \int_s N_m \alpha t_o ds + \int_s M_m \frac{\alpha \Delta t}{h} ds .$$

51 — Travature iperstatiche.

Una travatura è *staticamente determinata esternamente* se le equazioni d'equilibrio bastano a determinarne le reazioni dei vincoli; se le stesse equazioni bastano a determinare anche le caratteristiche della sollecitazione relativa ad una sezione qualunque, il sistema è pure *staticamente determinato internamente*. Nel caso contrario esso è *staticamente indeterminato*, e c'è ancora modo ad una distinzione in corrispondenza dei due casi precedenti, senza che con questo le due indeterminazioni (interna ed esterna) non possano non presentarsi insieme.

Il grado d'indeterminazione statica d'una travatura può accertarsi rapidamente nel modo seguente.

Si suddivida il sistema in parti tra loro indipendenti mediante tagli arbitrari, ma tali che in ciascuna parte non restino maglie chiuse, nè legami esterni sovrabbondanti.

Se le parti così ottenute sono isostatiche, possiedono cioè tre condizioni di vincolo, e se nessuna di essa presenta sconnessioni di sorta, il grado d'indeterminazione è uguale alla somma dei legami semplici sciolti con i tagli. Detto t il numero di questi e supposto trattasi di tagli completi, eseguiti cioè in corrispondenza di sezioni già prive di sconnessioni e perciò implicanti in generale tre legami distinti, il grado d'indeterminazione cercato sarà $n = 3t$.

Se invece vi sono parti che in seguito ai tagli divengono ipostatiche per insufficienza di vincoli esterni o per la preesistenza di sconnessioni, le corrispondenti libertà di movimento debbono detrarsi dal computo precedente. Convien all'uopo riguardare come sconnessioni anche i vincoli implicanti meno di tre condizioni, precisamente come:

sconnessioni semplici, per i vincoli doppi (per lo più appoggi fissi o cerniere);

sconnessioni doppie, per i vincoli semplici (per lo più appoggi semplici o pendolari);

sconnessioni triple, in assenza di vincolo, per le parti eventualmente rimaste libere da ogni legame esterno nel sistema trasformato. È chiaro poi che una sconnessione preesistente comune a più travi implica un numero complessivo di libertà di movimento uguale al prodotto del suo grado per il numero delle travi per cui essa è operante.

Tenute presenti queste avvertenze ed indicando con $\sum s = \sum s_1 + \sum s_2 + \sum s_3$ il numero complessivo delle libertà di movimento nelle varie parti del sistema tagliato, il grado d'indeterminazione d'una travatura si esprime nel modo più generale nella forma:

$$(380) \quad n = 3t - \sum s .$$

Talvolta conviene eseguire i tagli in modo da ridurre a tre sole tutte le condizioni di vincolo esterno e da aprire tutte le maglie del sistema, che resta così trasformato in un complesso unico ramificato, esternamente isostatico, comprendente in generale anche appendici labili. Per computare, come si è detto, tra le sconnessioni $\sum s$ le eventuali libertà di movimento dei rimanenti vincoli conviene immaginare i relativi tagli eseguiti non in corrispondenza dei vincoli stessi, ma esternamente ad essi.

Alcuni esempi chiariamo meglio il criterio ora esposto.

I sette tagli, indicati con numeri progressivi nella travatura rappresentata in figura 120 a, suddividono il sistema in cinque mensole semplici o ramificate, tutte isostatiche. Il grado d'indeterminazione statica è pertanto $n = 3 \times 7 = 21$.

Gli stessi sette tagli suddividono l'altra travatura di figura 120 b ancora in cinque parti. Di queste però soltanto la IV è isostatica, mentre le rimanenti, I, II, III e V sono ipostatiche, rispettivamente con 1, 1, 2 e 1 sconnessioni semplici del tipo $M=0$, in complesso $\sum s = \sum s_i = 5$ libertà di movimento. Applicando la (380) troviamo perciò $n = 3 \times 7 - 5 = 16$.

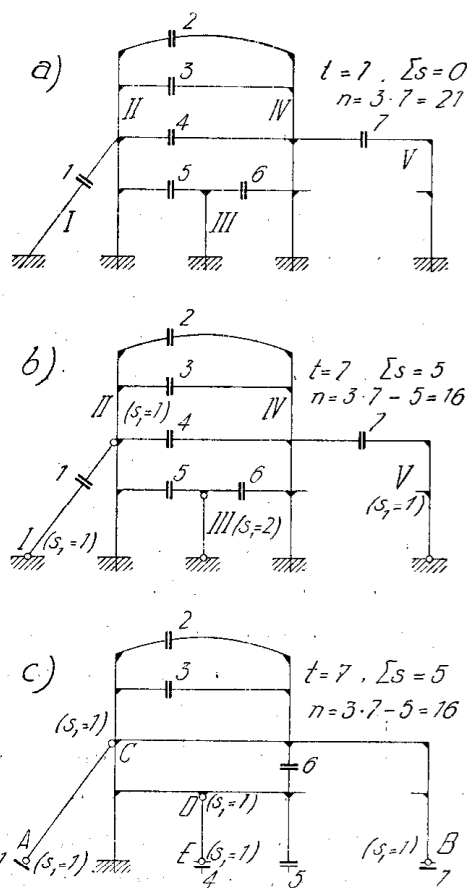


Fig. 120

Il risultato rimane inalterato se, per la stessa travatura ora considerata, i tagli, ancora in numero di sette, vengono eseguiti come in fig. 120 c, in modo cioè da trasformare la travatura in un sistema unico ramificato, a mensola. I tagli 1, 4, 5 e 7 sono eseguiti esternamente ai vincoli, sic-

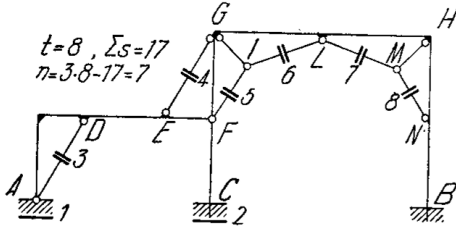


Fig. 121

chè le sconnessioni da computare in detrazione sono tutte semplici del tipo $M=0$: interne quelle in C e D, di vincolo quelle in A, E e B.

La travatura rappresentata in figura 121 può essere ridotta ad un sistema a mensola mediante otto tagli, di cui i primi due indicati esterni ai

vincoli e tutti i seguenti in corrispondenza di travi incernierate agli estremi. Le parti labili del sistema così trasformato comportano le seguenti sconnessioni semplici: due per ciascuna delle sei travi tagliate, una prima in F per la parte AF, una seconda in F per la trave CF, una in G per la trave IG, una in H per la trave MH ed un'ultima in A per il vincolo a cerniera: in totale diciassette. Il grado d'indeterminazione è quindi $n=3 \times 8 - 17 = 7$.

Gli ultimi esempi riportati in figura 122 si riferiscono a schemi staticamente diversi di una stessa *trave Vierendeel* esternamente isostatica.

Lo schema della figura 122 a si rende isostatico anche internamente mediante cinque tagli atti ad aprire tutte le maglie, pur lasciando collegato il sistema. Il relativo grado d'indeterminazione è quindi $3 \times 5 = 15$.

Nello schema della figura 122 b il *corrente inferiore* è articolato a cerniera all'estremità in ciascun campo. Gli stessi tagli precedenti danno luogo ad un sistema vincolato come l'intera travatura, ma di cui è necessario stabilire il grado di labilità. Questo è uguale al numero delle cerniere, $\Sigma s = \Sigma s_i = 10$, sicchè il grado d'iperstaticità dello schema è $n = 3 \times 5 - 10 = 5$.

Lo schema della figura 122 c presenta quattro articolazioni intermedie in luogo delle otto dello schema precedente, ma ciascuna di esse, comune a tre travi diverse, importa non più una sola, bensì tre sconnessioni semplici, mentre le due cerniere di estremità implicano ancora ciascuna una sconnessione semplice. Contro la totalità dei $3 \times 5 = 15$ legami semplici distrutti dai soliti cinque tagli, stanno pertanto $3 \times 4 + 2 = 14$ libertà di mo-

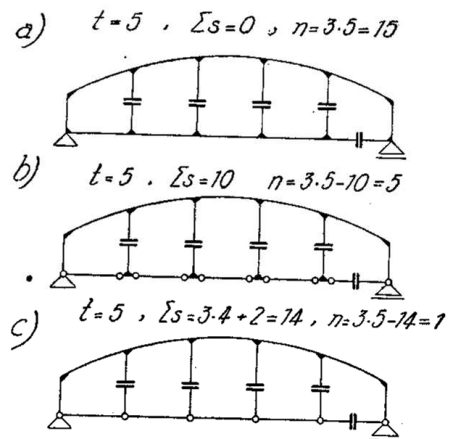


Fig 122

vimento complessivamente da essi create, sicchè lo schema risulta semplicemente iperstatico.

52 — Sistema principale.

Il grado d'iperstaticità $n > 0$ definito dalla (380) fornisce il numero delle sconnessioni semplici che si debbono introdurre nella travatura per renderla determinata, ossia *per sceglierne un sistema principale*. Ma tale scelta resta tuttavia largamente arbitraria.

La ennupla di tali sconnessioni può infatti variarsi arbitrariamente, purchè, comunque ne resti alterato, lo schema risulti geometricamente definito. All'uopo, sotto l'aspetto statico, occorre e basta sia diverso dallo zero il determinante dei coefficienti del sistema di equazioni lineari esprimenti l'equilibrio delle forze applicate alle singole travi ed ai singoli nodi della travatura trasformata.

Fissate arbitrariamente $n-1$ sconnessioni, potrà in generale farsi variare in una semplice infinità di modi la n^{ma} : ad una travatura n volte staticamente indeterminata corrispondono pertanto ∞^n sistemi principali.

Per una data condizione di sollecitazione gli n legami resi inattivi in un dato sistema principale sviluppano invece nel sistema effettivo altrettante reazioni in generale non nulle: una forza o una coppia per ogni indeterminazione esterna, due forze o due coppie uguali ed opposte per ogni indeterminazione interna. Esse costituiscono i *parametri iperstatici della travatura* riferiti al sistema principale considerato.

Nota la ennupla di iperstatiche riferentesi ad un dato sistema principale, la determinazione di quella relativa ad un altro sistema si effettua in base a sole condizioni di equilibrio rigido. Segue da ciò che, per una data condizione di sollecitazione, le ennuple di parametri iperstatici per sistemi prin-

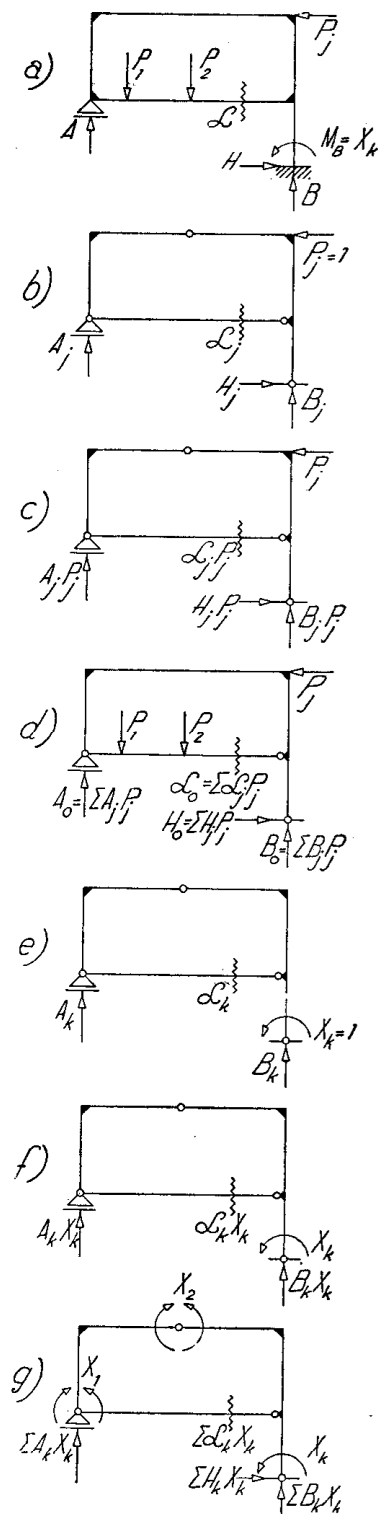


Fig. 123

cipali diversi d'una travatura sono tra loro linearmente dipendenti.

Una travatura iperstatica può trovarsi in stato di autotensione per cedimento dei vincoli, variazioni termiche, difetti di montaggio, coazioni artificiali; può inoltre entrare in tensione per l'azione di carichi. Per il principio di sovrapposizione degli effetti l'equilibrio iperstatico si può assimilare a quello di un sistema principale isostatico, a vincoli perfetti e privo di tensioni iniziali, soggetto simultaneamente:

ai carichi ed alle coppie esplicitamente applicati: diremo P_j la generica di queste azioni, \mathcal{L}_j il generico degli effetti (parametri di sollecitazione di una data sezione, di tensione, deformazione o spostamento d'un dato punto) dovuto esclusivamente all'azione $P_j=1$ e relative reazioni, per modo che sarà $\mathcal{L}_j P_j$ l'effetto per l'azione P_j (figg. 123 b, c). Diremo poi \mathcal{L}_o il valore dell'effetto considerato per tutte le r azioni del tipo P_j e sarà $\mathcal{L}_o = \sum_{j=1}^r \mathcal{L}_j P_j$ (fig. 123 d);

alle forze ed alle coppie iperstatiche esplicitamente applicate: diremo X_k la generica di esse, \mathcal{L}_k il valore del solito effetto dovuto esclusivamente alla forza $X_k=1$ e relative reazioni, sicchè saranno $\mathcal{L}_k X_k$ l'effetto della forza X_k , $\sum_{k=1}^r \mathcal{L}_k X_k$ quello dovuto alla totalità delle iperstatiche (figure 123 e, f, g);

ai cedimenti dei vincoli: diremo \mathcal{L}_c il valore dell'effetto considerato;

alla variazione termica: diremo \mathcal{L}_t l'effetto corrispondente.

Tenuto conto dei singoli contributi, nello stato di equilibrio del sistema effettivo e per la reale condizione di carico potremo in definitiva esprimere l'effetto in esame nella forma:

$$(381) \quad \mathcal{L} = \sum_{j=1}^r \mathcal{L}_j P_j + \sum_{k=1}^n \mathcal{L}_k X_k + \mathcal{L}_c + \mathcal{L}_t,$$

che lo rileva funzione lineare dei carichi e dei parametri iperstatici della travatura.

53 — Ricerca delle deformazioni col metodo dei lavori virtuali.

Lo studio delle deformazioni dei particolari sistemi elastici che qui si considerano può essere ricondotto alla ricerca degli spostamenti di un sufficiente numero di sezioni trasversali opportunamente scelte lungo gli assi delle varie travi costituenti il sistema. Poichè, d'altra parte, lo spostamento di una sezione qualunque dipendente generalmente da tre parametri

— due componenti distinte dello spostamento del baricentro e la rotazione delle sezioni — il suddetto studio potrà condursi quando di un punto M , arbitrariamente scelto nell'insieme degli assi del sistema, si sappia determinare la componente $\eta^{(m)}$ dello spostamento secondo una direzione qualunque y , nonchè la rotazione $\varphi^{(m)}$ della sezione trasversale per esso.

Entrambi questi problemi elementari possono essere risolti applicando il principio dei lavori virtuali nel modo seguente.

Sul sistema elastico esseggnato, eventualmente liberato dai legami iperstatici, facciamo agire esclusivamente (fig. 124):

un carico P_m di intensità unitaria applicando al punto M di cui si cerca lo spostamento, nella direzione y secondo cui detto spostamento si vuol valutare, e le relative reazioni (figura 124 a), ovvero:

una coppia μ_m di momento unitario applicata alla sezione di cui si cerca la rotazione e le relative reazioni (fig. 124 c).

Per lo stato di equilibrio corrispondente a tale carico ipotetico $P_m = 1$ ovvero $\mu_m = 1$, che diremo anche *carico di esplorazione*, e per la deformazione effettiva, vale la (379). Il lavoro virtuale esterno *relativo ai carichi*, espresso dall'integrale e dalle prime due somme al primo membro, vi si riduce però al termine $P_m \eta_P = 1 \cdot \eta^{(m)}$, relativo all'unico carico agente, ovvero a quello $\mu_m \varphi = 1 \cdot \varphi^{(m)}$ relativo all'unica coppia applicata.

La componente dello spostamento $\eta^{(m)}$ ovvero la rotazione $\varphi^{(m)}$ hanno pertanto le espressioni:

$$(382) \quad 1 \begin{cases} \eta^{(m)} \\ \varphi^{(m)} \end{cases} = - (\sum C_m \Delta c + \sum m_m \vartheta) + \int_s \frac{NN_m}{EA} ds + \int_s \frac{MM_m}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{TT_m}{GA} ds + \\ + \int_s N_m \alpha t_o ds + \int_s M_m \alpha \frac{\Delta t}{h} ds ,$$

le quali servono appunto a determinarle. Al riguardo convengono alcune precisazioni.

I simboli che figurano senza indici al secondo membro si riferiscono allo stato di deformazione effettiva. S'intendono assegnati, nelle entità riscontrate (calcolo di verifica) o in quelle presumibili (calcolo di progetto) i cedimenti Δc e ϑ dei vincoli imperfetti, nonchè le funzioni $\alpha t_o(s)$, $\alpha \Delta t(s)$ caratterizzanti lo sbalzo termico. Debbono preliminarmente deter-

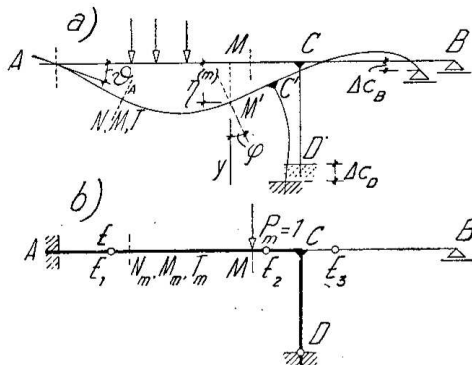


Fig. 124

minarsi le funzioni $N(s)$, $M(s)$ e $T(s)$ esprimenti le caratteristiche della sollecitazione nella sezione corrente. Se il sistema dato comporta legami interni od esterni sovrabbondanti, tale determinazione richiede ovviamente la preventiva ricerca delle incognite iperstatiche, ricerca che si conduce coi procedimenti di cui diremo in seguito.

I simboli che figurano con l'indice m al secondo membro si riferiscono alla condizione di carico ipotetica $P_m = 1$ ovvero all'altra $\mu_m = 1$. C_m , m_m sono dunque le reazioni dei vincoli che fanno equilibrio al carico di esplorazione, $N_m(s)$, $M_m(s)$ e $T_m(s)$ sono le funzioni esprimenti le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione nella sezione corrente.

È ovvio che dette reazioni e caratteristiche vanno preventivamente determinate, ma non occorre calcolarle, per il sistema effettivo; questo può essere alterato arbitrariamente nei suoi legami interni od esterni, purchè resti possibile l'equilibrio sotto il carico d'esplorazione. L'unica condizione richiesta al sistema di forze-tensioni che si voglia considerare per la applicazione del principio dei lavori virtuali è infatti che sia rispettato l'equilibrio.

Di tali circostanze si approfitta regolarmente, quando il sistema dato presenti legami sovrabbondanti, non soltanto per evitare la ricerca dell'equilibrio iperstatico sotto il carico di esplorazione, ciò che si ottiene facendo agire detto carico sopra un sistema principale anzichè sul sistema iperstatico, ma per semplificare la ricerca con lo scegliere, tra i possibili sistemi principali, quello che più rapidamente e meglio si presta al calcolo delle somme e degli integrali al secondo membro delle

(382).

Il sistema della figura 124, ad esempio, vineolato con due incastri ad un appoggio semplice,

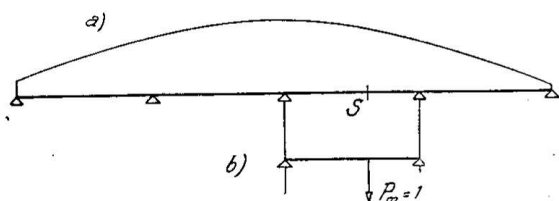


Fig. 125

comporta quattro incognite iperstatiche. Se il carico d'esplorazione si fa agire sul sistema isostatico che si ottiene articolando a cerniera le sezioni E_1 , E_2 ed E_3 della trave e la sezione D d'incastro del ritto, entrerà in tensione per esso soltanto la parte ACD di sistema. Ne consegue che nelle somme e negli integrali al secondo membro delle (382) saranno nulli i contributi di ogni specie riferentesi alla porzione complementare CB , perchè vi sono nulle le reazioni e le caratteristiche della sollecitazione contraddistinte con lo indice m .

Analogamente se si vuole determinare l'abbassamento η_m d'una certa sezione S della campata i^{ma} d'una trave continua (fig. 125 a), applicheremo un carico verticale $P_m = 1$ alla detta sezione, ma per servirsi della pri-

ma delle (382) non occorrerà affatto conoscere lo stato di tensione che nel sistema elastico effettivo desterebbe quel carico fittizio; qualunque stato di tensione, purchè in equilibrio col carico P_m , può intervenire nell'equazione.

Scegliendo, per esempio, quello corrispondente all'azione del carico fittizio $P_m=1$ sulla campata i^{ma} isolata dal rimanente sistema e semplicemente appoggiata agli estremi (fig. 125 b), compariranno nell'equazione i soli integrali corrispondenti alla suddetta campata, in tutte le altre nel sistema principale essendo nulle le caratteristiche della sollecitazione N_m , M_m , T_m , per il carico di esplorazione.

Le (382) esprimono veramente il lavoro virtuale del carico d'esplorazione per lo spostamento effettivo. Per dedurne lo spostamento stesso occorrerebbe pertanto dividere le espressioni stesse per P_m ovvero per μ_m . Ma avendo supposta unitaria l'intensità del carico d'esplorazione, basterà pensare ridotte alla base $P_m=1$ ovvero $\mu_m=1$ le grandezze statiche che figurano nelle espressioni con l'indice m . Nella prima delle (382) (ricerca di $\eta^{(m)}$) saranno allora da ritenere adimensionali le quantità C_m , N_m e T_m , lunghezze le quantità M_m ; nella seconda (ricerca di $\varphi^{(m)}$) avranno invece dimensione reciproca di una lunghezza C_m , N_m e T_m , mentre saranno privi di dimensioni gli M .

Tenuta presente tale interpretazione delle (382), i singoli termini del secondo membro corrispondono a quote ben determinate dello spostamento o della rotazione che si cercano. Sono precisamente:

$$(383) \quad \left. \begin{array}{l} \eta_c^{(m)} \\ \varphi_c^{(m)} \end{array} \right\} = - (\sum C_m \Delta c + \sum m_m \vartheta)$$

il contributo del cedimento dei vincoli;

$$(384) \quad \left. \begin{array}{l} \eta_P^{(m)} \\ \varphi_P^{(m)} \end{array} \right\} = \int_s \frac{NN_m}{EA} ds + \int_s \frac{MM_m}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{TT_m}{GA} ds$$

il contributo dei carichi:

$$(385) \quad \left. \begin{array}{l} \eta_t^{(m)} \\ \varphi_t^{(m)} \end{array} \right\} = \int_s N_m \alpha t_o ds + \int_s M_m \alpha \frac{\Delta t}{h} ds$$

il contributo della variazione di temperatura.

Avremo con ciò:

$$(386) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta^{(m)} = \eta_c^{(m)} + \eta_P^{(m)} + \eta_t^{(m)} , \\ \varphi^{(m)} = \varphi_c^{(m)} + \varphi_P^{(m)} + \varphi_t^{(m)} . \end{array} \right.$$

Le (382) e seguenti conservano piena validità quando si tratti di determinare lo spostamento relativo di due punti qualsiasi del sistema — varia-

zione della loro distanza — ovvero la rotazione relativa di due sezioni — variazione dell'angolo compreso dai loro piani — purchè il carico d'esplorazione consista in due forze unitarie opposte, dirette secondo la congiungente i due punti, ovvero in due coppie, di momento unitario, opposte, applicate alle due sezioni.

* * *

A titolo di esempio applichiamo il metodo sopra esposto alla ricerca della freccia di una mensola AB ad asse circolare di raggio r , di lunghezza $l = \pi r/2$, incastrata orizzontalmente all'estremo A e caricata all'estremo libero dalla forza P formante l'angolo α con la verticale (fig. 126).

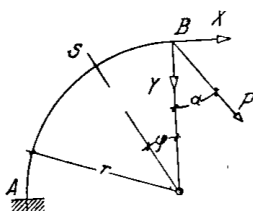


Fig. 126

Supporremo le dimensioni trasversali della trave molto piccole rispetto ad r e conseguentemente trascurabile l'influenza della curvatura; prescindiamo da imperfezioni dell'incastro e da variazioni termiche; trascureremo inoltre i contributi della

forza normale e del taglio in confronto di quello flessionale.

Decomposta la forza P nelle:

$$X = P \operatorname{sen} \alpha \quad , \quad Y = P \operatorname{cos} \alpha \quad ,$$

il momento flettente nella sezione S definita da un certo angolo α , vale:

$$M = X r (1 - \operatorname{cos} \varphi) + Y r \operatorname{sen} \varphi \quad ,$$

mentre, rimossa la P ed applicato in sua vece il carico d'esplorazione $X=1$, si avrà:

$$M_c = r (1 - \operatorname{cos} \varphi) \quad .$$

Dalla prima delle (382), con le limitazioni sopra dichiarate, avremo:

$$\begin{aligned} EJ \gamma_x &= \int_s MM_x ds = \int_0^{\pi/2} X r^3 (1 - \operatorname{cos} \varphi)^2 d\varphi + \int_0^{\pi/2} Y r^3 \operatorname{sen} \varphi (1 - \operatorname{cos} \varphi) d\varphi = \\ &= r^3 \left[X \left(\frac{3}{4} \pi - 2 \right) + \frac{Y}{2} \right] \quad , \end{aligned}$$

da cui:

$$\gamma_x = \frac{P r^3}{EJ} \left[\left(\frac{3}{4} \pi - 2 \right) \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{cos} \alpha \right] \quad .$$

Similmente per il carico d'esplorazione $Y=1$, con:

$$M_y = r \operatorname{sen} \varphi \quad ,$$

la prima delle (382) fornisce ancora:

$$EJ \eta_y = \int_s MM_y ds = \int_0^{\pi/2} X r^3 (1 - \cos \varphi) \operatorname{sen} \varphi d\varphi + \int_0^{\pi/2} Y r^3 \operatorname{sen}^2 \varphi d\varphi = \\ = r^3 \left(\frac{X}{2} \operatorname{sen} \alpha + Y \frac{\pi}{4} \cos \alpha \right),$$

donde:

$$\eta_y = \frac{P r^3}{2 EJ} \left(\operatorname{sen} \alpha + \frac{\pi}{4} \cos \alpha \right).$$

Lo spostamento assoluto di B , ossia la freccia cercata, vale la somma vettoriale degli spostamenti η_x ed η_y .

52 — Ricerca delle deformazioni col metodo di Castigliano.

Supposta la travatura priva di autotensioni, la sua energia potenziale elastica, uguale allora al lavoro di deformazione Φ_1 , è espressa dalla (5). Lo spostamento $\eta^{(m)}$ del punto cui sia applicato il carico P_m , valutato nella direzione di questo, vale secondo il metodo di Castigliano (n° 35/I):

$$\eta^{(m)} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial P_m} = \frac{\partial}{\partial P_m} \left[\int_s \frac{N^2 ds}{2 EA} + \int_s \frac{M^2 ds}{2 EJ} + \int_s \chi \frac{T^2 ds}{2 GA} \right]$$

ovvero:

$$(387) \quad \eta^{(m)} = \int_s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial P_m} ds + \int_s \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P_m} ds + \int_s \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial P_m} ds.$$

Analogamente per la rotazione $\varphi^{(m)}$ della sezione del sistema cui sia applicata la coppia μ_m , avremo:

$$(388) \quad \varphi^{(m)} = \int_s \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial \mu_m} ds + \int_s \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial \mu_m} ds + \int_s \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial \mu_m} ds.$$

AmMESSO che l'azione P_m ovvero μ_m sia compresa tra le r azioni P_i il cui contributo all'effetto generico \mathcal{L} figura nella prima somma a secondo membro della (381), derivando questa rapporto a P_m ed μ_m otteniamo rispettivamente $\partial \mathcal{L} / \partial P_m = \mathcal{L}_m$, $\partial \mathcal{L} / \partial \mu_m = \mathcal{L}$; e se l'effetto \mathcal{L} si indentifica successivamente con le tre caratteristiche della sollecitazione della sezione generica:

$$(389) \quad \frac{\partial N}{\partial P_m} = N_m, \quad \frac{\partial M}{\partial P_m} = M_m, \quad \frac{\partial T}{\partial P_m} = T_m,$$

ovvero:

$$(390) \quad \frac{\partial N}{\partial \mu_m} = N_m, \quad \frac{\partial M}{\partial \mu_m} = M_m, \quad \frac{\partial T}{\partial \mu_m} = T_m.$$

la derivata parziale rapporto a P_m ovvero a μ_m della funzione esprimente una data caratteristica della sollecitazione è uguale al valore che quella caratteristica assume nel sistema principale soggetto al carico d'esplorazione $P_m=1$ ovvero $\mu_m=1$.

Con ciò le (387) e (388) prendono la forma:

$$\left. \begin{matrix} \eta^{(m)} \\ \varphi^{(m)} \end{matrix} \right\} = \int_s \frac{NN_m}{EA} ds + \int_s \frac{MM_m}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{TT_m}{GA} ds ,$$

identica alla (384).

Il teorema di Castigliano fornisce così gli spostamenti dovuti esclusivamente all'azione di carichi, ciò che era da attendersi, dato che esso viene invalidato dalla presenza di autotensioni.

Giova ricordare che mancando l'azione P_m o μ_m nel punto di cui si cerca lo spostamento o nella sezione di cui si vuole la rotazione, l'azione stessa deve intendersi ugualmente applicata per poter esprimere in fun-

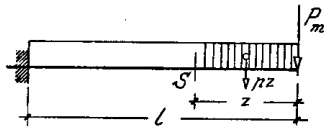


Fig. 127

zione di essa il lavoro Φ_1 ed eseguire la derivata $\partial \Phi_1 / \partial P_m$ ovvero l'altra $\partial \Phi_1 / \partial \mu_m$, salvo a porre $P_m=0$ ovvero $\mu_m=0$ nell'espressione finale di $\eta^{(m)}$ e di $\varphi^{(m)}$.

A titolo di esempio determineremo la freccia di una mensola prismatica di luce l , gravata per tutta la sua lunghezza da un carico uniformemente ripartito p (fig. 127). Supposto agire all'estremo libero una forza fittizia P_m , lo spostamento voluto si otterrà applicando la (388) e ponendo poi nell'espressione risultante $P_m=0$; tenuto conto che $N=0$, avremo cioè:

$$f = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial P_m} \right)_{P_m=0} = \left(\int_0^l \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P_m} dz + \int_0^l \chi \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial P_m} dz \right)_{P_m=0} .$$

Nella sezione corrente le caratteristiche M e T valgono:

$$M_x = -P_m z - \frac{p z^2}{2} , \quad T_x = P_m + p z ,$$

e le loro derivate rapporto a P_m :

$$\frac{\partial M_x}{\partial P_m} = -z , \quad \frac{\partial T_x}{\partial P_m} = 1 .$$

Sostituendo avremo pertanto:

$$f = \left[\frac{1}{EJ} \int_0^l \left(P_m z + p \frac{z^2}{2} \right) z dz + \frac{\chi}{GA} \int_0^l (P_m + p z) dz \right]_{P_m=0} ;$$

svolvendo e ponendo $P_m=0$, si ottiene infine:

$$f = \frac{1}{EJ} \frac{p l^3}{8} + \frac{\chi}{GA} \frac{p l^2}{2} ,$$

che è l'espressione già nota della freccia per questo tipo di trave inflessa, quando si tenga conto del contributo del taglio.

55 — Risoluzione delle travature iperstatiche.

Per una data travatura n volte iperstatica di cui si voglia determinare lo stato di equilibrio corrispondente ad una particolare condizione di carico, esprimiamo lo spostamento ovvero la rotazione, che ora indicheremo genericamente con $\eta^{(i)}$, del punto ovvero della sezione cui è applicata la iperstatica X_i .

Utilizzando allo scopo il metodo dei lavori virtuali, dovremo scrivere la prima delle (382) sostituendovi con i la lettera m che figura come apice nello spostamento e come indice nelle reazioni e caratteristiche della sollecitazione; avremo :

$$(391) \quad 1\eta^{(i)} = -(\sum C_i \Delta c + \sum m_i \vartheta) + \int_s \frac{NN_i}{EA} ds + \int_s \frac{MM_i}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{TT_i}{GA} ds + \int_s N_i \alpha t_0 ds + \int_s M_i \alpha \frac{\Delta t}{h} ds ,$$

figurando notoriamente nell'equilibrio (fig. 128):

lo stato d'equilibrio del carico d'esplorazione ($X_i=1$, relative reazioni equilibranti C_i ed m_i , caratteristiche della sollecitazione N_i, M_i, T_i) agente sopra un opportuno sistema principale isostatico (fig. 128 d);

lo stato di deformazione effettivo [cedimenti dei vincoli Δc e ϑ , caratteristiche della sollecitazione N, M, T , variazione termica corrispondente alle funzioni $\alpha t_0(s)$ ed $\alpha \frac{\Delta t}{h}(s)$ assegnate] per il sistema e per la condizione di sollecitazione effettivi (fig. 128 a).

Se ora identifichiamo l'effetto \mathcal{L} espresso dalla (381) con una grandezza statica — reazione di vincolo o caratteristica della sollecitazione — sva-

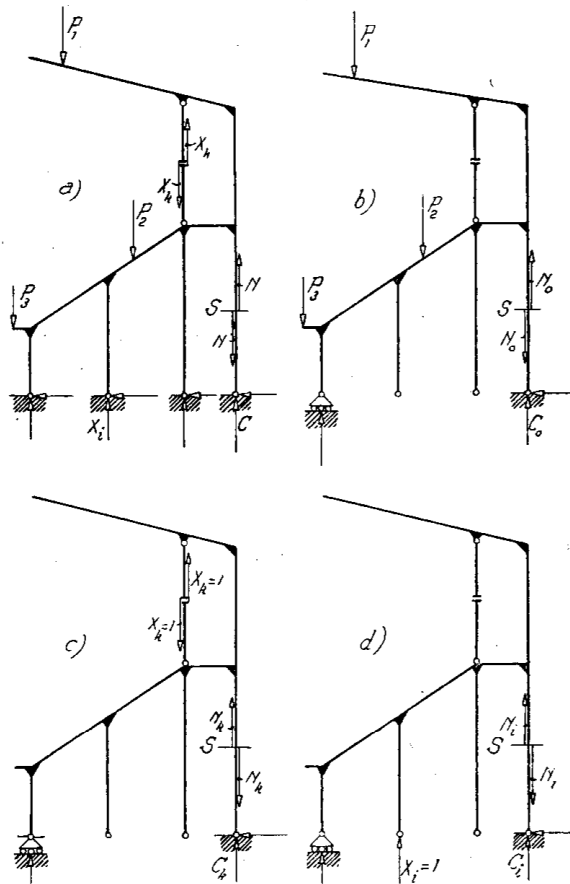


Fig. 128

niscono nel sistema principale isostatico i contributi dei cedimenti dei vincoli e quello di una variazione termica del tipo a suo tempo considerato, mentre i relativi contributi nella travatura iperstatica sussistono attraverso le X_k . Con la limitazione indicata sostituiremo perciò la relazione richiamata con l'altra:

$$(392) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_o + \sum_{k=1}^n \mathcal{L}_k X_k ,$$

dove \mathcal{L}_o esprime l'effetto della totalità dei carichi (fig. 128 b), \mathcal{L}_k quello del carico d'esplorazione $X_k = 1$ (fig. 128 c), $\mathcal{L}_k X_k$ quello del carico X , effetti tutti valutati nel sistema principale.

In particolare per le caratteristiche della sollecitazione nella sezione corrente avremo:

$$(393) \quad N = N_o + \sum_{k=1}^n N_k X_k , \quad M = M_o + \sum_{k=1}^n M_k X_k , \quad T = T_o + \sum_{k=1}^n T_k X_k ,$$

sicchè, sostituendo nel secondo membro della (391) ed indicando ora rispettivamente con η_{ic} ed η_{it} i contributi dei cedimenti e termico, questa diviene:

$$(394) \quad \begin{aligned} I\eta^{(i)} = \eta_{ic} + \eta_{it} + \int_s \frac{N_i N_o}{EA} ds + \int_s \frac{M_i M_o}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{T_i T_o}{GA} ds + \\ + \sum_{k=1}^n X_k \left[\int_s \frac{N_i N_k}{EA} ds + \int_s \frac{M_i M_k}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{T_i T_k}{GA} ds \right] . \end{aligned}$$

Otteniamo così l'equazione di elasticità i^{ma} della travatura, nella quale figurano esplicitamente, al primo grado, le incognite iperstatiche X_k .

È evidente che di siffatte equazioni lineari non omogenee ne sussistono tante quante sono le incognite. Ammesso che il determinante dei coefficienti del loro sistema non sia nullo, ciò che si deve escludere ove siano efficienti quanto meno i legami interni ed esterni richiesti per l'isostaticità, le equazioni valgono a determinare univocamente le incognite.

56 — Equazioni di Müller-Breslau.

Per la risoluzione concreta delle travature iperstatiche col metodo dei lavori virtuali precedentemente esposto conviene precisare le varie quote del movimento $\eta^{(i)}$ figuranti al secondo membro della (394).

All'uopo si riconoscono ovviamente:

il contributo del carico effettivo:

$$(395) \quad \eta_{i_0} = \int_s \frac{N_i N_o}{EA} ds + \int_s \frac{M_i M_o}{EJ} ds + \int_s \chi \frac{T_i T_o}{GA} ds ;$$

Esse traducono il principio di sovrapposizione degli effetti applicato ai movimenti che le singole condizioni di sollecitazione (ivi compresa quella costituita dalla ennupla di iperstatiche agenti come forze esterne) determinano in corrispondenza dei legami iperstatici, quando questi si considerino soppressi.

Si può infatti giungere direttamente alle (398) applicando la (381), e cioè attraverso le seguenti considerazioni.

Ridotto il sistema iperstatico a sistema principale mediante la soppressione di vincoli sovrabbondanti o con l'inserzione di sconessioni di grado conveniente in opportune sezioni delle travi componenti, il carico reale vi induce deformazioni incompatibili coi legami aboliti. Per esempio, in corrispondenza di un appoggio scorrevole soppresso risulterà uno spostamento con componente in generale non nulla secondo la normale al piano di scorrimento; nel punto ove è stata inserita una sconessione del tipo $M=0$ la linea elastica presenterà un punto angoloso, ecc.

Per rendere la deformazione conciliabile coi vincoli del sistema effettivo si debbono annullare queste rotazioni e questi spostamenti estranei applicando, in luogo dei vincoli o dei legami soppressi, certe forze o coppie — le iperstatiche X_k — capaci di indurre nel sistema principale, in concorso col carico reale, le stesse deformazioni che quest'ultimo determina da solo nel sistema effettivo.

Ora, se dello spostamento o della rotazione che il sistema principale subisce in corrispondenza di un dato vincolo iperstatico — esterno o interno — soppresso, diciamo:

η_{ia} la quota corrispondente allo stato di autotensione;

η_{io} il valore corrispondente al carico effettivo;

η_{ik} quello corrispondente all'azione della generica iperstatica X_k supposta unitaria — sicchè sarà $X_k \eta_{ik}$ il valore che corrisponde all'entità reale della X_k medesima — il movimento $\eta^{(i)}$ consentito dal sistema effettivo per la situazione in cui esso realmente si trova dev'essere ovviamente espresso dalla (398), cioè dalla somma algebrica dello spostamento $\eta_{ia} + \eta_{io}$ con quelli $X_k \eta_{ik}$ promossi singolarmente dalle iperstatiche X_k .

57 — Coefficienti e termini noti delle equazioni d'elasticità.

Le equazioni di Müller-Breslau costituiscono un *sistema normale*. Ciò equivale ad ammettere che la matrice dei coefficienti (400) goda delle seguenti proprietà:

a) sono positivi gli n elementi caratterizzati da indici uguali ($i=k$), che figurano sulla diagonale principale;

b) possono essere positivi, negativi o nulli i rimanenti $n(n-1)$ elementi, con indici distinti ($i \neq k$), ma sono tra loro uguali quelli simmetrici rispetto alla suddetta diagonale.

La prima di queste proprietà si dimostra osservando che la (397) scritta per $k=i$ fornisce il doppio del lavoro di deformazione del sistema principale per il carico d'esplorazione $X_i=1$; poichè detto lavoro è necessariamente positivo, dev'essere $\eta_{ii} > 0$, ciò che caratterizza un movimento equiverso alla corrispondente iperstatica X_i . La seconda proprietà scaturisce dalla simmetria negli indici i e k della stessa (397), in accordo d'altronde col primo principio di reciprocità. In totale, dunque, i coefficienti η_{ik} distinti che debbono esser calcolati per poter risolvere il sistema sono al più nel numero $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$. Se, eccezionalmente, si riducono a quelli della diagonale principale, le iperstatiche risultano tra loro indipendenti: il sistema si presenta cioè in *forma canonica*. Per lo più gli ordinari schemi iperstatici conducono invece ad equazioni contenenti un numero dispari $1 < k < n$ di coefficienti $\eta_{ik} = 0$ e le equazioni estreme ne contengono spesso un numero minore delle intermedie.

In ogni caso i suddetti coefficienti dipendono esclusivamente dalle caratteristiche geometriche ed elastiche dello schema principale di riferimento e perciò la relativa determinazione torna utile per tutte le condizioni di carico o di autotensione che occorra considerare per un esauriente studio della travatura. Giova osservare che la somma degli η_{ik} dell'equazione generica i^{ma} :

$$(401) \quad \bar{\eta}_i = \sum_{k=1}^n \eta_{ik} = \eta_{i1} + \eta_{i2} + \dots + \eta_{ik} + \dots + \eta_{in}$$

esprime lo spostamento del punto i del sistema principale caricato simultaneamente da tutti i carichi d'esplorazione $X_1=1, X_2=1, \dots, X_k=1, \dots, X_n=1$; sicchè la suddetta determinazione può essere controllata calcolando direttamente gli spostamenti $\bar{\eta}_i$ mediante la (384) ove si ponga $N_m = N_i, M_m = M_i, T_m = T_i$ ed $N = \sum_{k=1}^n N_k, M = \sum_{k=1}^n M_k, T = \sum_{k=1}^n T_k$.

Quanto ai termini noti, in generale della forma:

$$C_i = \eta_{io} + \eta_{ia} - \eta^{(i)},$$

conviene di regola scinderli nelle quote:

$$\eta_{io} \quad , \quad \eta_{ia} - \eta^{(i)}$$

e risolvere separatamente i due sistemi:

$$(402) \quad 0 = \eta_{io} + \sum_{k=1}^n \eta_{ik} X_k \quad (i=1, 2, \dots, n ; k+1, 2, \dots, n),$$

$$(403) \quad \eta^{(i)} = \eta_{ia} \sum_{k=1}^n \eta_{ik} X_k \quad (i=1, 2, \dots, n ; k+1, 2, \dots, n),$$

nei quali, come si è già osservato, rimangono sempre gli stessi i coefficienti η_{ik} . Il primo sistema determinerà le iperstatiche X_{kP} per l'azione dei soli carichi, cioè per la travatura esente da autotensioni; il secondo le iperstatiche X_{ka} nello stato di autotensione. È ovvio che per le simultaneità delle azioni e delle coazioni sarà poi $X_k = X_{kP} + X_{ka}$.

Quando occorra considerare condizioni parziali di carico e stati parziali di coazione, si scindono a loro volta nelle corrispondenti quote i termini noti η_{io} nonchè gli altri $\eta_{ia} - \eta^{(i)}$ e si risolvono altrettante volte i sistemi (402) e (403).

Gli spostamenti η_{io} costituiscono i termini di carico, in quanto, oltrechè dal sistema principale cui si riferiscono, dipendono dal carico agente sulla travatura. La loro determinazione procede attraverso le (395) e deve inevitabilmente ripetersi per le singole condizioni di carico, ove convenga considerarne più d'una.

Circa gli spostamenti effettivi $\eta^{(i)}$ che figurano al primo membro delle (403), occorre distinguere i casi seguenti:

1°) *iperstatica* X_i *interna*, costituita cioè di due forze X_i uguali ed opposte. Si tratta allora del movimento relativo delle sezioni separate dalla sconnessione che rende esplicita la X_i ; ma siccome tale sconnessione non esiste nel sistema effettivo, è $\eta^{(i)} = 0$;

2°) *iperstatica* X_i *esterna*, costituita cioè dalla reazione di un vincolo esterno. Astraendo per ora dal caso che si tratti d'un vincolo cedevole elasticamente, $\eta^{(i)}$ è nullo se il vincolo è rigido, altrimenti vale il cedimento anelastico misurato (calcolo di verifica) o previsto (calcolo di progetto).

Infine gli spostamenti η_{ia} , quando provengano da cedimenti di vincoli e da variazioni termiche del noto tipo, si calcolano mediante la (369), talora separatamente per le due cause. Per i cedimenti Δc e ϑ dei vincoli esterni del sistema principale, i quali figurano nella quota η_{ic} valgono le stesse avvertenze date per i cedimenti $\eta^{(i)}$ dei vincoli iperstatici.

I momenti d'inerzia J e le sezioni A che entrano nelle espressioni delle η_{ik} e delle η_{io} sono incogniti in un calcolo di progetto; i loro valori devono tuttavia essere presentati per concretare in forma numerica i coefficienti ed i termini noti delle equazioni d'elasticità.

Si procederà per questo ad un proporzionamento preliminare basato sull'esperienza oppure sul modello di tipi analoghi a quello in studio. Risolto poi il sistema per la travatura così proporzionata, determinati gli sforzi ed eseguite le verifiche di stabilità, occorrerà, ove queste ultime non diano risultato soddisfacente, perfezionare le premesse e ripetere i calcoli.

In generale gli enti geometrici incogniti non influiscono gran che sui risultati finali; ne è perciò sufficiente una stima approssimativa. Talora, più semplicemente, in luogo degli enti, si stimano i loro rapporti a dati momenti d'inerzia J_0 e sezioni A_0 di riferimento.

Se il sistema è omogeneo e non esistono imperfezioni dei vincoli, rimane senza influenza il modulo di elasticità normale E , che può essere posto uguale all'unità; quando poi si voglia tener conto del taglio nella valutazione degli spostamenti, si introduce il noto rapporto G/E in luogo dell'altro modulo.

58 — Sistemi iperstatici con vincoli elastici.

Si è detto che l'influenza di cedimenti dei vincoli può essere esaminata separatamente da quella dei carichi e che conviene anzi isolarne lo studio anche da quello relativo ad altre cause di autotensioni.

Al riguardo occorre però precisare che se i cedimenti, di regola esprimibili nella forma (2), comportano quote elastiche diverse da zero, il suddetto criterio non può seguirsi che per le quote anelastiche, mentre l'elasticità dei vincoli deve essere presa in considerazione nelle singole condizioni di carico e di autotensione che interessa esaminare.

Supposto infatti puramente elastico il vincolo cui corrisponde l'iperstatica X_i e detto ε_i il suo cedimento per la reazione $X_i = 1$, sarà $\varepsilon_i X_i = \varepsilon_i (X_{ip} + X_{ia})$ quello per la reazione X_i ; l'elasticità del vincolo iperstatico generico interviene perciò nella corrispondente equazione con un termine aggiuntivo proporzionale alla X_i . Ne deriva che, se l'esame della travatura viene eseguito per varie condizioni di carico e di autotensione, occorrerà tener conto del suddetto termine nella relativa equazione di elasticità per tutti i sistemi corrispondenti alle singole condizioni.

Osserviamo ora che il cedimento elastico riguardato come contributo allo spostamento effettivamente consentito dal vincolo iperstatico, scritto cioè al primo membro della (398), risulta sempre negativo in quanto promosso non dalla reazione X_i ma dall'azione X_i del sistema sul vincolo e pertanto di segno costantemente opposto a quello della X_i stessa.

Con tale avvertenza le (398) divengono successivamente: