

La funzione d'influenza ha pertanto la forma:

$$(222) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{6 EJ v}{l^3} = [\xi^2 (3 - 2\xi) - 1] x^3 + 3 \xi (1 - \xi)^2 x^2, \\ \frac{6 EJ \bar{v}}{l^3} = [x^2 (3 - 2x) - 1] \xi^3 + 3x (1 - x)^2 \xi^2, \end{array} \right.$$

cui corrispondente la rappresentazione assonometrica della figura 80.

Analogamente per l'azione di coppie le stesse (221) applicate alle (62') forniscono:

$$\begin{array}{l} C_0 - \frac{1}{4} = 0 \quad , \quad C_1 + \frac{1}{2} = 0 \quad , \quad C_2 - \frac{1}{4} = \frac{(4 - 3\xi)\xi - 1}{2}, \\ C_0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad , \quad C_1 - \frac{1}{2} = -1 \quad , \quad C_2 + \frac{1}{4} = \frac{4 - 3\xi}{2} \quad , \quad C_3 l = \xi (1 - \xi), \end{array}$$

e quindi:

$$(223) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{2 EJ v}{l^2} = 2\xi (1 - \xi) x^3 + [(4 - 3\xi)\xi - 1] x^2, \\ \frac{2 EJ \bar{v}}{l^2} = -[(3 + 2x)x^2 - 1]\xi^2 + 2(x^2 + 2x - 1)\xi x. \end{array} \right.$$

#### B) CARICHI CONCENTRATI.

Per un solo carico  $P$  applicando le (222) e derivando successivamente rapporto a  $z = x/l$ , otteniamo al solito:

la linea elastica:

$$(224) \quad \left\{ \begin{array}{l} EJ \eta = \frac{Pl^3}{6} \left\{ [\xi^2 (3 - 2\xi) - 1] x^3 + 3 \xi (1 - \xi)^2 x^2 \right\}, \\ EJ \bar{\eta} = \frac{Pl^3}{6} \left\{ [x^2 (3 - 2x) - 1] \xi^3 + 3x (1 - x)^2 \xi^2 \right\}, \end{array} \right.$$

le inclinazioni:

$$(225) \quad \left\{ \begin{array}{l} EJ \varphi = \frac{Pl^2}{2} \left\{ [\xi^2 (3 - 2\xi) - 1] x^2 + 2 \xi (1 - \xi)^2 x \right\}, \\ EJ \bar{\varphi} = \frac{Pl^2}{2} \left\{ 2 \xi^3 x (1 - x) + \xi^2 (1 - x) (1 - 3x) \right\}; \end{array} \right.$$

i momenti flettenti:

$$(226) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = -Pl \left\{ [\xi^2 (3 - 2\xi) - 1] x + \xi (1 - \xi)^2 \right\}, \\ \bar{M} = -Pl \left\{ \xi^3 (1 - 2x) - \xi^2 (2 - 3x) \right\}; \end{array} \right.$$

i momenti d'incastro ( $x=0$ ,  $\bar{x}=1$ ):

$$(227) \quad M_A = -Pl\xi(1-\xi)^2, \quad M_B = -Pl\xi^2(1-\xi);$$

il momento sotto il carico ( $x=\xi$ ):

$$(228) \quad M_C = 2Plx^2(1-x)^2;$$

i tagli:

$$(229) \quad T = A = P \left\{ 1 - \xi^2(3-2\xi) \right\}, \quad T = -B = -P\xi^2(3-2\xi).$$

L'inflessione è massima ( $\varphi=0$ ) per:

$$(230) \quad \begin{cases} x_e = \frac{2\xi(1-\xi)^2}{1-\xi^2(3-2\xi)} & (\xi \leq 1/2, \\ x_e = \frac{1}{3-2\xi} & (\xi \geq 1/2, \end{cases}$$

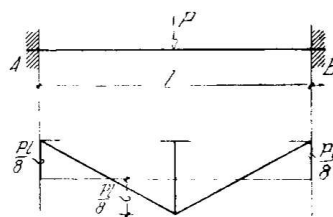


Fig. 81

Per il carico agente in mezzeria ( $\xi=1/2$ ) si ottiene:

$$(231-232) \quad EJ\eta_1 = \frac{Pl^2}{48} x^2(3-4x), \quad EJ\varphi = \frac{Pl^2}{8} x(1-2x),$$

$$(233-234) \quad M = \frac{Pl}{8}(4x-1), \quad T = \frac{P}{2};$$

ne derivano la freccia:

$$(235) \quad EJf = \frac{Pl^3}{192},$$

ed il momento flettente massimo assoluto (fig. 81):

$$(236) \quad M_C = -M_A \frac{Pl}{8}.$$

### C) CARICO DISTRIBUITO.

Per il solito carico espresso dalla (79) e per le (222) la (66) fornisce:

$$(237) \quad \eta = \frac{a_k l^{k+4}}{EJ(k+3)(k+4)} \left[ \frac{x^{k+4}}{(k+1)(k+2)} - \frac{x^3}{k+1} + \frac{x^2}{k+2} \right];$$

da questa otteniamo successivamente:

$$\varphi = \frac{a_k l^{k+3}}{EJ(k+3)(k+4)} \left[ \frac{(k+4)x^{k+3}}{(k+1)(k+2)} - \frac{3x^2}{k+1} + \frac{2x}{k+2} \right],$$

$$M = - \frac{\alpha_k l^{k+2}}{(k+3)(k+4)} \left[ \frac{(k+4)(k+3)x^{k+2}}{(k+1)(k+2)} - \frac{6x}{k+1} + \frac{2}{k+2} \right],$$

$$T = - \frac{\alpha_k l^{k+1}}{(k+1)(k+3)(k+4)} [(k+4)(k+3)x^{k+1} - 6].$$

Per  $x=0$  ed  $x=1$  le due ultime danno ordinatamente i momenti d'incastro:

$$(238) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_A = - \frac{2\alpha_k l^{k+2}}{(k+2)(k+3)(k+4)}, \\ M_B = - \frac{\alpha_k l^{k+2}}{(k+3)(k+4)} \left[ \frac{(k+4)(k+3)}{(k+1)(k+2)} - \frac{6}{k+1} + \frac{2}{k+2} \right], \end{array} \right.$$

e le reazioni finite:

$$(239) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{6\alpha_k l^{k+1}}{(k+1)(k+3)(k+4)}, \\ B = \frac{\alpha_k l^{k+1}}{(k+1)(k+3)(k+4)} [(k+4)(k+3) - 6]. \end{array} \right.$$

Il momento flettente è in grado di estremo alle ascisse per cui  $T=0$ , cioè:

$$(240) \quad x^* = \sqrt[k+1]{\frac{6}{(k+4)(k+3)}}.$$

Analogamente è il grado di estremo l'inclinazione (flessi della deformata) dove sia  $M=0$ , ossia alle ascisse individuate dalle radici della equazione:

$$(241) \quad (k+4)(k+3)x_f^{k+2} - (k-2)x_f + 2(k+1) = 0.$$

Infine i massimi e minimi d'inflexione corrispondono a punti d'inclinazione nulla, le cui ascisse si determinano risolvendo l'altra equazione:

$$(242) \quad (k+4)x_e^{k+2} - 3(k+2)x_e + 2(k+1) = 0.$$

\* \* \*

L'effetto di un carico distribuito secondo una legge parabolica arbitraria (fig. 76 a):

$$(243) \quad p(\zeta) = \alpha_0 + \alpha_1 \zeta + \alpha_2 \zeta^2 = l^2 \left( \frac{\alpha_0}{l^2} + \frac{\alpha_1}{l} \zeta + \alpha_2 \zeta^2 \right),$$

può essere studiato applicando la sovrapposizione degli effetti alla (237) e seguenti. Avremo precisamente:

la linea elastica:

$$(244) \quad EJ \eta = \frac{a_0 l^4}{12} \left( \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} \right) + \frac{a_1 l^5}{20} \left( \frac{x^5}{6} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{3} \right) + \frac{a_2 l^6}{30} \left( \frac{x^6}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right),$$

i momenti d'incastro:

$$(245) \quad \begin{cases} M_A = - \left( \frac{a_0 l^3}{12} + \frac{a_1 l^3}{30} + \frac{a_2 l^3}{60} \right), \\ M_B = - \left( \frac{a_0 l^3}{12} + \frac{a_1 l^3}{20} + \frac{a_2 l^3}{30} \right), \end{cases}$$

e le reazioni:

$$(246) \quad \begin{cases} A = \frac{a_0 l}{2} + \frac{3 a_1 l^2}{20} + \frac{a_2 l^3}{15}, \\ B = \frac{a_0 l}{2} + \frac{7 a_1 l^2}{20} + \frac{4 a_2 l^3}{15}. \end{cases}$$

In particolare ne derivano i risultati:

a) carico uniformemente ripartito ( $a_0 = p$ ,  $a_1 = a_2 = 0$ ):

$$(247-248) \quad EJ \eta_1 = \frac{pl^4}{12} \left( \frac{x^4}{2} - x^3 + \frac{x^2}{2} \right), \quad f = \frac{pl^4}{384 EJ},$$

$$(249-250) \quad M_A = M_B = - \frac{pl^2}{12}, \quad A = B = \frac{pl}{2}.$$

Dal confronto della (248) con la (235) si deduce che se un carico uniformemente distribuito  $pl$  si concentra in un carico  $P$  nella mezzeria, si ottiene una freccia doppia.

b) carico proporzionale all'ascissa ( $a_1 = \frac{p_1}{l}$ ,  $a_0 = a_2 = 0$ ):

$$(251) \quad EJ \eta = \frac{p_1 l^4}{20} \left( \frac{x^5}{6} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{3} \right),$$

$$(252-253) \quad M_A = - \frac{p_1 l^2}{30}, \quad M_B = - \frac{p_1 l^2}{20},$$

$$(254-255) \quad A = \frac{3}{20} p_1 l, \quad B = \frac{7}{20} p_1 l;$$

c) carico parabolico  $q(\zeta) = a_2 \zeta^2$  ( $a_0 = a_1 = 0$ ,  $a_2 = \frac{p_2}{l^2}$ ):

$$(256) \quad EJ \eta = \frac{p_2 l^4}{30} \left( \frac{x^6}{12} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} \right),$$

$$(257-258) \quad M_A = -\frac{p_2 l^2}{60}, \quad M_B = -\frac{p_2 l^2}{30},$$

$$(259-260) \quad A = \frac{p_2 l}{15}, \quad B = \frac{4}{15} p_2 l;$$

d) carico parabolico simmetrico rispettivamente crescente e decrescente verso la mezzeria ( $a_0 = p_a$ ,  $\mp a_1 l = \mp a_2 l^2 = 4 p_0$ ) (fig. 76 b, c):

$$(261) \quad EJ \eta = \frac{l^4}{1080} [45 p_a (x^4 - 2x^3 + x^2) \mp 12 p_0 (x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x^2)],$$

$$(262) \quad f = \frac{1}{5760 EJ} (15 p_a \pm 13 p_0),$$

$$(263-264) \quad M_A = M_B = -\frac{l^2}{60} (5 p_a \pm 4 p_0), \quad M_o = \frac{l^2}{960} (40 p_a \pm 19 p_0).$$

#### D) IMPERFEZIONI DEI VINCOLI.

L'effetto di imperfezioni dei vincoli caratterizzate da cedimenti anelastici  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta_B$  assegnati, può essere studiato imponendo alle (62) le relative condizioni (fig. 82):

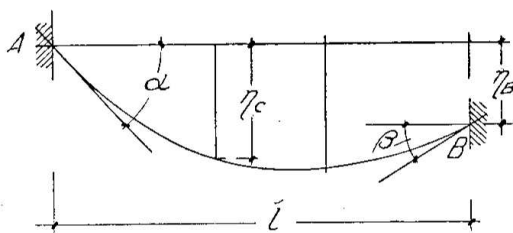


Fig. 82

$$(v)_{x=0} = 0, \quad (v)_{x=l} = \eta_B$$

$$(v')_{x=0} = \alpha, \quad (v')_{x=l} = -\beta$$

donde risultano le costanti:

$$\left( C_0 + \frac{1}{12} \right) \xi^3 = 0, \quad \left( C_1 - \frac{1}{4} \right) \xi^2 = \frac{EJ \alpha}{l^2},$$

$$\left( C_2 + \frac{1}{4} \right) \xi = -\frac{EJ}{l^2} \left( 2\alpha - \beta - 3 \frac{\eta_B}{l} \right), \quad C_3 - \frac{1}{12} = \frac{EJ}{l^2} \left( \alpha - \beta - 2 \frac{\eta_B}{l} \right).$$

Sostituendo e semplificando avremo pertanto:

$$(265) \quad \eta_c = l \left[ \left( \alpha - \beta - 2 \frac{\eta_B}{l} \right) x^3 - \left( 2\alpha - \beta - 3 \frac{\eta_B}{l} \right) x^2 + \alpha x \right],$$

e successivamente:

$$(266) \quad \varphi = \beta \left( \alpha - \beta - 2 \frac{\eta_B}{l} \right) x^2 - 2 \left( 2\alpha - \beta - \beta \frac{\eta_B}{l} \right) x + \alpha,$$

$$(267) \quad M = - \frac{2EJ}{l} \left[ \left( 2\alpha - \beta - \beta \frac{\eta_B}{l} \right) + \beta \left( \alpha - \beta - 2 \frac{\eta_B}{l} \right) x \right],$$

$$(268) \quad M_A = - \frac{2EJ}{l} \left( 2\alpha - \beta - \beta \frac{\eta_B}{l} \right), \quad M_B = \frac{2EJ}{l} \left( 2\beta - \alpha + \beta \frac{\eta_B}{l} \right),$$

$$(269) \quad T = A = -B = - \frac{6EJ}{l^2} \left( \alpha - \beta - 2 \frac{\eta_B}{l} \right).$$

\* \* \*

Al momento flettente nella sezione corrente di una trave soggetta ad un carico uniforme ed i cui incastri di estremità siano comunque imperfetti, può darsi sempre la forma (fig. 83):

$$(270) \quad M_x = M_A + A_x - \frac{p x^2}{2}.$$

Derivando, uguagliando a zero e risolvendo, otteniamo l'ascissa della sezione di momento massimo:

$$(271) \quad z^* = A/p;$$

introdotta poi questa nella (270), si determina il massimo stesso:

$$(272) \quad M_c = M_A + \frac{A^2}{2p}.$$

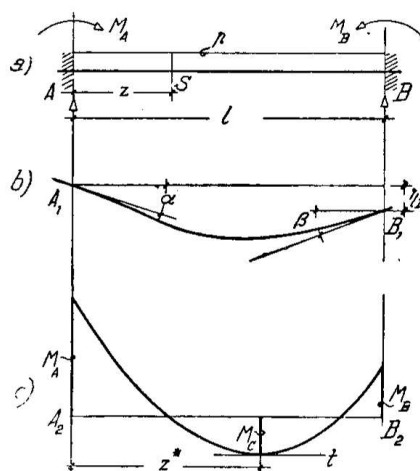


Fig. 83

Nei calcoli di stabilità si deve però osservare che non sempre il massimo così determinato decide delle dimensioni della trave; può darsi infatti che in valore assoluto esso sia superato dai momenti d'incastro. Il proporzionamento deve perciò eseguirsi per quello dei tre momenti  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $M_C$ , che ha il valore assoluto maggiore; la sezione dove tale massimo si verifica si dice *sezione pericolosa della trave*.

I punti di momento nullo, flessi della linea elastica, sono individuati dalle radici dell'equazione  $M_x = 0$ :

$$(273) \quad z_f = \frac{A}{p} \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2M_A p}{A^2}} \right).$$

Essi sono perciò al massimo due, come prova anche il fatto che la curva

funicolare limite della superficie semplice dei momenti è intersecata al

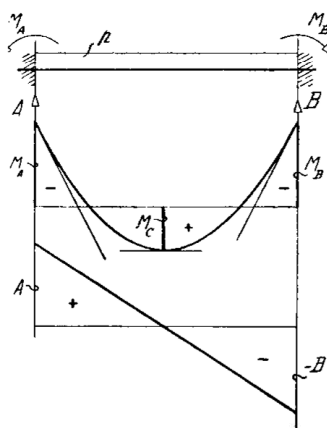


Fig. 84

massimo in due punti della retta di chiusa, D'altronde si può anche osservare che tra due punti di flesso consecutivi, caratterizzati, come si è detto, dall'annullarsi della curvatura della linea elastica, deve trovarsi un punto di curvatura massima, ossia, per l'equazione della flessione, un punto di momento massimo; ma di tali punti di massimo intermedio non può esservene che uno, quindi i flessi non possono essere più di due. In particolare per la trave perfettamente incastrata ( $A = 0,5 pl$ ,  $M_A = -pl^2/12$ ) le formule precedenti forniscono ordinatamente (fig. 84):

$$(274) \quad \begin{cases} z^* = 0,5 l & , & M_c = pl^2/24 , \\ z_f = 0,5 l (1 \pm 0,57) . \end{cases}$$

### 33 — Il metodo analitico-grafico.

Una trave a momento d'inerzia variabile, incastrata agli estremi A, B, sia cimentata da un carico flettente distribuito con ordinata  $p$  comunque variabile con l'ascissa  $z$ , e da  $n$  carichi concentrati (fig. 85 a).

Supposte assegnate le imperfezioni  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta_B$  dei vincoli, scegliamo come sistema principale la trave semplice con appoggi di livello e procediamo alla determinazione dei momenti d'incastro iperstatici  $M_A$  ed  $M_B$  (fig. 85 b).

È evidente che, noti questi, si potrà determinare lo stato reale di tensione e di deformazione partendo dal sistema principale e sovrapponendo gli effetti:

- del carico assegnato (fig. 85 c);
- del momento  $M_A$  (fig. 85 d);
- del momento  $M_B$  (fig. 85 e);
- del cedimento relativo  $\eta_B$  (fig. 85 f):

i momenti  $M_A$  ed  $M_B$  possono infatti riguardarsi come coppie esterne applicate alle sezioni estreme della trave semplice.

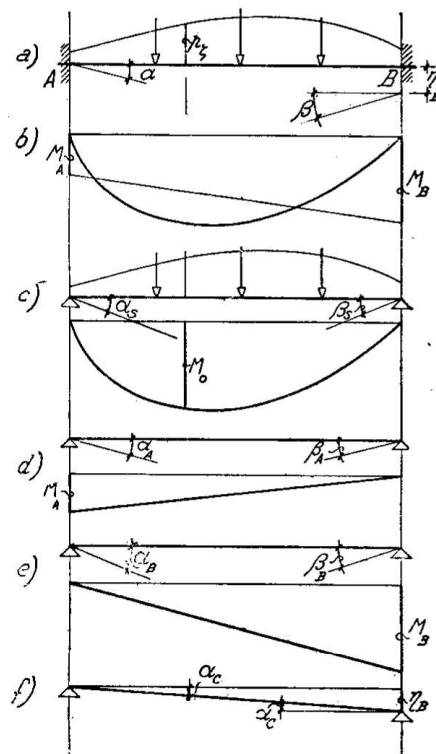


Fig. 85

Tale sovrapposizione può applicarsi in particolare alla ricerca delle rotazioni delle sezioni estreme della trave. Per la sezione  $A$ , ad esempio, la somma algebrica delle rotazioni  $\alpha^*$ ,  $\alpha_A$ ,  $\alpha_B$ , dovute ordinatamente all'azione separata delle tre condizioni di carico dichiarate, e della rotazione  $\alpha_C$ , dovuta al dislivello degli appoggi, deve essere uguale alla rotazione  $\alpha$  assegnata che la sezione subisce nel sistema effettivo; deve cioè risultare:

$$(275) \quad \alpha = \alpha_s + \alpha_A + \alpha_B + \alpha_C;$$

e similmente, con i simboli della figura:

$$(275') \quad \beta = \beta_s + \beta_A + \beta_B + \beta_C.$$

Si possono calcolare i singoli contributi — per esempio della rotazione  $\alpha$  — utilizzando il corollario di Mohr. All'uopo bisognerà costruire il diagramma del momento flettente corrispondente a ciascuna condizione di carico e dedurre da esso il diagramma delle curvature dividendone le ordinate per il prodotto  $EJ$ : la reazione dell'appoggio  $A$  della trave semplice  $AB$  supposta idealmente caricata da quest'ultimo diagramma è la rotazione parziale cercata.

Per la prima condizione, detto  $M_0/EJ_0$  la corrispondente curvatura, la reazione  $d\alpha_s$  dell'appoggio  $A$  dovuta all'elemento di carico ideale  $(M_0/EJ_0)dz$  vale (fig. 86 a):

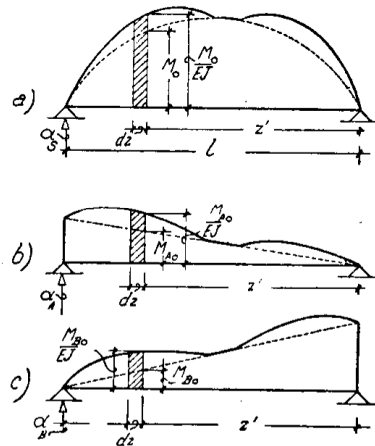


Fig. 86

$$d\alpha_s = \frac{1}{lEJ_0} \frac{M_0}{\vartheta} z' dz,$$

talchè, integrando fra 0 ed  $l$ , si ottiene:

$$(276) \quad \alpha_s = \frac{1}{lEJ_0} \int_0^l \frac{M_0}{\vartheta} z' dz.$$

Per la seconda condizione di carico, ossia per la trave semplice cimentata dal momento  $M_A$ , detto  $M_{A0}$  il momento nella sezione generica,  $M_{A0}/EJ_0$  la corrispondente curvatura, avremo (fig. 86 b):

$$\alpha_A = \frac{1}{lEJ_0} \int_0^l \frac{M_{A0}}{\vartheta} z' dz.$$



Analogamente per la terza condizione di carico, cioè per la trave semplice cimentata dal momento  $M_B$  (fig. 86 c), si ottiene:

$$\alpha_B = \frac{1}{l EJ_0} \int_0^l \frac{M_{B_0}}{\vartheta} z' dz.$$

Il cedimento relativo  $\eta_B$  dà infine luogo al contributo (fig. 85 f):

$$\alpha_C = \frac{\eta_B}{l}.$$

Sostituendo ora le rotazioni parziali trovate nella (275), questa diviene:

$$\alpha = \frac{1}{EJ_0} \left( EJ_0 \alpha_s + \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M_{A_0}}{\vartheta} z' dz + \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M_{B_0}}{\vartheta} z' dz + EJ_0 \frac{\eta_B}{l} \right)$$

e successivamente, osservando che:

$$M_{A_0} = \frac{M_A}{l} z', \quad , \quad M_{B_0} = \frac{M_C}{l} z,$$

anche:

$$(277) \quad \alpha = \frac{1}{EJ_0} \left[ EJ_0 \alpha_s + \frac{M_A}{l^2} \int_0^l \frac{z'^2}{\vartheta} dz + \frac{M_B}{l^2} \int_0^l \frac{zz'}{\vartheta} dz + EJ_0 \frac{\eta_B}{l} \right].$$

Si costruisca ora il diagramma del *peso elastico della trave*, le cui ordinate  $1/\vartheta$ , portate a partire da una fondamentale arbitraria  $A_0 B_0$  sulle verticali delle singole sezioni, misurano il reciproco della *flesso-rigidezza*  $EJ$  (fig. 87).

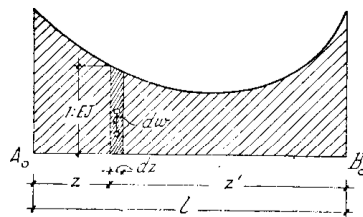


Fig. 87

Al *peso elastico* dell'elemento di trave compreso fra le ascisse  $z$  e  $z + dz$  e di momento di inerzia  $J$ , che ha l'espressione:

$$dw = \frac{dz}{\vartheta},$$

corrisponde l'area elementare di diagramma compresa fra le due verticali definite dalle ascisse stesse. I prodotti:

$$z'^2 \frac{dz}{\vartheta}, \quad , \quad zz' \frac{dz}{\vartheta}$$

potranno allora interpretarsi rispettivamente come il momento d'inerzia

rispetto alla verticale di  $B$  ed il momento centrifugo rispetto alle verticali di  $A$  e  $B$  del suddetto peso elastico elementare. Indicando con  $\mathcal{J}_B l^2$  il primo e con  $\mathcal{C} l^2$  il secondo di questi momenti per l'intera campata  $AB$ , avremo:

$$(278) \quad \mathcal{J}_B = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{z'^2}{\mathfrak{F}} dz \quad , \quad \mathcal{C} = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{zz'}{\mathfrak{F}} dz ;$$

ed è facile arguire come i metodi della geometria delle masse possano servire a determinarli operando graficamente sul diagramma del peso elastico.

Con le notazioni ultime introdotte la (277) diviene:

$$(279) \quad \alpha = \alpha_s + \frac{1}{EJ_0} (M_A \mathcal{J}_B + M_B \mathcal{C}) + \frac{\eta_B}{l} .$$

Simmetricamente, posto  $\mathcal{J}_A = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{z^2}{\mathfrak{F}} dz$  e osservando che è  $\beta_C = -\alpha_C$ , si ottiene per l'incastro  $B$ :

$$(279') \quad \beta = \beta_s + \frac{1}{EJ_0} (M_B \mathcal{J}_A + M_A \mathcal{C}) - \frac{\eta_B}{l} .$$

Le (279) sono le equazioni di elasticità che permettono di determinare le due incognite iperstatiche:

$$(279'') \quad \left\{ \begin{array}{l} M_A = -\frac{EJ_0}{\mathcal{J}_A \mathcal{J}_B - \mathcal{C}^2} \left\{ (\alpha_s + \alpha) \mathcal{J}_A - (\beta_s + \beta) \mathcal{C} - \frac{\eta_B}{l} (\mathcal{J}_A + \mathcal{C}) \right\} , \\ M_B = -\frac{EJ_0}{\mathcal{J}_A \mathcal{J}_B - \mathcal{C}^2} \left\{ (\beta_s + \beta) \mathcal{J}_B - (\alpha_s + \alpha) \mathcal{C} + \frac{\eta_B}{l} (\mathcal{J}_B + \mathcal{C}) \right\} , \end{array} \right.$$

una volta calcolate, mediante la (276) e la simmetrica per l'estremo  $B$ , le sezioni degli appoggi  $\alpha_s$  e  $\beta_s$  della trave semplice idealmente caricata dalle curvature, reazioni dipendenti dal carico effettivo e che perciò diconsi termini di carico.

Se la trave è prismatica, è  $J = J_0 = \text{cost}$ ,  $\mathfrak{F} = 1$ ; ponendo allora:

$$(280) \quad A^* = \frac{1}{l} \int_0^l M_0 z' dz \quad , \quad B^* = \frac{1}{l} \int_0^l M z dz ,$$

ed osservando che è:

$$(281) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_B = \frac{1}{l^2} \int_0^l z'^2 dz = \frac{1}{l^2} \int_0^l z^2 dz = \frac{1}{3} l, \\ \mathcal{C} = \frac{1}{l^2} \int_0^l z z' dz = \frac{1}{l^2} \int_0^l z(l-z) dz = \frac{1}{6} l, \end{array} \right.$$

si ottiene:

$$(282) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{A^*}{EJ} + \frac{l}{6EJ} (2M_A + M_B) + \frac{\eta_B}{l}, \\ \beta = \frac{B^*}{EJ} + \frac{l}{6EJ} (2M_B + M_A) - \frac{\eta_B}{l}, \end{array} \right.$$

donde:

$$(282') \quad \left\{ \begin{array}{l} M_A = -\frac{2}{l} \left\{ 2A^* - B^* - EJ \left( 2\alpha - \beta - 3 \frac{\eta_B}{l} \right) \right\}, \\ M_B = -\frac{2}{l} \left\{ 2B^* - A^* - EJ \left( 2\beta - \alpha + 3 \frac{\eta_B}{l} \right) \right\}: \end{array} \right.$$

$A^*$  e  $B^*$ , che tengono il luogo dei termini di carico, sono evidentemente le reazioni degli appoggi della trave semplice idealmente caricata dai momenti dovuti al carico effettivo, ossia dalla superficie semplice dei momenti.

È ovvio che le formule precedenti scritte per  $\alpha = \beta = \eta_B = 0$  forniscono le iperstatiche per la trave perfettamente incastrata, mentre per  $\alpha_s = \beta_s = 0$  ovvero per  $A^* = B^* = 0$  danno i momenti d'incastro dovuti alle sole imperfezioni dei vincoli.

È chiaro altresì come, noti  $M_A$  e  $M_B$ , si possano, col solo ausilio delle equazioni della statica, determinare le reazioni finite  $A$  e  $B$  degli appoggi.

\* \* \*

In particolare per la trave semplicemente iperstatica incastrata in  $A$  e poggiata in  $B$ , la prima delle (279') fornisce:

$$\alpha = \alpha_s + \frac{M_A \mathcal{J}_B}{EJ_0} + \frac{\eta_B}{l},$$

da cui:

$$(279'') \quad M_A = -\frac{EJ_0}{\mathcal{J}_B} \left[ \alpha_s - \left( \alpha - \frac{\eta_B}{l} \right) \right]$$

e per i vincoli perfetti:

$$(279''') \quad M_A = - \frac{EJ_0 \alpha_s}{\mathcal{J}_B}.$$

Analogamente per la trave prismatica dalla prima delle (282') otterremo:

$$(282'') \quad M_A = - \frac{3 EJ}{l} \left[ \frac{A^*}{EJ} - \left( \alpha - \frac{\eta_B}{l} \right) \right]$$

e in assenza di cedimenti:

$$(282''') \quad M_A = - \frac{3 A^*}{l}.$$

### 34 — Trave continua.

La trave continua, si è già detto, presenta tante indeterminazioni quanti sono i suoi appoggi intermedi; una o due altre indeterminazioni si aggiungono se uno solo od entrambi gli estremi della trave sono incastrati. Supposti per ora gli estremi appoggiati, se sono in numero di  $n$  gli appoggi intermedi, la trave è  $n$  volte iperstatica.

Assumeremo, anche in questa trattazione, i momenti sugli appoggi come incognite iperstatiche, ossia un sistema principale costituito da  $n+1$  travi semplici tra loro indipendenti. Una campata qualunque della trave effettiva si comporta invece come una trave imperfettamente incastrata, per azione delle campate adiacenti che ne ostacolano la libera deformazione.

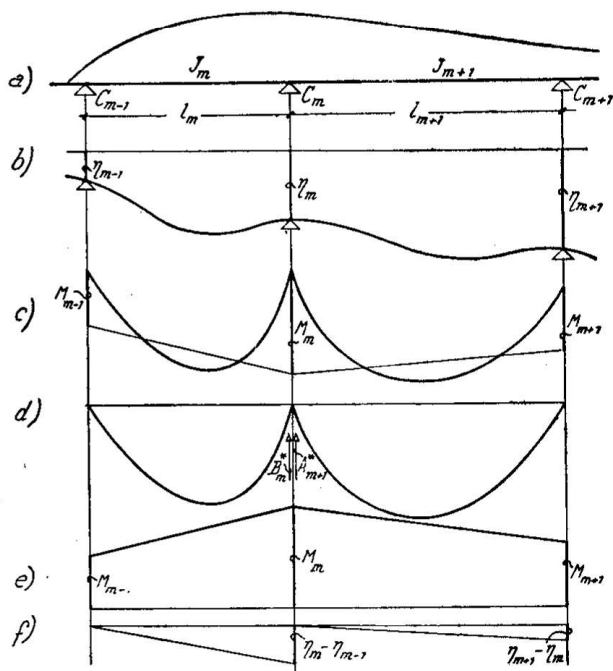


Fig. 88

Prendiamo in esame le campate  $m^{ma}$  ed  $(m+1)^{ma}$  del sistema principale, cioè le due travi semplici di luci  $l_m, l_{m+1}$  ed assoggetiamole ordinatamente (fig. 88):

al carico effettivo;

ai momenti iperstatici  $M_{m-1}$  ed  $M_m$  rispettivamente nelle sezioni  $C_{m-1}$  e  $C_m$  della campata di luce  $l_m$ ;

ai momenti iperstatici  $M_m$  ed  $M_{m+1}$  rispettivamente in quelle  $C_m$  e  $C_{m+1}$  della campata di luce  $l_{m+1}$ ;

agli spostamenti rigidi corrispondenti ai cedimenti relativi  $\Delta\eta^{(m)} = \eta_m + -\eta_{m-1}$  e  $\Delta\eta^{(m+1)} = \eta_{m+1} - \eta_m$  (fig. 88 f).

Le due campate perverranno così alla configurazione deformata propria del sistema effettivo. In particolare, secondo le (281), la sezione  $C_m$ , estrema di destra della campata, subirà la rotazione:

$$(283) \quad \beta_m = \beta_s^{(m)} + \frac{1}{EJ_0} \left( M_m \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} + M_{m-1} \mathcal{C}^{(m)} \right) \frac{\Delta\eta^{(m)}}{l_m}$$

essendo  $\beta_s^{(m)}$  la reazione di destra della campata  $m^{ma}$  riguardata come trave semplice caricata dal diagramma avente le ordinate  $M_o^{(m)}/\mathfrak{D}EJ_0$  (fig. 88 b). Similmente la stessa sezione  $C_m$ , considerata come estremo di sinistra della campata di destra, subisce la rotazione:

$$(283') \quad \alpha_{m+1} = \alpha_s^{(m+1)} + \frac{1}{EJ_0} \left( M_m \mathcal{J}_m^{(m+1)} + M_{m+1} \mathcal{C}^{(m+1)} \right) \frac{\Delta\eta}{l_{m+1}},$$

essendo  $\alpha_s^{(m+1)}$  la reazione di sinistra della  $(m+1)^{ma}$  riguardata come trave semplice caricata dal diagramma avente le ordinate  $M_o^{(m+1)}/\mathfrak{D}EJ_0$ .

Poichè in corrispondenza di  $C_m$  la linea elastica della trave continua ammette un'unica tangente, anche la rotazione della corrispondente sezione deve essere unica (fig. 89); deve in altri termini essere nulla la rotazione relativa tra la sezione  $C_m$  considerata appartenente alla campata di sinistra e la stessa sezione considerata appartenente alla campata di destra, condizione

questa che è soddisfatta quando gli angoli  $\beta_m$  e  $\alpha_{m+1}$  sono uguali ed opposti.

L'equazione di elasticità relativa all'appoggio  $m^{mo}$  della trave ha pertanto la forma sintetica:

$$(284) \quad \beta_m + \alpha_{m+1} = 0.$$

Avuto riguardo alle (283) e posto:

$$(285) \quad \begin{cases} \mathcal{B}_m = EJ_0 \alpha_s^{(m)} = \frac{1}{l_m} \int_0^{l_m} \frac{M_o^{(m)}}{\mathfrak{D}} z dz, \\ \mathcal{A}_{m+1} = EJ_0 \beta_s^{(m+1)} = \frac{1}{l_{m+1}} \int_0^{l_{m+1}} \frac{M^{(m+1)}}{\mathfrak{D}}, \end{cases}$$

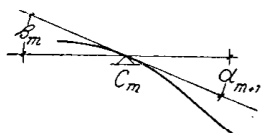


Fig. 89

essa si traduce nell'equazione dei tre momenti:

$$(286) \quad \mathcal{C}^{(m)} \dot{M}_{m-1} + \left( \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} + \mathcal{J}_m^{(m+1)} \right) M_m + \mathcal{C}^{(m+1)} M_{m+1} = - \\ - \left( \mathcal{B}_m + \mathcal{A}_{m+1} \right) + EJ \left( \frac{\Delta\gamma_l^{(m)}}{l_m} - \frac{\Delta\gamma_l^{(m+1)}}{l_{m+1}} \right).$$

Se il momento d'inerzia, pur variando da campata a campata, conserva nella campata generica il valore costante  $J_m = \mathfrak{J}J_o$ , tenendo presenti le (281) dovremo porre:

$$(287) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_{m-1}^{(m)} = \frac{J_o}{J_m} \frac{l_m}{3} = \frac{\lambda_m}{3}, \quad \mathcal{J}_m^{(m+1)} = \frac{J_o}{J_{m+1}} \frac{l_{m+1}}{3} = \frac{\lambda_{m+1}}{3}, \\ \mathcal{C}^{(m)} = \frac{J_o}{J_m} \frac{l_m}{6} = \frac{\lambda_m}{6}, \quad \mathcal{C}^{(m+1)} = \frac{J_o}{J_{m+1}} \frac{l_{m+1}}{6} = \frac{\lambda_{m+1}}{6}, \end{array} \right.$$

mentre, in base alle (285), i termini di carico valgono:

$$(288) \quad \mathcal{B}_m = \frac{J_o}{J_m} B_m^* = \frac{\lambda_m}{l_m} B_m^* \quad , \quad \mathcal{A}_{m+1} = \frac{J_o}{J_{m+1}} A_{m+1}^* = \frac{\lambda_{m+1}}{l_{m+1}} A_{m+1}^* \quad ,$$

L'equazione dei tre momenti diviene così:

$$(289) \quad \lambda_m M_{m-1} + 2 M_m (\lambda_m + \lambda_{m+1}) + \lambda_{m+1} M_{m+1} = - \\ - 6 \left( B_m^* \frac{\lambda_m}{l_m} + A_{m+1}^* \frac{\lambda_{m+1}}{l_{m+1}} \right) + 6 EJ_o \left( \frac{\Delta\gamma_{lm}}{l_m} - \frac{\Delta\gamma_{lm+1}}{l_{m+1}} \right).$$

Se infine il momento d'inerzia è costante per tutta la trave ed uguale a  $J_o$ , dovremo porre:  $J_m + J_{m+1} = J_o = J$  e conseguentemente  $\lambda_m = l_m$ ,  $\lambda_{m+1} = l_{m+1}$ .

La (289) si muta allora nell'equazione di Bertot-Clapeyron:

$$(290) \quad l_m M_{m-1} + 2 M_m (l_m + l_{m+1}) + l_{m+1} M_{m+1} = - 6 (B_m^* + A_{m+1}^*) + \\ + 6 EJ \left( \frac{\Delta\gamma_{lm}}{l_m} - \frac{\Delta\gamma_{lm+1}}{l_{m+1}} \right).$$

Di equazioni come la (286), la (289) ovvero la (290), a seconda dei casi cui si riferiscono, possiamo scriverne tante quanti sono gli appoggi intermedi, ciascuna contenente in generale tre incognite, cioè i momenti su tre appoggi consecutivi. La prima e l'ultima equazione contengono però due soli momenti incogniti, qualunque siano le condizioni di vincolo di estremità.

Infatti, per appoggio semplice in  $A$ , dovremo porre  $M_A=0$ , perciò l'equazione relativa al primo appoggio intermedio  $C_1$  diviene (fig. 90 a):

$$(291) \quad 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = -6(B_1^* + A_2^*) + 6 EJ \left( \frac{\Delta\eta_1}{l_1} - \frac{\Delta\eta_2}{l_2} \right);$$

analogamente, per l'appoggio semplice in  $B$ , è  $M_B=0$  e conseguentemente:

$$(291') \quad l_n M_{n-1} + 2(l_n + l_{n+1}) M_n = -6(B_n^* + A_{n+1}^*) + 6 EJ \left( \frac{\Delta\eta_n}{l_n} - \frac{\Delta\eta_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Se l'appoggio  $A$  è preceduto da uno sbalzo ed indichiamo con  $\mu_A$  il

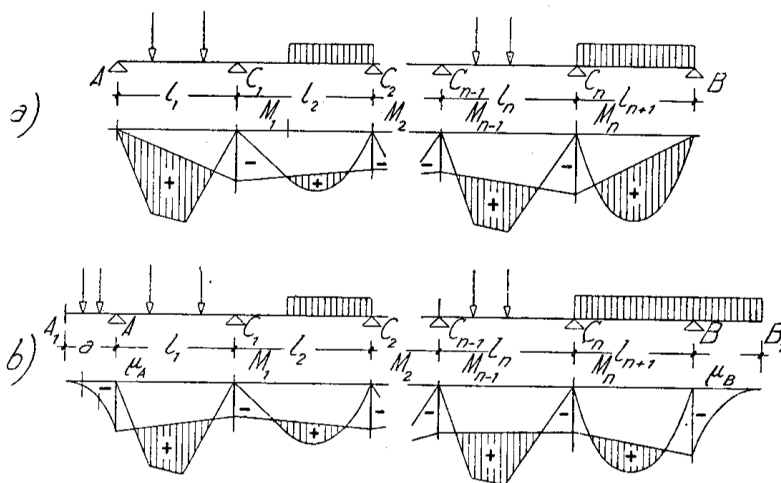


Fig. 90

momento d'incastro della mensola  $AA_1$  ovviamente staticamente determinato, porremo  $M_A = \mu_A$ , donde (fig. 90 b):

$$(292) \quad l_1 \mu_A + 2(l_1 + l_2) M_1 + l_2 M_2 = -6(B_1^* + A_2^*) + 6 EJ \left( \frac{\Delta\eta_1}{l_1} - \frac{\Delta\eta_2}{l_2} \right);$$

in modo analogo, se l'appoggio  $B$  è seguito da uno sbalzo, avremo:

$$(292') \quad l_n M_{n-1} + 2(l_n + l_{n+1}) M_n + l_{n+1} \mu_B = -6(B_n^* + A_{n+1}^*) + 6 EJ \left( \frac{\Delta\eta_n}{l_n} - \frac{\Delta\eta_{n+1}}{l_{n+1}} \right).$$

Se l'estremo  $A$  è incastrato, il sistema presenta in più l'iperstatica  $M_A$ , ma può ottenersi subito la relativa equazione ove si consideri sosti-

tuito l'incastro con due appoggi  $A, A'$  comprendenti una campata infinitesima (fig. 91 a). Per questa e per la successiva di luce  $l_1$  sussiste allora un'equazione analoga alla (291) e precisamente:

$$(293) \quad 2l_1 M_A + l_1 M_1 = -6 A_1^* + 6 EJ \left( \alpha - \frac{\Delta\gamma_{l_1}}{l} \right).$$

Naturalmente l'equazione relativa all'appoggio  $C_1$  assume la forma ricorrente, contiene cioè le tre incognite  $M_A, M_1, M_2$ .

In modo analogo se è incastrato l'estremo  $B$ , all'appoggio  $C_n$  compete la penultima equazione, contenente le incognite  $M_{n-1}, M_n, M_B$ , mentre l'ultima, relativa all'incastro è (fig. 91 b):

$$(293') \quad l_{n+1} M_n + 2l_{n+1} M_B = -6 B_{n+1}^* + 6 EJ \left( \frac{\Delta\gamma_{l_B}}{l_{n+1}} + \beta \right).$$

È chiaro altresì che le rotazioni anelastiche  $\alpha$  e  $\beta$  debbono considerarsi assegnate insieme con le altre imperfezioni vincolari.

In ogni caso le equazioni sono nel numero stesso dei momenti incogniti, sicchè questi sono univocamente determinati.

Noti i momenti iperstatici, si può disegnare il diagramma dei momenti flettenti tracciando dapprima le superfici semplici dei momenti per ogni campata, portando poi in corrispondenza degli appoggi i momenti determinati e completando infine il diagramma con le rette di chiusa relative a ciascuna campata (fig. 90).

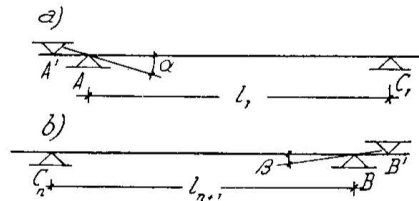


Fig. 91

### 35 — Determinazione dei termini di carico in casi particolari.

L'applicazione spedita del metodo analitico grafico richiede la conoscenza delle quantità  $A^*$  e  $B^*$ . Conviene pertanto darne le espressioni per le condizioni di carico che più frequentemente ricorrono.

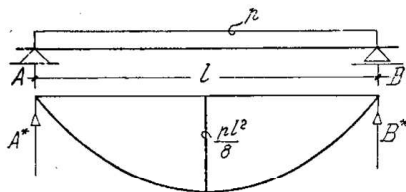


Fig. 92

a) carico uniformemente ripartito totale.

Il carico ideale complessivo vale l'area del segmento di parabola avente freccia  $pl^2/8$  e corda uguale alla luce  $l$  della



campata (fig. 92):

$$\frac{2}{3} p \frac{l^2}{8} l = \frac{1}{12} p l^3;$$

le reazioni degli appoggi, uguali per simmetria alla metà del suddetto carico ideale, sono:

$$(294) \quad A^* = B^* = \frac{1}{24} p l^3.$$

Se allora le campate  $m^{ma}$  ed  $(m+1)^{ma}$  di una trave continua sono uniformemente caricate rispettivamente con carichi di intensità  $p_m$  e  $p_{m+1}$ , dovremo porre al 2° membro della relativa equazione dei tre momenti:

$$B_m^* = \frac{1}{24} p_m l_m^3, \quad A_{m+1}^* = \frac{1}{24} p_{m+1} l_{m+1}^3,$$

sicchè raggruppando i termini di carico nella (209) si ottiene:

$$(295) \quad -6 (B_m^* + A_{m+1}^*) = -\frac{1}{4} (p_m l_m^3 + p_{m+1} l_{m+1}^3).$$

b) *carico concentrato*. La superficie semplice dei momenti è ovviamente un triangolo col vertice sulla verticale del carico ed il momento in corrispondenza di questo, ossia l'altezza del triangolo superficie semplice dei momenti, vale (fig. 93):

$$M_{co} = \frac{Pab}{l}.$$

Il carico di cui si deve idealmente supporre caricata la trave per determinare le reazioni  $A^*$  e  $B^*$  è quindi:

$$F = M_{co} \frac{l}{2} = \frac{Pba}{l} \frac{l}{2} = \frac{Pba}{2}.$$

Se  $d$  ed  $s$  sono le distanze dalle verticali degli appoggi del baricentro del triangolo, dove può considerarsi applicata la risultante  $P$  del carico, avremo:

$$A^* = F \frac{d}{l}, \quad B^* = F \frac{s}{l};$$

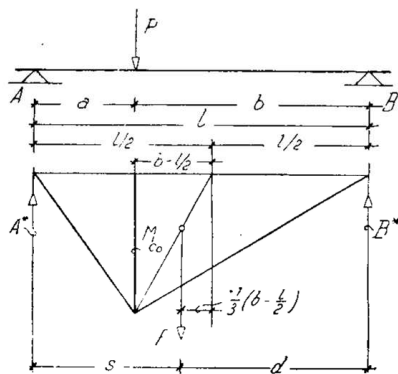


Fig. 93

ma è:

$$d = b - \frac{2}{3} \left( b - \frac{l}{2} \right) = \frac{1}{3} (b + l) \quad , \quad s = a + \frac{2}{3} \left( \frac{l}{2} - a \right) = \frac{1}{3} (a + l) ;$$

dunque, sostituendo:

$$(296) \quad \left\{ \begin{array}{l} A^* = \frac{Pba}{2} \frac{1}{2} \frac{(b+l)}{l} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6l} , \\ B^* = \frac{Pba}{2} \frac{1}{3} \frac{(a+l)}{l} = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6l} ; \end{array} \right.$$

in particolare per il carico  $P$  in mezzeria:

$$(296') \quad A^* = B^* = Pl^2/16 .$$

Nel caso di due campate consecutive di trave continua nelle condizioni della fig. 94, applicando le formule precedenti, troviamo:

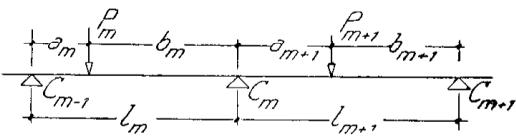
$$(297) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_m^* = \frac{P_m a_m}{6 l_m} (l_m^2 - a_m^2) , \\ A_{m+1}^* = \frac{P_{m+1} b_{m+1}}{6 l_{m+1}} (l_{m+1}^2 - b_{m+1}^2) . \end{array} \right.$$


Fig. 94

Se poi  $P_m$  è l' $i^{mo}$  di una serie di  $r$  carichi tutti applicati alla campata  $m^{ma}$ ,  $P_{m+1}$  l' $j^{mo}$  d'un'altra serie di  $s$  carichi applicati alla campata  $(m+1)^{ma}$ , per la sovrapposizione degli effetti avremo:

$$B_m^* = \frac{1}{6 l_m} \sum_{i=1}^r P_{mi} a_{mi} (l_m^2 - a_{mi}^2) ;$$

$$A_{m+1}^* = \frac{1}{6 l_{m+1}} \sum_{j=1}^s P_{m+1,j} b_{m+1,j} (l_{m+1}^2 - b_{m+1,j}^2) .$$

raggruppando i termini di carico al secondo membro della (290) si ottiene dunque:

$$(298) \quad -6 (B_m^* + A_{m+1}^*) = -\frac{1}{l_m} \sum_{i=1}^r P_{mi} a_{mi} (l_m^2 - a_{mi}^2) -$$

$$-\frac{1}{l_{m+1}} \sum_{j=1}^s P_{m+1,j} b_{m+1,j} (l_{m+1}^2 - b_{m+1,j}^2) .$$

Naturalmente se le due campate contigue all'appoggio  $C_m$  sono gravate ad un tempo da forze ripartite e concentrate, si possono dedurre i termini come somma di quelli corrispondenti separatamente alle due specie di carico.

c) *due carichi concentrati simmetrici* (fig. 95 a):

$$(299) \quad A^* = B^* = \frac{Pab}{2}.$$

d) *azione di una coppia*. Con le notazioni della figura 95 b si ottiene facilmente:

$$F_1 = -\frac{\mu a^2}{2l}, \quad F_2 = \frac{\mu b^2}{3l}$$

e conseguentemente, in accordo con le (122'):

$$(300) \quad \begin{cases} A^* = \frac{\mu}{2l^2} \left[ \frac{2}{3} b^3 - a^2 \left( l - \frac{2}{3} a \right) \right] = \frac{\mu}{6l} (l^2 - 3b^2), \\ B^* = \frac{\mu}{2l^2} \left[ \frac{2}{3} a^3 - b^2 \left( l - \frac{2}{3} b \right) \right] = \frac{\mu}{2l} (l^2 - 3a^2). \end{cases}$$

e) *Due coppie simmetriche*. Dalle (300) si deduce immediatamente (fig. 95 c):

$$(301) \quad A^* = B^* = \frac{\mu}{2l} (a^2 - b^2).$$

f) *Carico uniforme parziale*. La superficie semplice dei momenti coincide con quella triangolare relativa al carico concentrato  $P = p\lambda$ , a meno dell'area (fig. 95 d):

$$F_2 = \frac{1}{3} \lambda \frac{P\lambda}{8} = \frac{p\lambda^3}{24}.$$

Poichè a questa competono i contributi:

$$-A_z^* = \frac{F_2 b}{l} = \frac{p\lambda^3}{24l} b, \quad -B_z^* = \frac{F_2 a}{l} = \frac{p\lambda^3}{24l} a,$$

indicando con  $A_1^*, B_1^*$  i termini di carico corrispondenti al carico concentrato  $P$ , tenendo presenti le (296) ed applicando la sovrapposizione degli effetti, otteniamo:

$$(302) \quad \begin{cases} A^* = A_1^* - A_2^* = \frac{p\lambda b}{24l} [3(l^2 - b^2) - \lambda^2], \\ B^* = B_1^* - B_2^* = \frac{p\lambda a}{24l} [4(l^2 - a^2) - \lambda^2]. \end{cases}$$

In particolare per un carico simmetrico adiacente alla mezzzeria si trae (fig. 95 e):

$$(303) \quad A^* = B^* = \frac{p\lambda}{48} (3l^2 - \lambda^2).$$

g) Due tratti di carico uniforme simmetrici. Dalle (302) si ottiene facilmente (fig. 95 f):

$$(304) \quad A^* = B^* = \frac{p\lambda}{24} (12ab - \lambda^2).$$

In particolare per carichi adiacenti agli appoggi ( $a = \lambda/2$ ,  $b = l - \lambda/3$ , fig. 95 g):

$$(305) \quad A^* = B^* = \frac{p\lambda^2}{12} (4l - 2\lambda).$$

### 36 — Forze taglianti nelle travi continue.

Il diagramma del taglio d'una trave continua potrebbe ottenersi derivando quello dei momenti flettenti; è però preferibile dedurlo per integrazione del diagramma di carico, ciò che richiede la conoscenza delle costanti di integrazione, ossia delle forze taglianti nelle sezioni adiacenti agli appoggi.

Immaginiamo di isolare la campata  $(m+1)^{ma}$  con due tagli: uno immediatamente a destra dell'appoggio  $C_m$ , l'altro immediatamente a sinistra dell'appoggio  $C_{m+1}$  (fig. 96). L'equilibrio della campata isolata può ripri-

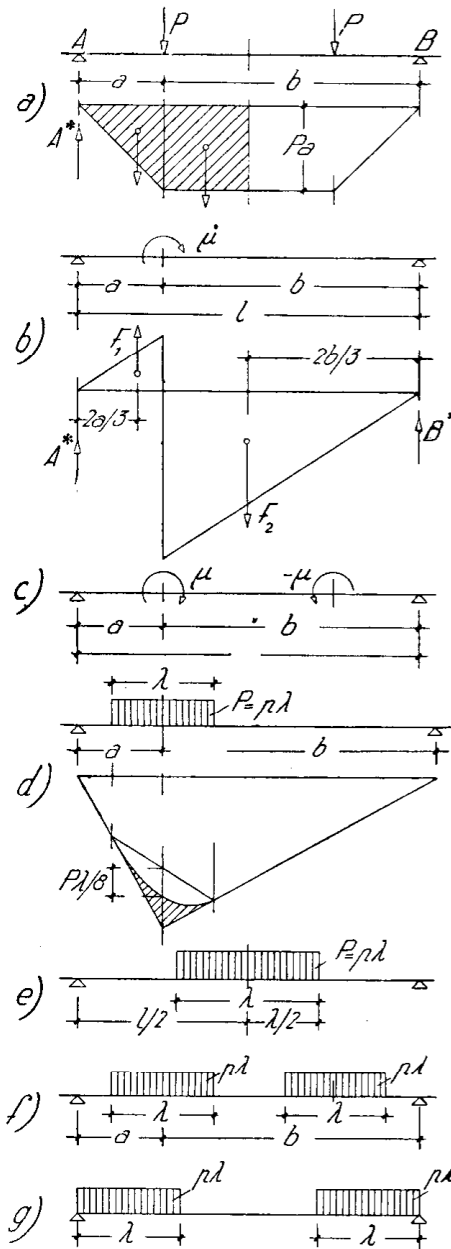


Fig. 95

stinarsi applicando alle faccie dei tagli le corrispondenti caratteristiche della sollecitazione e cioè:

per la sezione a sinistra, una forza tagliante  $T'_m$  ed un momento  $M_m$  uguale a quello che agiva sull'appoggio infinitamente vicino;

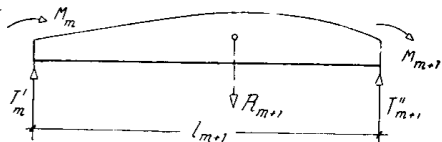


Fig. 96

per la sezione a destra, una forza tagliante  $T''_{m+1}$ , ed un momento flettente  $M_{m+1}$  uguale a quello della sezione sull'appoggio  $C_{m+1}$ .

Detto in valore e segno  $\mathcal{N}_{m+1}$  il momento dei carichi insistenti nella campata  $(m+1)^{ma}$  rispetto alla verticale dell'appoggio  $C_{m+1}$ , l'equilibrio alla rotazione della porzione considerata porta all'equazione:

$$M_m + T'_m l_{m+1} + \mathcal{N}_{m+1} = M_{m+1},$$

donde:

$$(306) \quad T'_m = \frac{M_{m+1} - M_m}{l_{m+1}} - \frac{\mathcal{N}_{m+1}}{l_{m+1}}.$$

Similmente, se  $R_{m+1}$  è la risultante dei carichi insistenti nella campata in esame, positiva se diretta verso il basso, l'equilibrio alla traslazione verticale importa:

$$(307) \quad T'_m - R_{m+1} = T''_{m+1}.$$

Per calcolare infine la reazione dell'appoggio  $C_m$ , basterà esprimere l'equilibrio alla traslazione verticale di un tronco infinitesimo di trave intorno dell'appoggio (fig. 97):

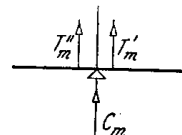


Fig. 97

$$T'_m = T''_m + C_m,$$

da cui:

$$(308) \quad C_m = T'_m - T''_m,$$

dove  $T'_m$  e  $T''_m$  si devono introdurre coi loro segni.

### 37 — Influenza del taglio sulla deformazione.

Nella teoria delle travi inflesse viene ordinariamente trascurata l'influenza del taglio sulla deformazione, ciò che in generale è lecito, data la piccolezza delle deformazioni dovute a questa sollecitazione rispetto a

quelle flessionali. Vediamo ora come si possa tener conto di questa influenza ricorrendo al consueto artificio di separare idealmente il taglio dalla flessione da cui è invece necessariamente accompagnato; ricerchiamo cioè la *linea elastica dovuta unicamente al taglio*; ottenuta questa potremo sommarne le ordinate a quelle della flessione e dedurre così la deformata dovuta alla presenza simultanea delle due sollecitazioni.

Nello studio approssimato della sollecitazione a flessione e taglio abbiamo ottenuta la freccia del cilindro di Saint-Venant come somma della freccia  $f_1$  corrispondente alla flessione e di quella:

$$(309) \quad f_2 = \chi \frac{T_y l}{AG},$$

che avevamo attribuito al taglio.

L'estensione alle travi dei risultati del problema allora studiato porta ora a valutare mediante la:

$$(310) \quad d\eta_2 = \chi \frac{T_x dz}{GA_x},$$

discendente in modo diretto dalla (219), il cedimento relativo fra due sezioni trasversali che limitano un tronco elementare di lunghezza  $dz$ , lungo il quale il taglio si possa ritenere costante ed uguale  $T_x$ .

La (310), ovvero la:

$$\frac{d\eta_2}{dz} = \chi \frac{T_x}{GA_x},$$

permette di calcolare le inclinazioni della linea elastica dovute al taglio; integrandola, si deduce il contributo dovuto a questa sollecitazione:

$$(311) \quad \eta_2 = \int_0^z \chi \frac{T_x}{GA_x} dz + C.$$

Studieremo qui appresso i casi particolari più interessanti.

a) *Trave appoggiata agli estremi ed uniformemente caricata* (fig. 98 a).  
Supposta la trave prismatica ed omogenea, la (311) diviene:

$$(311') \quad \eta_2 = \frac{\chi}{GA} \int_0^z T_x dz + C,$$

e ricordando che è:

$$\int_0^z T_x dz = \int_0^z p \left( \frac{l}{2} - z \right) dz = \frac{p}{2} z (l - z) = \frac{p}{2} zz',$$

anche:

$$\eta_2 = \frac{\chi}{GA} p \frac{zz'}{2} + C.$$

Se gli appoggi sono rigidi, con  $(\eta_2)_{x=0} = 0$  è  $C=0$  e quindi:

$$(312) \quad \eta_2 = \frac{\chi}{GA} p \frac{zz'}{2},$$

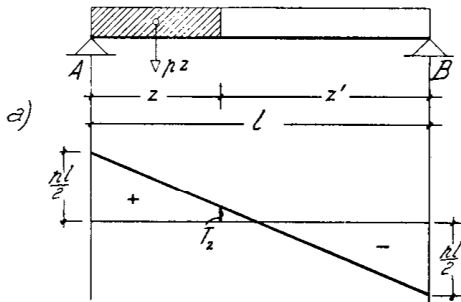
da cui, per  $z=z'=0,5l$ :

$$(313) \quad f_2 = \frac{\chi}{GA} \frac{pl^2}{8}.$$

Ricordando la (135), avremo:

$$(314) \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{\chi p \frac{l^2}{GA}}{8 \frac{5}{384} \frac{pl^2}{EJ}} = \frac{384}{40} \chi \frac{E}{G} \frac{J}{Al^2} = 9,6 \chi \frac{E}{G} \left(\frac{\rho}{l}\right)^2.$$

In particolare per  $m=4$  ( $E/G=5/2$ ) e per una trave a sezione rettangolare di altezza  $h$  ( $x=6/5$ ,  $\rho^2=h^2/12$ ) si ottiene:



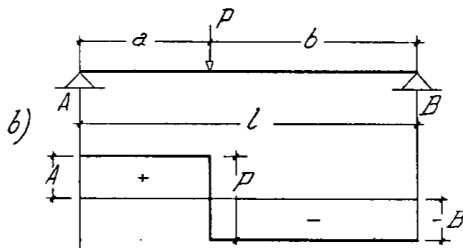
$$(314') \quad \frac{f_2}{f_1} = 2,4 \left(\frac{h}{l}\right)^2;$$

infine per  $h=l/10$ :

$$f_2/f_1 = 0,024,$$

ossia un incremento di freccia del 2% circa.

Per un profilato normale a doppio T n° 60 ( $E/G=5/2$ ,  $x \approx 2,4$ ,  $\rho^2/h^2 = 585/3600 \approx 0,162$ ), avremo invece:



$$\frac{f_2}{f_1} = 9,3 \left(\frac{h}{l}\right)^2,$$

e per  $h:l=1/10$ :

$$f_2/f_1 = 0,09;$$

Fig. 98

contributo più che triplo di quello trovato per la sezione rettangolare.

b) *Trave incastrata agli estremi ed uniformemente caricata.* Il diagramma del taglio non differisce ora da quello relativo al caso precedente: la freccia  $f_2$  è perciò espressa ancora dalla (313). Dalla (248) la  $f_2$  risulta invece cinque volte minore di quella che lo stesso carico produrrebbe se la trave fosse appoggiata: avremo quindi:

$$(315) \quad \frac{f_2}{f_1} = 48 \chi \frac{E}{G} \left(\frac{\rho}{l}\right)^2,$$

cioè un rapporto  $f_2/f_1$  quintuplo di quello espresso dalla (314).

I contributi percentuali trovati nel caso precedente si elevano ora al 12% per la trave a sezione rettangolare ed al 45% per la trave a doppio T del n° 60.

c) *Trave appoggiata agli estremi, soggetta ad un carico concentrato* (fig. 98 b).

Se il carico agisce all'ascissa  $\zeta = a$ , il taglio alla sinistra della sezione caricata è costante ed uguale alla reazione dell'appoggio  $A$ :

$$T = A = Pb/l.$$

Per la (311) l'ordinata sotto il carico della deformata dovuta al taglio vale:

$$\eta_c = \frac{\chi}{GA} Ta = \frac{\chi}{GA} \frac{Pab}{l}$$

e, se il carico agisce in mezzeria ( $a = b = 0,5l$ ):

$$(316) \quad f_2 = \frac{\chi}{GA} \frac{Pl}{4}.$$

In quest'ultimo caso, ricordando la (128), si ottiene:

$$(317) \quad \frac{f_2}{f_1} = 12 \chi \frac{E}{G} \left( \frac{\rho}{l} \right)^2;$$

l'influenza del taglio è quindi più accentuata per carichi concentrati.

Nei casi particolare già considerati, avremo:

$$\begin{aligned} f_2/f_1 &= 0,03 \text{ per la trave a sezione rettangolare,} \\ f_2/f_1 &= 0,12 \text{ per il profilato normale a doppio T n° 60.} \end{aligned}$$

d) *Trave incastrata, soggetta ad un carico concentrato.*

Per un carico agente in mezzeria il diagramma del taglio coincide con quello corrispondente alla trave semplice cimentata allo stesso modo e perciò la freccia di taglio è ancora espressa dalla (316). La freccia dovuta alla flessione, come risulta dalle (225), vale un quarto di quella corrispondente alla trave appoggiata. Ne deriva un rapporto:

$$(318) \quad \frac{f_2}{f_1} = 48 \chi \left( \frac{\rho}{l} \right)^2$$

quadruplo di quello relativo al caso precedente. Nei soliti casi particolari avremo:

$$\begin{aligned} f_2/f_1 &= 0,12 \text{ per la trave a sezione rettangolare,} \\ f_2/f_1 &= 0,48 \text{ per il profilato normale a doppio T n° 60.} \end{aligned}$$



\* \* \*

Dalle precedenti considerazioni emerge che l'influenza del taglio dipende:

*dal fattore di taglio*: è più marcata nelle travi profilate, per le quali il fattore  $\chi$  è di solito superiore a 2 ;

*dal rapporto tra il raggio d'inerzia disteso sull'asse di sollecitazione e la luce della trave*: la risentono in maggior misura le travi tozze ;

*dalle condizioni di vincolo*: è più accentuata nelle travi incastrate nonchè nelle travi continue, le cui campate si comportano come travi più o meno imperfettamente incastrate.

Dobbiamo infine osservare che, trascurando le deformazioni dovute al taglio, si commette un errore più o meno sensibile anche nella valutazione delle incognite iperstatiche delle travi indeterminate, il cui calcolo è notoriamente legato alle deformazioni elastiche. Vedremo a suo tempo come questa valutazione possa essere fatta con metodi più rigorosi.

I vincoli teorici delle travi si realizzano in pratica assai imperfettamente.

Sia l'appoggio mobile, sia quello fisso, vengono ottenuti per lo più

ponendo senz'altro la trave sul sostegno, talvolta con l'interposizione di piastre metalliche o di conci di pietra dura. L'azione esercitata dalla trave, staticamente indeterminata, non può essere calcolata facilmente, data l'incertezza sulle proprietà elastiche dei materiali a contatto.

Nel caso d'un appoggio semplice per lo più si ammette:

*nel calcolo dell'appoggio*, che la pressione si distribuisca secondo un diagramma lineare (fig. 99). Detta  $A$  la reazione d'appoggio,  $b$  e  $\lambda$  le dimensioni della superficie di contatto, la pressione massima al margine libero di questa vale allora:

$$(319) \quad \sigma_a = \frac{2A}{b\lambda};$$

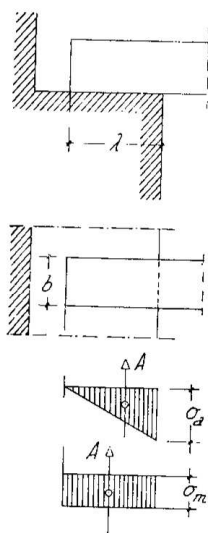


Fig. 99

*nel calcolo della trave* si suppone invece, prudenzialmente, che la reazione d'appoggio sia distribuita uniformemente, sicchè agisca nel baricentro della superficie di contatto.

Se anzichè d'un appoggio di estremità si tratta d'un appoggio intermedio, si ammette una distribuzione lineare simmetrica (fig. 100); la rea-

zione  $C$  passa allora per il centro dell'appoggio e la (319) conserva la sua validità ( $C=A$ ).

Se l'appoggio è fisso, si suppone ripartita secondo un diagramma triangolare anche la componente assiale della reazione (fig. 101).

L'incastro si realizza immerstando la trave nel piedritto per un tratto di conveniente lunghezza (fig. 102). Detto  $P_s$  il peso soprastante, posto  $P_i = P_s + A$  ed ammessa una legge di distribuzione triangolare per entrambe queste forze sulle rispettive aree di ripartizione, le pressioni massime valgono:

$$(320) \quad \sigma_s = \frac{2P_s}{b\lambda_s} \quad , \quad \sigma_i = \frac{2P_i}{b\lambda_i} ;$$

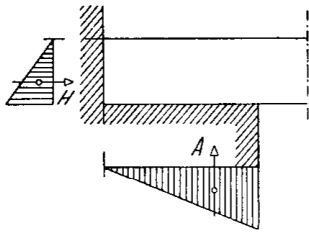


Fig. 101

ed il momento che l'incastro può assorbire:

$$(321) \quad M'_A = P_s \left[ \lambda_i - \frac{1}{3}(\lambda_s + \lambda_i) \right] .$$

Per  $\lambda = \lambda_s = \lambda_i$ , avremo (fig. 102 b):

$$(322) \quad \sigma_s = \frac{2P_s}{b\lambda} \quad , \quad \sigma_i = \frac{2P_i}{b\lambda} \quad , \quad M'_A = \frac{P_s\lambda}{3} .$$

Se  $M_A$  è il momento d'incastro della trave, la stabilità richiede anzitutto:

$$M_A \leq M'_A ;$$

inoltre la maggiore delle pressioni  $\sigma_s$  e  $\sigma_i$  non deve oltrepassare il minore dei carichi di sicurezza alla compressione dei due materiali a contrasto (ordinariamente quello del materiale del piedritto).

Per il calcolo della trave si considera la *luce teorica*, ammettendo che l'incastro si trovi a metà distanza fra le azioni  $P_s$  e  $P_i$ .

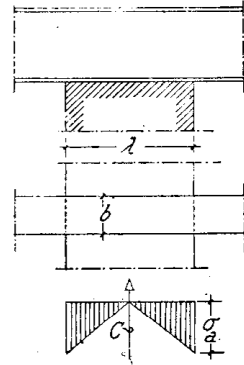


Fig. 100

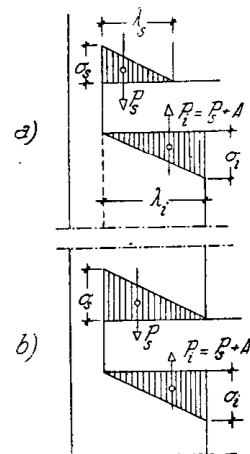


Fig. 102

\* \* \*

Nelle grandi strutture metalliche l'appoggio più semplice è costituito da una piastra a superficie convessa munita inferiormente di nervature

che restano immorsate nella muratura del piedritto (fig. 103). Su questa la trave poggia direttamente o, più spesso, con l'interposizione di una seconda piastra fissata alla faccia inferiore di essa, e le è impedito di spostarsi trasversalmente da apposite guide della piastra sottostante. Nell'appoggio fisso quest'ultima presenta inoltre due sporgenze cui corrispondono intagli della piastra superiore, sicchè restano impediti anche gli spostamenti longitudinali. Gli appoggi mobili di questo tipo si dicono *a sfregamento*.

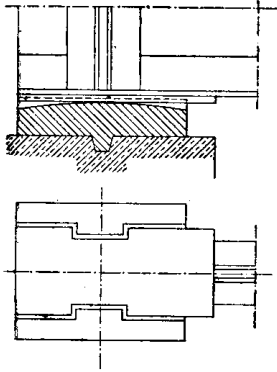


Fig. 103

Se la reazione supera le  $10 \div 15$  tonnellate, si ricorre agli *appoggi a cerniera*, detti anche *a bilanciere*, nei quali dalle piastre solidali alla trave ed al piedritto (talvolta, come in figura 104 a, soltanto dalla piastra inferiore) si staccano alcuni ritti rinforzati da nervature, le cui estremità sono snodate

a cerniera. L'articolazione può essere effettuata con un perno, oppure, come in molti apparecchi moderni, mediante due superfici cilindriche a contatto, l'una concava, l'altra convessa, generalmente di raggio diverso. Negli apparecchi mobili di questo tipo il movimento si ottiene interponendo uno o più rulli cilindrici fra la piastra inferiore ed una terza piastra sottostante all'articolazione (fig. 104 b). Finchè è possibile si adotta un rullo unico; crescendo la reazione si passa agli apparecchi a rulli multipli, generalmente in numero pari. Il complesso dei rulli e del telaio, cui i rulli stessi sono fissati coi loro perni, forma il *carrello di dilatazione*.

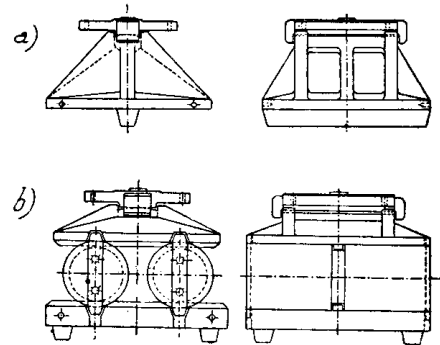


Fig. 104