

del momento flettente ; integrando poi quest' ultimo o quello delle curvature (deducibile nel modo noto dal diagramma del momento flettente) ove la trave fosse a momento d'inerzia variabile, si otterrebbe il diagramma delle inclinazioni e successivamente la linea elastica.

Si è preferito invece dedurre il diagramma dei momenti flettenti come funicolare del carico (fig. 52 b) e la linea elastica come funicolare del diagramma delle curvature, affine in questo caso al diagramma dei momenti, essendo costante il prodotto EJ .

La fondamentale $A'B'$ del primo diagramma coincide col primo lato della funicolare, parallelo (in questo caso coincidente) al raggio proiettante PO : l'ordinata y_m compresa fra essa e la funicolare sulla verticale di una generica sezione S della trave, misura, in base H , il momento statico rispetto alla suddetta verticale delle forze che ne rimangono alla destra, cioè il momento flettente nella sezione S , cambiato di segno.

La fondamentale del secondo diagramma è anche subito individuata non appena definito il grado d'imperfezione dell'incastro. Se l'incastro

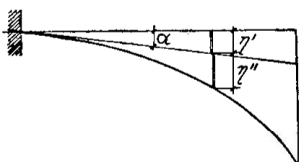


Fig. 53

è perfetto, come nell'esempio è supposto, la tangente alla linea elastica in A deve coincidere con l'asse primitivo della trave, le ordinate vanno cioè misurate a partire dal lato $A''B''$ della funicolare parallelo al raggio proiettante P_27' ; se invece l'incastro consentisse una rotazione α , occorrerebbe modi-

ficare la fondamentale in modo da sommare alle ordinate η'' che si avrebbero in caso d'incastro perfetto, quelle η' derivanti dalla rotazione suddetta (fig. 53).

Supposta metallica la trave, con $E = 2150 t/cm^2$ ed $J = 2430 cm^4$, si costruì la funicolare diagramma dei momenti flettenti con distanza polare $H = 2 t$; suddiviso poi detto diagramma in strisce verticali, se ne ridussero le aree alla base $\lambda_1 = 58 cm$. Poichè si vollero le ordinate della linea elastica in scala $i = 3$ volte il vero ed il disegno originale era nella scala $\frac{1}{n} = \frac{1}{50}$, si fece:

$$\xi = in = 3 \times 50 = 150 ,$$

con che, in base alla (50), risultò:

$$\lambda_2 = \frac{EJ}{H \lambda_1 \xi} = \frac{2150 \times 2430}{2 \times 58 \times 150} = 300 cm .$$

È facile renderci conto che le inclinazioni e le inflessioni di una mensola come quella qui studiata possono ottenersi rispettivamente come ta-

glio e come momento flettente della mensola incastrata in B anzichè in A e caricata dal diagramma delle curvature.

* * *

La trave con sbalzi rappresentata in figura 54 — un profilato normale a doppio T n. 28 — sorretta da due appoggi rigidi è gravata nel piano dell'anima da un carico distribuito crescente con legge lineare dall'estremità sinistra C fino all'appoggio B , e da un carico concentrato all'estremità destra D .

La trattazione venne eseguita col metodo di Saviotti. Con polo P e base di riduzione $\lambda = 4\text{ m}$, si integrò il diagramma di carico, ottenendone la linea C_1B_1 , che si completò coi tratti B_1D_1 , $D_1D'_1$, per tener conto del carico agente all'estremità D . Con polo P_0 e base $H = 0,5t$ si costruì poi il secondo integrale $A_2C_2D_2$, e con la congiungente A_2B_2 si completò il diagramma dei momenti tra gli appoggi. La parallela P_0C_1''' a tale congiungente determina al tempo stesso le reazioni $A = \overline{C_1'''C_1}$, $B = \overline{C_1'''C_1'''}$, e la fondamentale $A_1'''B_1'''$ del taglio nel tratto AB . Per gli sbalzi le fondamentali di questo medesimo diagramma sono le orizzontali pei punti C_1 e D_1 .

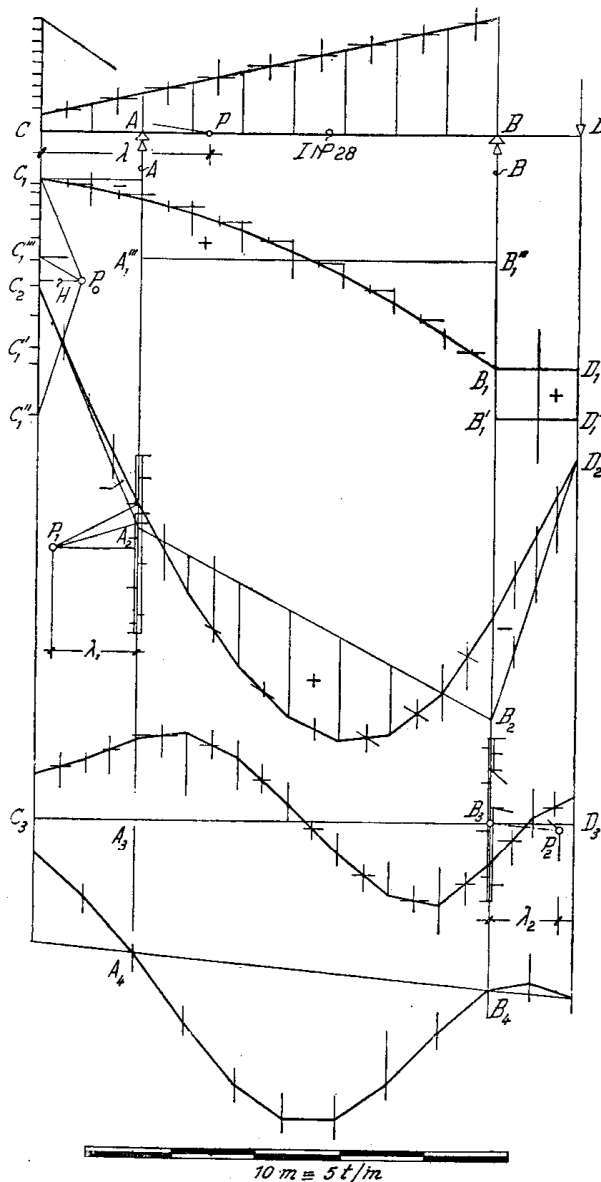


Fig. 54

Poichè la trave è prismatica, il terzo integrale del carico, eseguito con base $\lambda_1 = 2\text{ m}$, fornì la linea delle inclinazioni; infine da questa, mediante una quarta integrazione, si ottenne la linea elastica. Nel disegno originale, in

scala $1:n=1:10$, le inflessioni erano decuple del vero, perchè si era posto:

$$\xi = i n = 10 \times 100 = 1000 ,$$

$$\lambda_2 = \frac{EJ}{H\lambda_1\xi} = \frac{2150 \times 7587}{0,5 \times 200 \times 1000} = 163 \text{ cm} .$$

La fondamentale della linea elastica si ottenne congiungendo le intersezioni A_4B_4 della quarta linea integrale con le verticali degli appoggi. Guidando infine dal polo P_2 la parallela P_2B_3 alla suddetta congiungente, venne individuata la fondamentale C_3D_3 del diagramma delle inclinazioni.

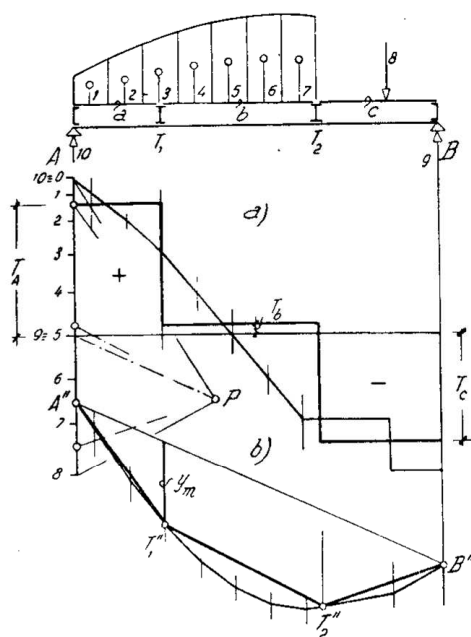


Fig. 55

verse A, T_1, T_2, \dots, B , si possono dedurre i diagrammi delle sollecitazioni della trave a carico indiretto dagli analoghi costruiti nell'ipotesi che il carico agisca direttamente.

Siano infatti questi ultimi i diagrammi segnati a tratto sottile in figura 55 a, b. Premesso che l'impalcatura determina semplicemente un frazionamento del carico in componenti che agiscono secondo le verticali delle traverse (fig. 56), si comprende intanto come rimangano invariate le reazioni degli appoggi. Essendo inoltre indifferente nella valutazione del momento flettente rispetto alla verticale della traversa m^{ma} generica, considerare il carico alla sinistra con la sua effettiva distribuzione (trave direttamente caricata) oppure il sistema delle componenti:

$$Q_m'' + Q_{m+1}' = P_m$$

20 — Travi a carico indiretto.

Molti sistemi resistenti si possono ridurre a schemi del tipo rappresentato in figura 55, nei quali la trave riceve, concentrata in determinate sezioni A, T_1, T_2, \dots, B , l'azione trasmessale dalla soprastante impalcatura.

Supposta la trave appoggiata agli estremi A, B , ed i travetti a, b, c, \dots , sui quali insiste il carico, pure semplicemente appoggiati alle tra-

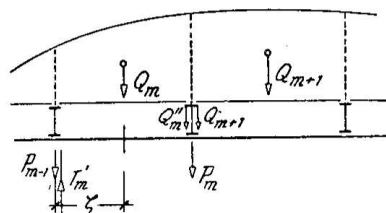


Fig. 56

verse A, T_1, T_2, \dots, B , si possono dedurre i diagrammi delle sollecitazioni della trave a carico indiretto dagli analoghi costruiti nell'ipotesi che il carico agisca direttamente.

che due qualsiasi *campi* contigui scaricano sulla traversa che li separa (trave caricata indirettamente), rimane pure invariato il momento flettente $H y_m$ nelle sezioni sottostanti alle travi trasversali (fig. 55).

Nelle sezioni comprese fra le traverse che delimitano il campo m^{mo} della trave a carico indiretto il momento varia secondo la legge lineare:

$$(53) \quad M = M_{m-1} + T'_m \xi,$$

dove M_{m-1} e T_m esprimono le caratteristiche della sollecitazione nella sezione *immediatamente alla destra* della traversa $(m-1)^{ma}$ (fig. 56).

Concludiamo pertanto che il *diagramma dei momenti della trave a carico indiretto si ottiene* inscrivendo in quello tracciato per la trave a carico diretto una poligonale coi vertici sulle verticali delle traverse.

Poichè fra due traverse consecutive il taglio rimane costante, il relativo diagramma si ottiene facilmente derivando quello dei momenti. Guidando dal polo P le parallele alla fondamentale $A''B''$ ed ordinatamente ai lati $A''T'_1, T'_1T'_2, T''B''$, di quest'ultimo diagramma, restano individuati sulla retta delle forze i tagli T_a, T_b, \dots, T_c , nei successivi campi della trave.

21 — Trave imperfettamente incastrata agli estremi.

La trave prismatica AB , incastrata agli estremi e soggetta ad un dato carico abbia ora certe imperfezioni dei vincoli definite dalle rotazioni α, β , rispettivamente in A, B , nonchè dal cedimento η_B valutato ortogonalmente all'asse della trave, di B rispetto ad A (fig. 57).

Ci proponiamo di determinare le incognite iperstatiche, cioè i momenti di incastro M_A ed M_B .

Sul sistema, ridotto a trave semplice col dislivello η_B degli appoggi,,

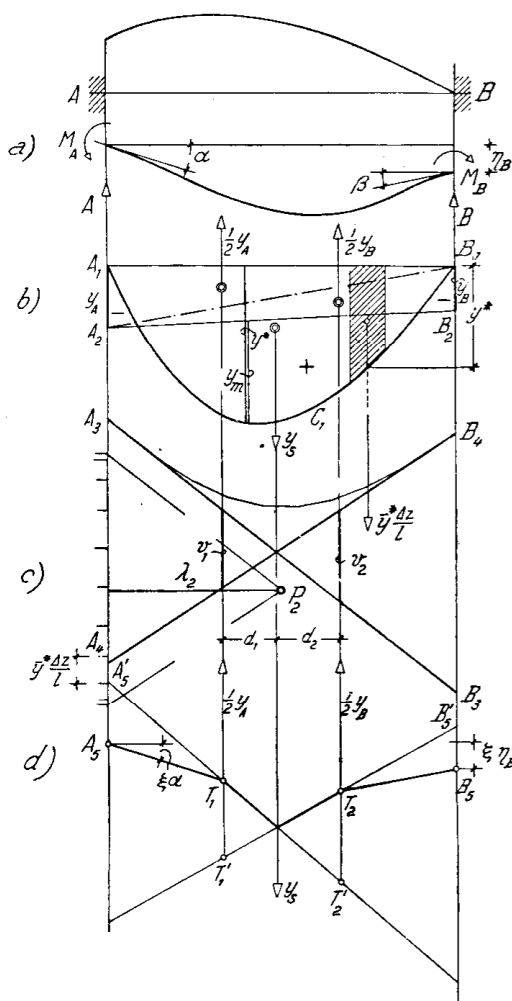


Fig. 57

facciamo agire dapprima il carico assegnato, quindi, come seconda e terza condizione di carico, i momenti M_A , M_B , supposti noti.

In virtù del principio di sovrapposizione degli effetti la trave perverrà così all'equilibrio elastico effettivo della trave iperstatica; in particolare i momenti flettenti di questa potranno esprimersi come somma di quelli relativi al sistema principale, per le singole suddette condizioni di carico.

Il diagramma dei momenti effettivi può dunque ottenersi sommando:

a) la superficie semplice dei momenti, cioè il diagramma dei momenti $A_1C_1B_1$ della trave semplice soggetta al carico dato ed alle corrispondenti reazioni;

b) i triangoli dei momenti d'incastro, cioè i diagrammi $A_1A_2B_1$ ed $A_2B_1B_2$ dei momenti per la trave semplice caricata successivamente dai momenti

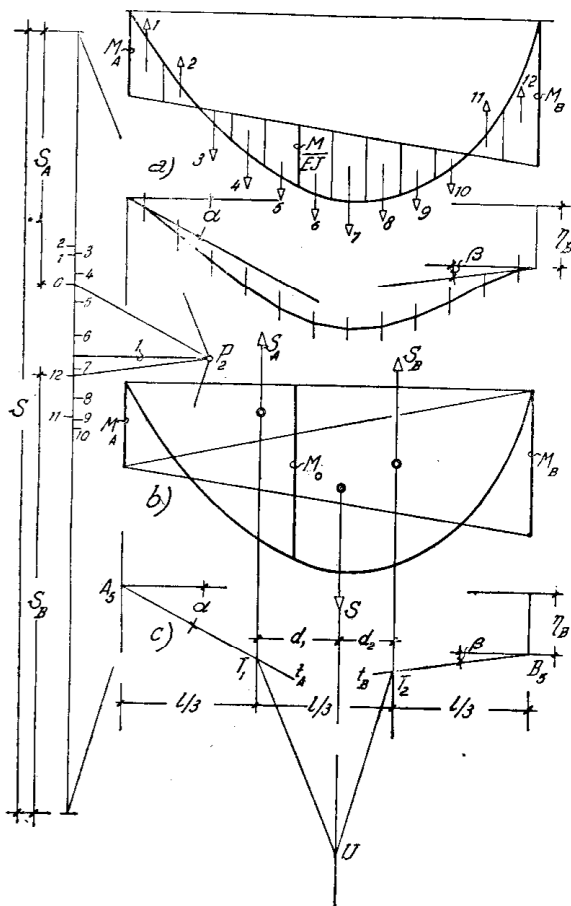


Fig. 58

M_A , M_B , e dalle relative reazioni. È chiaro che essendo in questo caso le reazioni degli appoggi le sole forze finite applicate, il diagramma è limitato da un unico tratto rettilineo A_2B_1 ovvero A_2B_2 , definito dalle ordinate estreme:

$$y_A = M_A/H \quad , \quad y_B = 0 \quad ,$$

nel primo caso, e:

$$y_A = 0 \quad , \quad y_B = M_B/H \quad ,$$

nel secondo.

Supporremo negativi i momenti M_A e M_B , cosicchè, portando verso il basso le corrispondenti ordinate momento y_A in A_1A_2 ed y_B in B_1B_2 , a partire dalla fondamentale A_1B_1 della superficie semplice dei momenti, leggeremo le ordinate dei momenti effettivi della trave iperstatica a partire dalla congiungente A_2B_2 ; e saranno

negativi i momenti al disopra, positivi quelli al disotto di essa.

Basterebbe ora, come è noto, costruire la funicolare del diagramma di carico avente le ordinate M/EJ (fig. 58 a) e tenere conto delle condizioni di vincolo, per ottenere la linea elastica.

Se invece di dividere in striscie verticali il diagramma delle curvature M/EJ , affine in questo caso a quello dei momenti M , lo dividiamo altrimenti (fig. 58 b), lasciando però inalterati la scala del disegno ed il polo di proiezione P_2 , la funicolare delle nuove forze-curvature non sarà più la linea elastica, perchè con la diversa suddivisione saranno variati i lati intermedi di essa; ma il primo e l'ultimo lato rimarranno paralleli ai raggi proiettati estremi P_2O , P_2I2 , dato che la forza-curvature totale, misurata dal segmento $O-I2$, è sempre la stessa.

Suddividiamo il diagramma nelle seguenti parti:

a) superficie semplice dei momenti, che rigarderemo positiva; se indichiamo con M_o il momento nella sezione generica della trave semplice, la forza-curvature corrispondente vale:

$$(54) \quad S = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_o dz,$$

ed agisce secondo la verticale baricentrica della superficie semplice dei momenti;

b) triangoli dei momenti negativi dovuti all'azione degli incastri; le corrispondenti forze-curvature saranno, in valore assoluto (fig. 58):

$$(55) \quad S_A = \frac{1}{EJ} \frac{M_A l}{2}, \quad S_B = \frac{1}{EJ} \frac{M_B l}{2}.$$

Queste forze dovendo essere applicate ai baricentri dei triangoli, agiscono in ogni caso secondo verticali che tripartiscono le campate, dette perciò *trisecanti*.

Vediamo ora come, anche ignorando le forze S_A ed S_B (per determinare le quali occorrerebbe conoscere i momenti incogniti) possa essere costruito il *poligono delle tangenti* o *secondo poligono funicolare*, ossia il poligono $A_5 T_1 U T_2 B_5$ che connette le forze S_A, S, S_B .

Cominciando con l'osservare che i lati estremi coincidono con le tangenti estreme della linea elastica, tratteremo il primo lato $A_5 T_1$ assegnandogli l'inclinazione α corrispondente al cedimento angolare dell'incastro di sinistra, moltiplicata per un conveniente numero $\xi = EJ/H\lambda_1\lambda_2$ (1). A partire dal punto B_5 , situato sulla verticale di B ed al disotto dell'orizzontale per A_5 della quantità $\beta \eta_B$, tratteremo poi il quarto lato $B_5 T_2$ dandogli un'inclinazione $\xi\beta$.

Il secondo e il terzo lato dovranno passare per T_1 e T_2 ed interse-

(1) Come per la linea elastica, anche per il poligono che qui la sostituisce non è praticamente possibile la rappresentazione in scala inalterata; porremo quindi ancora $\xi > 1$.

carsi sulla verticale della forza S . Supponiamoli già conosciuti e prolunghiamoli fino ad incontrare le trisecanti; su queste essi abbracceranno certi segmenti $\overline{T_1 T'_1}$, e $\overline{T_2 T'_2}$ i quali, com'è noto, forniscono la misura dei momenti statici della forza S rispetto a dette verticali; avremo cioè, indicando con d_1 e d_2 i bracci di leva delle S :

$$\overline{T_1 T'_1} = S d_1 \quad , \quad \overline{T_2 T'_2} = S d_2 .$$

Queste ordinate momento possono essere determinate nel modo seguente (fig. 57 b). Si divida in striscie verticali la superficie semplice dei momenti, che supponiamo costruita con distanza polare H ; poniamo la forza S sotto la forma:

$$(56) \quad S = \frac{1}{EJ} \int_0^l M_o dz = \frac{H}{EJ} \int_0^l y^* dz ,$$

calcoliamo l'ordinata media della superficie semplice:

$$y_s = \frac{1}{l} \int_0^l y^* dz = \approx \Sigma \frac{\overline{y^* dz}}{l} ,$$

ossia la misura di essa ridotta alla base $\lambda_1 = l$, dopo di che la (54) può scriversi:

$$(57) \quad S = \frac{Hl}{EJ} y_s ;$$

applichiamo quindi come forze verticali ai baricentri delle singole striscie le misure $\overline{y^* dz}/l$ delle rispettive aree e colleghiamole con un poligono funicolare di distanza polare λ . I lati estremi $A_3 B_3$ e $A_4 B_4$ di questo, ai quali si dà il nome di *incrociate*, si tagliano sulla linea d'azione della forza S ed abbracciano sopra una verticale qualunque segmenti proporzionali al momento della forza S rispetto ad essa. In particolare, se avremo scelto una distanza polare uguale a quella λ_2 con cui s'immagina costruito il poligono delle tangenti, avremo le misure:

$$v_1 = y_s d_1 / \lambda_2 \quad , \quad v_2 = y_s d_2 / \lambda_2 ,$$

le quali, sostituito ad y_s il valore fornito dalla (57) e ricordata l'espressione di ξ con $\lambda_1 = l$, si riconoscono uguali rispettivamente a $\overline{T_1 T'_1}$ e $\overline{T_2 T'_2}$.

Per completare il secondo poligono funicolare basterà pertanto portare al disotto dei punti T_1 e T_2 , individuati dal primo e quarto lato del poligono delle tangenti sulle trisecanti, i segmenti v_1 e v_2 abbracciati sul-

le stesse verticali dalle incrociate, e tracciare quindi le congiungenti $T_1 T'_2, T_2 T'_1$.

Ecco infine come il poligono delle tangenti viene utilizzato per la determinazione dei momenti iperstatici. Si prolunghino i lati intermedi fino alle verticali degli incastrati: primo e secondo lato determineranno sulla verticale di A un segmento proporzionale al momento statico della forza S_A rispetto a detta verticale; analogamente terzo e quarto lato staccheranno sulla verticale di B un segmento proporzionale al momento statico della forza S_B rispetto a quest'altra verticale. Avremo dunque:

$$\overline{A_5 A'_5} = \xi S_A l/3 \quad , \quad \overline{B_5 B'_5} = \xi S_B l/3 \quad ,$$

da cui, con riguardo alle (55) ed all'espressione di ξ :

$$\overline{A_5 A'_5} = y_A/6\lambda_2 \quad , \quad \overline{B_5 B'_5} = y_B/6\lambda \quad .$$

Infine, assumendo nella costruzione delle incrociate e del secondo poligono funicolare una distanza polare $\lambda_2 = l/6$, sarà:

$$\overline{A_5 A'_5} = y_A \quad , \quad \overline{B_5 B'_5} = y_B \quad ,$$

otteniamo cioè direttamente le ordinate momento sugli appoggi, che occorrono per completare il diagramma dei momenti flettenti.

22 — Trave perfettamente incastrata agli estremi.

Se i vincoli sono rigidi ($\alpha = \beta = \eta_B = 0$), il primo e l'ultimo lato del secondo poligono funicolare coincidono con la medesima orizzontale (figura 59 b); risultando chiuso il poligono, le forze S_A, S, S_B , o ciò che equivale, le altre $y_A/2, y_s, y_B/2$, devono equilibrarsi: il lato di chiusura $A_1 A_2$ è retta di compenso per la superficie semplice.

Se quindi decomponiamo secondo le trisecanti la forza $2y_s$ (fig. 59 a), le componenti saranno senz'altro le ordinate momento y_A ed y_B cercate.

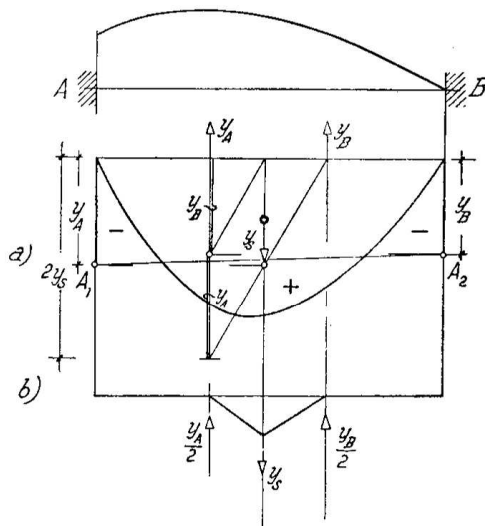


Fig. 59

* * *

Se la trave, oltreché perfettamente incastrata, è simmetricamente ca-

ricata, è anche simmetrico il diagramma dei momenti. Per la trave con vincoli rigidi il lato di chiusa del diagramma è l'orizzontale di compenso della superficie semplice dei momenti.

23 — Trave incastrata ad un estremo e appoggiata all'altro.

Possiamo dedurre questo caso di flessione, semplicemente iperstatico, come caso particolare di quello studiato al n. 22, ponendo $y_B = 0$. Il secondo poligono funicolare collega in tal caso le sole forze $y_A/2$ ed y_s , ed ha pertanto tre soli lati (fig. 60).

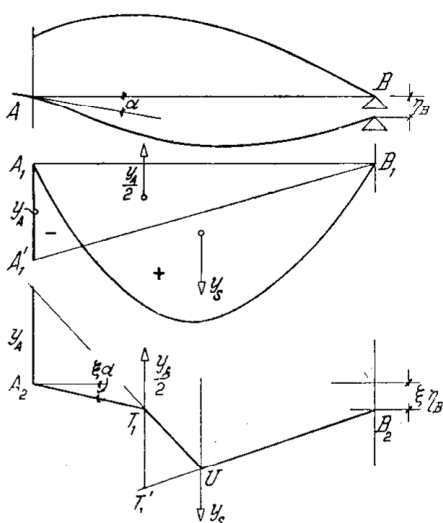


Fig. 60

Dati i cedimenti α ed η_B , potremo intanto tracciare il primo lato A_2T_1 dandogli l'inclinazione $\xi \alpha$ all'orizzontale; del terzo lato sappiamo soltanto che deve passare per il punto B_2 situato alla distanza $\xi \eta_B$ sotto l'orizzontale per A_2 . Ma secondo e terzo lato abbracciano sulla trisecante sinistra un segmento uguale a quello staccato sulla stessa verticale dalle incrociate: portando quindi in T_1T_1' tale segmento, rimangono individuati in T_1UB_2 il terzo lato, in UT_1 il secondo.

Quest'ultimo, prolungato fino alla verticale di A, determina l'ordinata momento y_A cercata.

* * *

Se l'incastro e l'appoggio sono rigidi, il primo e il terzo lato AT e TU abbracciano sulla verticale di B lo stesso segmento BB_1 che vi abbracciano il secondo ed il terzo lato (fig. 61). Ciò significa che sono uguali rispetto alla detta verticale i momenti delle forze $y_A/2$ ed y_s . Detto b_s il braccio di questa seconda forza, potremo allora scrivere:

$$\frac{y_A}{2} \frac{2}{3} l = y_s b_s,$$

da cui:

$$y_A = 3 y_s b_s / l.$$

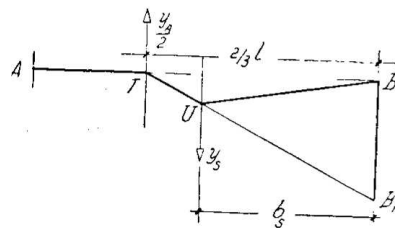


Fig. 61

24 — Trave continua.

Riferiamoci al caso di una trave prismatica poggiata semplicemente a-

gli estremi A, B , sorretta in altri tre punti intermedi C_1, C_2, C_3 e gravata da carichi comunque distribuiti nelle sue campate, nell'ipotesi che tutti i vincoli siano bilaterali, atti quindi a reagire anche con forze di-

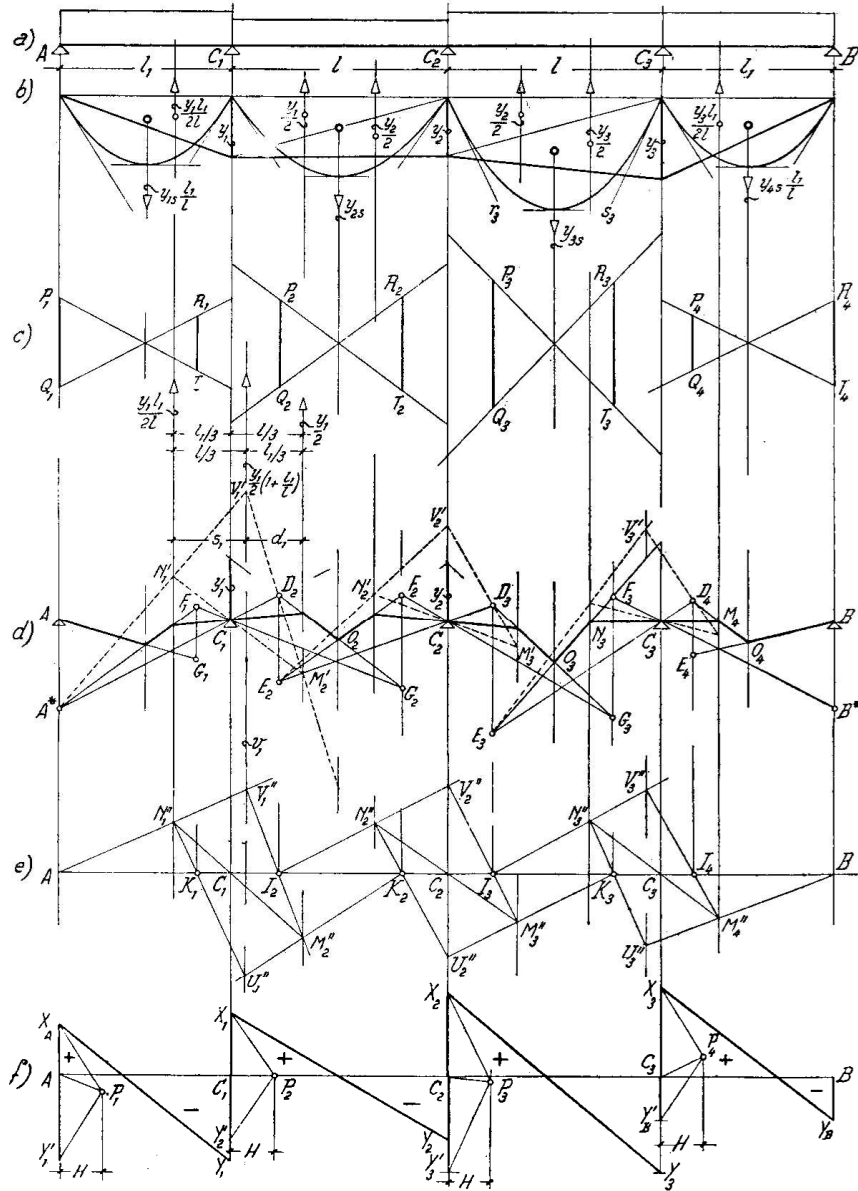


Fig. 62

rette verso il basso, sicché la trave deformandosi sia obbligata a rimanere collegata agli appoggi ed a seguirli nei loro eventuali cedimenti.

Assumiamo come incognite iperstatiche i momenti sugli appoggi e quindi come principale il sistema costituito da tante travi indipendenti semplicemente appoggiate agli estremi, quante sono le campate.

Ciascuna campata potendosi così riguardare come una trave imperfet-

tamente incastrata agli estremi, basterà sovrapporre i triangoli dei momenti d'incastro alle superfici semplici — diagrammi dei momenti relativi alle travi semplici che compongono il sistema principale — per ottenere il diagramma dei momenti della trave effettiva (fig. 62 b). A vremo una coppia di triangoli in ciascuna campata intermedia, un solo triangolo nelle estremità; naturalmente il momento M_m sull'appoggio generico m^{mo} rappresenta sia il momento d'incastro di destra della campata m^{ma} , che quello di sinistra della campata $(m+1)^{\text{ma}}$.

Poichè vogliamo operare graficamente, in luogo dei momenti M_1, M_2, M_3 sugli appoggi, assumeremo come incognite le ordinate y_1, y_2, y_3 , che misurano quei momenti nella stessa base H con cui sono state costruite le superfici semplici.

Estendiamo alla trave continua il metodo del secondo poligono funicolare, che dovrà ora collegare, ridotte naturalmente tutte alla medesima

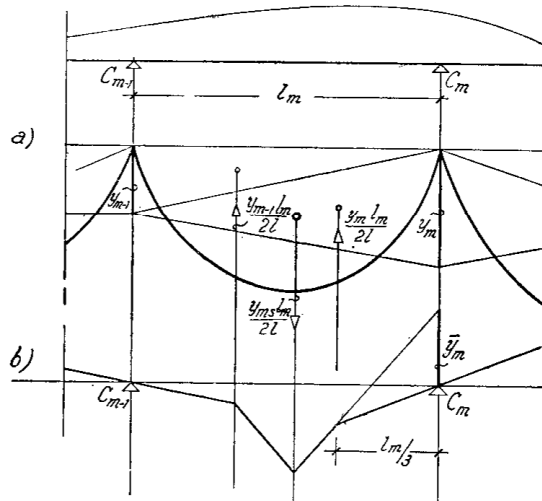


Fig. 63

base, forze-aree delle superfici semplici dei momenti e quelle dei triangoli dei momenti d'incastro per tutte le campate. Esso avrà quattro lati in ciascuna campata intermedia, tre nelle campate estreme; l'ultimo lato relativo ad una campata dovrà poi coincidere col primo lato relativo a quella che segue, perchè ambedue rappresentano la tangente alla linea elastica nel medesimo punto (fig. 62 d).

Determinate le ordinate medie y_{ms} delle superfici semplici, passiamo alla costruzione delle incrociate relative alle singole campate, tenendo presente che le basi di riduzione $\lambda_1 = l$ e $\lambda_2 = l/6$ dovranno essere scelte in modo che risulti un medesimo ξ per tutte le campate. Converrà scegliere come lunghezza l la luce della campata che si ripete un maggior numero di volte. Nella campata m^{ma} , di luce l_m , il secondo poligono funicolare collegherà pertanto le forze (fig. 63):

$$-y_{m-1} l_m / 2l \quad , \quad y_{ms} l_s / l \quad , \quad -y_m l / 2l \quad ,$$

ovvero, se è $l_m = l$, le altre:

$$-y_{m-1} / 2 \quad , \quad y_{ms} \quad , \quad -y_m / 2 \quad .$$

Nell'esempio di figura 62, l è la luce comune alle due campate intermedie, le basi di riduzione sono l e $l/6$; di conseguenza sono moltiplicate per il rapporto l_1/l le misure in base l_1 delle aree relative alle campate estreme.

Portiamo, moltiplicati per ξ ed a partire da una fondamentale che supporremo coincidere con l'asse primitivo della trave, gli eventuali cedimenti degli appoggi, da riguardarsi come dati, e collochiamo questi nelle posizioni A, C_1, C_2, C_3, B , in cui sono pervenuti per i cedimenti subiti (fig. 62 *d*): per questi punti passerebbe la linea elastica della trave disegnata col rapporto d'affinità ξ e deve perciò passare anche il poligono delle tangenti, dato che la totalità delle forze curvature collegate nelle singole campate è la stessa sia per la funicolare-linea elastica che per il secondo poligono funicolare; tracciamo ancora le linee d'azione delle forze corrispondenti alle aree del diagramma dei momenti, ossia, per ogni campata, le verticali baricentriche delle superfici semplici e le trisecanti, delle quali ultime, per le campate estreme, basteranno quelle interne. Vediamo dopo ciò come si possa costruire il secondo poligono.

Primo e secondo lato si tagliano sulla linea d'azione della prima forza, la $y_{1s} l_1/l$, e staccano sulla verticale di A un segmento pari alla misura del momento statico della forza rispetto a detta verticale, uguale quindi a quello $\overline{P_1 Q_1}$, abbracciato dalle incrociate della prima campata sulla stessa verticale. Portando allora verticalmente dal punto A , per il quale deve passare il primo lato, un segmento $\overline{AA^*} = \overline{P_1 Q_1}$, otteniamo il punto A^* appartenente al secondo lato del poligono.

Guidiamo da A^* una retta arbitraria, e supponiamola per un momento coincidente col suddetto secondo lato; questo perverrebbe allora fino al punto N'_1 della trisecante di destra della prima campata, e risulterebbe individuato, come congiungente tale punto N'_1 col secondo appoggio C_1 , il terzo lato, la cui intersezione M'_2 con la trisecante di sinistra della seconda campata sarebbe poi comune al quarto lato del poligono.

È facile mostrare che anche questo lato riuscirebbe individuato. Osserviamo infatti che il secondo e quarto lato, estremi rispetto alle forze:

$$y_1 l_1/2l \quad , \quad y_1/2 \quad ,$$

agenti secondo le trisecanti contigue all'appoggio C_1 , si tagliano in V'_1 sulla risultante di queste forze. Ma la verticale secondo cui agisce tale risultante divide la distanza tra le componenti in parti inversamente proporzionali alle intensità di queste: essa dunque è definita dal rapporto:

$$(58) \quad \frac{s_1}{d_1} = \frac{y_1}{2} \bigg/ \frac{y_1}{2} \frac{l_1}{l} = \frac{l}{l_1} ;$$

d'altra parte le componenti distano mutuamente di:

$$s_i + d_i = \frac{1}{3} (l_i + l);$$

si ricava dunque:

$$s_i = l/3 \quad , \quad d_i = l_i/3 .$$

Alla verticale v definita dalla (38), la cui posizione non dipende dall'ordinata y_i e sulla quale debbono intersecarsi il secondo ed il quarto lato del poligono daremo il nome di *controverticale d'appoggio*. Il punto V'_1 , in cui essa è intersecata dal secondo lato del poligono, ed il punto M'_2 precedentemente trovato, individuano il quarto lato.

Supposto ora di modificare la scelta del secondo lato del poligono, risulteranno modificati anche il terzo ed il quarto; dovranno però sempre passare: per A^* il secondo, per C_1 il terzo. Ma per un noto teorema di Desargues (1), se il lato $N'_1 V'_1$ ruota intorno ad A^* e quello $N'_1 M'_2$ intorno a C_1 , al mutare di forma del triangolo $N'_1 M'_2 V'_1$ definito dal 2°, 3°, 4° lato del poligono, anche il suo terzo lato $V'_1 M'_2$ deve ruotare intorno al punto D_2 situato sulla congiungente gli altri due centri di rotazione A^* e C_1 . Questo punto D_2 , per il quale deve dunque passare il quarto lato dell'effettivo poligono delle tangenti, resta così individuato nell'intersezione della congiungente $A^* C_1$ col quarto lato del poligono di tentativo.

Il segmento $\overline{D_2 E_2}$ uguale al segmento $\overline{R_2 Q_2}$ abbracciato sulla verticale di D_2 dalle incrociate della seconda campata, determina un punto E_2 del quinto lato. Se ora partendo da questo punto e ripetendo esattamente lo stesso procedimento seguito per il tracciamento del secondo, terzo e quarto lato, si tracciano il quinto $E_2 E'_2$ arbitrario, ed i conseguenti lati $N'_2 M'_3$, $M'_3 V'_2$, rispettivamente sesto e settimo, si viene a determinare nell'intersezione della $E_2 C_2$ col settimo lato del poligono di tentativo un punto D_3 appartenente al settimo lato dell'effettivo poligono. Si osservi che quinto e settimo lato si tagliano ora sulla stessa verticale dell'appoggio perchè questa coincide con la controverticale, essendo uguali le due campate adiacenti.

(1) Il primo dei teoremi che portano il nome di Girard Desargues dice: se le tre coppie di lati corrispondenti di due triangoli si tagliano in tre punti allineati, le congiungenti le tre coppie di vertice concorrono in un punto. Nel caso che qui interessa, tale punto è improprio e coincide con la verticale.

Il secondo teorema di Desargues riguarda la proprietà d'un quadrilatero inscritto in una conica.

Proseguendo col solito metodo, portando cioè $\overline{D_3 E_3} = \overline{P_3 Q_3}$ troveremo il punto E_3 dell'ottavo lato; tracciando poi un ottavo, nono e decimo lato di tentativo, quest'ultimo sarà intersecato dalla congiungente $E_3 C_3$ nel punto D_4 appartenente all'effettivo decimo lato; infine portando $\overline{D_4 E_4} = \overline{P_4 Q_4}$, sarà E_4 un punto dell'undicesimo ed ultimo lato. Ma questo deve passare per B e risulta quindi determinato. Tali risultano poi ordinatamente il decimo per O_4 e D_4 , il nono per M_4 e C_3 , l'ottavo per N_3 ed N_3 , il settimo per O_3 e D_3 , e così via fino al primo.

Per tracciare in modo più preciso il poligono conviene però determinare altri punti; ciò può farsi partendo da B e ripetendo la costruzione precedentemente eseguita partendo da A : si ottengono così successivamente i punti $B, F_3, G_3, F_2, G_2, F_1, G_1$.

Congiungendo in croce i quattro punti noti in ciascuna campata si determinano i lati del poligono che in essa s'intersecano sulla verticale baricentrica della superficie semplice dei momenti: si completa quindi il tracciamento disegnando i lati passanti per gli appoggi e compresi fra le trisecanti contigue a questi.

È possibile determinare le verticali delle due coppie di punti DE ed FG di ciascuna campata con una costruzione indipendente da quella del poligono delle tangenti.

Consideriamo il quadrangolo completo $A^* N'_1 V'_1 D_2 M'_2 C_1$ formato dal secondo, terzo e quarto lato di tentativo del poligono e dalla congiungente $A^* C_1$, e supponiamo che il carico della campata decresca d'intensità fino ad annullarsi. In conseguenza diminuisce l'ordinata $\overline{AA^*}$ abbracciata dalle incrociate sulla verticale di A , il punto A^* si sposta avvicinandosi ad A ed il quadrangolo suddetto si deforma, rimanendo il vertice C_1 fisso ed i vertici A, N'_1, M'_2 sulle medesime verticali. Ma se cinque vertici del quadrangolo si spostano sulle corrispondenti verticali, anche il sesto dovrà spostarsi verticalmente: ne segue che la posizione della verticale dei punti D_2, E_2 non dipende dal carico insistente sulla trave.

Ripetiamo ora la determinazione dei punti D, E delle successive campate nell'ipotesi che la trave sia totalmente scarica (fig. 62 e). Sistemati gli appoggi A, C_1, C_2, C_3, B , che in questa determinazione vanno ritenuti di livello, tracciamo una retta arbitraria fino ad intersecare la trisecante in N''_1 e la controverticale del primo appoggio in V''_1 ; congiungiamo N''_1 con C_1 , e prolunghiamo tale congiungente fino a tagliare in M''_2 la trisecante di sinistra della seconda campata; uniamo infine M''_2 con V''_1 : la congiungente taglia la retta degli appoggi nel punto I_2 che appartiene alla verticale dei punti $D_2 E_2$. Infatti le rette tracciate corrispondono ordinatamente al secondo, terzo, e quarto lato di tentativo della costruzione preceden-

te: il punto A^* è venuto a coincidere con A , il lato $A^*C_1D_2$ del quadrangolo con la fondamentale AB , il punto D_2 si è trasferito verticalmente nel punto I_2 , intersezione del lato $V_1''M_2''$ con la fondamentale stessa.

Partendo da I_2 , ed operando ogni volta come si è fatto per la determinazione di questo punto, si determinano il punto I_3 sulla verticale dei punti D_3, E_3 , ed i seguenti. Con lo stesso procedimento, partendo poi da B ed utilizzando parte della costruzione eseguita per la determinazione dei punti I , si trovano i punti K_3, K_2, K_1 .

I punti I e K così determinati si dicono *punti fissi della trave*: come risulta dalla costruzione di ciascuna campata, essi sono sempre esterni al terzo medio della campata. I punti fissi estremi, ossia il punto I della prima ed il punto K dell'ultima campata, coincidono rispettivamente con gli appoggi A e B .

Noti i punti fissi, la costruzione del poligono delle tangenti si effettua nel modo seguente (fig. 62 d): si porti $\overline{AA^*} = \overline{P_1Q_1}$ sulla verticale di A e si tracci la A^*C_1 fino a incontrare in D_2 la verticale del punto fisso I_2 ; si porti poi su questa $\overline{D_2E_2} = \overline{P_2Q_2}$ e si tracci la E_2C_2 prolungandola fino ad intersecare in D_3 la verticale del punto fisso I_3 , sulla quale si prenda $\overline{D_3E_3} = \overline{P_3Q_3}$ e si tracci la E_3C_3 fino ad incontrare in D_4 la verticale di I_4 ; si porti infine su questa $\overline{D_4E_4} = \overline{P_4Q_4}$ e si congiunga E_4 con B : sarà E_4B l'ultimo lato del poligono. Similmente partendo da B e procedendo verso A si determinano ordinatamente $B^*, F_3, G_3, F_2, G_2, F_1, G_1$.

Per dedurre dal poligono delle tangenti il momento su di un appoggio qualunque basta misurare l'ordinata momento abbracciata sulla verticale di esso dai lati del poligono che s'intersecano su una delle trisecanti contigue. Se almeno una delle campate separate dall'appoggio ha luce uguale ad l , come nell'esempio della figura la campata di destra nel caso del primo appoggio sceglieremo in essa la trisecante citata ed allora l'ordinata intercetta dai suddetti lati del poligono sarà senz'altro uguale all'ordinata momento in base H ; se invece entrambe le campate l_m ed l_{m+1} contigue all'appoggio C_m hanno luce diversa da l , l'ordinata intercetta prolungando fino alla verticale di C_m i lati che si intersecano, per esempio, sulla trisecante a sinistra (fig. 62 b), vale:

$$\bar{y}_m = \frac{y_m l_m}{2l} \frac{1}{3} l_m \Big/ \frac{1}{6} l = y_m \left(\frac{l_m}{l} \right)^2,$$

ed occorre quindi dividerla per il rapporto $(l_m/l)^2$ per ottenere la misura in base H del momento cercato.

Trovati i momenti sugli appoggi e completato il diagramma dei momenti, si può costruire anche quello delle forze di taglio (fig. 62 *f*). Scelta una fondamentale orizzontale AB si collochino i poli di proiezione P_1, P_2, P_3, P_4 , sulle parallele condotte pei punti A, C_1, C_2, C_3 , ai lati di chiusa del diagramma dei momenti ed alla distanza H dalle verticali dei punti medesimi. Guidando da ciascuno dei poli così stabiliti (per esempio da P_3) le parallele alle tangenti estreme (r_3, s_3) alla funicolare che limita la superficie semplice della campata corrispondente, ne vengono intercettati sulla verticale situata alla distanza H dal polo — quella di C_2 — due segmenti $T'_2 = \overline{C_2 X_2}$, $T''_2 = \overline{C_2 Y_2}$ i quali misurano, in valore e segno, i tagli nelle sezioni della campata infinitamente prossime agli appoggi. Per completare il diagramma del taglio basta dopo ciò inserire tra le ordinate estreme $C_2 X_2, C_2 Y_2$, la linea integrale $X_2 Y_2$ del carico agente sulla campata.

Lo stesso diagramma del taglio fornisce le reazioni degli appoggi, le quali sono misurate dalla somma numerica dei tagli nelle sezioni adiacenti ai singoli appoggi: per esempio la reazione dell'appoggio centrale vale:

$$C_2 = \overline{C_2 Y_2} + \overline{C_2 X_2}.$$

25 — Trave continua caricata in una sola campata.

Vediamo ora come si modificano le costruzioni del caso generale quando sia caricata una sola campata della trave (fig. 64).

Nelle campate scariche avremo soltanto i momenti derivanti da quelli sugli appoggi, ossia dalla continuità della trave (fig. 64 *b*); in esse il secondo poligono (fig. 64 *e*) ha perciò tre soli lati se trattasi di campate intermedie, due soli se si tratta delle campate estreme d'una trave appoggiata.

Determiniamo i punti fissi (fig. 64 *c*) e procediamo alla costruzione delle incrociate della campata carica (fig. 64 *d*), osservando che nelle altre campate esse si chiudono in rette doppie. Passando poi alla determinazione dei punti A, A^*, D_2, E_2 , ecc., situati a due a due sulle verticali dei punti fissi di sinistra, si riscontra che in tutte le campate precedenti quella scarica i punti della medesima coppia si radunano in un punto doppio situato sulla congiungente gli appoggi, cioè nel punto fisso corrispondente; che nella campata carica il punto D_3 coincide con I_3 , ma è distinto da E_3 essendo come nel caso generale $\overline{D_3 E_3} = \overline{P_3 Q_3}$; che nella campata seguente quella carica, i punti D_4, E_4 coincidono nuovamente, appartenendo però non più alla AB , ma alla congiungente $E_3 C_3$. Similmente si osserva che le coppie di punti B, B^*, F_3, G_3 , ecc., appartenenti alle verticali dei punti

fissi di destra delle campate seguenti quella scarica — unica nell'esempio della figura — coincidono coi punti fissi di destra; che nella campata carica, F_3 coincide con K_3 ed è $\overline{F_3 G_3} = \overline{R_3 T_3}$; che infine nelle campate a

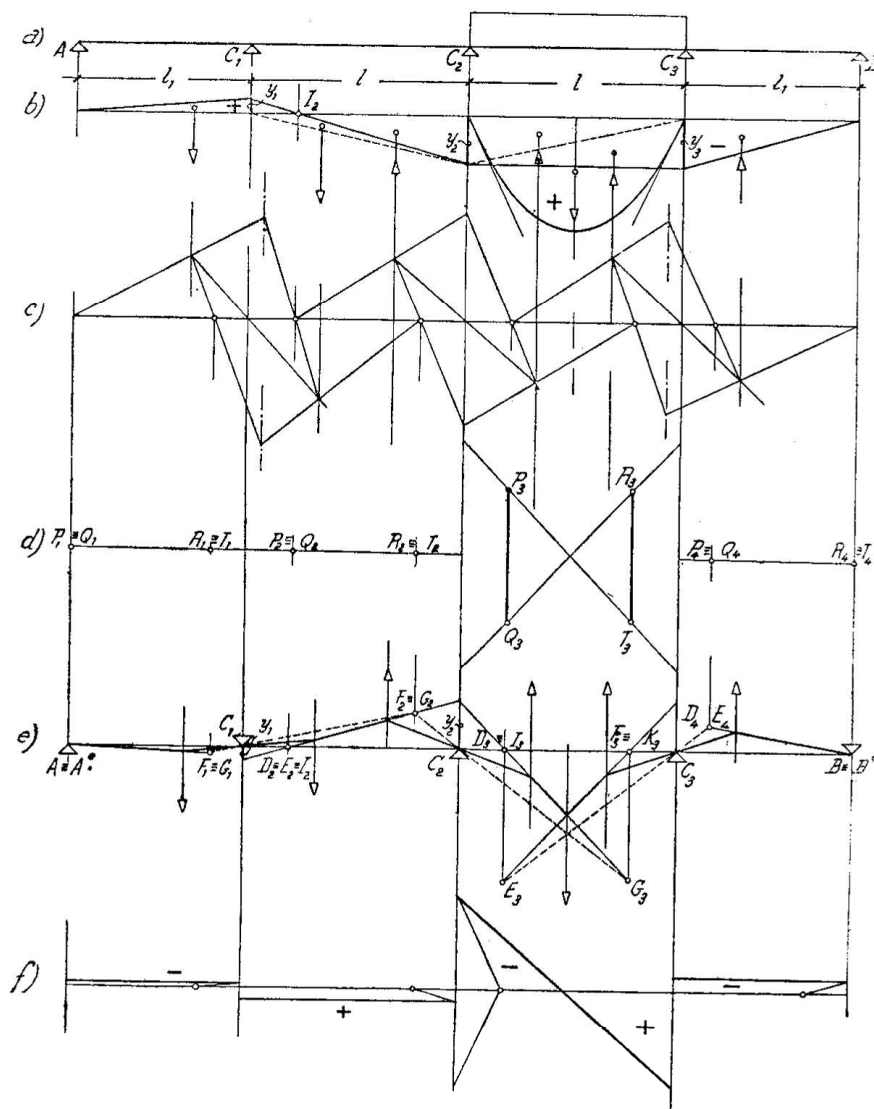


Fig. 64

sinistra di quella caricata, le coppie si radunano in punti doppi, rispettivamente situati nelle congiungenti $G_3 C_2$, $F_2 C_1$.

Segue che i due lati del secondo poligono, individuati nel caso generale in ciascuna campata dalle congiungenti $D_m G_m$, $E_m F_m$, si sovrappongono ora, nelle campate scariche, in un lato unico:

$I_m F_m$, passante cioè pel punto fisso di sinistra, per le campate che precedono;

$D_m K_m$, passante cioè pel punto fisso di destra, per le campate che seguono quella caricata.

Costruito il secondo poligono, i prolungamenti dei lati intermedi — uno solo nelle campate scariche, due nella campata carica — determinano, con note avvertenze per le campate di luce diversa da l , le ordinate momento sugli appoggi. Ma il diagramma dei momenti nelle campate scariche è limitato dal segmento di retta che unisce gli estremi delle ordinate momento sugli appoggi; dunque *son punti di momento nullo i punti fissi I nelle campate a sinistra, e quelli K nelle campate a destra di quella caricata.*

Dal diagramma dei momenti flettenti si può dedurre quello del taglio col procedimento spiegato nel paragrafo precedente (figura 62 f).

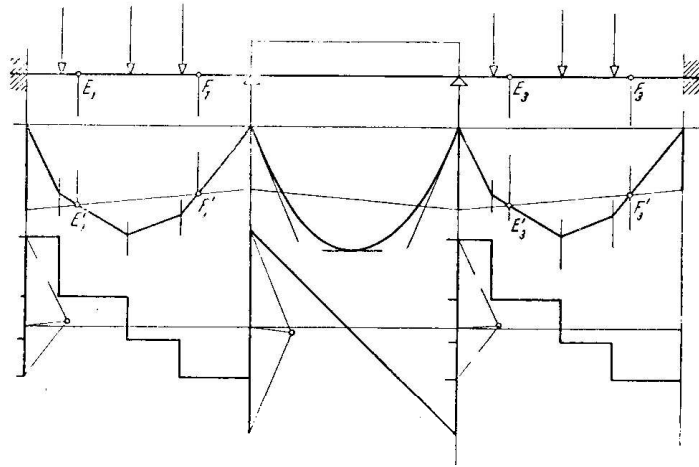


Fig. 65

26 — Trave Gerber.

Data una trave rispondente alle caratteristiche indicate al n.

6, supponiamo tracciate le superfici semplici dei momenti relative alle varie campate (fig. 65). Potremo ottenere subito i lati di chiusa dei diagrammi dei momenti nelle campate provviste di cerniere, considerando che il momento flettente nelle sezioni munite di articolazione è nullo; basterà pertanto congiungere i punti E'_m , F'_m , nei quali le verticali delle cerniere E_m , F_m , intersecano la funicolare che limita la superficie semplice, per ottenere la fondamentale del diagramma del momento flettente effettivo nella campata m^{ma} . Individuate così le ordinate momento sugli appoggi, si completa il diagramma nelle campate sprovviste di articolazioni.

Il diagramma del taglio si può ancora ottenere come integrale del carico, determinando le costanti d'integrazione relative alle varie campate con l'ausilio del diagramma dei momenti precedentemente tracciato.