

TRATTAZIONE GRAFICA DELLE TRAVI INFLESSE

15 — Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione.

a) Taglio.

Se la trave è soggetta esclusivamente a carichi concentrati, il taglio rimane costante lungo ciascun tronco di trave compreso tra due carichi consecutivi; il diagramma relativo assume la forma di una gradinata composta di tratti paralleli alla fondamentale di riferimento e di segmenti delle rette d'azione dei carichi (fig. 41).

Supposte note tutte le forze — carichi e reazioni — in equilibrio sulla trave, si costruisca la punteggiata delle forze $0, 1, 2, \dots, n$, considerando queste nell'ordine in cui s'incontrano percorrendo la trave da un estremo all'altro, a partire dall'estremo A' d'una fondamentale arbitraria $A'B'$. Tracciando parallelamente a questa, per l'estremo i del vettore che rappresenta la forza i^{ma} generica sulla punteggiata, il segmento compreso tra la retta d'azione di questa forza e quella della forza successiva $(i+1)^{ma}$, si ottiene il diagramma cercato. L'ordinata di questo, letta sulla verticale della sezione generica, a partire dalla $A'B'$, misura infatti, nella scala scelta a rappresentare le forze, la somma algebrica delle forze alla sinistra della sezione, ossia il taglio nella sezione stessa.

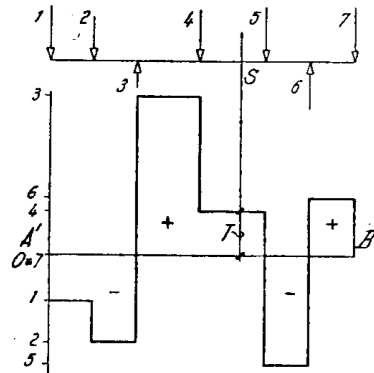


Fig. 41

Se invece il carico è distribuito, la (32), che, avuto riguardo alla seconda delle (8), può scriversi:

$$(35) \quad \frac{dT}{dz} = -p,$$

avverte che il diagramma del taglio si può ottenere semplicemente integrando il diagramma di carico (fig. 42). Noto il taglio T_0 nella sezione di ascissa zero, ossia la costante d'integrazione, avremo:

$$(36) \quad T = T_0 - \int_0^z p dz.$$

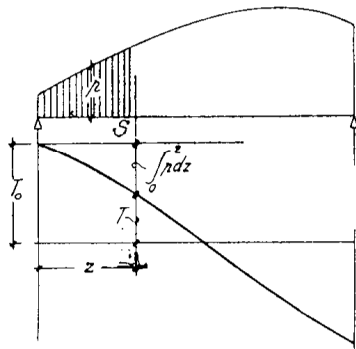


Fig. 42

Se il carico è misto, tratteremo dapprima l'integrale $A'B''$ del diagramma di carico (fig. 43 a).

Partendo ad esempio dall'estremo sinistro della trave, ed assumendo uguale a zero la costante d'integrazione, l'ordinata T' del diagramma integrale sarà il contributo dato

al taglio dal solo carico ripartito, misurerà cioè la parte di questo carico che precede la verticale della sezione S considerata.

Occorre poi completare il diagramma introducendovi le discontinuità dovute alle singole forze concentrate, ivi comprese naturalmente le reazioni dei vincoli, che qui supponiamo già determinate.

All'uopo, in virtù della sovrapposizione degli effetti, basterà sommare algebricamente alle ordinate T' del diagramma integrale, quelle T'' del taglio dovuto alle sole forze concentrate.

Occorre appena avvertire che la base d'integrazione per la costruzione del primo diagramma deve essere scelta in modo che le ordinate si leggano nella stessa scala con cui vengono riportate le forze per la costruzione dell'altro.

b) Flessione.

Il diagramma del momento flettente può ottenersi come funicolare di tutte le forze in equilibrio agenti sul sistema.

Costruita la retta delle forze, ancora disposte nell'ordine in cui si incontrano percorrendo la trave (fig. 44) e scelto un polo P alla distanza

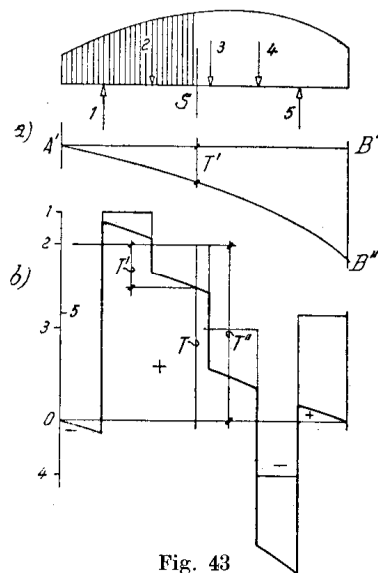


Fig. 43

polare H , si connettono tutte le forze con un poligono funicolare p , il quale, dato che la trave è in equilibrio, risulterà chiuso. L'ordinata y_m che esso intercetta sulla verticale della sezione generica S , moltiplicata per la distanza polare H , fornisce il momento cercato.

La dimostrazione è immediata ove si rifletta che i lati del poligono che delimitano l'ordinata y_m — rispettivamente paralleli ai raggi proiettanti PO e $P3$ nel caso della figura — sono estremi rispetto alle forze situate alla sinistra della sezione considerata — le forze 1, 2, 3 — e che, per una nota proprietà del poligono funicolare, l'ordinata suddetta:

$$y_m = \frac{T\delta}{H}$$

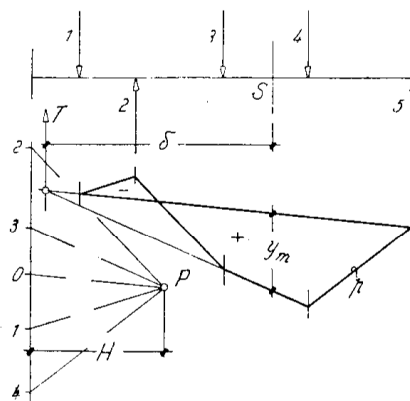


Fig. 44

misura, in base H , il momento statico rispetto alla verticale di S della risultante T delle forze alla sinistra, che è come dire il momento flettente nella sezione.

Se sulla trave insiste anche un carico distribuito, conviene costruire separatamente, ma con la stessa distanza polare H , il diagramma del momento flettente corrispondente a tale carico (fig. 45 a) ed il diagramma relativo ai soli carichi concentrati (fig. 45 b), indi sommarne algebricamente le ordinate y_{mp} ed y_{mc} .

Più raramente si sostituiscono ai carichi ripartiti le loro risultanti per segmenti di carico abbastanza piccoli, collegando poi queste e le forze concentrate con un solo poligono funicolare.

La distanza polare H si legge ordinariamente nella scala delle forze, le ordinate y_m in quella delle lunghezze; nulla però vieterebbe di fare il contrario.

L'ultima delle (8), che ora scriveremo:

$$(37) \quad \frac{dM}{dz} = T,$$

avverte che il diagramma del momento flettente può ancora ottenersi in-

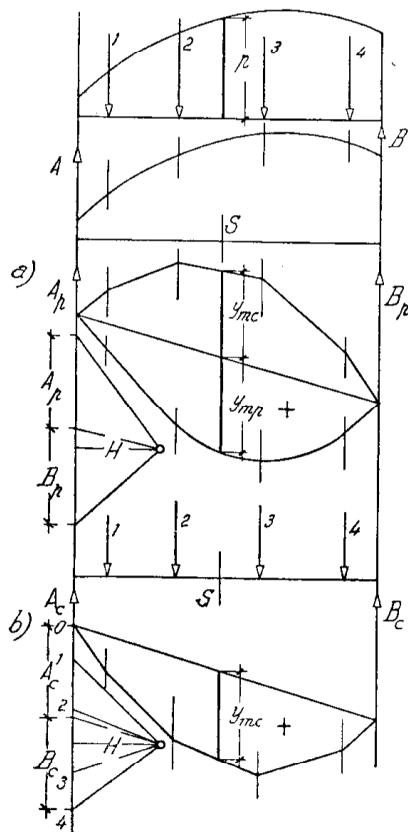


Fig. 45

tegrando quello del taglio. Indicando con M_0 il momento flettente nella sezione di ascissa $z=0$, ossia la costante d'integrazione, avremo infatti:

$$(38) \quad M = M_0 + \int_0^z T dz ;$$

anche qui l'integrazione può eseguirsi graficamente.

Nel caso di un carico distribuito si può dunque costruire il diagramma del momento flettente come funicolare del carico oppure mediante doppia integrazione del diagramma di carico, il primo integrale essendo il diagramma della forza tagliante.

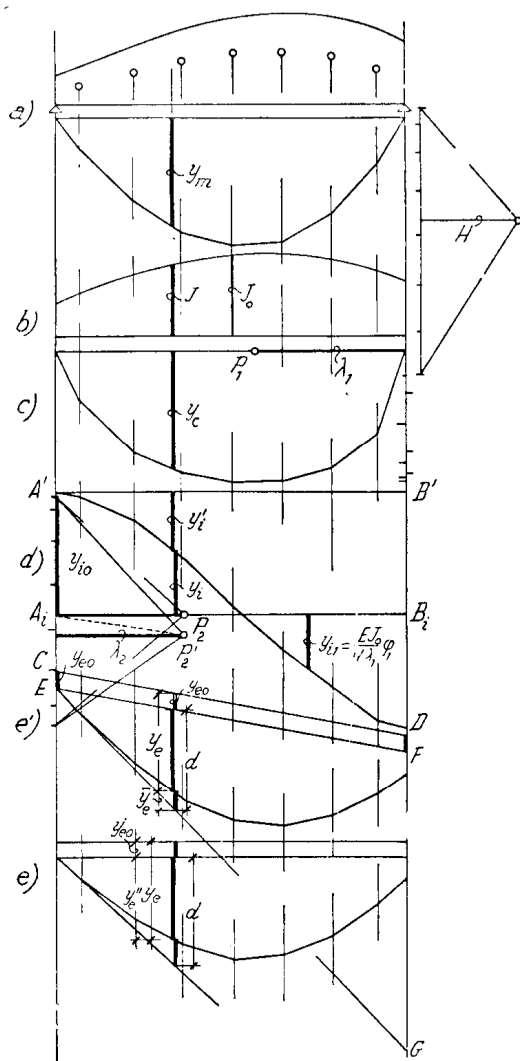


Fig. 46

riferiremo al caso di J variabile e, detto J_0 il momento d'inerzia di una sezione determinata, spesso la mezzeria della trave, porremo per la sezione corrente (fig. 46 b):

$$(39) \quad J = \vartheta J_0 ,$$

16 — Il metodo di Savio per la costruzione della linea elastica.

Supposte note tutte le forze esterne agenti sulla trave, immaginiamo tracciato, con distanza polare H , il diagramma dei momenti flettenti e ne sia y_m l'ordinata generica (fig. 46 a).

Potremo porre:

$$M = H y_m$$

e quindi scrivere la (30):

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{H y_m}{EJ} .$$

Poichè $H:E$ è una costante, potremo dire che i rapporti $y_m : J$ nel caso di J variabile, le semplici y_m nel caso di una trave prismatica, sono proporzionali alle curvature $\frac{d^2 \eta}{dz^2}$ della linea elastica.

Per maggiore generalità ci

con che l'equazione differenziale della linea elastica può ancora scriversi:

$$(40) \quad \frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{H}{EJ_0} \frac{y_m}{\vartheta} .$$

Diremo *diagramma delle curvature* quello di ordinate $y_c = y_m : \vartheta$, che si deduce cioè dal diagramma dei momenti flettenti dividendone ciascuna ordinata y_m per il rapporto $\vartheta = J : J_0$ tra il momento d'inerzia della sezione corrispondente all'ordinata ed il momento d'inerzia J_0 di riferimento (fig. 46 c). Le y_c misurano le curvature nella scala $EJ_0 : H$. Se la trave fosse prismatica ($J = J_0$), sarebbero uguali all'unità tutti i ϑ , e le y_m misurerebbero non soltanto i momenti flettenti, ma anche le curvature: i primi nella scala $1 : H$, le seconde nella scala $EJ_0 : H$.

Scritta la (40) nella forma:

$$(40') \quad \frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{H}{EJ_0} y_c$$

ed integrando una prima volta, otteniamo le tangenti alla linea elastica:

$$(41) \quad \frac{d\eta}{dz} = - \frac{H}{EJ_0} \int_0^z y_c dz + C_1 .$$

Detto φ l'angolo formato con l'asse z dall'elemento di linea elastica situato all'ascissa z e tenuto conto della piccolezza di esso, è evidente (fig. 47):

$$\frac{d\eta}{dz} = \operatorname{tg} \varphi = \approx \varphi .$$

Per $z=0$ la (41) fornisce la costante d'integrazione:

$$\left(\frac{d\eta}{dz} \right)_{z=0} = \varphi_0 = C_1 ,$$

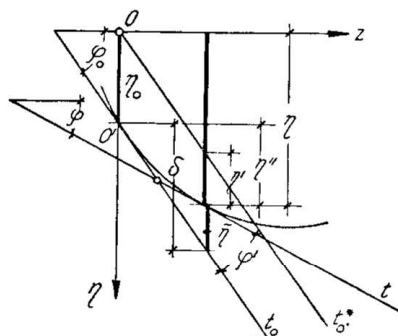


Fig. 47

che è dunque uguale all'inclinazione φ_0 della linea elastica nell'origine degli assi; la (41) allora diviene:

$$(41') \quad \frac{d\eta}{dz} = - \frac{H}{EJ_0} \int_0^z y_c dz + \varphi_0 .$$

Supposta eseguita graficamente l'integrazione del diagramma delle curvature con base λ_1 , avremo:

$$(41'') \quad \frac{d\eta}{dz} = - \frac{H \lambda_1}{EJ_0} y'_i + \varphi_0 = \frac{H \lambda_1}{EJ_0} \left(\frac{EJ_0}{H \lambda_1} \varphi_0 - y'_i \right)$$

e posto $y_{i0} = EJ_0 \varphi_0 : H \lambda_1$:

$$(42) \quad \frac{d\eta}{dz} = \frac{H\lambda_1}{EJ_0} (y_{i0} - y'_i) = \frac{H\lambda_1}{EJ_0} y_i.$$

Il diagramma della $y_i = y_{i0} - y'_i$, le cui ordinate misurano nella scala $EJ_0 : H \lambda_1$ le inclinazioni $\varphi = \frac{d\eta}{dz}$ della linea elastica, prende appunto il nome di *diagramma delle inclinazioni* (fig. 46 d).

Integrando ora la (42) otteniamo:

$$\eta = \frac{H\lambda_1}{EJ_0} \int_0^z y_i dz + C_2$$

ed essendo $\eta_0 = C_2$ per $z=0$, anche:

$$\eta = \eta_0 + \frac{H\lambda_1}{EJ_0} \int_0^z y_i dz.$$

Se l'integrazione è ancora eseguita graficamente, con polo P_2 e base λ_2 , avremo (fig. 46 e):

$$\eta = \eta_0 + \frac{H\lambda_1\lambda_2}{EJ_0} y''_e = \frac{H\lambda_1\lambda_2}{EJ_0} \left(\frac{EJ_0}{H\lambda_1\lambda_2} \eta_0 + y''_e \right)$$

e, introdotte le ordinate:

$$y_{e0} = \frac{EJ_0}{H\lambda_1\lambda_2} \eta_0 \quad , \quad y_{e0} + y''_e = y_e,$$

anche:

$$(43) \quad \eta = \frac{H\lambda_1\lambda_2}{EJ_0} y_e = \frac{y_e}{\xi},$$

avendo posto:

$$(44) \quad \xi = \frac{EJ_0}{H\lambda_1\lambda_2}.$$

Il diagramma delle y_e , che abbiamo ottenuto dal diagramma delle curvature mediante doppia integrazione, è dunque affine alla linea elastica con rapporto di affinità uguale a ξ . Le inflessioni della trave si ottengono cioè dividendo per il rapporto ξ le ordinate di detto diagramma.

Se fosse $\xi=1$, la linea elastica risulterebbe *nella scala del disegno*, ma data la piccolezza delle deformazioni, cioè delle ordinate rispetto alle ascisse, praticamente essa si confonderebbe con la fondamentale. Di qui la necessità di rappresentare le ordinate in scala maggiore di quella delle ascisse, ciò che richiede un rapporto $\xi > 1$. Se indichiamo con y_e^* l'or-

dinata generica del diagramma *letta in vera grandezza sul disegno*, con $1:n$ la scala di questo, potremo scrivere la (43):

$$(43') \quad \eta = y_e^* n / \xi .$$

Se allora vogliamo le ordinate della linea elastica rappresentate in scala *i volte il vero*, che sia cioè $i\eta = y_e^*$, basterà scegliere le basi di riduzione che compaiono nella (44) in modo che risulti $\xi = in$.

Il procedimento ora spiegato richiede la conoscenza della rotazione φ_0 per poterne dedurre la misura y_{i0} che permetta di tracciare la fondamentale $A_i B_i$ del diagramma delle inclinazioni. Basterebbe anche allo scopo conoscere l'inclinazione φ_i in altro punto qualunque della linea elastica; si avrebbe infatti dalla (42):

$$\varphi_i = \frac{H\lambda_i}{EJ_0} y_{ii} ,$$

da cui l'ordinata:

$$y_{ii} = \frac{EJ_0}{H\lambda_i} \varphi_i$$

determinatrice della fondamentale.

In molti casi però non si conosce a priori l'inclinazione in alcun punto della linea elastica. Daremo allora provvisoriamente un valore nullo alla costante di integrazione φ_0 , ciò che permetterà di porre la (41'') nella forma:

$$(45) \quad \frac{d\eta'}{dz} = - \frac{H\lambda_i}{EJ_0} y' ,$$

essendo le $d\eta'/dz = \varphi'$ le inclinazioni non più sull'asse z , ma sulla tangente t_0 alla linea elastica all'ascissa $z=0$, e le η' le inflessioni non più contate dall'asse z , ma da una retta t_0^* per l'origine, parallela alla tangente suddetta.

Integrando la (45) e osservando che per $z=0$ è ancora $\eta' = \eta_0$, avremo poi:

$$\eta' = - \frac{H\lambda_i}{EJ_0} \int_0^z y' dz + \eta_0 .$$

Se neppure η_0 è noto a priori, facendo provvisoriamente anche $\eta_0 = 0$ ed eseguendo graficamente l'integrazione con base λ_0 e polo arbitrario P'_2 , avremo (fig. 46 e'):

$$\bar{\eta} = - \frac{H\lambda_i \lambda_2}{EJ_0} \bar{y}_e ,$$

dove le $\bar{\eta}$, ordinate della linea elastica contate a partire dalla tangente t_0 , sono misurate dalle \bar{y}_e in scala ξ .

Le ordinate \bar{y}_e differiscono dalle misure y_e delle effettive inflessioni per le ordinate di un diagramma di forma trapezia che può immaginarsi composto (fig. 46 e'):

a) di un diagramma triangolare EFG proveniente dall'integrazione di quello che ha l'ordinata costante y_{i0} , proporzionale all'incognita φ_0 ;

b) di un diagramma $CDEF$ che ha l'ordinata costante y_{e0} proporzionale all'incognita η_0 .

Con le notazioni della figura 48, ove è supposto che tutte le ordinate siano positive, avremo:

$$y_e = d' + y_{e0} + \bar{y}_e.$$

Se non è noto alcun valore di φ , la determinazione delle y_e richiede la conoscenza delle inflessioni in almeno due punti dell'asse della trave.

Dette y_{e1} e y_{e2} le misure di esse, i punti V_1 e V_2 , di ordinate:

$$v_1 = y_{e1} - \bar{y}_{e1} \quad , \quad v_2 = y_{e2} - \bar{y}_{e2}$$

individuano la retta CD che limita l'anzidetto diagramma di forma trapezia.

La parallela alla CD guidata dal polo P'_2 e la P'_2A' parallela alla EG (figura 46 e') delimitano sulla punteggiata delle y'_i il segmento y_{i0} , misura della rotazione nell'origine di cui per completare il diagramma delle inclinazioni si deve spostare in $A_i B_i$ parallelamente a se stessa la fondamentale $A'B'$. Con l'operazione indicata avremo infatti eseguita la derivazione grafica del diagramma lineare $CDEG$.

Infine trasferendo il polo P'_2 in P_2 sulla nuova fondamentale sempre alla distanza polare λ_2 e ripetendo l'integrazione, si otterrà il diagramma delle y_e con le ordinate riferite ad una fondamentale orizzontale (fig. 46 e).

* * *

Dato il carico agente sulla trave, sappiamo che il diagramma del taglio può ottenersi integrando quello di carico e determinando le costanti d'integrazione. Se il carico è tutto distribuito con continuità, avremo una costante unica, subito determinabile quando sia noto il taglio in una sezione qualunque; se vi sono anche carichi concentrati, avremo costanti di-

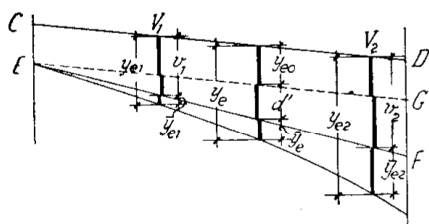


Fig. 48

verse per ciascun tronco di trave compreso tra due carichi consecutivi.

Integrando poi il diagramma del taglio, ossia facendo l'integrale secondo del carico, si ottiene il diagramma del momento flettente. Se è noto il momento in due sezioni distinte della trave, le due costanti d'integrazione si possono determinare entrambe dopo la seconda integrazione.

Supposta la trave prismatica, l'integrazione del diagramma del momento flettente fornirà il diagramma delle inclinazioni, terzo integrale del carico. Se invece la trave è a sezione variabile, occorrerà dedurre preventivamente il diagramma delle curvature.

Infine integrando il diagramma delle inclinazioni, si ottiene la linea elastica, che sarebbe dunque il quarto integrale del carico.

Questo metodo di costruzione della linea elastica per integrazioni successive è dovuto a C. Saviotti.

L'equazione differenziale della curva funicolare $f(\eta, z) = 0$ di un carico ripartito $p(z)$, costruita con distanza polare λ_0 , è nota dalla statica nella forma (fig. 49 a):

$$(46) \quad \frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{p}{\lambda_0} .$$

Se interpretiamo come intensità di un carico ideale le quantità $M:EJ$, e riteniamo la distanza polare unitaria, la (46) si trasforma nella:

$$\frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{M}{EJ} .$$

che è la nota equazione differenziale della linea elastica (fig. 49 b).

Si constata così che la deformata d'una trave inflessa può anche ottenersi come curva funicolare di distanza polare unitaria, di un carico ripartito ideale la cui ordinata corrente valga il rapporto $M:EJ$.

Poichè vogliamo operare graficamente, cominceremo a costruire il diagramma dei momenti flettenti con distanza polare arbitraria H (fig. 50 a); passeremo quindi a quello delle curvature (fig. 50 b), con che all'equazione della funicolare potrà darsi la forma già nota:

$$(47) \quad \frac{d^2 \eta}{dz^2} = - \frac{H}{EJ_0} y_c .$$

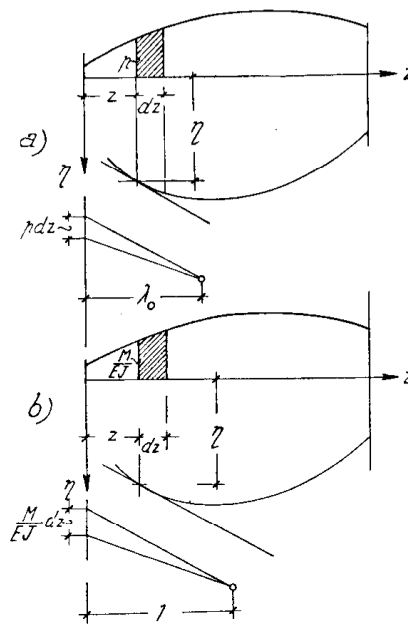


Fig. 49

Poichè $H: EJ_0$ è una costante, conviene tenerne conto alterando la distanza polare ed assumere come ordinate del carico ideale semplicemente le y_c , ossia identificare il diagramma di tale carico con quello delle curvature. Un elemento di carico ideale sarà allora $y_c dz$, mentre la distanza polare, anzichè unitaria, dovrà assumersi uguale a $EJ_0:H$.

Dividiamo allora in strisce verticali il diagramma delle curvature, valutiamo le forze ideali $\bar{y}_c \Delta z$ rappresentate dalle aree delle strisce di ordinate medie \bar{y}_c , e riduciamole ad una medesima base λ_1 per averne le misure $\bar{y}_c \Delta z : \lambda_1$.

Applichiamo poi le forze così ridotte ai baricentri delle singole strisce, costruiamo la retta delle forze e procediamo al tracciamento della funicolare.

Se per non alterare il secondo membro della (46) si adoperasse nel tracciamento suddetto la distanza polare:

$$(48) \quad \lambda_2^* = \frac{EJ_0}{H\lambda_1},$$

che misura l'area $EJ_0:H$ nella stessa base λ_1 usata per le aree delle curvature, si otterrebbe la linea elastica nella scala del disegno; ma, data la piccolezza delle

ordinate rispetto alle ascisse, come si osservò già a proposito del metodo di Saviotti, essa si confonderebbe con la fondamentale. Occorre dunque adottare per le ordinate una scala maggiore di quella del disegno, ciò che può ottenersi scegliendo in luogo della distanza polare λ_2^* una distanza λ_2 minore; otterremo allora non più la linea elastica, ma una linea affine ad essa, essendo il rapporto di affinità ancora:

$$(49) \quad \xi = \frac{\lambda_2^*}{\lambda_2} = \frac{EJ_0}{H\lambda_1\lambda_2}.$$

Anche qui, dette y_c^* le ordinate lette sul disegno senza riguardo alla scala, quelle al vero sono espresse dalla (43').

Per stabilire la fondamentale del diagramma delle y_c occorre conoscerne le ordinate relative a due punti arbitrari dell'asse. Ad esempio, nel caso di una trave sorretta da appoggi rigidi alle estremità, la fonda-

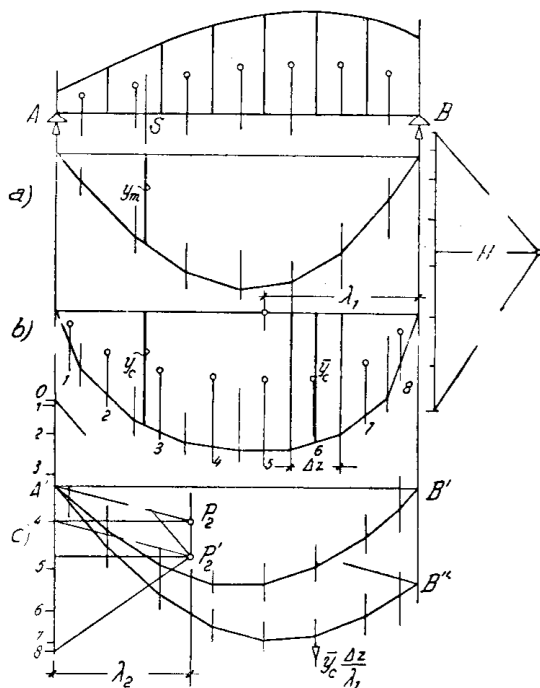


Fig. 50

mentale è definita dalle condizioni $\gamma_{1A} = \gamma_{1B} = 0$, le quali impongono anche l'annullarsi delle corrispondenti y_e^* (fig. 50). Tracciata quindi la funicolare con un polo P'_2 e determinatene le intersezioni A' e B'' colle verticali degli appoggi, la congiungente questi punti è la fondamentale di riferimento per la lettura delle ordinate y_e . Volendo poi riferire il diagramma ad una fondamentale orizzontale $A'B'$, basterà, com'è noto, spostare opportunamente il polo P'_2 in P_2 , ferma restando la distanza polare λ_2 .

È ovvio che la determinazione della fondamentale è ugualmente possibile se in luogo degli abbassamenti di due punti dell'asse della trave si conosce l'inclinazione della linea elastica in un punto qualunque.

* * *

Per poter leggere comodamente le inflessioni, occorre scegliere in modo opportuno il rapporto d'affinità.

In generale, volendo le ordinate multiple dei reali abbassamenti secondo un intero i , calcolato $\xi = in$, sceglieremo per la costruzione della funicolare la distanza polare:

$$(50) \quad \lambda_2 = EJ_0 : H\lambda_1 \xi .$$

18 — Il corollario di Mohr.

Col metodo di Saviotti si perveniva alla linea elastica attraverso due integrazioni successive del diagramma delle curvature, determinando il diagramma delle inclinazioni con la prima, la linea elastica con la seconda integrazione. Col metodo ultimo esposto, sempre partendo dalle curvature, lo scopo viene raggiunto con una sola operazione grafica: il tracciamento della funicolare di questo diagramma come diagramma di carico; la costruzione della funicolare equivale dunque alla duplice integrazione.

Peraltro, dato che le operazioni grafiche richiedono la suddivisione dei diagrammi in striscie di larghezza finita, il risultato dei due procedimenti non è assolutamente identico. Le ordinate esatte della poligonale che rappresenta la deformata sono infatti quelle corrispondenti ai vertici nel primo metodo, quelle intercette sulle dividenti in striscie il diagramma delle curvature nel secondo.

Ne consegue che a detta poligonale la linea elastica è circoscritta o iscritta, secondo che sia stato seguito il metodo di Saviotti oppure quello di Mohr.

sulla retta delle forze dai raggi proiettanti P_2O e P_2T , rispettivamente paralleli alla fondamentale $A'B'$ ed alla tangente in S' alla curva (fig. 51).

Osservando ora che è:

$$\varphi = \overline{OT} = \overline{OC} - \overline{CT} = \alpha - \overline{CT},$$

dove, per il corollario enunciato, α è la reazione sinistra della trave semplice AB caricata dalle curvature, e che inoltre il segmento:

$$\overline{CT} = \int_0^z (M : EJ) dz$$

misura il carico delle curvature alla sinistra della sezione S , si conclude che \overline{OT} misura la somma algebrica delle forze-curvature — reazione e quota di carico fino all'ascissa z — alla sinistra della sezione considerata.

Possiamo dunque generalizzare il corollario di Mohr nel modo seguente: *l'inclinazione della linea elastica in corrispondenza di una sezione qualunque d'una trave comunque vincolata agli estremi, purchè i vincoli non siano cedevoli, è uguale al taglio in quella sezione per la trave supposta semplicemente appoggiata agli estremi e caricata dal diagramma delle curvature.*

Infine, sempre nell'ipotesi che le sezioni estreme della trave non si abbassino, lo stesso metodo di Mohr avverte che la ordinata η in corrispondenza di una sezione qualunque S può valutarsi come momento flettente in quella sezione, supposta ancora la trave appoggiata agli estremi e soggetta al carico ideale delle curvature.

19 — Trattazione grafica delle travi isostatiche.

Riportiamo alcune applicazioni dei metodi precedentemente esposti:

a) La trave AB sia incastrata all'estremo A e soggetta ad un carico distribuito con continuità (fig. 52). La linea elastica potrebbe ottenersi con quattro successive integrazioni del diagramma di carico (metodo Saviotti): le prime due darebbero ordinatamente il diagramma del taglio e quello

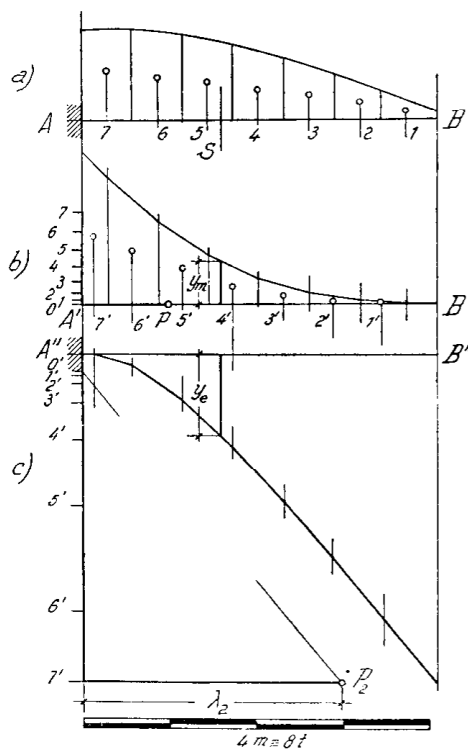


Fig. 52