

CAPITOLO III

GENERALITÀ SULLE TRAVI INFLESSE

10 — Caratteristiche della sollecitazione.

Una trave piana ad asse rettilineo sia soggetta esclusivamente a carico flettente, e le reazioni dei suoi vincoli siano esse pure tutte normali all'asse (fig. 35). In queste condizioni le caratteristiche della sollecitazione relative ad una sezione generica sono, al più, una forza di taglio ed un momento flettente, essendo ovunque nulla la forza normale che in generale accompagna le precedenti caratteristiche nelle travi piane.

Una trave rispondente alle caratteristiche di forma e di sollecitazione ora indicate viene comunemente designata come *trave inflessa*, sebbene, come si è detto, la flessione sia in generale accompagnata dal taglio.

Supporremo di regola la trave disposta orizzontalmente e riferita ad una coppia di assi con origine nel baricentro di una sezione trasversale, ordinariamente quella estrema di sinistra: l'asse z coincidente con l'asse inizialmente rettilineo della trave, l'asse y verticale e diretto verso il basso.

Per lo più calcoleremo le caratteristiche della sollecitazione relative ad una data sezione S con riguardo alle forze alla sinistra; pertanto, data la direzione delle forze, comune e normale all'asse rettilineo della trave, la risultante R delle suddette forze alla sinistra — di modulo uguale alla loro somma algebrica — trasportata nel baricentro della sezione, è senz'altro il taglio nella sezione; il momento statico $R\delta$ derivante dal trasporto della R — che per il teorema dei momenti è uguale alla somma algebrica dei momenti delle forze componenti — è il *momento flettente*.

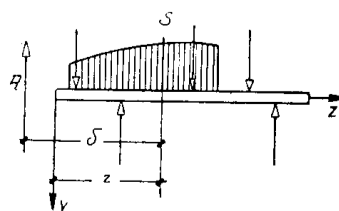


Fig. 35

Quanto ai segni ci riferiamo sempre alle convenzioni stabilite nel problema di Saint-Venant. Se si calcolano le sollecitazioni con riferimento alle forze alla destra della sezione considerata, si riguarderanno positivi il taglio T se diretto verso il basso, ed il momento flettente M se sinistrogiro; quando invece, come faremo più spesso, ci riferiremo alle forze alla sinistra della sezione — la cui risultante è, per l'equilibrio della trave, uguale ed opposta a quella delle rimanenti forze — sarà da riguardare:

positivo il taglio, se diretto verso l'alto;
positivo il momento flettente, se destrogiro.

Riassumendo, in una data sezione d'una trave inflessa, diremo:

taglio, la somma algebrica delle forze alla sinistra, positivo se diretto verso l'alto; talvolta lo calcoleremo invece facendo la somma algebrica delle forze alla destra e cambiandola di segno;

momento flettente, la somma algebrica dei momenti delle forze alla sinistra, positivo se destrogiro; talvolta lo calcoleremo invece facendo la somma algebrica dei momenti delle forze alla destra e cambiandola di segno.

11 — Linea elastica.

Studiare le deformazioni d'una trave per una data condizione di carico, significa determinarne la *linea elastica*, cioè la configurazione deformata dell'asse geometrico.

Di regola si prendono in considerazione soltanto le deformazioni dovute alla flessione, di fronte alle quali sono per lo più trascurabili quelle dovute al taglio; vedremo a suo tempo come queste ultime possano valutarsi, e in quali casi convenga tener conto del loro contributo alla deformazione complessiva.

Lo studio delle deformazioni si basa sull'equazione fondamentale della flessione:

$$(29) \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{EJ},$$

espressione già nota della curvatura della linea elastica, dove ora non soltanto M , ma anche la rigidezza flessionale EJ deve riguardarsi come variabile da sezione a sezione col momento d'inerzia J .

Riferiremo la linea elastica ancora all'asse z coincidente con l'asse primitivo della trave, e ad un asse η coincidente, anche come verso, col-

l'asse y : supporremo trascurabile, rispetto all'abbassamento η , lo spostamento che un punto qualunque dell'asse subisce secondo z .

Abbiamo già visto trattando il quarto caso particolare del problema di Saint-Venant come, sostituendo a $\frac{1}{r}$ l'espressione della curvatura in funzione delle coordinate e trascurando il quadrato di $\frac{d\eta}{dz}$, molto piccolo in confronto all'unità, si pervenga all'equazione differenziale della linea elastica:

$$\pm \frac{d^2 \eta}{dz^2} = \frac{M}{EJ}.$$

Osserviamo ora che, con le convenzioni stabilite circa il segno del momento flettente ed i versi positivi di η e z , il momento flettente e la derivata seconda di η hanno

sempre segno opposto: per $M > 0$ la linea elastica volge la concavità verso l'alto, ossia verso le η negative: ha dunque curvatura negativa (figura 36 a); per $M < 0$ si verifica l'opposto (fig. 36 b). L'uguaglianza va perciò scritta sempre col segno negativo, ossia nella forma:

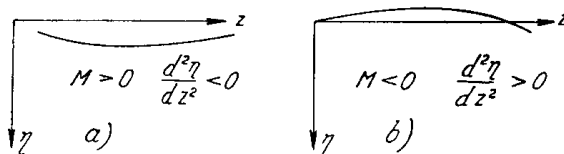


Fig. 36

$$(30) \quad - EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2} = M.$$

Deve espressamente avvertirsi che mentre la (29) è rigorosa, la (30) è soltanto approssimata: la validità di quest'ultima è condizionata ad una piccolezza delle ordinate η tale che le tangenti $\frac{d\eta}{dz}$ siano tanto piccole da poterne trascurare i quadrati rispetto all'unità. Essa non potrebbe per esempio applicarsi al caso di un filo o di un nastro.

12 — Discontinuità della linea elastica.

Deriviamo successivamente due volte la (30) rapporto a z e teniamo presenti le ultime due delle (8) considerando che ora tutto il carico è flettente, ossia è $p' = 0$, $p'' = p$; avremo:

$$(31) \quad - \frac{d}{dz} \left(EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2} \right) = T,$$

$$(32) \quad \frac{d^2}{dz^2} \left(EJ \frac{d^2 \eta}{dz^2} \right) = p.$$

Le (30). (31) e (32) esprimono rispettivamente che la linea elastica presenta:

discontinuità di second'ordine (1) dove variano bruscamente la rigidezza flessionale (fig. 37 a) od il momento (fig. 37 b);

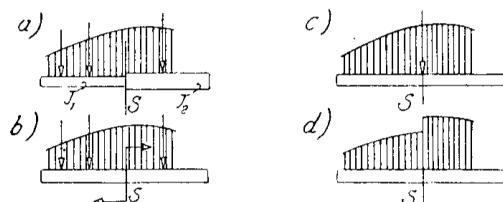


Fig. 37

discontinuità di terz'ordine dove varia bruscamente il taglio, ossia nei punti ove agiscono carichi concentrati (fig. 37 c);

discontinuità di quart'ordine dove varia bruscamente il carico ripartito (fig. 37 d).

Dalla (29) si ricava ancora che il momento flettente è nullo nei punti di flesso (punti di curvatura nulla) della linea elastica.

13 — Condizioni di posa.

Si è detto che la trave deve essere così vincolata che le reazioni abbiano tutte componente nulla secondo l'asse. Ciò richiede che gli appoggi mobili eventualmente compresi nei vincoli, abbiano direzione di scorrimento parallela all'asse della trave. Essendo poi nullo il carico assiale, sono pure nulle le componenti secondo l'asse delle reazioni di eventuali appoggi fissi od incastri.

Segue da ciò che nella teoria delle travi inflesse l'appoggio fisso o cerniera e quello mobile si equivalgono staticamente, in quanto per entrambi basta un solo e medesimo parametro ad individuarne la reazione (fig. 38 a); la loro distinzione diviene perciò inessenziale in questa teoria (2). Alogamente la

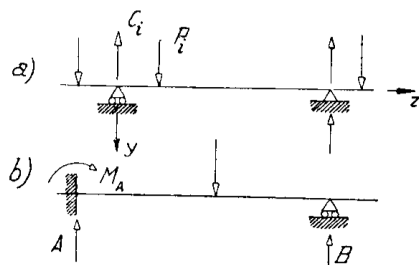


Fig. 38

(1) - Come è noto, si dice che una funzione $\eta = f(z)$ presenta una discontinuità di *imo* ordine laddove varia bruscamente la sua derivata *ima*.

(2) - Torneremo però immediatamente a distinguerli non appena intervenga una causa qualunque atta a determinare sollecitazione a forza normale, ciò che non richiede necessariamente la presenza di forze esplicite assiali. Per esempio le due travi rappresentate in figura 39 hanno un comportamento statico se cimentate dal medesimo carico flettente, ma ben diverso nel caso di una variazione termica. Mentre nella prima trave l'appoggio semplice consente la libera dilatazione del sistema, nella seconda, provvista di appoggi fissi ad entrambe le estremità, essendo impedita tale dilatazione, si genera una sollecitazione supplementare assiale proporzionale allo sbalzo di temperatura.

reazione d'un incastro resta individuata da due soli parametri: la reazione finita ortogonale all'asse ed il momento d'incastro (fig. 38 b).

Le equazione della statica si riducono d'altra parte a due sole indipendenti, come si prova immediatamente osservando che l'equilibrio alla traslazione secondo l'asse z è sempre soddisfatto, essendo nulle le componenti delle forze secondo tale direzione.

Ne deriva che per le travi ora in studio la determinazione statica richiede non più tre, ma due condizioni di vincolo; diviene superfluo un vincolo che impedisca lo spostamento assiale, in quanto non esistono forze atte a provocare un tale spostamento.

L'imperfezione di un appoggio è caratterizzata dal cedimento complessivo:

$$(33) \quad \eta_c + \varepsilon C,$$

già espresso dalla (2), essendo sempre η_c il cedimento anelastico, C la reazione dell'appoggio, ε il cedimento che provoca una reazione $C=1$, εC il cedimento elastico. Similmente l'imperfezione di un incastro è caratterizzata dalla rotazione complessiva:

$$(34) \quad \vartheta_c + \mu M,$$

già espressa dalla (3), con ϑ_c rotazione anelastica, μ rotazione provocata da un momento d'incastro unitario, μM cedimento angolare elastico.

I cedimenti anelastici dei vincoli η_c e ϑ_c s'intenderanno sempre assegnati e dell'ordine di grandezza delle deformazioni elastiche.

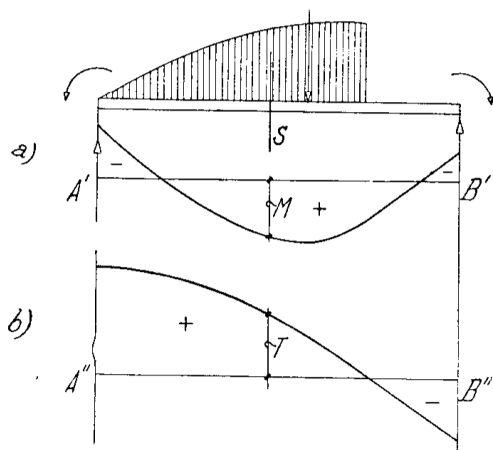


Fig. 40

nella sezione, si ottiene il *diagramma dei momenti flettenti* (fig. 40 a). Si-

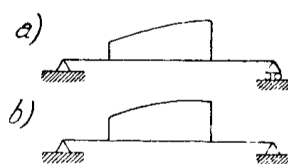


Fig. 39

14 — Diagrammi del momento flettente e del taglio.

Portando sulla verticale di ogni sezione S della trave, a partire da una fondamentale rettilinea $A'B'$, un segmento che, in scala opportuna, misuri il momento flettente M nella sezione, si ottiene il *diagramma dei momenti flettenti* (fig. 40 a). Si-

milmente, portando a partire da una fondamentale $A''B''$ un segmento che, in scala opportuna, misuri il taglio nella sezione, si ottiene il *diagramma del taglio* (fig. 40 b). È d'uso portare i momenti positivi al disotto, i tagli positivi al disopra della fondamentale di riferimento.
